

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SSP-RK43 VE DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT İLE İKİ FARKLI TİPTEKİ
MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GÜLER GÜRÜZ

AĞUSTOS 2020

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SSP-RK43 VE DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT İLE İKİ FARKLI TİPTEKİ
MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Güler GÜRÜZ

DANIŞMAN: Doç. Dr. Ali BAŞHAN

ZONGULDAK

Ağustos 2020

KABUL:

Güler GÜRÜZ tarafından hazırlanan “SSP-RK43 Ve Diferansiyel Kuadratur Metot İle İki Farklı Tipteki Modifiye Edilmiş Kawahara Denkleminin Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 27 /08 /2020

Danışman: Doç. Dr. Ali BAŞHAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK

Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./..../20....

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Güler GÜRÜZ

ÖZET

Yüksek Lisans tezi

SSP-RK43 VE DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT İLE İKİ FARKLI TİPTEKİ MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Güler GÜRÜZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ali BAŞHAN

Ağustos 2020, 49 sayfa

Bu tezde ilk olarak diferansiyel kuadratur metot ile ilgili temel kavramlar verildi. Modifiye edilmiş kübik B-spline bazlı diferansiyel kuadratur metot yardımıyla ağırlık katsayıları elde edildi. Ardından Kawahara denklemi ve modifiye edilmiş Kawahara denklemi hakkında bilgi verildi. Sonrasında iki farklı tipteki modifiye edilmiş Kawahara denkleminin SSP-RK43 ile çözüm algoritması verildi. Son olarak iki farklı tipteki modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümleri elde edildi ve hata normları ile korunum sabitleri hesaplandı. Sonuç bölümünde tezde elde edilen veriler tartışıldı.

Anahtar Kelimeler: Modifiye edilmiş Kawahara denklemi, B-spline fonksiyonlar, diferansiyel kuadratur metot, SSP-RK43

Bilim kodu: 403.06.00.



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE TWO DIFFERENT TYPES OF MODIFIED KAWAHARA EQUATION VIA SSP-RK43 AND DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Güler GÜRÜZ

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ali BAŞHAN

August 2020, 49 pages

In this thesis, firstly fundamental concepts about differential quadrature method are given. By using modified cubic B-spline based differential quadrature method, the weighting coefficients are obtained. Then, some information about Kawahara equation and modified Kawahara equation is given. After that, the solution algorithm related to two different forms of the modified Kawahara equation with SSP-RK43 is given. Lastly, numerical solutions of the two different forms of the modified Kawahara equation are obtained and the error norms and invariants are calculated. In the conclusion section, the obtained results are discussed.

Keywords: Modified Kawahara equation, B-spline function, differential quadrature method, SSP-RK43

Science code: 403.06.00.



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimde alışmam süresince bana her türlü desteği sağlayan, sabır ve özveriyle bütün sorularımı cevaplayan, tecrübeleriyle bana yol gösteren sayın hocam Do. Dr. Ali BAŞHAN'a, sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Beni bu güne kadar yetiştiren her türlü ihtiyacımı gideren sevgiyle kucaklayan çok değerli annem Ayőe YILDIZ ve babam Ramazan YILDIZ'a, bir arkadaő gibi birlikte büyüdüğümüz ablamlar ve kız kardeőim aynı zamanda meslektaőım Fatma YILDIZ'a, yüksek lisans yapmama ilham kaynağı olan sevgili eőim, hayat kaynağım Serdar GÜRÜZ'e teőekkürü borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1.1 Diferansiyel Kuadratur Metot (DKM)	1
1.1.2 Spline Fonksiyonlar	2
1.1.3 B-spline Fonksiyonlar	3
BÖLÜM 2 DİFERANSİYEL QUADRATURE METOT	5
2.1 B-SPLINE DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT	5
2.1.1 Kübik B-spline Fonksiyonlar	5
2.1.2 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline	6
2.1.3 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline ile Birinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi	7
2.1.4 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline Fonksiyonları ile İkinci Mertebeden Türeve ait Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi	17
2.1.5 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline Fonksiyonları ile Üçüncü ve Beşinci Mertebeden Türeve ait Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi	18
BÖLÜM 3 KAWAHARA VE MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ	19

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.1 KAWAHARA DENKLEMİ.....	19
3.2 MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ	19
3.3 ZAMANA BAĞLI NÜMERİK İNTEGRASYON.....	21
3.3.1 SSP-RK43	21
BÖLÜM 4 NÜMERİK HESAPLAMALAR	23
4.1 TİP1: TEK SOLİTON DALGA.....	23
4.2 TİP2 TEK SOLİTON DALGA.....	28
4.2.1 Tip2 Pozitif Genlikli Tek Soliton Dalga.....	28
4.2.2 Tip2 Negatif Genlikli Tek Soliton Dalga.....	29
BÖLÜM 5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	37
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	49

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 0. dereceden B-spline fonksiyonu.....	3
Şekil 1.2 Birinci dereceden spline fonksiyon grafiği	4
Şekil 2.1 $xm, xm + 1$ aralığındaki kübik B-spline şekil fonksiyonu verilmiştir.	6
Şekil 4.1 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ aralığında $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar zaman aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.....	26
Şekil 4.2 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar nümerik çözüm grafikleri.	27
Şekil 4.3 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için $t = 25$ 'de elde edilen hata grafiği.....	27
Şekil 4.4 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan pozitif genlikli dalganın nümerik çözüm grafikleri.	32
Şekil 4.5 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan pozitif genlik için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.....	33
Şekil 4.6 Tip2 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ pozitif genlikli dalganın hata norm grafiği.	33
Şekil 4.7 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ aralığında konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan negatif genlikli dalganın nümerik çözüm grafikleri.....	34
Şekil 4.8 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan negatif genlik için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.....	35
Şekil 4.9 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ negatif genlikli dalganın hata norm grafiği.	35



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Kübik B-spline fonksiyonlarının ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri .6	
Çizelge 4.1 Tip1. $\Delta t = 0.01$ ve $N = 81$ değerleri için tek soliton dalganın konum ve genliği.24	
Çizelge 4.2 Tip1. Tek soliton dalganın farklı Δt ve N için nümerik çözümleri.25	
Çizelge 4.3 Tip2. Pozitif genlikli tek soliton dalganın $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için konum ve genlik değerleri.....29	
Çizelge 4.4 Tip2. Negatif genlikli tek soliton dalganın $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için konum ve genlik değerleri.30	
Çizelge 4.5 Tip2. Tek soliton dalganın pozitif ve negatif genlik için farklı Δt ve N değerleri için nümerik çözümleri.30	



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Δt : Zaman adım uzunluğu

N : Düğüm nokta sayısı

$a_{ij}^{(r)}$: Ağırlık kat sayısı

KISALTMALAR

DKM : Diferansiyel Kuadratur Metot

SSP-RK43 : Strong Stability Preserving Runge Kutta43



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanacağımız temel kavramlar ile ilgili bilgi verilmiştir. Kullanacağımız metot olan diferansiyel kuadratur metot hakkında genel bilgiler verilmiştir. Literatürde bu metot ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

1.1.1 Diferansiyel Kuadratur Metot (DKM)

Diferansiyel Kuadratur Metot (DKM) ilk defa Bellman ve Casti [1] tarafından kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünü elde etmek için 1972'de ortaya atılmıştır. DKM, Sonlu Elemanlar Metot (SEM) ve Sonlu Farklar Metot (SFM) dan farklı olarak noktasal türev değerlerine bir yaklaşımı olarak sunulmuştur. DKM, $[a, b]$ aralığında tanımlanan düzgün bir fonksiyonun belirlenen düğüm noktalarındaki türev değerine o noktalarda fonksiyonun aldığı değerlerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilme esasına dayanır. $[a, b]$ aralığı N tane düğüm noktası belirlenecek şekilde parçalanır. Yani $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N = b$ şeklinde düğüm noktaları belirlenir. Fonksiyonun belirlenen düğüm noktalarında x değişkenine göre r . mertebeden kısmi türevi, çözüm bölgesinde yer alan N tane düğüm noktasındaki fonksiyon değerlerinin lineer toplamı şeklinde gösterilir

$$\left. \frac{d^{(r)}U}{dx^{(r)}} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(r)} U(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad r = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (1.1)$$

(1.1) denkleminde $a_{i,j}^{(r)}$ r . mertebeden türevin x_j noktasına ait ağırlık katsayısını ifade eder.

(1.1) denkleminde ağırlık katsayılarının tespiti DKM için temel adımdır. Çözüm bölgesi için elde etmemiz gereken önemli hususlardan biri ağırlık katsayılarını bulmaktır. Literatürde ağırlık katsayılarının bulunması için birbirinden farklı baz fonksiyonları kullanılmıştır.

Örneğin, B-spline fonksiyonlar [2-17], kosinüs fonksiyonu [18-22], radial baz fonksiyonu [24-32], Harmonik fonksiyonlar [32-36], Hermite baz fonksiyonu [37-39], Lagrange interpolasyon polinomları [41-43], modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlar [44-66] kullanılarak ağırlık katsayıları elde edilmiştir.

1.1.2 Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonlar ilk olarak Schoenberg [67] tarafından 1946'da sunulmuştur. Spline fonksiyonlar teknolojik gelişmelerin yaşanmasıyla birçok alanda kullanımı artmış ve önem kazanmıştır. Newton ve Lagrange polinomlarının dereceleri arttıkça bu tür polinomlarla yapılan işlemlerde iş yükü artar ve çözüm zorlaşır. Spline fonksiyonlar ise, tam da bu noktada işlemleri daha kolay yapabilmek için birinci, ikinci, üçüncü ve n. dereceden fonksiyon yaklaşımının yapıldığı bir yöntem olarak karşımıza çıkar. Spline fonksiyon verilen aralığın birbirinden farklı düğüm noktaları ile sonlu sayıda alt aralığa parçalanarak uygun polinom bulma fikrine dayanır. Spline fonksiyonlar parçalı polinom fonksiyonlarıdır [68].

Spline fonksiyonların aşağıda verilen iki şartı sağlaması gerekir;

Reel sayıların monoton artan dizisi $-\infty = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N = \infty$ olacak şekilde $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ 'e bağlı ve reel eksen üzerinde tanımlı m. dereceden bir $s(x)$ spline fonksiyonu;

1. $s(x)$, her bir (x_i, x_{i+1}) $i = 0, \dots, n$ m. veya daha küçük dereceden bir polinomdur. ($x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty$)
2. $s(x)$, fonksiyonu ve $1, 2, 3, \dots, (m-1)$. mertebeden türevleri var olan her aralıkta ve x_1, \dots, x_n düğüm noktalarında tanımlıdır [69].

Spline fonksiyonun birkaç özelliği daha vardır ve şu şekilde sıralanır,

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar elektronik ortamlarda işlenmesi, hesaplanması ve depolama açısından uygun fonksiyonlardır.

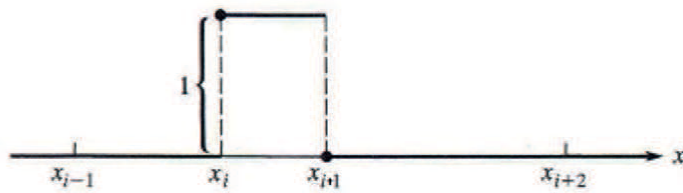
- Spline fonksiyonlar dereceleri küçüldükçe esnekliği artar ve polinomlardaki gibi salınım sergilemezler.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılığın araştırılması kolaydır [69,70].

1.1.3 B-spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonlar için baz olarak kullanılabilen fonksiyonlar B-spline fonksiyonlardır. B-spline fonksiyonlar nümerik hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır [71]. B-spline fonksiyonların temel fonksiyonu diyebileceğimiz 0. dereceden B-spline fonksiyonu;

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [72]. Şekil 1’de 0. dereceden B-spline fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

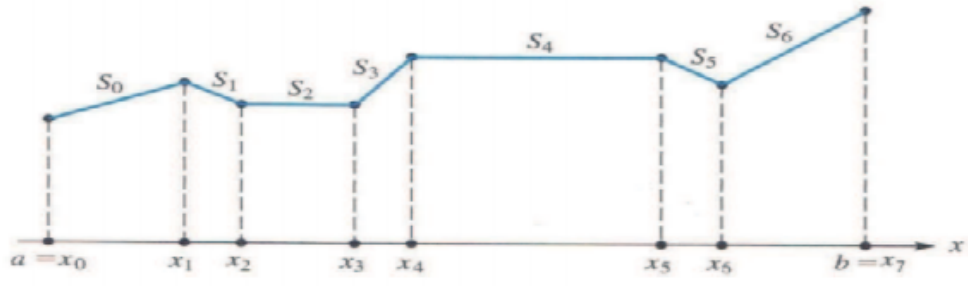


Şekil 1.1 0. dereceden B-spline fonksiyonu

Yukarıdaki verilene göre alt aralığa ait kısımda $B_i^0(x_i) = 1$ ve diğer bölgelerde 0 yani $B_i^0(x_{i+1}) = 0$ 'dır. Aynı zamanda 0. dereceden spline fonksiyonuna adım fonksiyonu denir. 1. dereceden spline fonksiyonu da aşağıdaki şekilde gösterilebilir [73].

Daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonların elde edilmesi için 0. Dereceden B-spline fonksiyonu kullanılarak $k = 1, 2, \dots$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere aşağıda verilen formül yardımıyla elde edilir [71,73]:

$$B_i^k(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1}-x}{x_{i+k+1}-x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x).$$



Şekil 1.2 Birinci dereceden spline fonksiyon grafiği



BÖLÜM 2

DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT

2.1 B-SPLINE DİFERANSİYEL KUADRATUR METOT

Bu kısımda kübik B-spline fonksiyonlar tanıtıldıktan sonra modifikasyonu verilerek bu tezde kullanılan modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlar tanıtılacaktır.

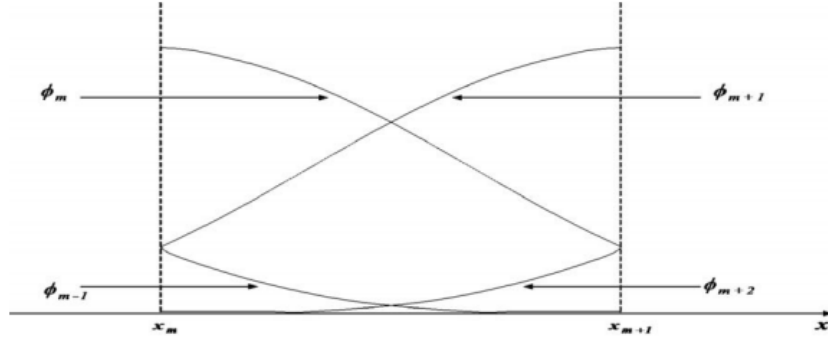
2.1.1 Kübik B-spline Fonksiyonlar

Bu bölümde kübik B-spline fonksiyonu hakkında bilgi verilecektir. $[a, b]$ aralığını N tane düğüm noktası ile $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N = b$ şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara ayırılım. Kübik B-spline baz fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında tanımlanmış $\{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{N+1}\}$ şeklindedir.

Kübik B-spline fonksiyonlar

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^3 - 4(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^3 - 4(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [74].



Şekil 2.1 $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kübik B-spline şekil fonksiyonu verilmiştir.

Çizelge 2.1 Kübik B-spline fonksiyonlarının ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
Q_m	0	1	4	1	0
Q'_m	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
Q''_m	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h}$	$\frac{6}{h^2}$	0

2.1.2 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline

Modifiye edilmiş kübik B-spline kullanılması, denklem sisteminin köşegen dominant matris olması sonucunu doğurur. Kübik B-spline fonksiyonların modifikasyonu farklı şekillerde yapılabilir. Mittal ve Jain [75] düğüm noktalarında kübik B-spline fonksiyonları aşağıdaki formda modifiye ederek vermiştir:

$$\phi_1(x) = Q_1(x) + 2Q_0(x)$$

$$\phi_2(x) = Q_2(x) - Q_0(x)$$

$$\phi_k(x) = Q_k(x), \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \text{ için}$$

$$\phi_{N-1}(x) = Q_{N-1}(x) - Q_{N+1}(x)$$

$$\phi_N(x) = Q_N(x) + 2Q_{N+1}(x). \quad (2.1)$$

Burada ϕ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) fonksiyonları $[a, b]$ aralığındaki baz fonksiyonları gösterir. Bu modifikasyon bazı avantajlar sağlar öyle ki; daha kararlı sonuçlar verir ve kübik B-spline DQM [3] gibi ağırlık katsayılarını elde etmek için ek denklemlere ihtiyaç duymaz.

2.1.3 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline ile Birinci Türev Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

(1.1) eşitliğinde verilen temel diferansiyel kuadratur metodunda modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonun test fonksiyonu olarak kullanılmasıyla ağırlık katsayıları elde edilecektir. (1.1) eşitliğinde $r = 1$ olarak seçilirse birinci türev ağırlık katsayıları elde edilen sistemin çözülmesiyle tespit edilir.

(1.1) eşitliğinde $r = 1$ değeri için

$$\phi'_k(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \phi_k(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) denkleminde birinci düğüm noktası ($i = 1$) x_1 için ağırlık katsayılarını

ϕ_1 test fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1(x_1)}{dx} &= \sum_{j=1}^N a_{1j}^{(1)} \phi_1(x_j) = a_{1,1}^{(1)} \phi_1(x_1) + a_{1,2}^{(1)} \phi_1(x_2) + a_{1,3}^{(1)} \phi_1(x_3) + a_{1,4}^{(1)} \phi_1(x_4) + \dots \\ &+ a_{1,N-1}^{(1)} \phi_1(x_{N-1}) + a_{1,N}^{(1)} \phi_1(x_N) \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir.

Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonunun değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Q'_1(x_1) + 2Q'_0(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}[Q_1(x_1) + 2Q_0(x_1)] + a_{1,2}^{(1)}[Q_1(x_2) + 2Q_0(x_2)] + a_{1,3}^{(1)}[Q_1(x_3) + \\ &2Q_0(x_3)] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)}[Q_1(x_{N-1}) + 2Q_0(x_{N-1})] + \dots + a_{1,N}^{(1)}[Q_1(x_N) + 2Q_0(x_N)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. Bu eşitlikte verilen fonksiyon değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_{1,1}^{(1)}[4 + 2.1] + a_{1,2}^{(1)}[1 + 2.0] + a_{1,3}^{(1)}[0 + 2.0] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)}[0 + 2.0] + \dots + a_{1,N}^{(1)}[0 + 2.0] = \\ 0 + 2. \left(\frac{-3}{h} \right) = -\frac{6}{h} \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve düzenlersek

$$6 a_{1,1}^{(1)} + a_{1,2}^{(1)} = -\frac{6}{h} \quad (2.6)$$

elde edilir.

$k = 2$ için sıradaki test fonksiyonu ϕ_2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_2(x_1)}{dx} &= \sum_{j=1}^N a_{1,j} \phi_2(x_j) = \\ &a_{1,1}^{(1)} \phi_2(x_1) + a_{1,2}^{(1)} \phi_2(x_2) + a_{1,3}^{(1)} \phi_2(x_3) + a_{1,4}^{(1)} \phi_2(x_4) + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} \phi_2(x_{N-1}) + a_{1,N}^{(1)} \phi_2(x_N) \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Q_2'(x_1) - Q_0'(x_1) &= a_{1,1}^{(1)} [Q_2(x_1) - Q_0(x_1)] + a_{1,2}^{(1)} [Q_2(x_2) - Q_0(x_2)] + a_{1,3}^{(1)} [Q_2(x_3) - \\ &Q_0(x_3)] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} [Q_2(x_{N-1}) - Q_0(x_{N-1})] + \dots + a_{1,N}^{(1)} [Q_2(x_N) - Q_0(x_N)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitlikte Çizelge 2.1'deki fonksiyon değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} &a_{1,1}^{(1)} [1 - 1] + a_{1,2}^{(1)} [4 - 0] + a_{1,3}^{(1)} [1 - 0] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} [0 - 0] + \dots + a_{1,N}^{(1)} [0 - 0] \\ &= \frac{3}{h} - \left(-\frac{3}{h}\right) = \frac{6}{h} \end{aligned}$$

Düzenlediğimizde,

$$4 a_{1,2}^{(1)} + a_{1,3}^{(1)} = \frac{6}{h} \quad (2.9)$$

elde edilir.

$k = 3$ için elde edilen sıradaki test fonksiyonu ϕ_3 ,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_3(x_1)}{dx} &= \sum_{j=1}^N a_{1,j}^{(1)} \phi_3(x_j) = \\ &a_{1,1}^{(1)} \phi_3(x_1) + a_{1,2}^{(1)} \phi_3(x_2) + a_{1,3}^{(1)} \phi_3(x_3) + a_{1,4}^{(1)} \phi_3(x_4) + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} \phi_3(x_{N-1}) + a_{1,N}^{(1)} \phi_3(x_N) \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonunu yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Q_3'(x_1) &= a_{1,1}^{(1)} [Q_3(x_1)] + a_{1,2}^{(1)} [Q_3(x_2)] + a_{1,3}^{(1)} [Q_3(x_3)] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} [Q_3(x_{N-1})] + \\ &a_{1,N}^{(1)} [Q_3(x_N)] \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. Çizelge 2.1 deki fonksiyon değerlerini yerine yazarsak,

$$a_{1,2}^{(1)} + 4 a_{1,3}^{(1)} + a_{1,4}^{(1)} = 0 \quad (2.12)$$

elde edilir.

$k = 4$ için elde edilen sırasıyla test fonksiyonu ϕ_4 ,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_4(x_1)}{dx} &= \sum_{j=1}^N a_{1,j}^{(1)} \phi_4(x_j) = a_{1,1}^{(1)} \phi_4(x_1) + a_{1,2}^{(1)} \phi_4(x_2) + a_{1,3}^{(1)} \phi_4(x_3) + \dots + a_{1,N-1}^{(1)} \phi_4(x_{N-1}) + \\ &a_{1,N}^{(1)} \phi_4(x_N) \end{aligned} \quad (2.13)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \phi'_4(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}[Q_4(x_1)] + a_{1,2}^{(1)}[Q_4(x_2)] + a_{1,3}^{(1)}[Q_4(x_3)] + \dots + a_{1,N-1}^{(1)}[Q_4(x_{N-1})] + \\ &a_{1,N}^{(1)}[Q_4(x_N)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

eşitliği elde edilir. Çizelge 2.1 deki fonksiyon değerlerini yerine yazarsak,

$$0 \cdot a_{1,1}^{(1)} + 0 \cdot a_{1,2}^{(1)} + 1 \cdot a_{1,3}^{(1)} + \dots + 0 \cdot a_{1,N-1}^{(1)} + 0 \cdot a_{1,N}^{(1)} = 0 \text{ elde edilir.} \quad (2.15)$$

$k = N - 1$ için

$$\begin{aligned} \phi'_{N-1}(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}\phi_{N-1}(x_1) + a_{1,2}^{(1)}\phi_{N-1}(x_2) + a_{1,3}^{(1)}\phi_{N-1}(x_3) + \dots + a_{1,N-2}^{(1)}\phi_{N-1}(x_{N-2}) + \\ &a_{1,N-1}^{(1)}\phi_{N-1}(x_{N-1}) + a_{1,N}^{(1)}\phi_{N-1}(x_N) \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Q'_{N-1}(x_1) - Q'_{N+1}(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}[Q_{N-1}(x_1) - Q_{N+1}(x_1)] + a_{1,2}^{(1)}[Q_{N-1}(x_2) - Q_{N+1}(x_2)] + \\ &a_{1,3}^{(1)}[Q_{N-1}(x_3) - Q_{N+1}(x_3)] + \dots + a_{1,N-2}^{(1)}[Q_{N-1}(x_{N-2}) - Q_{N+1}(x_{N-2})] + \\ &a_{1,N-1}^{(1)}[Q_{N-1}(x_{N-1}) - Q_{N+1}(x_{N-1})] + a_{1,N}^{(1)}[Q_{N-1}(x_N) - Q_{N+1}(x_N)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitlik elde edilir. Çizelge 2.1 deki fonksiyon değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &a_{1,1}^{(1)}[0 - 0] + a_{1,2}^{(1)}[0 - 0] + \dots + a_{1,N-2}^{(1)}[1-0] + a_{1,N-1}^{(1)}[4 - 0] + a_{1,N}^{(1)}[1 - 1] \\ &= 0 \text{ düzenlersek,} \end{aligned}$$

$$a_{1,N-2}^{(1)} + 4 a_{1,N-1}^{(1)} = 0 \quad (2.18)$$

eşitliği elde edilir.

$k = N$ için

$$\begin{aligned} \phi'_N(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}\phi_N(x_1) + a_{1,2}^{(1)}\phi_N(x_2) + \dots + a_{1,N-2}^{(1)}\phi_N(x_{N-2}) + a_{1,N-1}^{(1)}\phi_N(x_{N-1}) + \\ &a_{1,N}^{(1)}\phi_N(x_N) \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} Q'_N(x_1) + 2Q'_{N+1}(x_1) &= a_{1,1}^{(1)}[Q_N(x_1) + 2Q_{N+1}(x_1)] + a_{1,2}^{(1)}[Q_N(x_2) + 2Q_{N+1}(x_2)] + \dots + \\ &a_{1,N-2}^{(1)}[Q_N(x_{N-2}) + 2Q_{N+1}(x_{N-2})] + a_{1,N-1}^{(1)}[Q_N(x_{N-1}) + 2Q_{N+1}(x_{N-1})] + a_{1,N}^{(1)}[Q_N(x_N) + \\ &2Q_{N+1}(x_N)] \end{aligned} \quad (2.20)$$

eşitlik elde edilir. Çizelge 2.1 deki fonksiyon değerlerini yerine yazarsak,

$$a_{1,1}^{(1)}[0 + 2.0] + a_{1,2}^{(1)}[0 + 0.2] + \dots + a_{1,N-2}^{(1)}[1 + 2.0] + a_{1,N-1}^{(1)}[1 + 2.0] + a_{1,N}^{(1)}[4 + 2.1] = 0$$

elde edilir ve düzenlersek,

$$a_{1,N-1}^{(1)} + 6a_{1,N}^{(1)} = 0 \quad (2.21)$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen tüm denklemler birlikte yazılırsa aşağıdaki denklem sistem oluşur:

$$\begin{aligned} 6a_{1,1}^{(1)} + a_{1,2}^{(1)} &= -\frac{6}{h} \\ 4a_{1,2}^{(1)} + a_{1,3}^{(1)} &= \frac{6}{h} \\ a_{1,2}^{(1)} + 4a_{1,3}^{(1)} + a_{1,4}^{(1)} &= 0 \\ a_{1,3}^{(1)} + 4a_{1,4}^{(1)} + a_{1,5}^{(1)} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1,N-2}^{(1)} + 4a_{1,N-1}^{(1)} &= 0 \\ a_{1,N-1}^{(1)} + 6a_{1,N}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bu denklem sistemi matris formatında yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & 6 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(1)} \\ a_{1,2}^{(1)} \\ a_{1,3}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{1,N-1}^{(1)} \\ a_{1,N}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

elde edilir. Sistem x_1 düğüm noktası için Thomas algoritması ile çözümlenerek birinci türeve ait ağırlık katsayıları bulunur.

(1.1) denklemde ikinci düğüm noktası x_2 düğüm noktasına ait ağırlık katsayılarını yani $a_{2,j}$ ($i = 2, j = 1, 2, \dots, N$) elde etmek için sırası ile modifiye edilmiş kübik B-spline test fonksiyonları yazılır.

İlk test fonksiyonu \emptyset_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1(x_2)}{dx} &= \sum_{j=1}^N a_{2,j}^{(1)} \phi_1(x_j) = a_{2,1}^{(1)} \phi_2(x_1) + a_{2,2}^{(1)} \phi_2(x_2) + a_{2,3}^{(1)} \phi_2(x_3) + a_{2,4}^{(1)} \phi_2(x_4) + \\ &+ a_{2,N-1}^{(1)} \phi_2(x_{N-1}) + a_{2,N}^{(1)} \phi_2(x_N) \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q'_0(x_2) + 2Q'_1(x_2) = 6a_{2,1}^{(1)} + 1.a_{2,2}^{(1)} + 0.a_{2,3}^{(1)} + 0.a_{2,4}^{(1)} + \dots + 0.a_{2,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$6a_{2,1}^{(1)} + a_{2,2}^{(1)} = -\frac{3}{h} \quad (2.25)$$

elde edilir.

$k = 2$ için elde edilen test fonksiyonu test fonksiyonu ϕ_2 ,

$$\phi'_2(x_2) = a_{2,1}^{(1)} \phi_2(x_1) + a_{2,2}^{(1)} \phi_2(x_2) + a_{2,3}^{(1)} \phi_2(x_3) + \dots + a_{2,N}^{(1)} \phi_2(x_N) \quad (2.26)$$

Eşitliğinde modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

$$Q'_2(x_2) - Q'_0(x_2) = 0.a_{2,1}^{(1)} + 4.a_{2,2}^{(1)} + 1.a_{2,3}^{(1)} + \dots + a_{2,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$4a_{2,2}^{(1)} + a_{2,3}^{(1)} = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir.

$k = 3$ için elde edilen test fonksiyonu test fonksiyonu ϕ_3 ,

$$\phi'_3(x_2) = a_{2,1}^{(1)} \phi_3(x_1) + a_{2,2}^{(1)} \phi_3(x_2) + a_{2,3}^{(1)} \phi_3(x_3) + a_{2,4}^{(1)} \phi_3(x_4) \dots + a_{2,N}^{(1)} \phi_3(x_N) \quad (2.28)$$

Eşitliğinde modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\phi'_3(x_2) = 0.a_{2,1}^{(1)} + 1.a_{2,2}^{(1)} + 4.a_{2,3}^{(1)} + 1.a_{2,4}^{(1)} + \dots + 0.a_{2,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{2,2}^{(1)} + 4a_{2,3}^{(1)} + a_{2,4}^{(1)} = \frac{3}{h} \quad (2.29)$$

$k = 4$ için elde edilen test fonksiyonu test fonksiyonu ϕ_4 ,

$$\phi'_4(x_2) = a_{2,1}^{(1)} \phi_4(x_1) + a_{2,2}^{(1)} \phi_4(x_2) + a_{2,3}^{(1)} \phi_4(x_3) + a_{2,4}^{(1)} \phi_4(x_4) \dots + a_{2,N}^{(1)} \phi_4(x_N) \quad (2.30)$$

Eşitliğinde modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\phi'_4(x_2) = 0. a_{2,1}^{(1)} + 0. a_{2,2}^{(1)} + 1. a_{2,3}^{(1)} + 4. a_{2,4}^{(1)} + \dots + 0. a_{2,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{2,3}^{(1)} + 4a_{2,4}^{(1)} + a_{2,5}^{(1)} = 0 \quad (2.31)$$

elde edilir. Bundan sonraki $k=5,6,\dots N-3$ test fonksiyonları için benzer hesaplamalar yapıldı.

$k = N-2$ için

$$\begin{aligned} \phi'_{N-2}(x_2) = & a_{2,1}^{(1)}\phi_{N-2}(x_1) + a_{2,2}^{(1)}\phi_{N-2}(x_2) + a_{2,3}^{(1)}\phi_{N-2}(x_3) + a_{2,4}^{(1)}\phi_{N-2}(x_4) \dots + \\ & a_{2,N}^{(1)}\phi_{N-2}(x_N) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Eşitliğinde modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\phi'_{N-2}(x_2) = 0. a_{2,1}^{(1)} + 0. a_{2,2}^{(1)} + \dots + 1. a_{2,N-3}^{(1)} + 4. a_{2,N-2}^{(1)} + 1. a_{2,N-1}^{(1)} + 0. a_{2,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{2,N-3}^{(1)} + 4a_{2,N-2}^{(1)} + a_{2,N-1}^{(1)} = 0 \quad (2.33)$$

elde edilir.

$k = N-1$ için

$$\begin{aligned} \phi'_{N-1}(x_2) = & a_{2,1}^{(1)}\phi_{N-1}(x_1) + a_{2,2}^{(1)}\phi_{N-1}(x_2) + a_{2,3}^{(1)}\phi_{N-1}(x_3) + a_{2,4}^{(1)}\phi_{N-1}(x_4) \dots + \\ & a_{2,N}^{(1)}\phi_{N-1}(x_{N-1}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Eşitliğinde modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

$$Q'_{N-1}(x_2) - Q'_{N+1}(x_2) = 0. a_{2,1}^{(1)} + 0. a_{2,2}^{(1)}\phi_{N-1}(x_2) + 1. a_{2,2}^{(1)}\phi_{N-1}(x_2)$$

Buradan,

$$a_{2,N-2}^{(1)} + 4a_{2,N-1}^{(1)} = 0 \quad (2.35)$$

$k = N$ için

$$\begin{aligned} \phi'_N(x_2) = & a_{2,1}^{(1)}\phi_N(x_1) + a_{2,2}^{(1)}\phi_N(x_2) + a_{2,3}^{(1)}\phi_N(x_3) + a_{2,4}^{(1)}\phi_N(x_4) \dots + a_{2,N-1}^{(1)}\phi_N(x_{N-1}) + \\ & a_{2,N}^{(1)}\phi_N(x_N) \end{aligned} \quad (2.36)$$

elde edilir. Modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonları yerine yazılırsa

Buradan,

$$4a_{N,2}^{(1)} + 1a_{N,3}^{(1)} = 0 \quad (2.44)$$

eşitliği elde edilir.

$k = 3$ için

$$\phi_3'(x_N) = a_{N,1}^{(1)}\phi_3(x_1) + a_{N,2}^{(1)}\phi_3(x_2) + a_{N,3}^{(1)}\phi_3(x_3) + a_{N,4}^{(1)}\phi_3(x_4) \dots + a_{N,N}^{(1)}\phi_3(x_N) \quad (2.45)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q_3'(x_N) = 0 \cdot a_{N,1}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,2}^{(1)} + 4 \cdot a_{N,3}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,4}^{(1)} + \dots + 0 \cdot a_{N,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{N,2}^{(1)} + 4a_{N,3}^{(1)} + a_{N,4}^{(1)} = 0 \quad (2.46)$$

$k = 4$ için

$$\phi_4'(x_N) = a_{N,1}^{(1)}\phi_4(x_1) + a_{N,2}^{(1)}\phi_4(x_2) + a_{N,3}^{(1)}\phi_4(x_3) + a_{N,4}^{(1)}\phi_4(x_4) \dots + a_{N,N}^{(1)}\phi_4(x_N) \quad (2.47)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q_4'(x_N) = 1 \cdot a_{N,3}^{(1)} + 4 \cdot a_{N,4}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,5}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{N,3}^{(1)} + 4a_{N,4}^{(1)} + a_{N,5}^{(1)} = 0 \quad (2.48)$$

elde edilir. $k = 5, 6, \dots, N - 3$ test fonksiyonları için benzer hesaplamalar yapıldı.

$k = N - 2$ için

$$\begin{aligned} \phi_{N-2}'(x_N) = & \\ & a_{N,1}^{(1)}\phi_{N-2}(x_1) + \dots + a_{N,N-3}^{(1)}\phi_{N-2}(x_{N-3}) + a_{N,N-2}^{(1)}\phi_{N-2}(x_{N-2}) + a_{N,N-1}^{(1)}\phi_{N-2}(x_{N-1}) + \\ & a_{N,N}^{(1)}\phi_{N-2}(x_N) \end{aligned} \quad (2.49)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q_{N-2}'(x_N) = 0 \cdot a_{N,1}^{(1)} + \dots + 1 \cdot a_{N,N-3}^{(1)} + 4 \cdot a_{N,N-2}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,N-1}^{(1)} + 0 \cdot a_{N,N}^{(1)}$$

Buradan,

$$a_{N,N-3}^{(1)} + 4a_{N,N-2}^{(1)} + a_{N,N-1}^{(1)} = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir.

$k = N - 1$ için

$$\begin{aligned} \emptyset'_{N-1}(x_N) = \\ a_{N,1}^{(1)}\emptyset_{N-1}(x_1) + \dots + a_{N,N-2}^{(1)}\emptyset_{N-1}(x_{N-2}) + a_{N,N-1}^{(1)}\emptyset_{N-1}(x_{N-1}) + a_{N,N}^{(1)}\emptyset_{N-1}(x_N) \end{aligned} \quad (2.51)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q'_{N-1}(x_N) - Q'_{N+1}(x_N) = 0 \cdot a_{N,1}^{(1)} + \dots + 0 \cdot a_{N,N-3}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,N-2}^{(1)} + 4 \cdot a_{N,N-1}^{(1)} + 0 \cdot a_{N,N}^{(1)}$$

$$a_{N,N-2}^{(1)} + 4a_{N,N-1}^{(1)} = \left(-\frac{3}{h}\right) - \left(\frac{3}{h}\right)$$

$$a_{N,N-2}^{(1)} + 4a_{N,N-1}^{(1)} = \left(-\frac{6}{h}\right) \quad (2.52)$$

elde edilir.

Son düğüm noktası $k = N$ için

$$\emptyset'_N(x_N) = a_{N,1}^{(1)}\emptyset_N(x_1) + \dots + a_{N,N-2}^{(1)}\emptyset_N(x_{N-2}) + a_{N,N-1}^{(1)}\emptyset_N(x_{N-1}) + a_{N,N}^{(1)}\emptyset_N(x_N) \quad (2.53)$$

elde edilir. Bu eşitlikte modifiye edilmiş kübik baz fonksiyonlarını yerine yazarsak,

$$Q'_N(x_N) + 2Q'_{N+1}(x_N) = 0 \cdot a_{N,1}^{(1)} + \dots + 0 \cdot a_{N,N-2}^{(1)} + 1 \cdot a_{N,N-1}^{(1)} + 6 \cdot a_{N,N}^{(1)}$$

$$a_{N,N-1}^{(1)} + 6a_{N,N}^{(1)} = \frac{6}{h} \quad (2.54)$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen tüm denklemler birlikte yazılırsa aşağıdaki denklemler sistemi oluşur.

$$6a_{N,1}^{(1)} + a_{N,2}^{(1)} = 0$$

$$4a_{N,2}^{(1)} + a_{N,3}^{(1)} = 0$$

$$a_{N,2}^{(1)} + 4a_{N,3}^{(1)} + a_{N,4}^{(1)} = 0$$

$$a_{N,3}^{(1)} + 4a_{N,4}^{(1)} + a_{N,5}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & a_{N,N-3}^{(1)} + 4a_{N,N-2}^{(1)} + a_{N,N-1}^{(1)} = 0 \\ & a_{N,N-2}^{(1)} + 4a_{N,N-1}^{(1)} = \left(-\frac{6}{h}\right) \\ & a_{N,N-1}^{(1)} + 6a_{N,N}^{(1)} = \frac{6}{h} \end{aligned}$$

denklem sistemi matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & & & & & & \\ 0 & 4 & 1 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & 1 & 4 & 0 & \\ & & & & & 1 & 6 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{N,1}^{(1)} \\ a_{N,2}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{N,N-2}^{(1)} \\ a_{N,N-1}^{(1)} \\ a_{N,N}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{6}{h} \\ \frac{6}{h} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

elde edilir. Böylece x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$) düğüm noktalarıyla alakalı $a_{i,j}^{(1)}$ ağırlık katsayıları (2.23), (2.39), (2.55) denklem sistemlerinin Thomas algoritması ile çözülmesiyle elde edilir.

2.1.4 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline Fonksiyonları ile İkinci Mertebeden Türevelere ait Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

Bu yöntem ikinci mertebeden türevlere ait ağırlık katsayılarını elde ederken birinci mertebeden türevelere ait ağırlık katsayılarını kullanır. Shu'nun rekürens formülü ile $i = 1, 2, \dots, N$ ve $j = 1, 2, \dots, N$ için ikinci mertebeden türevelere ait ağırlık katsayıları aşağıdaki gibi belirlenir [76]:

$$a_{i,j}^{(2)} = 2a_{i,j}^{(1)} \left(a_{i,i}^{(1)} - \frac{1}{(x_i - x_j)} \right), \quad i \neq j \text{ için} \quad (2.56)$$

$$a_{i,i}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{i,j}^{(2)}. \quad (2.57)$$

2.1.5 Modifiye Edilmiş Kübik B-spline Fonksiyonları ile Üçüncü ve Beşinci Mertebeden Türeve ait Ağırlık Katsayılarının Tespit Edilmesi

Bu yöntem üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevlerin ağırlık katsayılarını elde etmek için birinci ikinci ve daha yüksek mertebeden türeve ait ağırlık katsayılarını kullanma esasına dayanır. Matris çarpımı yaklaşımı ile üçüncü ve daha yüksek mertebeden ağırlık katsayıları aşağıdaki gibi belirlenir [76]:

$$[M^{(t)}] = [M^{(1)}][M^{(t-1)}] = [M^{(t-1)}][M^{(1)}], \quad t = 2, 3, \dots, N - 1. \quad (2.55)$$

Burada $[M^{(t-1)}]$ ve $[M^{(t)}]$, t . ve $(t - 1)$. mertebeden türevlere ait ağırlık katsayı matrisleridir [76].



BÖLÜM 3

KAWAHARA VE MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ

3.1 KAWAHARA DENKLEMİ

Bu bölümde Kawahara denklemi hakkında bilgi verilmiştir. Lineer olmayan oluşum denklemlerinden biri olan Kawahara denklemi,

$$u_t + uu_x + u_{3x} - u_{5x} = 0, \quad (3.1)$$

şeklindedir. Bu denklem 1972'de tek dalga yayılmasını modellemek için Kawahara [77] tarafından verilmiştir. Kawahara tipi denklemlerin tam çözümlerini Jang [78] elde etmiştir. Kawahara denklemlerinin yeni solitary dalga çözümleri Wazwaz [79] tarafından verilmiştir. Kawahara tipi lineer olmayan denklemlerin kompakt çözümleri Wazwaz [80] tarafından elde edilmiştir. Kawahara denkleminin çözümlerini homotopi analiz yöntemi kullanılarak Abbasbandy [81] tarafından elde edilmiştir. Kawahara-KdV tipi denklemlerin kararlılığı Natali [82] tarafından incelenmiştir. Sirendaoreji [83] tarafından Kawahara denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Ye ve Mo [84] tarafından He'nin varyasyonel yöntemi ile Kawahara denkleminin çözümleri elde edilmiştir. Başhan [85] Kawahara denkleminin modifiye edilmiş kübik b-spline diferansiyel kuadratur metot ile sayısal çözümlerini elde etmiştir. Kawahara denklemi optimal homotopi analiz yöntemiyle Wang [86] tarafından çalışılmıştır..

3.2 MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ

Fiziksel olayların modellenmesinde rol oynayan lineer olmayan dalgalar, birçok fizik, matematik ve mühendislik alanlarında kullanılmaktadır [87]. Fiziksel modellemelerde kullanılan lineer olmayan denklemler aşağıda belirtilen modifiye edilmiş Kawahara denklemleridir. Bu tezde farklı iki tipte modifiye edilmiş Kawahara denklemi incelendi.

Tip 1.

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin ilk tipi,

$$u_t + ru^2u_x + pu_{3x} + qu_{5x} = 0, \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Burada r, p ve q sıfırdan farklı keyfi sabitlerdir.

Tip 2.

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin ikinci tipi,

$$u_t + u_x + ru^2u_x + pu_{3x} + qu_{5x} = 0, \quad (3.3)$$

şeklindedir.

Burada r, p ve q sıfırdan farklı keyfi sabitlerdir. Burada (3.3) eşitliğinin (3.2)'den farkı u 'nun x değişkenine bağlı birinci mertebeden kısmi türevi olan u_x fonksiyonudur.

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik ve analitik çözümleri farklı yöntemler yardımıyla bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Örneğin, Kawahara denklemleri için yeni tam çözümleri Sirendaoreji [83] tarafından sunulmuştur. Kurulay [88] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümleri için homotopi yöntemini kullanmıştır. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin tam çözümleri Elgarayhi [89] tarafından Mapping metot ile elde edilmiştir. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin soliter dalga tam çözümleri Wazwaz [90] tarafından verilmiştir. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin soliter dalga çözümleri Marinov ve Marinova [91] tarafından incelenmiştir. Ak ve Karakoç [92] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin analitik ve sayısal çözümleri ve yöntemin yakınsaklık analizi Polat vd. [93] tarafından sunulmuştur. Değişken katsayılı modifiye edilmiş Kawahara denklemleri için optik solitery çözümleri Bekir vd. [94] tarafından elde edilmiştir. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin çift periyodik çözümleri Zhang [95] tarafından ortaya atılmıştır. Sinüs- Cosinüs metot ile modifiye edilmiş Kawahara denklemlerinin periyodik ve solitery dalga çözümleri Yusufoglu vd. [96] tarafından verilmiştir. Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin tam çözümleri sembolik hesaplamalar ile Yusufoglu ve Bekir [97] tarafından sunulmuştur. Coclite ve Ruvo [98] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin yakınsaklık sonuçlarının incelemelerini yapmıştır. Ullah vd. [99] optimal homotopi asimptotik metot ile modifiye edilmiş Kawahara denkleminin çözümleri

elde edilmiştir. Jabbari ve Kheiri [100] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin yeni tam çözümlerini modifiye tanh-coth metot ile elde etmişlerdir. Biswas [101] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin matematiksel metot olan pertürbasyon teorisini kullanarak yaklaşık çözümlerini elde etmiştir. Elgarayhi ve Karawia [102] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin periyodik ve soliter dalga çözümlerini elde etmişlerdir. Lineer olmayan modifiye edilmiş Kawahara denklemlerinin sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta.$$

Başlangıç koşulu olarak,

$$U(x, 0) = f(x) \tag{3.4}$$

seçilecektir.

3.3 ZAMANA BAĞLI NÜMERİK İNTEGRASYON

Bu tezde (3.2) ve (3.3) eşitliği ile verilen lineer olmayan kısmi türevli modifiye edilmiş Kawahara denklemlerinin DQM yardımıyla ayrıştırılarak u 'nun zamana bağlı türev terimi yalnız bırakılır ve denklem adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Dördüncü mertebeden Runge-kutta (SSP-RK43) yöntemiyle modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümleri elde edilir. Sırasıyla aşağıda verilen Tip 1. ve Tip 2. Modifiye edilmiş Kawahara denklemleri adi diferansiyel denklemlerine dönüştürülür.

3.3.1 SSP-RK43

Strong stability-preserving Runge-Kutta (SSP-RK43) yöntemi 4. Mertebeden üç aşamalı bir nümerik integrasyonu (3.2) ve (3.3) denkleminde uygulanarak iki farklı tipteki modifiye edilmiş Kawahara denkleminin çözümleri elde edildi. SSP-RK43 algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir [103]:

$$u^{(1)} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(u^n)$$

$$u^{(2)} = u^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}(u^{(1)})$$

$$u^{(3)} = \frac{2}{3} u^n + \frac{1}{3} u^{(2)} + \frac{1}{6} \Delta t \mathcal{L}(u^{(2)})$$

$$u^{n+1} = u^{(3)} + \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{L}(u^{(3)}).$$

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin birinci tipini düzenlersek

$$u_t = -ru^2u_x - pu_{3x} - qu_{5x} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Yukarıda verilen (3.5) eşitliğinde birinci, üçüncü ve beşinci mertebeden diferansiyel kuadratur metot türev yaklaşımları yardımıyla modifiye edilmiş Kawahara denkleminin birinci tipi, aşağıda verilen adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü.

$$\frac{dU(x_i)}{dt} = -r(U(x_i, t))^2 \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(1)} U(x_j, t) - p \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(3)} U(x_j, t) - q \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(5)} U(x_j, t) \quad (3.6)$$

elde edilir.

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin ikinci tipini düzenlersek,

$$u_t = -u_x - ru^2u_x - pu_{3x} - qu_{5x} \quad (3.7)$$

buradan birinci, üçüncü ve beşinci mertebeden diferansiyel kuadratur metot türev yaklaşımları yardımıyla modifiye edilmiş Kawahara denkleminin ikinci tipi, aşağıda verilen adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü.

$$\begin{aligned} \frac{dU(x_i)}{dt} = & - \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(1)} U(x_j, t) - r(U(x_i, t))^2 \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(1)} U(x_j, t) - p \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(3)} U(x_j, t) - \\ & q \sum_{j=1}^N a_{i,j}^{(5)} U(x_j, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

BÖLÜM 4

NÜMERİK HESAPLAMALAR

Lineer olmayan kısmi türevli modifiye edilmiş Kawahara denklemlerinin modifiye edilmiş kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak DQM ile ayrıştırıldı. SSP-RK43 ile integre edilerek nümerik çözümleri elde edildi. Kullandığımız yöntem ile U' nun nümerik çözümlerinin analitik çözümlerine ne kadar yaklaştığını görmek için L_2 ve L_∞ hata normları kullanıldı. Sırasıyla L_2 ve L_∞ hata normları aşağıdaki gibi hesaplandı.

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j - U_j|^2},$$
$$L_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j - U_j| \quad (4.1)$$

Modifiye edilmiş Kawahara denkleminin en düşük iki korunum sabiti olan, kütle I_1 ve momentum I_2 aşağıdaki gibi hesaplandı [104].

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U \, dx, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} U^2 \, dx \quad (4.2)$$

elde edildi.

I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin bağıl değişim oranı;

$$I_i^\Delta = \frac{I_i^{\text{son}} - I_i^{\text{başlangıç}}}{I_i^{\text{başlangıç}}}, \quad i = 1, 2.$$

ile elde edildi. (4.3)

4.1 TİP1: TEK SOLİTON DALGA

(3.2) eşitliğinde verilen birinci tip modifiye edilmiş Kawahara denkleminin tek soliton dalga analitik çözümü aşağıda verilmiştir [91].

$$U(x, t) = -\frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5q}} \left(x + \frac{4p^2}{25q} t \right) \right] \quad (4.4)$$

$p, q < 0$ için (4.4) eşitliğinde başlangıç koşulunu $t = 0$ alınarak,

$$U(x, 0) = -\frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \right] \quad (4.5)$$

sınır koşulları ise

$$U(a, t) = 0, \quad U(b, t) = 0 \quad (4.6)$$

seçilerek hesaplama yapıldı.

(3.2) denkleminde $r = 1, p = 1, q = -1$ sabit değerleri ve $a = -30$ ve $b = 30$ alınarak çözüm bölgesi $-30 \leq x \leq 30$ olarak kullanıldı. Tek soliton dalga $t = 25$ e kadar çalıştırıldı. Negatif genliğe ve sabit hıza sahip olan dalganın sağa doğru hareket ettiği gözlemlendi. Soliton dalganın özelliğinden dolayı şekillerini, genliklerini ve hızlarını korudukları gözlemlendi. Tek soliton dalganın konuma bağlı $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadarki zamana ait genlik değerleri $\Delta t = 0.01$ ve $N = 81$ için nümerik ve tam çözümleri hesaplandı ve Çizelge 4.1 de verildi.

Çizelge 4. 1 Tip1. $\Delta t = 0.01$ ve $N = 81$ değerleri için tek soliton dalganın konum ve genliği.

t	Konum	Genlik	
		$U_{nüm}$	u_{tam}
0	0.00	-0.948683	-0.948683
5	0.75	-0.948634	-0.948565
10	1.15	-0.948279	-0.948209
15	2.25	-0.947688	-0.947617
20	3.00	-0.946895	-0.946788
25	3.75	-0.945814	-0.945725

Dalganın simülasyon başında $t = 0$ iken konumunun 0.00'da genlik değerleri hem nümerik olarak hem de analitik olarak -0.948683 olduğu görüldü. Simülasyon sonunda dalganın $t = 25$ de konumunun 3.75 de olduğu ve genlik değerinin nümerik olarak -0.945814 ve analitik genlik değerinin ise -0.945725 olduğu tespit edildi.

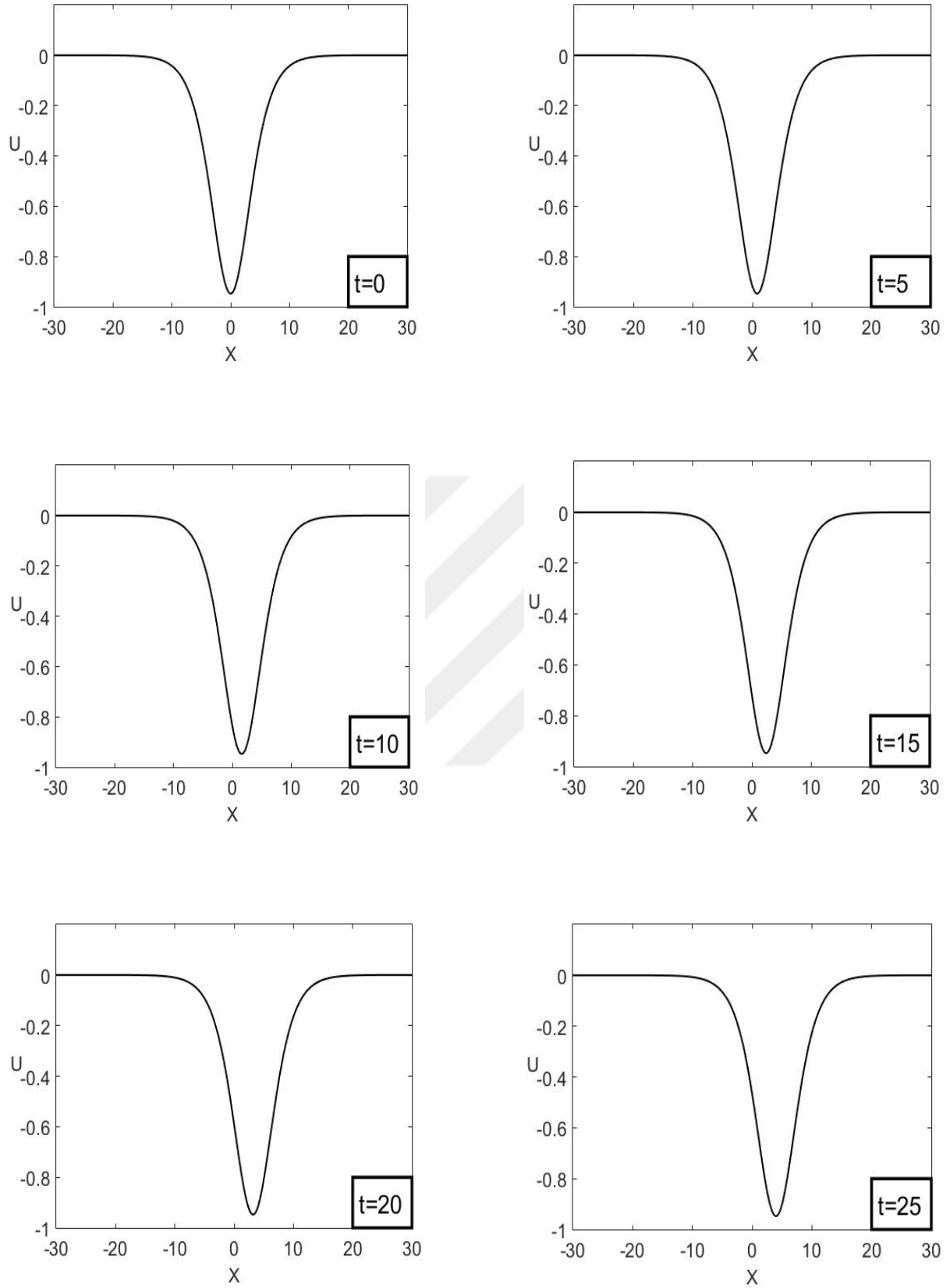
Çizelge 4.2'de N düğüm noktaları, Δt zaman adımı olmak üzere L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar zaman aralığında değerleri hesaplandı. Δt değeri küçültülüp düğüm nokta sayıları arttırıldığında L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin küçüldüğü ve daha hassas değerler elde edildiği I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin hemen hemen

sabit kaldığı gözlemlendi. Çizelge 4.2’de Tip1 denklemini için simülasyon sonu olan $t = 25$ zamanında $\Delta t = 0.01$ ve $N = 81$ alındığında L_2 hata normu 26.2239×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 12.5849×10^{-5} olarak elde edildi. Yine simülasyon sonunda $t = 25$ ’de $\Delta t = 0.001$ ve $N = 125$ alındığında L_2 hata normu 5.7439×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 2.4580×10^{-5} olarak elde edildi. Son olarak, $t = 25$ ’de $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 165$ alındığında L_2 hata normu 4.7051×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 2.4478×10^{-5} olarak elde edildi.

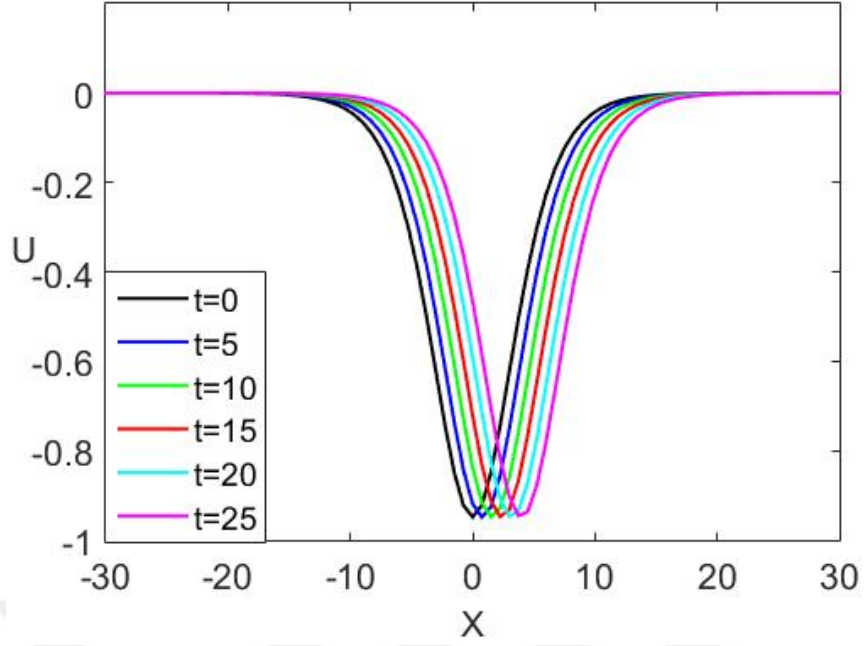
Çizelge 4.2 Tip1. Tek soliton dalğanın farklı Δt ve N için nümerik çözümleri.

N	Δt	t	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	I_1	I_2
81	0.01	0	-	-	-8.485255	2.683282
		5	19.9906	6.9014	-8.485271	2.683281
		10	19.7683	7.0862	-8.485263	2.683281
		15	21.9299	8.8908	-8.485268	2.683281
		20	27.2202	11.0924	-8.485253	2.683281
		25	26.2239	12.5849	-8.485258	2.683281
125	0.001	0	-	-	-8.485257	2.683281
		5	3.8584	1.2970	-8.485256	2.683280
		10	3.6608	1.0677	-8.485260	2.683281
		15	4.7185	1.9406	-8.485160	2.683281
		20	5.3778	2.1246	-8.485254	2.683281
		25	5.7439	2.4580	-8.485259	2.683283
165	0.0001	0	-	-	-8.485257	2.683281
		5	1.9975	0.6615	-8.485254	2.683281
		10	2.1847	0.8988	-8.485258	2.683279
		15	3.0447	1.4278	-8.485257	2.683280
		20	3.5102	1.7773	-8.485253	2.683280
		25	4.7051	2.4478	-8.485253	2.683280

Simülasyon sonunda $t = 25$ ’de (4.3) eşitliğinden $N = 81$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.01$ zaman adımına ait I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 3.5355×10^{-7} ve -3.7267×10^{-8} olarak hesaplandı. $N = 125$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.001$ zaman adımına ait I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 2.3570×10^{-7} ve 7.4535×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 165$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.0001$ zaman adımına ait I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla -4.7140×10^{-7} ve -3.7267×10^{-7} olarak hesaplandı.

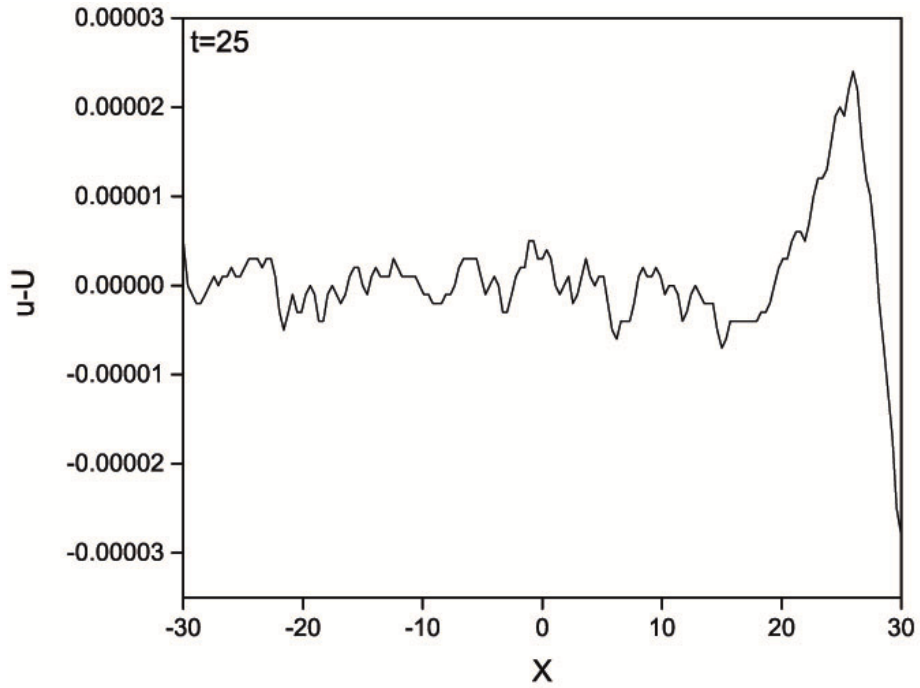


Şekil 4.1 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ aralığında $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar zaman aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.



Şekil 4.2 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar nümerik çözüm grafikleri.

Şekil 4.2 de Tip1 soliton dalga denkleminin $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar 5 birimlik zaman adımındaki grafikleri toplu olarak verildi. Bu grafikte dalganın genlik ve şekil bakımından korunduğu gözlemlendi.



Şekil 4.3 Tip1. Tek soliton dalganın $-30 \leq x \leq 30$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=165$ için $t = 25$ 'de elde edilen hata grafiği.

Şekil 4.3 de Tip1 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de ki hata normu grafiği verildi.

4.2 TİP2: TEK SOLİTON DALGA

Tek soliton dalga, (3.3) eşitliğinde verilen ikinci tip modifiye edilmiş Kawahara denkleminin analitik çözümü aşağıdaki gibidir [105].

$$U(x, t) = \pm \frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \left(x - \frac{25q-4p^2}{25q} t \right) \right] \quad (4.7)$$

$p, q < 0$ için (4.7) eşitliğinde başlangıç koşulunu $t = 0$ olarak alınırsa,

$$U(x, 0) = \pm \frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \right] \quad (4.8)$$

elde edildi ve sınır koşulları,

$$U(\alpha, t) = 0, \quad U(b, t) = 0 \quad (4.9)$$

olarak alındı.

4.2.1 Tip2 Pozitif Genlikli Tek Soliton Dalga

$$U(x, t) = \frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \left(x - \frac{25q-4p^2}{25q} t \right) \right] \quad (4.10)$$

$p, q < 0$ için (4.10) eşitliğinde başlangıç koşulunu $t = 0$ olarak alınırsa,

$$U(x, 0) = \frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \right] \quad (4.11)$$

elde edilir ve sınır koşulları,

$$U(\alpha, t) = 0, \quad U(b, t) = 0 \quad (4.12)$$

olarak alındı.

(3.3) denkleminde $r = 1$, $p = 1$, $q = -1$ sabit değerleri ve $a = -100$ ve $b = 100$ için çözüm bölgesi $-100 \leq x \leq 100$ olarak alındı. Tek soliton dalga simülasyonu $t = 25$ zamanına kadar çalıştırıldı. Tek soliton dalganın konuma bağlı simülasyonu $t = 0$ 'dan $t = 25$ zamanına kadar $\Delta t = 0.001$ ve $N = 521$ için pozitif genlik değerleri nümerik ve tam olarak hesaplandı ve Çizelge 4.3 verildi.

Çizelge 4.3 Tip2. Pozitif genlikli tek soliton dalganın $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için konum ve genlik değerleri

Pozitif Genlik			
t	Konum	$U_{nüm}$	u_{tam}
0	0.00	0.948683	0.948683
5	5.77	0.948640	0.948638
10	11.54	0.948504	0.948504
15	17.31	0.948279	0.948279
20	23.08	0.947964	0.947965
25	28.85	0.947561	0.947561

Dalganın simülasyon başında $t = 0$ iken konumunun 0.00'da pozitif genlik değerleri hem nümerik olarak hem de analitik olarak 0.948683 olduğu görüldü. Simülasyon sonunda $t = 25$ de konumunun 28.85 de nümerik ve analitik genlik değerlerinin 0.947561 olduğu görüldü. Tek soliton dalganın konuma bağlı simülasyonu $t = 0$ 'dan $t = 25$ zamanına kadar $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 521$ için pozitif genlik değerleri nümerik ve tam olarak Çizelge 4.3 verilmiştir.

4.2.2 Tip2 Negatif Genlikli Tek Soliton Dalga

$$U(x, t) = -\frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \left(x - \frac{25q-4p^2}{25q} t \right) \right] \quad (4.13)$$

$p, q < 0$ için (4.13) eşitliğinde başlangıç koşulunu $t = 0$ olarak alınırsa,

$$U(x, 0) = -\frac{3p}{\sqrt{-10rq}} \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{-5p}} \right] \quad (4.14)$$

elde edildi ve sınır koşulları,

$$U(a, t) = 0, \quad U(b, t) = 0 \quad (4.15)$$

olarak alındı. (3.3) denkleminde $r = 1, p = 1, q = -1$ sabit değerleri ve $a = -100$ ve $b = 100$ için çözüm bölgesi $-100 \leq x \leq 100$ olarak alındı. Tek soliton dalga simülasyonu $t = 25$ zamanına kadar çalıştırıldı. Tek soliton dalganın konuma bağlı simülasyonu $t = 0$ 'dan $t = 25$ zamanına kadar $\Delta t = 0.001$ ve $N = 521$ için negatif genlik nümerik ve tam çözümleri hesaplandı ve Çizelge 4.4 verildi

Çizelge 4.4 Tip2. Negatif genlikli tek soliton dalganın $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için konum ve genlik değerleri.

Negatif Genlik			
t	Konum	$U_{nüm}$	u_{tam}
0	0.00	-0.948683	-0.948683
5	5.77	-0.948640	-0.948638
10	11.54	-0.948504	-0.948504
15	17.31	-0.948279	-0.948279
20	23.08	-0.947964	-0.947965
25	28.85	-0.947561	-0.947561

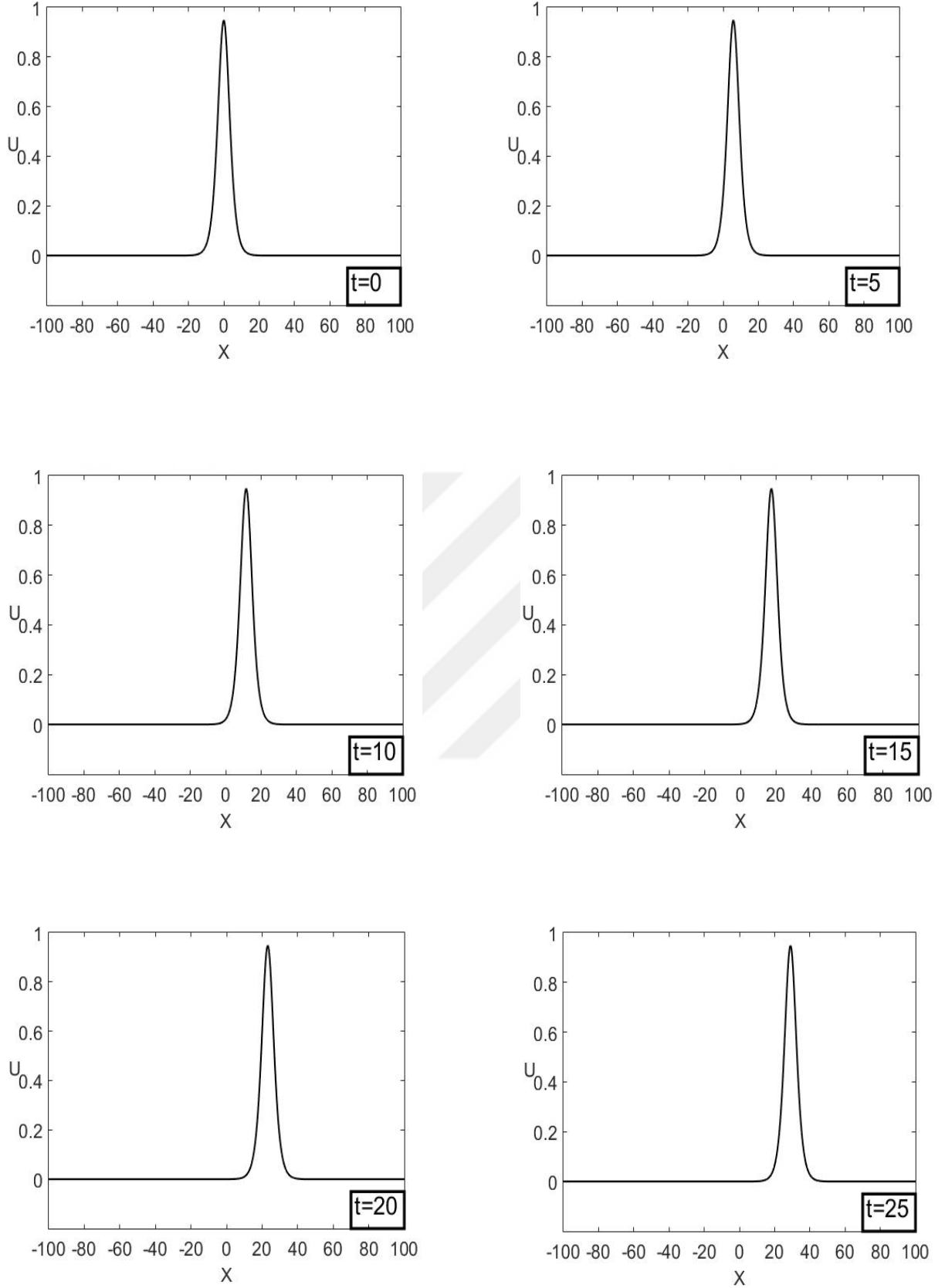
Dalganın simülasyon başında $t = 0$ iken konumunun 0.00'da negatif genlik değerleri hem nümerik olarak hem de analitik olarak -0.948683 olduğu görüldü. Simülasyon sonunda $t = 25$ de konumunun 28.85 de nümerik ve analitik genlik değerlerinin -0.947561 olduğu görüldü.

Çizelge 4.5 Tip2. Tek soliton dalganın pozitif ve negatif genlik için farklı Δt ve N değerleri için nümerik çözümleri.

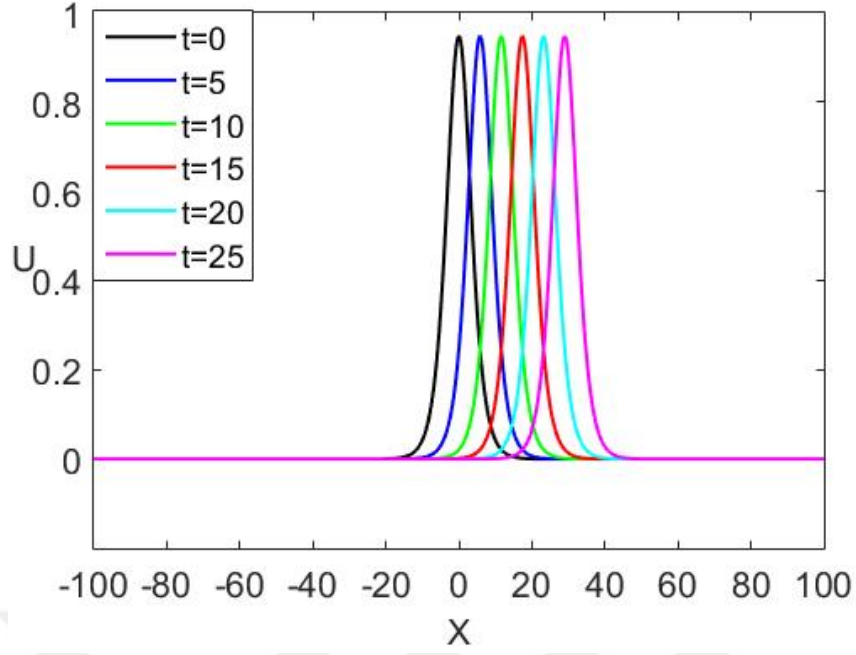
					Pozitif Genlik		Negatif Genlik	
N	Δt	t	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	I_1	I_2	I_1	I_2
266	0.01	0	-	-	8.485280	2.683282	-8.485280	2.683282
		5	21.3833	9.8836	8.485278	2.683282	-8.485278	2.683282
		10	37.4867	15.2522	8.485285	2.683282	-8.485285	2.683282
		15	51.8981	19.2400	8.485368	2.683282	-8.485268	2.683282
		20	65.2723	24.3778	8.485308	2.683281	-8.485208	2.683281
		25	78.1326	28.8161	8.485308	2.683282	-8.485208	2.683282
430	0.001	0	-	-	8.485281	2.683281	-8.485281	2.683281
		5	2.6836	1.2649	8.485280	2.683282	-8.485280	2.683282
		10	4.5464	1.7549	8.485280	2.683282	-8.485280	2.683282
		15	6.1893	2.2367	8.485273	2.683281	-8.485273	2.683281
		20	7.7184	2.8183	8.485288	2.683281	-8.485288	2.683281
		25	9.1428	3.4264	8.485291	2.683282	-8.485291	2.683282
521	0.0001	0	-	-	8.485280	2.683281	-8.485280	2.683281
		5	0.9981	0.4346	8.485282	2.683282	-8.485282	2.683282
		10	1.5457	0.5865	8.485282	2.683282	-8.485282	2.683282
		15	1.9974	0.7065	8.485282	2.683281	-8.485282	2.683281
		20	2.3538	0.8259	8.485279	2.683281	-8.485279	2.683281
		25	2.7069	0.9634	8.485284	2.683281	-8.485284	2.683281

Çizelge 4.5'de N düğüm nokta Δt zaman adımı olmak üzere L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadarki zaman aralığında değerleri hesaplandı. Δt değeri küçültülüp düğüm nokta sayıları arttırıldığında L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin küçüldüğü ve daha hassas değerler elde edildiği tespit edildi. I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin

hemen hemen sabit kaldığı gözlemlendi. Çizelge 4.5’de Tip2 denklemi için simülasyon sonu olan $t = 25$ zamanında $N = 266$ ve $\Delta t = 0.01$ alındığında L_2 hata normu 78.1326×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 28.8161×10^{-5} olarak elde edildi. Simülasyon sonu olan $t = 25$ ’de $N = 430$ ve $\Delta t = 0.001$ alındığında L_2 hata normu 9.1428×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 3.4264×10^{-5} olarak elde edildi. Son olarak $t = 25$ ’de $N = 521$ ve $\Delta t = 0.0001$ alındığında L_2 hata normu 2.7069×10^{-5} olarak ve L_∞ hata normu 0.9634×10^{-5} olarak elde edildi. Çizelge 4.5’de $N = 266$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.01$ zaman adımına ait pozitif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 3.2998×10^{-6} ve 0.00×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 430$ düğüm noktası $\Delta t = 0.001$ zaman adımına ait pozitif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 1.1785×10^{-6} ve 3.7267×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 521$ düğüm noktası $\Delta t = 0.0001$ zaman adımına ait pozitif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 4.7140×10^{-7} ve 0.00×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 266$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.01$ zaman adımına ait negatif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla -8.4852×10^{-6} ve 0.00×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 430$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.001$ zaman adımına ait negatif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 1.1785×10^{-6} ve 3.7267×10^{-7} olarak hesaplandı. $N = 521$ düğüm noktası ve $\Delta t = 0.0001$ zaman adımına ait negatif genlik için I_1^Δ ve I_2^Δ bağıl değişimleri sırasıyla 4.7140×10^{-7} ve 0.00×10^{-7} olarak hesaplandı.

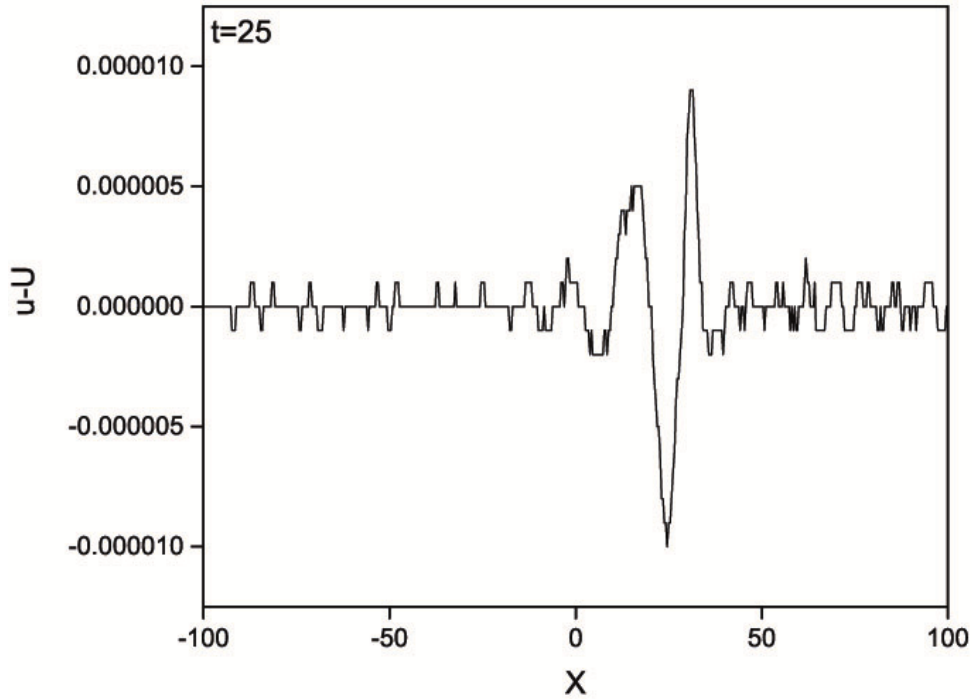


Şekil 4.4 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan pozitif genlikli dalganın nümerik çözüm grafikleri.



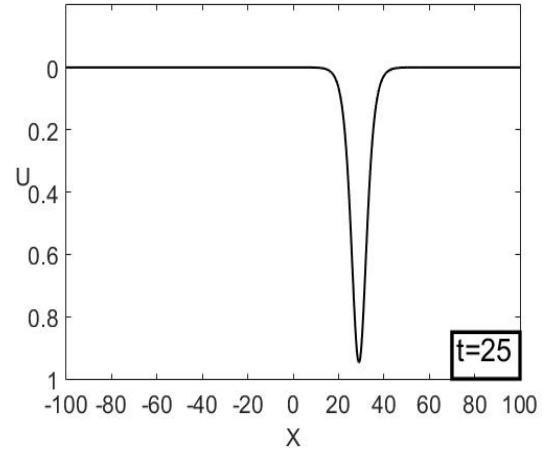
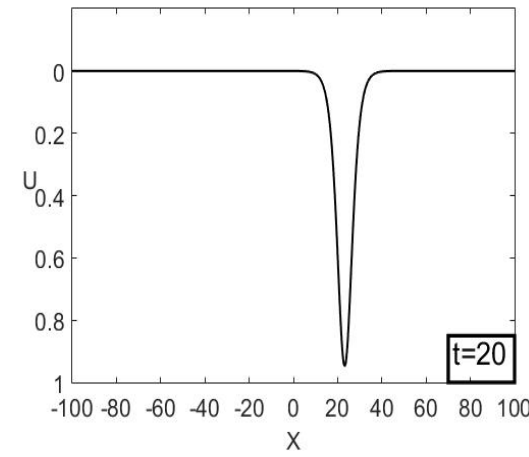
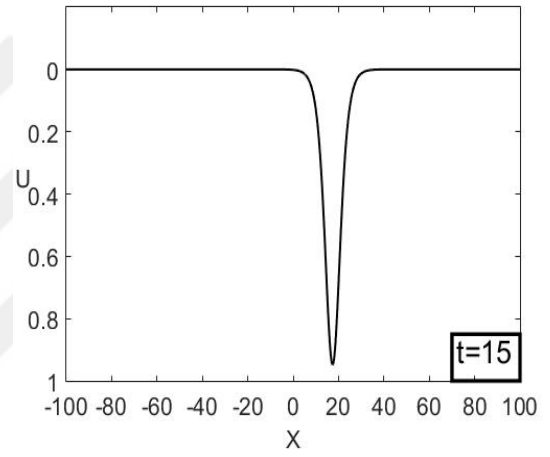
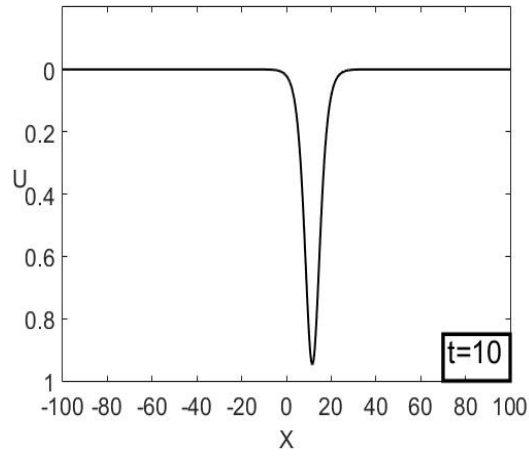
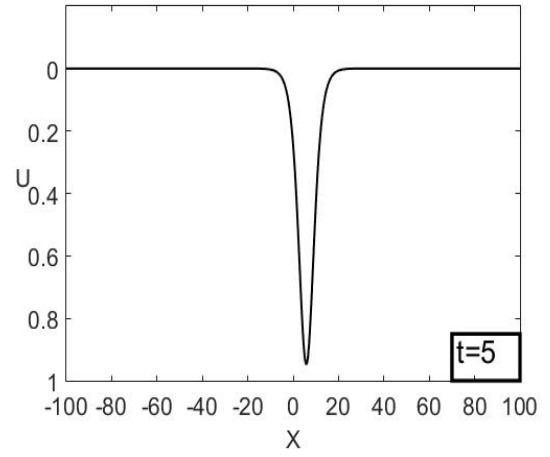
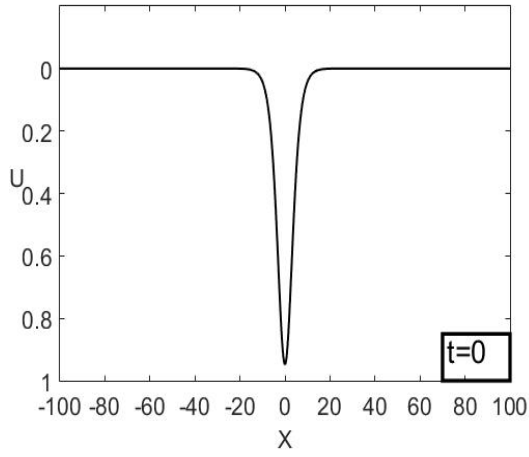
Şekil 4.5 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan pozitif genlik için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.

Şekil 4.5 de Tip2 soliton dalga denkleminin $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar 5 birimlik zaman adımındaki grafikleri toplu olarak verildi. Bu grafikte dalganın pozitif genlik ve şekil bakımından korunduğu gözlemlendi.

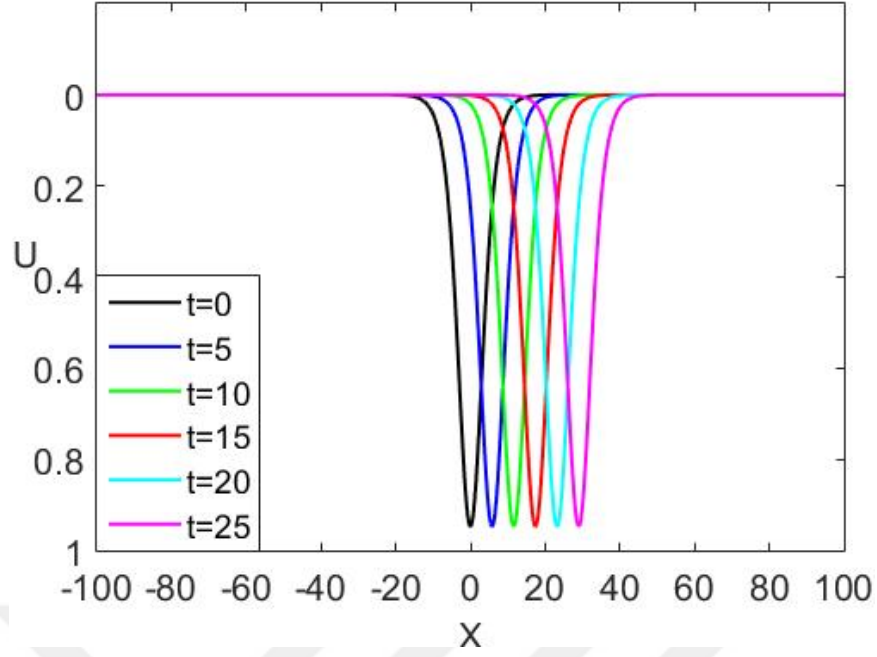


Şekil 4.6 Tip2 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ pozitif genlikli dalganın hata norm grafiği.

Şekil 4.6 da Tip2 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de ki hata normu grafiği verildi.

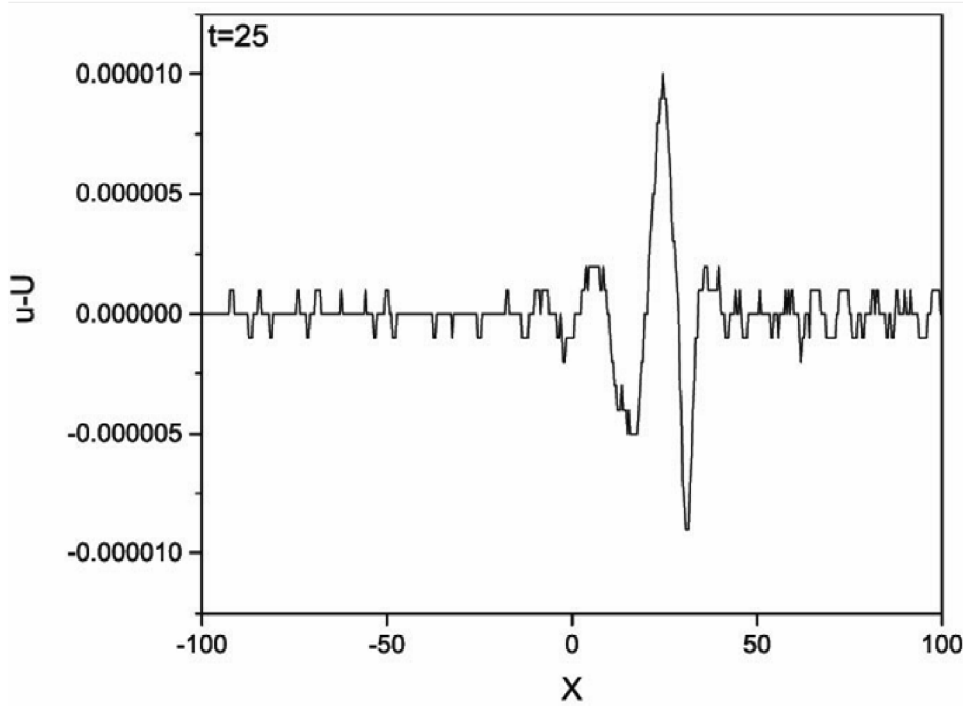


Şekil 4.7 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ aralığında konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan negatif genlikli dalganın nümerik çözüm grafikleri.



Şekil 4.8 Tip2. Tek soliton dalganın $-100 \leq x \leq 100$ konum aralığında $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ için $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar olan negatif genlik için elde edilen nümerik çözüm grafikleri.

Şekil 4.8 de Tip2 soliton dalga denkleminin $t = 0$ 'dan $t = 25$ 'e kadar 5 birimlik zaman adımındaki grafikleri toplu olarak verildi. Bu grafikte dalganın negatif genlik ve şekil bakımından korunduğu gözlemlendi.



Şekil 4.9 Tek soliton dalganın $t = 25$ 'de $\Delta t=0.0001$ ve $N=521$ negatif genlikli dalganın hata norm grafiği.

Şekil 4.9 de Tek soliton dalganın $t=25$ 'de ki hata normu grafiği verildi.



BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde modifiye edilmiş kübik B-spline Diferansiyel Kuadratur Metodu (DKM) ile iki farklı tipteki modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümleri elde edildi. Tip 1 modifiye edilmiş Kawahara denklemi sadece negatif genliğe sahip bir analitik çözüme sahiptir. Nümerik çözümde elde edilen çözümler, analitik çözümle uyumlu olacak şekilde elde edilmiştir. L_2 ve L_∞ hata normları farklı zaman adımları ve farklı düğüm nokta sayıları kullanılarak elde edildi. Zaman adımının küçültülmesi ve düğüm nokta sayılarının artırılmasıyla hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi. Tip 2 olan modifiye edilmiş Kawahara denkleminde ise hem pozitif genlik hem negatif genlikli dalgalara ait analitik çözüm mevcut olduğundan iki durum için çözüm araştırıldı. Elde ettiğimiz nümerik çözümler Tip1'e benzer şekilde yine çok küçük hata değerleri sahip nümerik çözümler olarak elde edildi. Her iki tipe ait korunum sabitleri hesaplandı ve korunum sabitlerinin bağıl değişimleri hesaplandı. Bağıl değişimlerinin de kabul edilebilir derecede küçük olduğu gözlemlendi. Simülasyon sonunda $t = 0$ 'da $t = 25$ 'e kadarki zamana ait nümerik grafikler verildi. Simülasyon sonunda $t = 25$ zamanına ait hata grafikleri çizildi. Yapılan bu çalışma ile bu metodun 5. Mertebeden lineer olmayan modifiye edilmiş Kawahara denkleminin nümerik çözümleri için uygun bir metot olduğu görüldü. Bu metod ile diğer yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için kullanılabilceği düşünülebilir



KAYNAKLAR

- [1] **Bellman R, Kashef B G and Casti J** (1972) Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation. *Journal of Computational Physics*, 10: 40-52.
- [2] **Başhan A, Karakoç S B G and Geyikli T** (2015) B-spline Differential Quadrature Method for the Modified Burgers' Equation. *Çankaya University Journal of Science and Engineering*, 12: 001-013.
- [3] **Korkmaz A** (2010) Bazı Tek Boyut Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin B-spline Diferensiyel Quadrature Metotlar ile Sayısal Çözümleri. *Doktora Tezi*, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, 105 s.
- [4] **Başhan A** (2020) An Effective Approximation to the Dispersive Soliton Solutions of The Coupled KdV Equation Via Combination of Two Efficient Methods. *Computational and Applied Mathematics*, 39: 80.
- [5] **Başhan A** (2020) A numerical treatment of the coupled viscous Burgers' equation in the presence of very large Reynolds number. *Physica A*, 545: 123755.
- [6] **Başhan A, Uçar Y, Yağmurlu N M and Esen A** (2018) A new perspective for quintic B-spline based Crank-Nicolson differential quadrature method algorithm for numerical solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *The European Physical Journal plus*, 133: 12
- [7] **Başhan A** (2019) A novel approach via mixed Crank–Nicolson scheme and differential quadrature method for numerical solutions of solitons of mKdV equation. *Indian Academy of Sciences*, 92:84
- [8] **Başhan A, Karakoç S B G and Geyikli T** (2018) Approximation of the KdVB equation by the quintic B-spline differential quadrature method. *Kuwait Journal of Science*, 42 (2): 67-92.
- [9] **Yağmurlu N M, Uçar Y and Başhan A** (2019) Numerical Approximation of the Combined KdV-mKdV Equation via the Quintic B-Spline Differential Quadrature Method. *Adiyaman University Journal of Science*, 9 (2): 386-403.
- [10] **Thoudam R** (2017) Numerical solutions of coupled Klein–Gordon–Zakharov equations by quintic B-spline differential quadrature method. *Applied Mathematics and Computation*, 307: 50-61.
- [11] **Zhong H** (2004) Spline-based differential quadrature for fourth order differential equations and its application to Kirchhoff plates. *Applied Mathematical Modelling*, 28: 352-366.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [12] **Karakoç S B G, Başhan A, Geyikli T** (2014) Two Different Methods for Numerical Solution of the Modified Burgers' Equation. *Hindawi Publishing Corporation The Scientific World Journal*, 2014: 1-14.
- [13] **Saka B, Dağ I, Dereli Y and Korkmaz A** (2008) Three different methods for numerical solution of the EW equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32: 556-566.
- [14] **Başhan A** (2019) A mixed method approach to Schrödinger equation: Finite difference method and quartic B-spline based differential quadrature method. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 9 (2): 223-235.
- [15] **Korkmaz A and Dağ I** (2012) Cubic B-spline differential quadrature methods and stability for Burgers' equation. *Engineering Computations*, 30: 320-344.
- [16] **Başhan A** (2019) Quartic B-spline Differential Quadrature Method for Solving the Extended Fisher-Kolmogorov Equation. *Erzincan Üniversitesi Erzincan University Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 12(1): 56-62.
- [17] **Korkmaz A, Aksoy A M and Dağ I** (2011) Quartic B-spline Differential Quadrature Method. *International Journal of Nonlinear Science*, 11(4): 403-411.
- [18] **Korkmaz A and Dağ I** (2008) A differential quadrature algorithm for simulations of nonlinear Schrödinger equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 56: 2222-2234.
- [19] **Korkmaz A** (2006) Bazı Tek Boyutlu Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Diferensiyel Kuadratur Metodu ile Sayısal Çözümleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir, 123 s.
- [20] **Saka B** (2009) Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40: 2181-2190.
- [21] **Dağ I, Korkmaz A and Saka B** (2011) Cosine Expansion-Based Differential Quadrature Algorithm for Numerical Solution of the RLW Equation. *Journal of the Franklin Institute*, 348: 2863-2875.
- [22] **Korkmaz A and Dağ I** (2009) Solitary wave simulations of Complex Modified Korteweg-de Vries Equation using differential quadrature method. *Computer Physics Communications*, 180: 1516-1523.
- [23] **Shu C and Wu Y L** (2007) Integrated radial basis functions-based differential quadrature method and its performance. *International Journal of Computer Mathematics* 53: 969-984.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [24] **Chan Y L, Shen LH, Wu C T and Young D L** (2014) A novel upwind-based local radial basis function differential quadrature method for convection-dominated flows. *Computers & Fluids*, 157-166.
- [25] **Lin Ji, Zhao Y, Watson D and Chen C S** (2014) The radial basis function differential quadrature method with ghost points. *Mathematics and Computation Simulation*, 173: 105-114.
- [26] **Watson D, Karageorghis A and Chen C S** (2019) The radial basis function-differential quadrature method for Elliptic problems in annular domains. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1-35.
- [27] **Hashemi M R and Hatam F** (2019) Unsteady seepage analysis using local radial basis function-based differential quadrature method. *Applied Mathematical Modelling*, 36: 4934-4950.
- [28] **Shu C, Ding H and Yeo K S** (2002) Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* , 192: 941-954.
- [29] **Fantuzzi N, Baccocchi M, Tornabene F, Viola E and Ferreira J M A** (2015) Radial basis functions based on differential quadrature method for the free vibration analysis of laminated composite arbitrarily shaped plates. *Composites Part B*, 78: 65-78.
- [30] **Shu C, Ding H and Yeo K S** (2004) Solution of partial differential equations by a global radial basis function-based differential quadrature method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28: 1217-1226.
- [31] **Wu W X, Shu C and Whang C M** (2007) Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using local radial basis function-based differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 306: 252-270.
- [32] **Civalek O** (2003) Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. *Engineering Structures*, 26: 171-186.
- [33] **Sharma P** (2018) Efficacy of Harmonic Differential Quadrature method to vibration analysis of FGPM beam. *Composite Structures*, 189 : 107-116.
- [34] **Striz A G, Wang X and Bert C W** (1995) Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111: 85-94.
- [35] **Chen W, Wang X and Zhong T** (1996) The Structure of Weighting Coefficient Matrices of Harmonic Differential Quadrature and its Applications. *Communications in Numerical methods in Engineeri*, 12: 455-459.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [36] **Civalek O** (2004) Geometrically nonlinear dynamic analysis of doubly curved isotropic shells resting on elastic foundation by a combination of harmonic differential quadrature-finite difference methods. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82: 470-479.
- [37] **Krowiak A** (2016) Hermite type radial basis function-based differential quadrature method for higher order equations. *Applied Mathematical Modelling*, 40: 2421-2430.
- [38] **Çatal S** (2008) Solution of initial value problems by the differential quadrature method with Hermite bases. *International Journal of Computer Mathematics*, 85 (5): 791-801.
- [39] **Fageot J, Aziznejad S, Unser M and Uhlmann V** (2020) Support and approximation properties of Hermite splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 368: 112503.
- [40] **Hsu H M** (2009) Differential Quadrature Method for Solving Hyperbolic Heat Conduction Problems. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 12: 331-338.
- [41] **Chen W, Striz A G and Bert C W** (1997) A new Approach to the Differential Quadrature Method for Fourth-order equations. *International journal for numerical engineering*, 40: 1941-1956.
- [42] **Korkmaz A and Dağ I** (2009) Crank-Nicolson – Differential quadrature algorithms for the Kawahara equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42: 65-73.
- [43] **Mittal R C and Dahiya S** (2017) A comparative study of modified cubic B-spline differential quadrature methods for a class of nonlinear viscous wave equations. *International journal for computer-aided engineering and soft ware*, 35 (1): 315-333.
- [44] **Dahiya S and Mittal R C** (2017) A modified cubic B-spline differential quadrature method for three-dimensional non-linear diffusion equations. *Open Phys.*, 15: 453-463.
- [45] **Başhan A** (2018) A new perspective for the numerical solutions of the cmKdV equation via modified cubic B-spline differential quadrature method. *International Journal of Modern Physics C*, 29 (6): 17pp.
- [46] **Singh B K and Kumar P** (2018) An algorithm based on a new DQM with modified extended cubic B-splines for numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation. *Alexandria Engineering Journal*, 57:175-191.
- [47] **Tamsir M, Srivastava V K and Jiwari R** (2016) An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 290: 111-124.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [48] **Başhan A** (2018) An effective application of differential quadrature method based on modified cubic B-splines to numerical solutions of the KdV equation. *Turkish Journal of Mathematics*, 42: 373-394.
- [49] **Başhan A, Yağmurlu N M and Uçar Y and Esen A** (2017) An effective approach to numerical soliton solutions for the Schrödinger equation via modified cubic B-spline differential quadrature method. *Chaos, Solitons and Fractals Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*.100: 45-56.
- [50] **Başhan A** (2019) An Efficient Approximation to Numerical Solutions for the Kawahara Equation Via Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature Method. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16: 14.
- [51] **Tamsir M, Dhiman N and Srivastava V K** (2016) Extended modified cubic B-spline algorithm for nonlinear Burgers' equation. *Bent-suef university journal of basic and applied sciences*, 5: 244-254.
- [52] **Tamsir M and Shukla H S** (2016) Extended modified cubic B-spline algorithm for nonlinear Fisher's reaction-diffusion equation. *Alexandria Engineering Journal*, 55: 2871-2879.
- [53] **Çiftçi E** (2018) Modelling soil water movement under unsaturated conditions with the Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature method. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 24 (6): 952-959.
- [54] **Mittal R C and Rohila** (2016) Numerical simulation of reaction-diffusion systems by modified cubic B-spline differential quadrature method. *Chaos, Solitons and Fractals Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, 92: 9-19.
- [55] **Shukla H S, Tamsir M and Srivastava V K** (2015) Numerical simulation of two dimensional sine-Gordon solitons using modified cubic B-spline differential quadrature method, *AIP Advances*, 5: 017-121.
- [56] **Mittal R and Dahiya S** (2015) Numerical simulation on hyperbolic diffusion equations using modified cubic B-spline differential quadrature methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 70: 737-749.
- [57] **Arora G and Singh B K** (2013) Numerical solution of Burgers' equation with modified cubic B-spline differential quadrature method. *Applied Mathematics and Computation*, 224: 166-177.
- [58] **Shukla H S Tamsir M, Srivastava V K and Rashidi K J** (2016) Modified cubic B-spline differential quadrature method for numerical solution of three-dimensional coupled viscous Burger equation. *Modern Physics Letters B*, 30 (11): 10-27.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [59] **Mittal R C and Bhatia** (2016) A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method. *Applied Mathematics and Computation*, 244: 976-997.
- [60] **Demichelis V and Rabinowitz P** (2004) Finite-Part Integrals and Modified splines. *BIT Numerical Mathematics*, 44: 259-267.
- [61] **Kalyani P, Patibanda S. Rama Chandra Rao, Ammiraju Sowbhagya Madhusudhan Rao** (2004) A Conventional Approach for the Solution of the Fifth Order Boundary Value Problems Using Sixth Degree Spline Functions. *Applied Mathematics*, 4: 583-588.
- [62] **Shukla H S and Tamsir M** (2018) An exponential cubic B-spline algorithm for multi-dimensional convection-diffusion equations. *Alexandria Engineering Journal*, 57: 1999-2006.
- [63] **Mittal R C and Dahiya S** (2017) Numerical simulation of three-dimensional telegraphic equation using cubic B-spline differential quadrature method. *Applied Mathematics and Computation*, 313: 442-452.
- [64] **Uçar Y, Yağmurlu N M and Başhan A** (2019) Numerical solitons and stability analysis of modified Burgers equations via Modified cubic B-spline differential quadrature method. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi*, (1): 129-142.
- [65] **Başhan A** (2019) A Mixed Algorithm For Numerical Computation Of Soliton Solutions Of The Coupled KdV Equation: Finite Difference Method And Differential Quadrature Method. *Applied Mathematics and Computation*, 360: 42-57.
- [66] **Elsherbeny A M, El-hassani R M I, El-badry H and Abdallah M I** (2018) Solving 2D-Poisson equation using modified cubic B-spline differential quadrature method. *Ain Shams Engineering Journal*, 9: 2879-2885.
- [67] **I. J. Schoenberg** (1946) Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, *Quart. Appl. Math.*, 4: 45-99.
- [68] **Geyikli T** (1994) Finite element studies of the modified KdV equation. *Ph. D. Thesis*, University College of North Wales, Bangor, (U.K).
- [69] **Ahlberg J H, Nilson E N and Walsh J L** (1967) The Theory of Splines and Their Applications. *Academic Press.*, New York.
- [70] **Schumaker L L** (1981) Spline Function: Basic Theory. *John Wiley and Sons*, New York.
- [71] **Dağ I** (1914) Studies of B-spline Finite Elements. *Ph. D. Thesis*, University College of North Wales. Bangor, Gwynedd (U.K).

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [72] **Cheney W and Kincaid D** (2004,2008) Numerical Mathematics and Computing. (*Sixth Edition*), Thomson.
- [73] **W Cheney and D Kincaid**, Numerical Mathematics and Computing (Sixth Edition), Thomson
- [74] **Prenter P M** (1975) Splines and variational methods. *Wiley, New York, NY*.
- [75] **Mittal R C and Jain R K** (2012) Numerical solutions of nonlinear Burg-ers' equation with modified cubic b-splines collocation method. *Appl Math Comp*, 218:7839-55. Doi: 10.1088/1742-6596/766/1/012028.
- [76] **Shu C** (2000) Differential Quadrature and Its Application in Engineering. UK: *Springer-Verlag, London*.
- [77] **Kawahara T** (1972) Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media. *Journal of the Physical Society of Japan*, 33: 260-264.
- [78] **Jang B** (2009) New exact travelling wave solutions of Kawahara type equations. *Nonlinear Analysis*, 70: 510–515.
- [79] **Wazwaz A** (2006) New solitary wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara equations. *Applied Mathematics and Computation*, 182 : 1642–1650.
- [80] **Wazwaz A** (2003) Compacton solutions of the Kawahara-type nonlinear dispersive equation. *Applied Mathematics and Computation* ,145: 133–150.
- [81] **Abbasbandy S** (2010) Homotopy analysis method for the Kawahara equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* , 11: 307-312.
- [82] **Natali F** (2010) A note on the stability for Kawahara-KdV type equations. *Applied Mathematics Letters*, 23 : 591-596.
- [83] **Sirendaoreji** (2004) New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19: 147-150.
- [84] **Yan-Hai Ye and Lu-Feng Mo** (2009) He's variational method for the Benjamin–Bona–Mahony equation and the Kawahara equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 58:2420–2422.
- [85] **Başhan A** (2019) An Efficient Approximation to Numerical Solutions for the Kawahara Equation Via Modified Cubic B-Spline Differential Quadrature Method. *Mediterr. J. Math.* 16: 1-14.
- [86] **Wang Q** (2011) The optimal homotopy-analysis method for Kawahara equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12:1555-1561.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [87] **Ablowitz M J and Clarkson P A** (1990) Solitons nonlinear evolution equations and inverse scattering transform. *Cambridge University Press*.
- [88] **Kurulay M** (2012) Approximate analytic solutions of the modified Kawahara equation with homotopy analysis method. *Advances in Difference Equations*, 178: 1-6.
- [89] **Elgarayhi A** (2005) Exact Traveling Wave Solutions for the Modified Kawahara Equation. *Z. Naturforsch*, 139-144.
- [90] **Wazwaz A** (2007) New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation. *Physics Letters A* 360: 588–592.
- [91] **Marinov T T and Marinova R S** (2018) Solitary wave solutions with non-monotone shapes for the modified Kawahara equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 340: 561-570.
- [92] **Ak T and Karakoç S B G** (2018) A numerical technique based on collocation method for solving modified Kawahara equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 3: 67-75.
- [93] **Polat N , Kaya D and Tutar H I** (2006) A analytic and numerical solution to a modified Kawahara equation and a convergence analysis of the method. *Applied Mathematics and Computation*, 179: 466-472.
- [94] **Bekir A, Güner Ö and Bilgil H** (2015) Optical soliton solutions for the variable coefficient modified Kawahara equation. *Optik*, 126: 2518-2522.
- [95] **Zhang D** (2005) Doubly periodic solutions of the modified Kawahara equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 25: 1155-1160.
- [96] **Yusufoğlu E, Bekir A and Alp M** (2008) Periodic and solitary wave solutions of Kawahara and modified Kawahara equations by using Sine–Cosine method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 37: 1193-1197.
- [97] **Bekir A and Yusufoğlu E** (2008) Symbolic computation and new families of exact travelling solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 55: 1113–1121.
- [98] **Coclite G M and di Ruvo L** (2016) Convergence results related to the modified Kawahara equation. *Boll. Unione Mat. Ital.* 9(8): 265–286.
- [99] **Ullah H, Nawaz R, Islam S, Idress M and Fizam** (2015) The optimal homotopy asymptotic method with application to modified Kawahara equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 18: 82-88.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- [100] **Jabbari A and Kheiri H** (2010) New Exact Traveling Wave Solutions for the Kawahara and Modified Kawahara Equation by Using Modified Tanh-Coth Method. *Acta Universitatis Apulensis*, 23: 21-38.
- [101] **Biswas A** (2008) Soliton perturbation theory the modified Kawahara equation. *Applications and Applied Mathematics; An International Journal*, 3(6): 218-223.
- [102] **Elgarayhi A and Karawia A A** (2009) New Double Periodic and Solitary Wave Solutions to the Modified Kawahara Equation. *International Journal of Nonlinear Science*, 7(4): 414-419.
- [103] **Christon M A, Ketcheson D I and Robinson A C** (2003) An Assessment of Semi-Discrete Central Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Sandia National Laboratories*, 3238.
- [104] **Malik R P** (1997) On fifth order KdV-type equation. Bololiubov laboratory of the oretical physics. *JINR, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia*, 1-12.
- [105] **SG Rubin and RA Graves** (1975) A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, (*National aeronautics and space administration, Technical Report, Washington*).



ÖZGEÇMİŞ

1995 yılında İstanbul'da doğdum. İlk orta ve lise öğrenimimi Bartın'da tamamladım. 2017'de Lisans eğitimimi Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde tamamladım. 3 yıldır özel bir kurumda matematik öğretmenliği yapmaktayım. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim dalı, Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans yapmaktayım.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Abdipaşa Beldesi Yeşil Pazar mahallesi ihtiyar sok. Ulus/ BARTIN

Tel: 05385587597

E-Posta: guler.3007@gmail.com

