ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İTME UZAYI VE BİLEŞENLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NECAT BARIŞ SAĞLAM

OCAK 2020

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İTME UZAYI VE BİLEŞENLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Necat Barış SAĞLAM

DANIŞMAN: Prof. Dr. Yusuf KAYA

ZONGULDAK

Ocak 2020

KABUL:

Necat Barış SAĞLAM tarafından hazırlanan "İtme Uzayı ve Bileşenleri" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 23/01/2020

Danışman: Prof. Dr. Yusuf KAYA ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Yüksel SOYKAN ....
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Erhan GÜLER ....
Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. ..../..../20....

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Necat Barış SAĞLAM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İTME UZAYI VE BİLEŞENLERİ

Necat Barış SAĞLAM

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yusuf KAYA
Ocak 2020, 57 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; Öklid uzayları arasındaki fonksiyonların türevlenebilirliği, kritik noktaları ve bazı temel sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümde; manifold tanımı, manifoldlar üzerinde fonksiyonların türevlenebilirliği, kritik noktaları, manifoldlar üzerinde Morse fonksiyonları, manifoldların bir Öklid uzayına gömülüşü, manifoldlar üzerinde ölçüm ve Sard teoremi gibi kavramlar incelenmektedir. Üçüncü bölümde, manifoldların Öklid uzaylarına verilen immersiyonlarının odak noktaları üzerine bilinen sonuçlar çalışılmaktadır. Dördüncü bölümde, ilk kez [2] makalesinde tanıtılan $\Omega(f)$ itme uzayı ve bileşenleri üzerine bilinen bazı özellikler incelenmiştir. 4.3. bölümde, orijinal bir sonuç olarak $f: M^m \to \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$ şeklinde bir immersiyon ve $\Phi: \mathbb{R}^{m+1} \to S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$, $\Phi(x) = \left(\frac{2x}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right)$ fonksiyonu olmak üzere $\Omega(\Phi \circ f)$ ve $\Omega\left(\Phi \circ \frac{f}{\|f\|^2}\right)$ itme uzaylarının eşit alınabileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Manifold, immersiyon, odak nokta, paralel immersiyon, itme uzayı

Bilim Kodu: 403.02.01

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

PUSH-OUT SPACE AND ITS COMPONENTS

Necat Barış SAĞLAM

Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Yusuf KAYA

January 2020, 57 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the differentiability of functions between m and n dimensional Euclidean spaces, their critical points and some basic results are given. In the second chapter, the definition of manifold, differentiability of functions on manifolds, critical points, Morse functions on manifolds, embeddings of manifolds in an Euclidean space, measure on manifolds and Sard's theorem are examined. In the third chapter, known results on the focal points of immersions of manifolds given to Euclidean spaces are studied. In the fourth chapter, we study some known properties on the components of the push-out space $\Omega(f)$ which is first defined in [2]. In section 4.3, we observe as an original result that the push-out spaces of $\Omega(\Phi \circ f)$ and $\left(\Phi \circ \frac{f}{\|f\|^2}\right)$ can be taken equal, where $f: M^m \to \mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$ is an immersion and $\Phi: \mathbb{R}^{m+1} \to S^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ is the function given by $\Phi(x) = \left(\frac{2x}{1+\|x\|^2}, \frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}\right)$.

Keywords: Manifold, immersion, focal point, parallel immersion, push-out space

Science Code: 403.02.01

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimimin her aşamasında yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, ilgisini esirgemeyen, akademik kimliğinin yanı sıra insani yönüyle de bana örnek olan değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Yusuf KAYA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hem hayat yolunda hem de tez çalışmam süresince sabırla bana destek olan, karşılaştığım her zorlu süreçte güç veren, iyi ki yanımda dediğim sevgili eşim Ayşegül SAĞLAM'a; bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan, haklarını hiç bir zaman ödeyemeyeceğim sevgili annem Mürvet SAĞLAM'a, babam Abdullah Celal SAĞLAM'a, ablam Burcu YILDIZ'a ve eniştem Murat YILDIZ'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^m$	: m-boyutlu Öklid uzayı
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	: f nin x değişkeninin i. bileşenine göre kısmi türevi
$Df(x)$	: f nin x noktasındaki Jakobiyen matrisi
$Hf(x)$	: f nin x noktasındaki Hesiyen matrisi
M^m	: m-boyutlu bir manifold
(U, ϕ)	: Koordinat kartı
$\psi\phi^{-1}$	: Koordinat dönüşümü
$\mathbb{S}^m$	: m-boyutlu birim küre
$\mathbb{T}^2$	: Tor yüzeyi
$\mathcal{D}$	: Maksimal atlas
T_pM	: M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
$N(f)$	: f nin normal demeti
E	: Uç nokta dönüşümü
L_x	: x noktası için tanımlanan uzaklık fonksiyonu
$F_p(f)$	: f immersiyonunun p noktasındaki odak noktaları kümesi
ξ	: Normal vektör alanı
$v_p(f)$	: $f(p)$ noktasından geçen normal düzlem
$\Omega(f)$	: f immersiyonunun itme uzayı
f_t	: f immersiyonunun paralel dönüşümü
$d(f)$	: $\Omega(f)$ nin yol bağlantılı bileşenlerinin toplam sayısı
Φ	: Bir küresel izdüşüm fonksiyonunun tersi

BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, türevlenebilir fonksiyonlarla ilgili bu tez boyunca kullanılacak temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Bazı tanım ve teoremler için [5] kaynağından yararlanılmıştır.

1.1 $\mathbb{R}^m$ de Türevlenebilme

Tanım 1.1.1 *$U \subset \mathbb{R}^m$ bir açık küme ve $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

i) *Eğer U kümesi üzerinde f nin $(r = 1, 2, 3 \ldots)$ olmak üzere r ye kadar ve r. mertebeden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f ye C^r sınıfından türevlenebilir denir.*
ii) *Eğer her $r = 1, 2, 3, \ldots$ için f, C^r sınıfından türevlenebilir ise f ye C^∞ sınıfından türevlenebilir denir.*

$f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f yi *bileşenleri* veya *koordinat fonksiyonları* cinsinden

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda her $1 \leq i \leq n$ için $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, C^r sınıfından türevlenebilir ise f ye C^r sınıfından türevlenebilir diyeceğiz. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe C^∞ *sınıfından türevlenebilir fonksiyon* ve *düzgün fonksiyon* ifadeleri aynı anlama gelecek şekilde kullanılacaktır.

Örnek 1.1.2 *$\mathbb{R}^m$ nin bir açık alt kümesinde tanımlı m değişkenli her polinom düzgündür.*

Tanım 1.1.3 *$U \subset \mathbb{R}^m$ herhangi bir açık küme ve $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en az C^1 sınıfından türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ise*

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{n \times m}$$

matrisine f fonksiyonunun x noktasındaki Jakobiyen matrisi denir.

$Df\left(x\right)$ Jakobiyen matrisinin rankına f nin x noktasındaki rankı denir. $m = n$ ise Jakobiyen matrisin determinantına Jakobiyen determinatı denir.

Zincir Kuralı: $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ iki açık küme; $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ birer fonksiyon ve f, $x \in U$ noktasında ve g, $f\left(x\right) \in V$ noktasında C^r sınıfından ise $g \circ f$, $x \in U$ noktasında C^r sınıfındandır ve

$$D\left(g \circ f\right)\left(x\right) = Dg\left(f\left(x\right)\right) Df\left(x\right)$$

sağlanır.

$U, V \subset \mathbb{R}^m$ iki açık küme ve $f : U \longrightarrow V$ bir fonksiyon olsun. Eğer f bir homeomorfizma ve f ile f^{-1}, C^r sınıfından ise f ye C^r sınıfından difeomorfizma denir. C^∞ sınıfından bir difeomorfizmaya kısaca difeomorfizma denir. Eğer f bir difeomorfizma ise Jokobiyen matrisi singüler değildir. Gerçekten $f^{-1} \circ f = I$ $\left(\left(f^{-1} \circ f\right)\left(x\right) = x = I\left(x\right)\right)$ eşitliğine zincir kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Df^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \cdot Df\left(x\right) \quad &= \quad I \ (m \times m \text{ birim matris}) \\ &\Longrightarrow \quad Df^{-1}\left(f\left(x\right)\right) = \left(Df\left(x\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir ve sonuç buradan görülür.

Örnek 1.1.4 $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f\left(x\right) = 2x$ *fonksiyonu bir difeomorfizmadır.*

Örnek 1.1.5 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x^5$ *fonksiyonu* C^∞ *sınıfından olmasına rağmen* $f^{-1}\left(x\right) = \sqrt[5]{x}$, 0 *noktasında türevlenebilir bile değildir.*

Örnek 1.1.6 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x\left(\left|x\right| + 1\right)$ *fonksiyonu için* $f'\left(x\right) = 2\left|x\right| + 1$ *olup* f, C^1 *sınıfındandır. Bu fonksiyon için* $f'\left(x\right) > 0$ *olduğundan tersi vardır ve tersi de* C^1 *sınıfındandır. O halde* f, C^1 *difeomorfizmadır, ancak* C^2 *difeomorfizma değildir.*

Örnek 1.1.7 $f : \left(-1, 1\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = \frac{x}{1-x^2}$ *fonksiyonu bir difeomorfizmadır. Daha genel olarak* $B^m(0,1)$ *ile* $\mathbb{R}^m$ *de* $\mathbf{0}$ *merkezli ve* 1 *yarıçaplı açık topu gösterelim, yani* $B^m(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$ *olsun. Bu durumda* $\Phi : B^m(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi(x) = \frac{x}{1-\|x\|^2}$ *ile verilen fonksiyon bir difeomorfizmadır, yani* $B^m(0,1)$ *ile* $\mathbb{R}^m$ *difeomorfiktir.*

Teorem 1.1.8 ***(Ters Fonksiyon Teoremi)*** *$U \subset \mathbb{R}^m$ bir açık küme ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir C^r fonksiyon ve $a \in U$ olsun. f nin a noktasındaki Jakobiyen matrisi $Df(a)$ nın singüler olmadığını kabul edelim. Bu durumda f, a nın bir açık komşuluğu ile $f(a)$ nın bir açık komşuluğu arasında C^r difeomorfizmadır.*

Örnek 1.1.9 *$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonu bir homeomorfizmadır. $f'(x) = \sec^2 x$ olup her $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ için $f'(x) \neq 0$ dır. O halde ters fonksiyon teoremine göre f fonksiyonu C^1 sınıfından difeomorfizmadır. Ayrıca f, C^∞ sınıfından olduğundan C^∞ difeomorfizma olduğu görülür.*

Sonuç 1.1.10 *$U \subset \mathbb{R}^m$ bir açık küme, $\mathbf{0} \in U$ ve $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir C^r fonksiyon ve f nin $\mathbf{0}$ noktasındaki rankı m olsun (o halde $m \leq n$ olur). $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ de $\mathbf{0}$ noktasının bir komşuluğunu yine $\mathbf{0}$ noktasının bir açık komşuluğuna dönüştüren C^r sınıfından bir g difeomorfizması bulunabilir öyle ki*

$$(g \circ f)(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_1, x_2, \ldots x_m, 0, \ldots, 0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: İspatı [5] kaynağında olduğu gibi yapalım. I. Durum (Özel hal): $n \times m$ boyutlu $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ matrisinin $\mathbf{0}$ noktasınında singüler olmadığını varsayalım, yani $Df(\mathbf{0})$ ın ilk m satırı lineer bağımsız olsun.

$$F : U \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \;\; F(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_m) + (0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots x_n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve Jakobiyen matrisi

$$DF(x) = \begin{pmatrix} & | & 0 \\ Df(x) & | & --- \\ & | & I \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve singüler olmadığı açıktır. O halde ters fonksiyon teoremine göre F nin yerel ters fonksiyonu g istenen özellikleri sağlar.

II. Durum (Genel hal): $Df(\mathbf{0})$ ın herhangi m satırı lineer bağımsız olsun. F nin tanımı uygun şekilde değiştirilerek $DF(x)$ Jakobiyen matrisinin son kısmındaki $(n-m)$ tane 1 diğer satırlara gider. ■

Sonuç 1.1.11 *$U \subset \mathbb{R}^m$ bir açık küme, $\mathbf{0} \in U$ ve $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir C^r fonksiyon ve f nin $\mathbf{0}$ daki rankı n olsun (o halde $m \geq n$ olur). $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $U \subset \mathbb{R}^m$ de $\mathbf{0}$ noktasının bir komşuluğunu yine $\mathbf{0}$ noktasının bir açık komşuluğuna dönüştüren C^r sınıfından bir h difeomorfizması bulunabilir öyle ki*

$$(f \circ h)(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Özel hal: $n \times m$ boyutlu $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ matrisinin $\mathbf{0}$ noktasınında singüler olmadığını varsayalım, yani $Df(\mathbf{0})$ ın ilk n sütunu lineer bağımsız olsun.

$$F : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_m), x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve Jakobiyen matrisi

$$DF(x) = \begin{pmatrix} & Df(x) & \\ - & - & - \\ \mathbf{0} & | & I \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve singüler olmadığı açıktır. O halde Ters fonksiyon teoremine göre F nin yerel ters fonksiyonu h olsun. $(x_1, x_2, \ldots x_m)$, h nin tanım kümesinde ise,

$$(F \circ h)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

olur. O halde sadece ilk n koordinatı ele alınırsa,

$$(f \circ h)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

elde edilir.

Genel hal: $Df(\mathbf{0})$ ın herhangi n sütunu lineer bağımsız olsun. Bunları artan sırada i_1, i_2,..., i_n olarak gösterelim. Geriye kalanları i_{n+1},..., i_m ile gösterelim. $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\lambda(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_m})$ olarak tanımlanırsa λ bir difeomorfizmadır.
O halde $f \circ \lambda^{-1} : \lambda(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu özel haldeki şartları sağlar. Dolayısıyla $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan ve $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ noktasının bir komşuluğunu yine $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ noktasının bir açık komşuluğuna dönüştüren bir g difeomorfizması bulunabilir. Ayrıca $\left(f \circ \lambda^{-1} \circ g\right)(x_1, x_2, \ldots x_m) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ sağlanır. Burada $h = \lambda^{-1} \circ g$ alınırsa ispat biter. ■

1.2 Reel Değerli Fonksiyonlar ve Kritik Noktaları

Tanım 1.2.1 *$f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, en az C^2 sınıfından türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x \in U$ noktasındaki $Df(x)$ Jakobiyen matrisi sıfır ise bu durumda x noktasına f nin bir kritik noktası denir. Diğer taraftan $m \times m$ boyutlu*

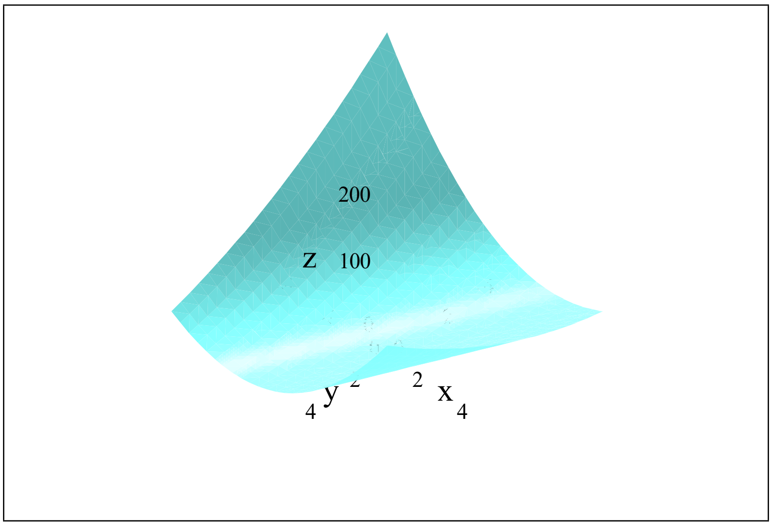
$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

kare matrisine f fonksiyonunun x noktasındaki Hesiyen (Hessian) matrisi denir. Eğer f nin bir x kritik noktasındaki Hesiyen matrisi singüler (singüler değil) ise f nin bu x kritik noktasına dejenere (dejenere olmayan) kritik nokta denir. Ayrıca bir x kritik noktasındaki $Hf(x)$ Hesiyen matrisinin negatif özdeğerlerinin sayısına kritik noktanın indeksi denir.

Örnek 1.2.2 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 1$ fonksiyonu için $x = -2$ dejenere olmayan bir kritik noktadır.*

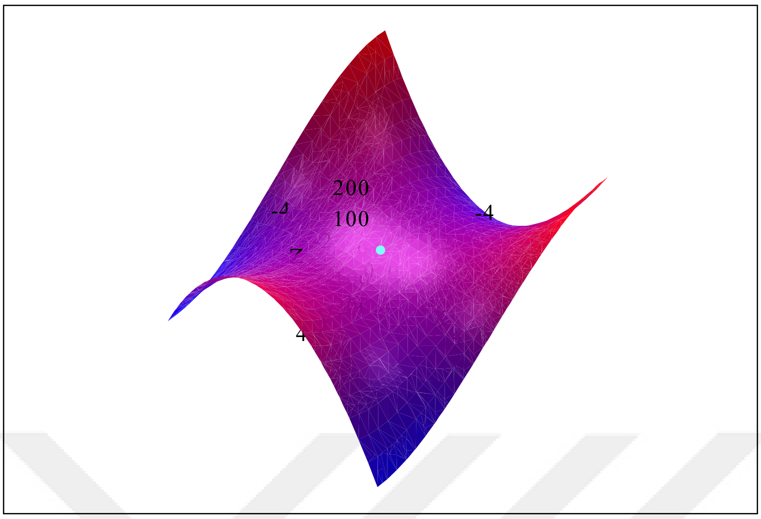
Örnek 1.2.3 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, x^4 fonksiyonunun tek kritik noktası $x = 0$ noktasıdır ve dejenere bir kritik noktadır.*

Örnek 1.2.4 *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ fonksiyonu için $(x,y) = (0,0)$ dejenere bir kritik noktadır. Gerçekten f nin $\mathbb{R}^3$ deki grafiği (yani $z = x^2 + 4xy + 4y^2$ fonksiyonunun grafiği) parabolik silindirdir ve xy düzlemine $x + 2y = 0$ doğrusu boyunca teğettir. Bu doğru üzerindeki her nokta f nin kritik noktasıdır. Yani sonsuz çoklukta kritik nokta bulunabilir.*



Şekil 1.1 *$f(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$ fonksiyonunun grafiği*

Örnek 1.2.5 *$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3-3xy^2$ fonksiyonu için $(x,y)=(0,0)$ tek kritik noktadır ve dejeneredir. Bu fonksiyonun $\mathbb{R}^3$ deki grafiği Maymun oturağı olarak bilinen yüzeydir. Bu eğer-semer (saddle) noktasından üç dağ ve üç vadi çıkmaktadır.*



Şekil 1.2 *Maymun oturağı*

Önerme 1.2.6 *$f:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon ve $h:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir difeomorfizma olsun. p nin f nin bir dejenere olmayan kritik noktası olduğunu kabul edelim ve $h(q)=p$ olsun. Bu durumda*

$$H(f\circ h)(q) = (Dh(q))^t \cdot Hf(p)\cdot Dh(q)$$

sağlanır ve q, $f\circ h:\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun dejenere olmayan bir kritik noktasıdır. Ayrıca f nin p noktasındaki indeksi ile $f\circ h$ nin q noktasındaki indeksi eşittir.

İspat: Kolaylık açısından ispatı $m=2$ durumunda yapalım. Genel durum benzer şekilde yapılır. $h:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x=(x_1,x_2)$, $h(x)=(u_1(x),u_2(x))$ olsun. O halde $g=f\circ h$ için

$$g(x) = (f\circ h)(x) = f(h(x)) = f(u_1(x),u_2(x))$$

olur. Buradan $1\le i\le 2$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&\Longrightarrow \left(\frac{\partial g(q)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(q)}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial f(p)}{\partial u_1}, \frac{\partial f(p)}{\partial u_2}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(q)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(q)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2(q)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(q)}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$D(f\circ h)(q) = Df(p)\cdot Dh(q)$$

elde edilir. Bu ifadeyi,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g(q)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(q)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(q)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(q)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2(q)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(q)}{\partial x_2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial f(p)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(p)}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. h difeomorfizma olduğundan $\det(Dh\,(q)) \neq 0$ olur. O halde p, f nin kritik noktasıdır ancak ve ancak q, $g = f \circ h$ nin kritik noktasıdır.

Diğer taraftan $1 \leq j \leq 2$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{ve} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i \partial x_j} \\
&= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}
\end{aligned}$$

olur. Bir kritik noktada $1 \leq k \leq 2$ için $\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0$ olduğundan $\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$Hg\,(q) = H\,(f \circ h)\,(q) = (Dh(q))^t\, Hf\,(p)\, Dh(q)$$

elde edilir. Buna göre, h difeomorfizma olduğundan $Dh(q)$ singüler değildir. O halde $(Dh(q))^t$ de singüler değildir. Dejenere olmayan kritik noktada f nin $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l}\right)$ Hesiyen matrisi de singüler değildir. O halde g nin Hesiyen matrisi de üç singüler olmayan matrisin çarpımı olarak singüler değildir.

g nin q ve f nin p noktalarındaki Hesiyen matrislerinin özdeğerleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Bu iki matris denk ve reel simetrik olduklarından Sylvester kuralı (Sylvester's law of Inertia) gereğince bu iki matrisin negatif, pozitif ve sıfır özdeğerlerinin sayısı birbirine eşittir [9]. ■

Örnek 1.2.7 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xy + yz + xz$ *olsun. O halde*

$$Df(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

bulunur. $(y+z, x+z, x+y) = (0,0,0)$ *denklemi çözülürse* $(0,0,0)$ *noktasının* f *nin tek kritik noktası olduğu görülür.*

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olduğundan } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

olur. Buradan $Df(0,0,0) = (0,0,0)$ *ve* $Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *olduğundan* $(0,0,0)$ *noktasının dejenere olmayan bir kritik nokta olduğu görülür.*

$$\begin{aligned} \det(Hf(0,0,0) - \lambda I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

bulunur ve $(2-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0$ *denkleminin negatif kök sayısı* 2 *olduğundan* f *nin* $(0,0,0)$ *dejenere olmayan kritik noktasının indeksi* 2 *dir.*

BÖLÜM 2

MANİFOLDLAR

Bu bölümde, topolojik ve düzgün manifoldlar, düzgün manifoldlar arasındaki fonksiyonların türevlenebilirliği ve kritik noktaları, manifoldlar üzerinde Morse fonksiyonları, manifoldların bir Öklid uzayına gömülüşü, manifoldlar üzerinde ölçüm ve Sard teoremi gibi kavramlar incelenmiş ve [5], [11], [13], [1] ve [14] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1 Topolojik ve Düzgün Manifoldlar

Tanım 2.1.1 *M bir Hausdorff topolojik uzay olsun. Eğer M nin her noktasının $\mathbb{R}^m$ ye (veya $\mathbb{R}^m$ nin bir açık alt kümesine) homeomorfik bir açık komşuluğu varsa M ye m-boyutlu bir topolojik manifold denir ve sıklıkla M^m şeklinde gösterilir. Bu gösterimde m harfi manifoldun boyutunu belirtir.*

Eğer $U \subset M$ açık ve $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir homeomorfizma ise (U, φ) ye bir *koordinat kartı* denir. $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ olmak şartıyla koordinat kartlarının bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ topluluğuna M üzerinde bir *atlas* denir. Eğer (U, φ) ve (V, ψ) iki koordinat kartı ise,

$$\psi\varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

dönüşümüne bir *koordinat dönüşümü* denir.

Örnek 2.1.2 *$\mathbb{R}^m$, m-boyutlu bir topolojik manifolddur. Gerçekten $\mathbb{R}^m$ doğal metrik topolojisi ile bir Hausdorff uzayıdır. Ayrıca $I : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I(x) = x$ birim dönüşümü bir homeomorfizmadır ve $\{(\mathbb{R}^m, I)\}$, $\mathbb{R}^m$ için bir atlastır.*

Örnek 2.1.3 *$\mathbb{S}^m = \left\{(x_1, ..., x_{m+1}) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ standart birim küresi m-boyutlu bir topolojik manifolddur. Gerçekten $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ standart birim küresi doğal metrik alt uzay topolojisi ile bir Hausdorff uzayıdır. $U = \mathbb{S}^m - \{(0, ..., 0, 1)\}$ ve*

$V = \mathbb{S}^m - \{(0, ..., 0, -1)\}$ olsun. Bu durumda U ve V, $\mathbb{S}^m$ nin açık alt kümeleridir ve birleşimleri $\mathbb{S}^m$ ye eşittir. $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ve $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, ..., x_{m+1}) &= \left(\frac{x_1}{1 - x_{m+1}}, ..., \frac{x_m}{1 - x_{m+1}} \right), \\ \psi(x_1, ..., x_{m+1}) &= \left(\frac{x_1}{1 + x_{m+1}}, ..., \frac{x_m}{1 + x_{m+1}} \right) \end{aligned}$$

ile tanımlanırsa φ ve ψ birer homeomorfizmadır ve dolayısıyla $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$, $\mathbb{S}^m$ için bir atlastır. O halde $\mathbb{S}^m$, m-boyutlu bir topolojik manifolddur. Buradaki φ ve ψ fonksiyonlarına sırasıyla $(0, ..., 0, 1)$ kuzey kutup noktasından ve $(0, ..., 0, -1)$ güney kutup noktasından küresel izdüşüm denir.

Tanım 2.1.4 *M^m bir topolojik manifold olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{D}$ atlasına M üzerinde C^r sınıfından türevlenebilir bir yapı veya bir C^r yapı denir:*
***M1)** Her $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{D}$ ve $U \cap V \neq \varnothing$ için $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ koordinat dönüşümleri C^r sınıfındandır.*
***M2)** $\mathcal{D}$ maksimaldir, yani (W, ϕ), M nin bir koordinat kartı ve her $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$, $W \cap U \neq \varnothing$ için $\varphi \circ \phi^{-1}$, $\phi \circ \varphi^{-1}$ dönüşümleri C^r sınıfından ise $(W, \phi) \in \mathcal{D}$ dir.*

Bu tanımda (U, φ), $(V, \psi) \in \mathcal{D}$ olan iki koordinat kartı için $U \cap V = \varnothing$ ise $\psi \circ \varphi^{-1}$ dönüşümünün C^r sınıfından olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, dikkat edilirse hem $\psi \circ \varphi^{-1}$ hem de $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$, C^r sınıfından olduğundan $M1)$ koşulu her koordinat dönüşümünün bir C^r difeomorfizma olduğunu ifade eder.

Eğer $\mathcal{B}$, M üzerinde yalnızca $M1)$ koşulunu sağlayan bir atlas ise M üzerinde $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ olacak şekilde C^r sınıfından tek bir $\mathcal{D}$ türevlenebilir yapısı olduğu bilinmektedir. Bu durumda $\mathcal{B}$ ya $\mathcal{D}$ için bir *taban* denir.

M bir topolojik manifold ve $\mathcal{D}$, M üzerinde C^r sınıfından bir türevlenebilir yapı olmak üzere $(M, \mathcal{D})$ ikilisine C^r sınıfından *türevlenebilir manifold* ya da kısaca C^r *manifold* denir. C^∞ sınıfından türevlenebilir bir manifolda *düzgün manifold* diyeceğiz. Bundan böyle manifold kavramı geçtiğinde düzgün manifolddan söz edilecektir. Ayrıca M nin topolojisinin sayılabilir bir tabanı olduğunu yani ikinci sayılabilir olduğunu da kabul edeceğiz. Örneğin, embeding ve Sard teoremlerinde bu gerekmektedir.

Örnek 2.1.5 *$I : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = x$ birim fonksiyonu homeomorfizmadır. O halde $(\mathbb{R}^m, I)$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde açıkça bir atlastır ve $M1)$ koşulunu sağladığı kolayca gösterilir,* *çünkü $M1)$ koşulu sadece $(U,\varphi) = (V,\psi) = (\mathbb{R}^m, I)$ için gösterilecektir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^m, I)$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde her $r = 1,2,3,\ldots,\infty$ için C^r yapı için taban oluşturur. Buna $\mathbb{R}^m$ nin doğal türevlenebilir yapısı denir.*

Örnek 2.1.6 *(U,φ), (V,ψ) Örnek 2.1.3 te verilen küresel izdüşüm kartları olsun. Orada belirtildiği gibi $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$, $\mathbb{S}^m$ için bir atlastır.*

$$\varphi^{-1}(y_1,y_2,\ldots,y_m) = \left(\frac{2y_1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}, \frac{2y_2}{1+\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}, \ldots, \frac{-1+\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}{1+\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2} \right)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece

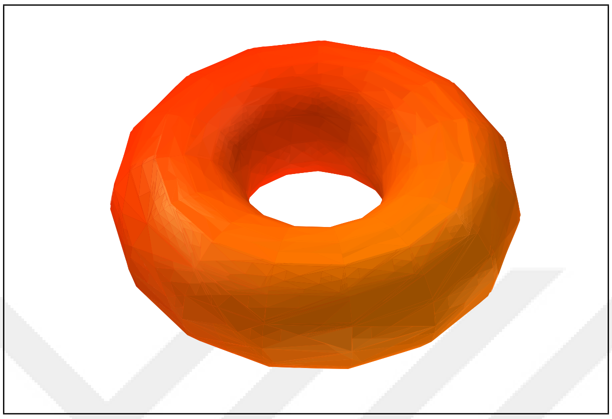
$$\psi\varphi^{-1}(y_1,y_2,\ldots,y_m) = \left(\frac{y_1}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}, \frac{y_2}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}, \ldots, \frac{y_m}{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2} \right)$$

bulunur. Bu formül $\varphi(U\cap V) = \mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\}$ kümesinde geçerlidir ve burada $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2 \neq 0$ sağlanır. Her bir koordinat fonksiyonu rasyonel fonksiyon olduğundan C^∞ sınıfındandır ve dolayısıyla $\psi\varphi^{-1}$, C^∞ sınıfındandır. Simetriklikten dolayı $\psi\varphi^{-1}$ de C^∞ sınıfındandır ve $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ atlası $\mathbb{S}^m$ üzerinde her $r = 1,2,3,\ldots\infty$ için C^r sınıfından bir türevlenebilir yapı için taban teşkil eder. Yani $\mathbb{S}^m$ bir düzgün manifolddur. Buna $\mathbb{S}^m$ nin doğal veya alışılmış türevlenebilir yapısı denir.

Örnek 2.1.7 $\mathbb{T}^2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$ *alt kümesine Tor yüzeyi veya kısaca Tor denmektedir. Bu Tor yüzeyi $xz-$düzleminde $(2,0,0)$ merkezli ve 1 yarıçaplı çemberin $z-$ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilir. $xz-$düzleminde $(2,0,0)$ merkezli ve 1 yarıçaplı çemberin üzerindeki bir noktanın x-ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı pozitif açıyı β ile ve sınırı z-ekseni olan bir yarı düzlem ile x-ekseni arasındaki pozitif açıyı α ile gösterelim. Bu Tor yüzeyinin bir parametrelenişi*

$$f : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(\beta,\alpha) = ((2+\cos\beta)\cos\alpha, (2+\cos\beta)\sin\alpha, \sin\beta)$$

formülü ile verilebilir. $\beta = 0$ ise $\gamma_0(\alpha) = (3\cos\alpha, 3\sin\alpha, 0)$ dış çemberi ve $\beta = \pi$ ise $\gamma_\pi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ iç çemberi oluşur. β sabit alındığında oluşan $\gamma_\beta(\alpha) = ((2+\cos\beta)\cos\alpha, (2+\cos\beta)\sin\alpha, \sin\beta)$ çemberlerine boylam eğrileri denir. $\alpha = 0$ ise *merkezi* $(2,0,0)$ *noktasında ve yarıçapı* 1 *olan* $\eta_0(\beta) = (2+\cos\beta, 0, \sin\beta)$ *çemberi ve* $\alpha = \pi$ *ise merkezi* $(-2,0,0)$ *noktasında ve yarıçapı* 1 *olan* $\eta_\pi(\beta) = (-2-\cos\beta, 0, \sin\beta)$ *çemberi oluşur.* α *sabit alındığında merkezi* $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha, 0)$ *noktasında ve yarıçapı* 1 *olan* $\gamma_\alpha(\beta) = ((2+\cos\beta)\cos\alpha, (2+\cos\beta)\sin\alpha, \sin\beta)$ *çemberleri oluşur. Bu çemberlere enlem eğrileri denir. Bu Tor yüzeyinin [5] de açıklandığı gibi,* (U,φ) *ve* (V,ψ) *gibi iki koordinat kartı oluşturarak* 2*-boyutlu düzgün bir manifold olduğu gösterilebilir.*



Şekil 2.1 *Tor yüzeyi*

Önerme 2.1.8 $(M^m, \mathcal{D})$ *bir düzgün manifold ve* $p \in M$ *olsun. Bu durumda* $p \in U$ *ve* $\varphi(p) = \mathbf{0}$ *olacak şekilde bir* $(U,\varphi) \in \mathcal{D}$ *mevcuttur.*

İspat: $\mathcal{D}$ bir atlas olduğundan $p \in U$ olacak şekilde bir $(U,\phi) \in \mathcal{D}$ koordinat kartı mevcuttur. $\phi(U) = \mathbb{R}^m$ olduğunu varsayabiliriz. $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $T(y) = y - \phi(p)$ ile tanımlansın. T, C^∞ sınıfından bir difeomorfizmadır. $\varphi = T \circ \phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ olarak alınırsa $\varphi(p) = T(\phi(p)) = \phi(p) - \phi(p) = 0$ sağlanır. $(U,\varphi) \in \mathcal{D}$ olduğunu gösterelim. $M2)$ koşulu gereğince her $(V,\psi) \in \mathcal{D}$ için $\psi\varphi^{-1}$ ve $\varphi\psi^{-1}$ geçiş dönüşümlerinin düzgün olduğunu göstermek gerekir.

$$\psi\varphi^{-1} = \psi(T\phi)^{-1} = \left(\psi\phi^{-1}\right)T^{-1}$$

bulunur. (U,ϕ), $(V,\psi) \in \mathcal{D}$ olduğundan $\psi\alpha^{-1}$ düzgündür. T difeomorfizma olduğundan $\psi\varphi^{-1}$ düzgündür. Benzer şekilde $\varphi\psi^{-1} = T\left(\phi\psi^{-1}\right)$ düzgündür. ■

Tanım 2.1.9 M *ve* N *sırasıyla* m *ve* n *boyutlu düzgün iki manifold ve* $f : M \longrightarrow N$ *bir fonksiyon olsun.* M *ve* N *nin manifold yapısına ait her* (U,φ) *ve* (V,ψ) *koordinat kartları için*

$$\psi f \varphi^{-1} : \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

dönüşümü düzgün ise f *fonksiyonuna düzgün fonksiyon denir.*

Burada, manifoldlar arasındaki bir fonksiyonun düzgünlüğü, koordinat kartları yardımıyla $\mathbb{R}^m$ ile $\mathbb{R}^n$ arasındaki fonksiyonların düzgünlüğü ile açıklanıyor. Bir $p \in M$ noktasında f nin düzgünlüğünü göstermek için φ, p noktası komşuluğunda ve ψ, $f(p)$ noktası komşuluğunda birer koordinat kartı olmak üzere $\psi f \varphi^{-1}$ dönüşümünün düzgünlüğünü göstermek yeterlidir. Bu aşağıdaki önermede açıklanmaktadır.

Önerme 2.1.10 *$(M^m, \mathcal{D})$ ve $(N^n, \mathcal{D}')$ iki düzgün manifold ve $f : M^m \longrightarrow N^n$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $p \in U$ ve $f(p) \in V$ olan bir çift $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ve $(V, \psi) \in \mathcal{D}'$ koordinat kartı $\psi f \varphi^{-1}$, $\varphi(p)$ noktasında düzgün olacak şekilde bulunabiliyorsa f düzgündür.*

İspat: $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{D}$ ve $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{D}'$ keyfi iki koordinat kartı olsun. $\psi_1 f \varphi_1^{-1}$ fonksiyonunun düzgün olduğunu göstermek için, her $x \in \varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(V_1))$ noktasında düzgünlüğünü göstermek yeterlidir. $x \in \varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(V_1))$ keyfi olsun. Kabulden en az bir $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ve $(V, \psi) \in \mathcal{D}'$ öyle ki $\varphi_1^{-1}(x) \in U$, $f\varphi_1^{-1}(x) \in V$ ve $\psi f \varphi^{-1}$, $\varphi\varphi_1^{-1}(x)$ noktasında düzgündür. O halde

$$\psi_1 f \varphi_1^{-1} = \left(\psi_1 \psi^{-1}\right)\left(\psi f \varphi^{-1}\right)\left(\varphi \varphi_1^{-1}\right)$$

x noktasında düzgündür. ■

Öklid uzayları arasındaki düzgün bir fonksiyonun Jakobiyeni kavramı manifoldlar arasındaki düzgün fonksiyonlara taşınamıyor. Ancak, rank kavramını taşıyabiliriz.

Önerme 2.1.11 *$(M^m, \mathcal{D})$ ve $(N^n, \mathcal{D}')$ iki düzgün manifold, $f : M^m \longrightarrow N^n$ bir düzgün fonksiyon ve $p \in M$ olsun. (U, φ), $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{D}$ ve (V, ψ), $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{D}'$ olmak üzere $p \in U \cap U_1$ ve $f(p) \in V \cap V_1$ olsun. Bu durumda $\psi f \varphi^{-1}$ nin $\varphi(p)$ noktasındaki ve $\psi_1 f \varphi_1^{-1}$ nin $\varphi_1(p)$ noktasındaki rankları eşittir.*

İspat:

$$\psi_1 f \varphi_1^{-1} = \left(\psi_1 \psi^{-1}\right)\left(\psi f \varphi^{-1}\right)\left(\varphi \varphi_1^{-1}\right)$$

olduğundan,

$$D\psi_1 f \varphi_1^{-1}(\varphi_1(p)) = D\left(\psi_1 \psi^{-1}\right)(\psi(f(p))) \cdot D\left(\psi f \varphi^{-1}\right)(\varphi(x)) \cdot D\left(\varphi \varphi_1^{-1}\right)(\varphi_1(x))$$

elde edilir. $\varphi\varphi_1^{-1}$ ve $\psi_1\psi^{-1}$ birer difeomorfizma olduklarından

$$D\left(\varphi\varphi_1^{-1}\right)\left(\varphi_1\left(x\right)\right) \text{ ve } D\left(\psi_1\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(f\left(p\right)\right)\right)$$

matrisleri singüler değildir. Bir matrisi sağdan veya soldan singüler olmayan matrislerle çarpmak o matrisin rankını değiştirmez. O halde $D\psi_1 f\varphi_1^{-1}\left(\varphi_1\left(p\right)\right)$ ve $D\left(\psi f\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(p\right)\right)$ Jakobiyen matrislerinin rankları aynıdır. ■

Tanım 2.1.12 *M, N iki düzgün manifold, $f : M \longrightarrow N$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. f nin p noktasındaki rankı $\psi f\varphi^{-1}$ nin $\varphi\left(p\right)$ noktasındaki rankı olarak tanımlanır. Burada $\left(U, \varphi\right)$, M nin p noktasında ve $\left(V, \psi\right)$, N nin $f\left(p\right)$ noktasında birer koordinat kartıdır.*

Önerme 2.1.11, f nin bir p noktasındaki rankının iyi tanımlı olduğunu, yani p ve $f\left(p\right)$ noktası komşuluğunda seçilen koordinat kartlarından bağımsız olduğunu gösterir.

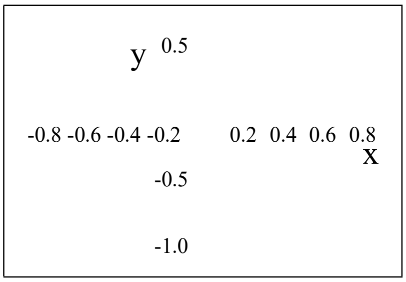
Tanım 2.1.13 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün iki manifold arasında düzgün bir fonksiyon olsun.*

i) *Eğer M nin bütün noktalarında f nin rankı m ise f ye bir immersiyon denir (burada $m \leq n$ olmalıdır).*
ii) *Eğer f bir immersiyon ve $f : M \longrightarrow f\left(M\right)$ homeomorfizma ise f ye bir embeding denir.*
iii) *f bir embeding ve $f\left(M\right) = N$ ise f ye bir difeomorfizma denir.*

$f : M \longrightarrow N$ bir embeding ise $f\left(M\right)$, M den doğal olarak bir türevlenebilir yapıyı miras alır, yani $f\left(M\right)$ de türevlenebilir bir manifold olur. Tanım kümesi kompakt olan bire bir bir immersiyonun bir embeding olduğu iyi bilinen bir sonuçtur [5]. Topolojide homeomorfik uzayların aynı olarak düşünülmesi gibi difeomorfik manifoldlarda aynı olarak göz önüne alınır.

Örnek 2.1.14 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = x^5$ bir homeomorfizmadır ve düzgün fonksiyondur ancak 0 noktasındaki rankı 0 olduğundan bir immersiyon değildir. Dolayısıyla bir embeding veya difeomorfizma olamaz.*

Örnek 2.1.15 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\theta\right) = \left(\sin 3\theta \cos\theta, \sin 3\theta \sin\theta\right)$ ile verilen fonksiyon bir immersiyondur ve görüntü kümesi 3-yapraklı gül eğrisidir. Bu immersiyonu, θ yı 2π moduna göre alarak $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ şeklinde bir immersiyon olarak da düşünebiliriz.*



Şekil 2.2 *3-yapraklı gül eğrisi*

2.2 Yönlendirilebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1 *U, V, $\mathbb{R}^n$ de açık iki alt küme ve $f : U \longrightarrow V$ bir difeomorfizma olsun. Bir $x \in U$ noktasında f nin Jakobiyen matrisinin determinantı pozitif (negatif) ise f ye x noktasında yönü koruyor (ters çeviriyor) denir. Eğer her $x \in U$ noktasında f nin Jakobiyeninin determinantı pozitif (negatif) ise f ye yönü koruyor (ters çeviriyor) denir.*

Önerme 2.2.2 *U, V, $\mathbb{R}^n$ de açık iki alt küme ve $f : U \longrightarrow V$ bir difeomorfizma olsun. Bu durumda U bağlantılı ve f, U nun en az bir noktasında yönü koruyorsa f dönüşümü U üzerinde yönü korur.*

İspat: $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(p) = \det(Df(p))$ olsun. Bu durumda f difeomorfizma olduğundan λ süreklidir ve her $p \in U$ için $\lambda(p) \neq 0$. Bir $p_0 \in U$ noktasında $\lambda(p_0) > 0$ olduğundan ve f nin sürekliliğinden (ara değer teoremine göre) $\{p \in U | \lambda(p) > 0\} = U$ elde edilir ve ispat biter. ■

Tanım 2.2.3 *$(M^m, \mathcal{D})$ bir düzgün manifold olsun. Her (U, φ),$(V, \psi) \in \mathcal{B}$ için $\psi\varphi^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantı pozitif, yani yönü koruyacak şekilde, $\mathcal{D}$ nin bir $\mathcal{B}$ tabanı varsa $(M^m, \mathcal{D})$ ye bir yönlendirilebilir manifold denir.*

2.3 Manifoldların Teğet Uzayları

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyonun türevlenebilme işlemini ele alalım. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon ise $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyondur. Bu ise $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(f) = f\,'$ ile bir lineer dönüşüm tanımlamamızı sağlar. Şimdi bir $p \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenmeyi ele alalım ve bunu D_p ile gösterelim. Bu durumda $D_p : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$D_p(f) = f'(p) = D(f)(p)$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon, temel analizin lineerlik, Leibnitz formülü ve yerellik gibi iyi bilinen kurallarını sağlar. Burada yerellik $D_p(f)$ nin $\mathbb{R}$ nin tamamından ziyade yalnızca p noktasının bir komşuluğunda f ye bağlı olduğu anlamındadır.

Bu düşünce, ileri analizin yönlü türev kavramına genişletilebilir. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ve $p \in \mathbb{R}^m$ verildiğinde, f nin p noktasında ve bir $v \in \mathbb{R}^m$ yönündeki yönlü türevi

$$D_v(f)(p) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

olarak tanımlanabilir. Bu durumda

$$D_v : C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \text{ ve } D_{v,p} : C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları elde edilir ve $D_{v,p}$ yukarıdaki üç şartı sağlar. Teğet vektör tanımlanırken bu üç şartı soyutluyoruz. Bir anlamda v yönündeki türev, v yönünün kendisiyle özdeşleştiriliyor. Yerellik sayesinde, yerel olarak aynı olduklarından $\mathbb{R}^m$ yi M^m ile değiştirebiliriz.

Tanım 2.3.1 *M^m bir düzgün manifold ve $p \in M$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $v : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyona p noktasında bir teğet vektör denir:*

***T1)** Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $h, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $v(\alpha h + \beta g) = \alpha v(h) + \beta v(g)$ dir.*

***T2)** Her $h, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $v(h.g) = v(h)g(p) + h(p)v(g)$ dir.*

***T3)** Her $h, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için, eğer p nin bir U komşuluğunda $h|U = g|U$ ise $v(h) = v(g)$ dir.*

Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $h, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $\alpha h + \beta g$ ve $h \cdot g$ fonksiyonlarının ikisi de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ nin elamanıdır ve her $x \in M$ için

$$\begin{aligned} (\alpha h + \beta g)(x) &= \alpha h(x) + \beta g(x) \\ (h \cdot g)(x) &= h(x) g(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlıdırlar.

Bir türev operatörü için v, p noktasında bir teğet vektör ve $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sabit ise bu durumda $v(h) = 0$ dır. Gerçekten, bir $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ alalım ve $g(p) \neq 0$ olsun. Örneğin, her $p \in M$ için $g(p) = 1$ olsun. $T2$) ye göre

$$v(h \cdot g) = v(h)g(p) + h(p)v(g)$$

olur. Diğer taraftan h sabit olduğundan $h \cdot g$ çarpım fonksiyonu $h(p)\,g$ skaler çarpım fonksiyonu ile aynıdır. $\alpha = 0$ ve $\beta = h(p)$ olmak üzere $T1)$ uygulanırsa

$$v(h \cdot g) = v(h(p)\,g) = h(p)\,v(g)$$

elde edilir. Buradan $v(h)g(p) = 0$ olduğundan iddia edildiği gibi $v(h) = 0$ bulunur.

p noktasındaki tüm teğet vektörlerinin kümesi T_pM ile gösterilsin. Bu durumda T_pM ye M nin p noktasındaki *teğet uzayı* denir.

Örnek 2.3.2 *Teğet vektöre en basit örnek sıfır vektörüdür, yani her $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ yi 0 reel sayısına götüren fonksiyon bir teğet vektördür. Diğer taraftan $M = \mathbb{R}^m$ olmak üzere yönlü türevlerin hepsi teğet vektördür. Gerçekten; aşağıdaki Teorem 2.3.3 den, yönlü türevler $\mathbb{R}^m$ için teğet vektörlerdir ve başka teğet vektör yoktur.*

Şimdi, M^m keyfi bir manifold ve (U,φ), p noktası komşuluğunda bir koordinat kartı olsun. $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ yi $\dfrac{\partial(h\varphi^{-1})}{\partial x_i}|_{\varphi(p)}$ reel sayısına götüren $\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)|_p \; : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)|_p \; \in T_pM$ dir, yani bu işlem teğet vektör tanımındaki üç şartıda sağlar.

Aslında φ, $\mathbb{R}^m$ nin koordinat sistemini U ya taşır; $\left(\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\right)|_p$, h nin i. eksen yönündeki türevidir. Aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz. İspatı [5] kaynağında bulunabilir.

Teorem 2.3.3 *M^m bir manifold ve $p \in M$ olsun. Bu durumda T_pM, $\mathbb{R}$ üzerinde m-boyutlu bir vektör uzayıdır.*

Bu teoremin ispatında

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_p \;\; | \; i = 1, ...m\right\}$$

kümesinin T_pM için bir taban olduğu gösterilmektedir. Dolayısıyla herhangi bir $v \in T_pM$ için $\alpha_i = v(\varphi_i)$ olmak üzere

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_p$$

şeklinde yazılabileceği iddia ediliyor. Sonuç olarak bir $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ verildiğinde,

$$v(h) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial h}{\partial\varphi_i}|_p$$

şeklinde yazılabildiği gösterilmektedir. Buradaki $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ sıralı m lisine v teğet vektörünün (U,φ) koordinat kartına göre bileşenleri denir.

Önerme 2.3.4 *$f : M \longrightarrow N$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. Her $v \in T_pM$ ve her $g \in C^{\infty}(N, \mathbb{R})$ için*

$$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N,\; df_p(v)(g) = v(gf)$$

ile tanımlanan dönüşüm lineerdir ve bu lineer dönüşümün rankı f nin p noktasındaki rankı ile aynıdır.

İspat: $df_p(u+v) = df_p(u) + df_p(v)$ ve $df_p(ru) = rdf_p(u)$ olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$\begin{aligned} df_p(u+v) &= (u+v)(gf) \\ &= u(gf) + v(gf) \\ &= df_p(u)(g) + df_p(v)(g) \\ &= (df_p(u) + df_p(v))(g) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $df_p(ru) = rdf_p(u)$ olduğu kolayca gösterilir.

$$\begin{aligned} df_p(ru) &= (ru)(gf) \\ &= ru(gf) \\ &= rdf_p(u)(g) \\ &= rdf_p(u)\ . \end{aligned}$$

(U, φ), $p \in M$ noktasında ve (V, ψ), $f(p) \in N$ noktasında iki koordinat kartı ve $f(U) \subset V$ olsun. Bu durumda, tanım olarak f nin p noktasındaki rankı $D(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(p))$ Jakobiyen matrisinin rankıdır. Diğer taraftan $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ lineer dönüşümünün rankı ise T_pM ve $T_{f(p)}N$ uzaylarının seçilen herhangi tabanına göre df_p lineer dönüşümünün matrisinin rankıdır.

$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_p \mid i = 1, 2, \ldots, m \right\}$, T_pM nin ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial \psi_i}|_{f(p)} \mid i = 1, 2, \ldots, n \right\}$, $T_{f(p)}N$ nin tabanlarıdır.

Bu tabanlara göre

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}|_p \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial \psi_k}|_{f(p)}$$

olmak üzere, df_p lineer dönüşümünün matrisi (a_{ij}) dir. ψ_i nin $f(p)$ noktası komşuluğuna bir kısıtlanışını N nin tamamına genişletebiliriz ve bu genişletmeyi yine ψ_i ile gösterelim.

Önceki denklem ψ_i ye uygulanırsa $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\left(\psi_i f\right)\Big|_p = a_{ij}$ elde edilir. Çünkü

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_k} = \begin{cases} 1 \quad , \quad k = i \text{ ise} \\ 0 \quad , \quad k \neq i \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Buradan $a_{ij} = \frac{\partial}{\partial\varphi_j}\left(\psi_i f\right)\Big|_p = \frac{\partial\left(\psi f\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)}$ olur, bu ise $D\left(\psi f\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(p\right)\right)$ Jakobiyen matrisinin (i, j) elemanıdır. O halde df_p nin matrisi $D\left(\psi f\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(p\right)\right)$ Jakobiyen matrisidir ve df_p lineer dönüşümünün rankı f nin p noktasındaki rankıdır. ■

2.4 Alt Manifoldlar ve Manifoldların Embedingi

Tanım 2.4.1 *$(N^n, \mathcal{D})$, düzgün bir manifold ve $M \subset N$ olsun. Her $p \in M$ için en az bir $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ öyle ki U, p noktasının N de bir komşuluğu ve $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \cap \varphi\left(U\right)) = U \cap M$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu M alt kümesine N nin m-boyutlu alt manifoldu denir.*

Burada $\mathbb{R}^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)\,|x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ şeklinde ele alınmaktadır. Bu durumda $\{(U \cap M, \varphi|U \cap M) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ve $U \cap M \neq \varnothing\}$ ailesi M için bir atlastır [11].

Örnek 2.4.2 *$m \leq n$ olmak üzere $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt manifoldudur. $m < n$ olmak üzere $\mathbb{S}^m$, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt manifoldudur. Ayrıca $m \leq n$ olmak üzere $\mathbb{S}^m$, $\mathbb{S}^n$ nin bir alt manifoldudur.*

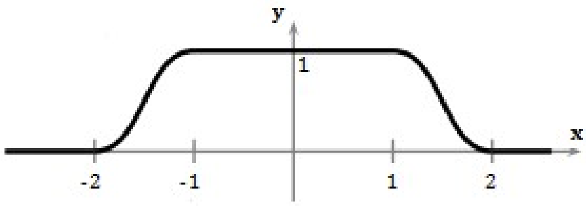
Eğer M, N nin bir alt manifoldu ise bu durumda $i : M \longrightarrow N$, $i\left(p\right) = p$ içerme fonksiyonunun bir embeding olacağı açıktır. Uygun şartlarda tersinin de geçerli olacağı aşağıdaki önermeden anlaşılır.

Önerme 2.4.3 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ bir embeding olsun. Eğer $f(M)$, f ile M den gelen türevlenebilir yapıya sahipse $f(M)$, N nin bir alt manifoldudur [5].*

Önerme 2.4.4 *M^m düzgün bir kompakt manifold olsun. Bu durumda bir $n \geq m$ için M^m, $\mathbb{R}^n$ ye gömülebilir, yani bir $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ embedingi vardır.*

İspat: Bu ispat için; her $x \in \mathbb{R}^m$ ve $\|x\| \leq 1$ için $\lambda\left(x\right) = 1$, her $x \in \mathbb{R}^m$ ve $\|x\| \geq 2$ için $\lambda\left(x\right) = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^m$ ve $1 < \|x\| < 2$ için $0 < \lambda\left(x\right) < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde düzgün bir $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ihtiyaç olacaktır.

$m = 1$ durumunda $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, grafiği aşağıdaki şekilde olduğu gibi bir fonksiyon istiyoruz.



Şekil 2.3 *Bump fonksiyonu*

Şimdi

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & ,\ 0 < x < 1 \text{ ise} \\ 0 & ,\ x \leq 0 \text{ veya } x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ w(x) = \frac{\int_0^x v(t)\,dt}{\int_0^1 v(t)\,dt} \quad \text{ve} \quad \mu(x) = \begin{cases} w(x+2) & ,\ x \leq 0 \text{ ise} \\ w(2-x) & ,\ x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanırsa bu üç fonksiyon düzgündür. Buradan $\lambda : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \mu(\|x\|)$ olarak tanımlanırsa bu λ düzgündür ve istenen özellikleri sağlar.

M kompakt olduğundan $1 \leq i \leq k$ olmak üzere sonlu sayıda (U_i, φ_i) koordinat kartlarını $\{x \in \mathbb{R}^m |\ \|x\| \leq 2\} \subset \varphi_i(U_i)$ ve $M = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_i^{-1}(B(\mathbf{0},1))$ sağlanacak şekilde bulabiliriz.

λ yukardaki gibi olmak üzere, her $1 \leq i \leq k$ için

$$\lambda_i : M^m \longrightarrow [0,1],\ \lambda_i(p) = \begin{cases} \lambda(\varphi_i(p)) & ,\ p \in U_i \text{ ise} \\ 0 & ,\ p \notin U_i \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. λ_i ler birer düzgün fonksiyondur.

Şimdi de her $1 \leq i \leq k$ için

$$g_i : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g_i(p) = \begin{cases} \lambda_i(p)\,\varphi_i(p) & ,\ p \in U_i \text{ ise} \\ \mathbf{0} & ,\ p \notin U_i \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. g_i ler birer düzgün fonksiyondur. Her $1 \leq i \leq k$ için $f_i : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{m+1}$ fonksiyonunu $f_i = (g_i, \lambda_i)$ olarak tanımlayalım. f_i ler birer düzgün fonksiyondur.

Son olarak,

$$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^{k(m+1)},\ f(p) = (f_1(p), f_2(p), \ldots, f_m(p))$$

ile tanımlanan f fonksiyonunun düzgün olduğu açıktır.

$p \in M$ ise bir $1 \leq i \leq k$ için $p \in \varphi_i^{-1}(B(\mathbf{0},1))$ dir ve dolayısıyla p nin bir U açık komşuluğundaki her $q \in U$ için $\varphi_i(q) \in B(\mathbf{0},1)$ sağlanır. Buradan her $q \in U$ için $\lambda_i(q) = 1$ ve $f_i(q) = (\varphi_i(q), 1)$ olur. O halde φ_i bir difeomorfizma olduğundan $d(\varphi_i)_p$ bir izomorfizmadır ve $d(f_i)_q = \left(d(\varphi_i)_p, 0\right)$ bire bir olur. Buradan df_p bire bir bulunur. O halde f bir immersiyondur. Aynı zamanda f de bire birdir. Gerçekten $f(p) = f(q)$ ise her $1 \leq i \leq k$ için $\lambda_i(p)\varphi_i(p) = \lambda_i(q)\varphi_i(q)$ ve $\lambda_i(p) = \lambda_i(q)$ olur. Fakat bir $1 \leq i \leq k$ için $\lambda_i(p) = 1$ dir. Bu durumda $\lambda_i(q) = 1$ ve dolayısıyla $\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$ olur ve φ_i nin bire bir oluşundan $p = q$ elde edilir. O halde f, bire bir immersiyondur, dolayısıyla M kompakt olduğundan f bir embedingdir. ■

Kompakt olmayan manifoldların embedingi ile ilgili sonuç aşağıda verilmektedir. Bunun bir ispatı [11] veya [13] kaynaklarında bulunabilir.

Önerme 2.4.5 *M^m düzgün bir manifold olsun. Bu durumda bir $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ embedingi $f(M^m) \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ kapalı alt küme olacak şekilde bulunabilir.*

2.5 Manifoldlar Üzerinde Fonksiyonlar ve Kritik Noktaları

Tanım 2.5.1 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon olsun. Bir $p \in M$ noktasında f nin rankı n ise p ye f nin bir regüler noktası, aksi halde p ye f nin bir kritik noktası denir. Bir $q \in N$ noktası için $f^{-1}(q)$ nun her noktası regüler ise q ya bir regüler değer, aksi halde q ya bir kritik değer denir. Eğer $q \in N \backslash f(M)$ ise $f^{-1}(q) = \varnothing$ olur ve bu durumda q nun bir regüler değer olduğu kabul edilir.*

$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer $m < n$ ise M nin her noktasının f nin bir kritik noktası olacağı açıktır. Çünkü bu durumda rank asla m den büyük olamaz.

Regüler noktaları analiz eden aşağıdaki Teorem 2.5.2 [5] kaynağında bulunabilir. Bu teoremin bir sonucu olarak düzgün bir fonksiyonun regüler noktaları kümesinin açık, dolayısıyla kritik noktaları kümesinin kapalı olduğu sonucuna ulaşacağız. Ayrıca regüler bir değerin ters görüntüsünün alt manifold olacağını göreceğiz.

Teorem 2.5.2 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. Bu durumda p, f nin bir regüler noktasıdır ancak ve ancak $\psi(f(p)) = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan N nin yapısındaki her (V, ψ) koordinat kartı için M nin yapısında bir (U, φ) koordinat kartı bulunabilir öyle ki:*

i) $f(U) \subset V$,

ii) $\varphi(p) = 0$ *ve*

iii) *her $(x_1, ..., x_m) \in \varphi(U)$ için $\psi f \varphi^{-1}(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_n)$ sağlanır.*

İspat: p, f nin regüler noktası ve $\psi(f(p)) = \mathbf{0}$ olmak üzere (V, ψ) nin $f(p)$ noktasında bir koordinat kartı olsun. $\phi(p) = \mathbf{0}$ ve $f(W) \subset V$ olacak şekilde (W, ϕ), p noktasında bir koordinat kartı olsun. $\psi f \phi^{-1}$ fonksiyonuna Sonuç 1.1.11 uygulanırsa $\mathbb{R}^m$ de $\mathbf{0}$ ın bir komşuluğundan yine sıfırın başka bir komşuluğuna bir h difeomorfizması vardır öyle ki $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve $\psi f \phi^{-1} h(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_n)$ sağlanır.

$U = \phi^{-1}$ (h nin tanım kümesi) ve $\varphi = h^{-1}\phi$ olsun. $M2$) ye göre (U, φ), M nin de türevlenebilir yapısındadır. Üstelik, (U, φ), istenen üç şartı sağlar.

Diğer taraftan, eğer teoremdeki gibi (V, ψ) ve (U, φ) koordinat kartı çifti varsa bu durumda $\psi f \varphi^{-1}$dönüşümünün $\mathbf{0}$ noktasında rankının n olduğu açıktır. Buna göre f nin p noktasında rankı n dir. Yani p, f nin bir regüler noktasıdır. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak regüler noktalar kümesinin açık olduğunu elde ederiz.

Sonuç 2.5.3 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon olsun. f nin regüler noktaları kümesi M de açıktır.*

İspat: $S = \{p \in M \mid p, f \text{ nin regüler noktasıdır}\}$ ve $p \in M$ olsun. (U, φ), $p \in M$ noktasında ve (V, ψ), $f(p) \in N$ noktasında Teorem 2.5.2 deki gibi iki koordinat kartı olsun. $\psi f \varphi^{-1}$ dönüşümünün rankı $\varphi(U)$ kümesi üzerinde n dir. Yani f nin U üzerindeki rankı n dir. Dolayısıyla p, S nin bir iç noktasıdır ve sonuç olarak $S \subset M$ açık alt kümedir. ■

Yine son teorem, bir regüler nokta komşuluğunda koordinat kartlarını uygun bir şekilde seçerek, fonksiyonun, regüler noktanın bir komşuluğunda yalnızca ilk n koordinat üzerine izdüşümü olduğunu açıklar. Bir uygulama olarak aşağıdaki önemli sonucu elde ederiz. Sonucun ispatı [5] kaynağında bulunabilir.

Sonuç 2.5.4 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon ve q, f nin bir regüler değeri olsun. Bu durumda $f^{-1}(q)$, M nin $(m-n)$-boyutlu bir alt manifoldu olacak şekilde doğal bir düzgün yapıya sahiptir, yani $f^{-1}(q)$, M nin $(m-n)$-boyutlu alt manifoldudur.*

Yukardaki teorem ve sonuç, regüler nokta ve regüler değerlerin çok iyi davrandıklarını ve onların çalışılmasının kolay olduğunu gösterir. Diğer yandan kritik noktalar çok daha karmaşıktır.

Şimdi, manifoldlar üzerinde reel değerli fonksiyonları ve kritik noktalarını ele alalım.

Tanım 2.5.5 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in M$ olsun. f nin p noktasındaki bir (U, φ) koordinat kartına göre Hesiyeni; (i,j) elemanı $\frac{\partial^2 \left(f\varphi^{-1}\right)(f(p))}{\partial x_i \partial x_j}$ olan $m \times m$ tipindeki kare matrisidir. Eğer bir koordinat kartına göre f nin bir p kritik noktasındaki Hesiyen matrisi singüler (singüler değil) ise f nin bu p kritik noktasına dejenere (dejenere olmayan) kritik noktası denir. Ayrıca bir p kritik noktasındaki Hesiyen matrisinin negatif özdeğerlerinin sayısına kritik noktanın indeksi denir.*

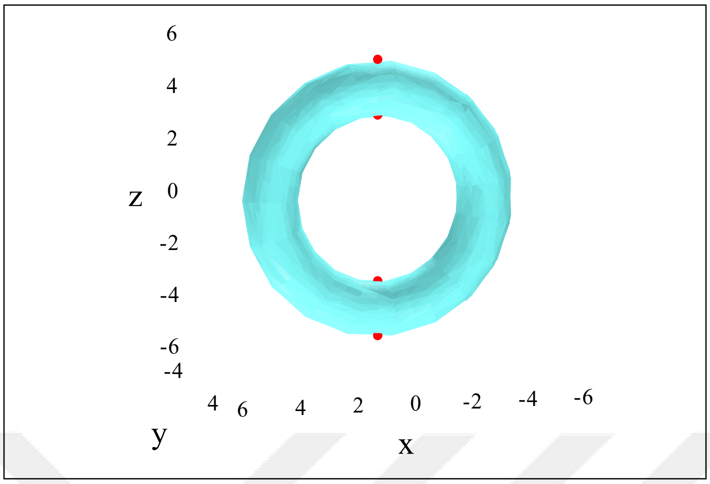
Bu tanımda verilen kavramların iyi tanımlı olduğu, yani verilen nokta komşuluğunda seçilen koordinat kartından bağımsız olduğu gösterilebilir. (U, φ) ve (V, ψ) bir $p \in M$ noktasında iki koordinat kartı olsun. $p \in M$, f nin (U, φ) koordinat kartına göre kritik noktası olsun. Kritik nokta olmanın seçilen koordinat kartlarından bağımsızlığı Önerme 2.1.11 yardımıyla kolayca gösterilebilir. Şimdi bu iki koordinat kartına göre $p \in M$ kritik noktasında Hesiyen matrisleri karşılaştıralım. $f\psi^{-1}\left(\psi\left(p\right)\right) = \left(f\varphi^{-1}\right)\left(\varphi\psi^{-1}\right)\left(\psi\left(p\right)\right)$ şeklinde olduğundan gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$H\left(f\psi^{-1}\right) = D\left(\varphi\psi^{-1}\right)^t H\left(f\varphi^{-1}\right) D\left(\varphi\psi^{-1}\right)$$

elde edilir. $\left(\psi\varphi^{-1}\right)$ bir difeomorfizma olduğundan istenen sonuç Önerme 1.2.6 dan çıkar. O halde bir kritik noktanın dejenere ya da dejenere olmayan kritik nokta olması ve indeksi seçilen koordinat kartına bağlı değildir.

Örnek 2.5.6 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\left(u, v\right) = \left(\left(4 + \cos u\right)\cos v, \sin u, \left(4 + \cos u\right)\sin v\right)$ *bir immersiyondur ve $f\left(\mathbb{R}^2\right)$, $\mathbb{R}^3$ de bir tor yüzeyidir. f bire bir olmadığından bir embeding değildir ancak yerel hesaplamalar için f den yararlanabiliriz. Her immersiyon yerel olarak embedingdir. u ile v, 2π moduna göre alınırsa, f den torun bir embedingi elde edilir. $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $L\left(x, y, z\right) = z$ olarak tanımlanırsa L nin düzgün fonksiyon olduğu açıktır.*

L nin alt manifold olarak tor yüzeyi üzerine kısıtlanışı da düzgün bir fonksiyondur ve bu L nin kritik noktaları $(0,0,-5)$, $(0,0,-3)$, $(0,0,3)$, $(0,0,5)$ olarak bulunur. Bu noktaların indeksleri ise sırasıyla 0, 1, 1, 2 elde edilir.



Şekil 2.4 *Tor yüzeyi üzerinde L nin kritik noktaları*

Önerme 2.5.7 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki düzgün bir fonksiyonun dejenere olmayan kritik noktaları ayrıktır.*

İspat: $p \in M$, f nin dejenere olmayan bir kritik noktası ve (U, φ), p noktasında alınan bir koordinat kartı olsun. $g : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g = \left(\frac{\partial f \varphi^{-1}}{\partial u_1}, \frac{\partial f \varphi^{-1}}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f \varphi^{-1}}{\partial u_m}\right)$ olarak tanımlayalım. f nin U üzerindeki kritik noktaları g yi sıfır yapan noktalardır. $\varphi(p) = x_0$ ise $g(x_0) = \mathbf{0}$ dır. g nin türevi ise f nin Hesiyen matrisidir. x_0 noktasında bu Hesiyen matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğundan g ye ters fonksiyon teoremini uygulayabiliriz ve g bu x_0 noktasının bir komşuluğunda difeomorfizmadır. Dolayısıyla $g(x) = \mathbf{0}$ denkleminin bu komşulukta tek çözümü x_0 dır. O halde p nin bir açık komşuluğunda f nin başka bir kritik noktası yoktur ve dejenere olmayan kritik noktalar ayrıktır. Burada kritik nokta olmanın seçilen koordinat kartından bağımsız olduğunu not edelim.

Önerme 2.5.8 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon ve M kompakt olsun. Eğer f nin bütün kritik noktaları dejenere olmayan kritik nokta ise f nin kritik noktalarının sayısı sonludur.*

İspat: $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün ve sadece dejenere olmayan kritik noktaları bulunan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun dejenere olmayan kritik noktaları kümesini C ile gösterelim. Sonuç 2.5.3 den regüler noktalar kümesi açıktır. O halde kritik noktalar kümesi C kapalı olur. Önerme 2.5.7 den, her $p \in C$ için bir $p \in U_p$ açık komşuluğu p

dışında kritik nokta içermeyecek şekilde seçilebilir. Buradan $\{U_p : p \in C\} \cup \{M - C\}$, M nin bir açık örtümüdür. M nin kompaktlığından bu örtümün sonlu bir alt örtümü vardır. Yani bir $p_1, p_2, \ldots, p_n \in C$ için

$$M = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_p \right) \cup (M - C)$$

şeklinde yazılabilir. O halde dejenere olmayan kritik noktaların sayısı sonludur. ■

Tanım 2.5.9 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer f nin bütün kritik noktaları dejenere olmayan kritik nokta ise bu fonksiyona bir Morse fonksiyonu denir.*

Her manifold üzerinde sonsuz çoklukta Morse fonksiyonu bulunabileceği 3. bölümde açıklanacaktır.

2.6 Sıfır Ölçümlü Kümeler ve Sard Teoremi

Tanım 2.6.1 *Her $1 \leq i \leq n$ için a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

tanımlı kümeye $\mathbb{R}^n$de bir kutu veya dikdörtgen denir. Böyle bir B kutusunun hacmi ise $\mu(B) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.6.2 *$A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için birleşimleri A yı kapsayan bir $\{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$ kutular ailesi $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(B) < \epsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu A alt kümesine $\mathbb{R}^n$ de ölçümlü sıfır denir.*

Bu tanımlarda kutunun kapalı kutu veya açık kutu olması veya küp olması farketmez. $\mathbb{R}^n$ deki sayılabilir bir kümenin ölçümünün sıfır, daha genel olarak ölçümü sıfır olan sayılabilir sayıda kümenin birleşiminin de ölçümünün sıfır olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.6.3 *$U \subset \mathbb{R}^m$ açık ve $C \subset U$ ölçümü sıfır olan bir küme olsun. Bu durumda $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ düzgün bir fonksiyon ise $f(C)$ nin $\mathbb{R}^n$ de ölçümü sıfırdır.*

Bu teoremin bir ispatı [1], [13], [14] kaynaklarında bulunabilir. Bu teorem sayesinde ölçüm kavramı manifoldlar üzerine taşınabilir.

Tanım 2.6.4 *M, m-boyutlu düzgün bir manifold ve $C \subset M$ olsun. Eğer M nin türevlenebilir yapısına ait her (U, φ) koordinat kartı için $\varphi(C \cap U) \subset \mathbb{R}^m$ nin ölçümü sıfır ise $C \subset M$ nin ölçümü sıfırdır denir.*

Manifoldların topolojisini ikinci sayılabilir aldığımızdan, her atlasın sayılabilir bir alt atlası seçilebilir. Bu alt atlastaki koordinat dönüşümlerine yukardaki teorem uygulanırsa; seçilen bu atlasa ait her $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinat kartı için $\varphi_\alpha(C \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ nin ölçümü sıfır ise $C \subset M$ nin ölçümü sıfırdır.

Aşağıdaki teorem Sard teoremi olarak bilinmekte ve ispatı [1], [13], [14] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 2.6.5 *$U \subset \mathbb{R}^m$ açık ve $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ düzgün bir fonksiyon ve C, f nin kritik noktalarının kümesi olsun. Bu durumda $f(C)$ nin $\mathbb{R}^n$ de ölçümü sıfırdır.*

Bu teoremin manifoldlar cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir ve ispatı [1], [13], [14] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 2.6.6 *$f : M^m \longrightarrow N^n$ düzgün bir fonksiyon ve C, f nin kritik noktalarının kümesi olsun. Bu durumda $f(C)$ nin N^n de ölçümü sıfırdır.*

BÖLÜM 3

ODAK NOKTALAR

3.1 Öklid Uzaylarında Manifoldlar ve Odak Noktaları

Bu bölümde bir Öklid uzayına gömülmüş (embed edilmiş) bir manifoldun odak noktası kavramı [10] yardımıyla açıklanmaktadır. Bu bölümün bir sonucu olarak $\mathbb{R}^n$ ye embed edilmiş herhangi bir manifold üzerinde dejenere kritik noktası olmayan çok sayıda fonksiyon bulunduğunu göreceğiz. Gerçekten, bir $x \in \mathbb{R}^n$ sabit noktası için $L_x : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $L_x(p) = \|x - p\|^2$ ile tanımlanırsa, hemen hemen her x noktası için L_x in dejenere kritik noktası olmadığını, yani bir Morse fonksiyonu olduğunu göreceğiz. Benzer yöntemler [13], [14] kaynaklarında da kullanılmıştır.

$M \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$ boyutlu, $\mathbb{R}^n$ ye embed edilmiş, düzgün bir manifold olsun. $N \subset M \times \mathbb{R}^n$,

$$N = \{(p, v) : p \in M,\ v \text{ vektörü } M \text{ ye } p \text{ noktasında diktir.}\}$$

ile tanımlansın. N ye M nin normal vektör demeti denir. N nin $\mathbb{R}^{2n}$ ye embed edilmiş n-boyutlu düzgün bir manifold olduğu gösterilebilir. $E : N^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $E(p, v) = p + v$ olsun. (E ye "uç nokta dönüşümü" denir.)

Tanım 3.1.1 *$(p, v) \in N$ ve (p, v), E nin bir kritik noktası, yani (p, v) noktasında E nin Jakobiyeninin rankı $n - \mu$, $(\mu > 0)$ ise $x = p + v \in \mathbb{R}^n$ noktasına M nin p noktasında katlılığı μ olan bir odak noktası (focal point) denir. Eğer en az bir $p \in M$ için x, M nin p noktasında odak noktası ise x noktasına M nin bir odak noktası denir.*

Teorem 3.1.2 *Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için x noktası M nin bir odak noktası değildir.*

İspat: N nin $\mathbb{R}^{2n}$ ye embed edilmiş n-boyutlu düzgün bir manifold olduğunu görmüştük. Dolayısıyla N ikinci sayılabilirdir. Odak noktalar, $E : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uç nokta dönüşümünün kritik noktalarının E altındaki görüntü kümesi olduğundan, Sard teoremi gereğince odak noktaların ölçümü sıfırdır. ■

Odak nokta kavramını daha iyi anlamak için Öklid uzayında bir manifoldun "ikinci temel form" kavramını tanıtmak uygun olacaktır. Bunu sabit bir yerel parametreleme ile yapıyoruz.

$O \subset \mathbb{R}^m$ açık ve $\alpha : O \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, M manifoldunun bir bölgesinin

$\alpha(u_1, ..., u_m) = (\alpha_1(u_1, ..., u_m), ..., \alpha_n(u_1, ..., u_m))$

şeklinde bir düzgün parametrelemesi olsun. Kısaca $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ şeklinde yazabiliriz.

Bu α parametrelemesine göre birinci temel form,

$(g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle\right)$

reel değerli fonksiyonlarının simetrik matrisi olarak tanımlanır.

Diğer taraftan ikinci temel form, vektör değerli fonksiyonların bir (ℓ_{ij}) simetrik matrisidir ve şu şekilde tanımlanır: M nin bir noktasında $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$ vektörü, M ye teğet bir vektör ve M ye dik bir vektörün toplamı olarak ifade edilebilir, yani

$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} = T_{ij} + \ell_{ij}$

olarak yazılabilir. ℓ_{ij}, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}$ nin dikey bileşeni olarak tanımlansın. p noktasında M ye dik olarak verilen herhangi bir v birim vektörü için

$\left(\left\langle v, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle\right) = (\langle v, \ell_{ij} \rangle)$

olur. Bu $(\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisine "M nin p noktasında ve v birim vektörü yönündeki ikinci temel formu" denir.

Bu durumda $(g_{ij})^{-1} (\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisinin $K_1, ..., K_n$ özdeğerlerine M nin p noktasındaki ve v birim normali yönündeki asli eğrilikleri denir. Bu asli eğriliklerin çarpmaya göre tersi olan $K_1^{-1}, ..., K_n^{-1}$ değerlerine asli eğrilik yarıçapı denir. Elbette $(\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisi singüler olabilir. Bu durumda K_i lerin biri veya daha fazlası sıfır olacaktır ve dolayısıyla karşılık gelen yarıçap K_i^{-1} tanımlı olmayacaktır.

Bir p noktasında koordinatların uygun seçilmesiyle g_{ij} matrisinin birim matris alınabileceğini not edelim. Bu durum teorik olarak tartışmayı basitleştirecektir.

Şimdi, v vektörü p noktasında M ye dik bir sabit birim vektör olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ için $p + tv$ lerden oluşan ℓ normal doğrusunu düşünelim.

Teorem 3.1.3 $1 \leq i \leq m$, $K_i \neq 0$ *olmak üzere* M *nin* p *noktasındaki ve* ℓ *doğrusu üzerinde bulunan odak noktaları tam olarak* $p + K_i^{-1}v$ *noktalarıdır. Böylece* M *nin* p *noktasındaki ve* ℓ *doğrusu üzerinde bulunan en çok* m *tane odak noktası vardır. Burada odak noktaların her biri katlılığıyla sayılıyor.*

İspat: Kolaylık açısında durumu şöyle alalım. $M \subset \mathbb{R}^n$, m-boyutlu embed edilmiş bir alt manifold ve

$N = \{(p, v) : p \in M$ ve v, M ye p noktasında diktir$\}$

ise N, $\mathbb{R}^{2n}$ nin embed edilmiş n-boyutlu bir alt manifoldudur.

M manifoldu üzerinde (yerel olarak) $w_1, w_2, \ldots, w_k$ birim normal vektör alanlarını seçebiliriz [10], [14]. Burada $m + k = n$ dir. $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ normal demet manifoldu üzerinde,

$(u_1, u_2, \ldots, u_m, t_1, t_2, \ldots, t_k) \in O \times \mathbb{R}^k$

yerel koordinatlarını kurabiliriz ve bu

$$\left(\alpha\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right), \sum_{i=1}^{m} t_i w_i\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right)\right) = (p, v) \in N$$

noktasına karşılık gelir. Yani $E : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu yerel koordinatlarda

$$e\left(\left(u_1, u_2, \ldots, u_m, t_1, t_2, \ldots, t_k\right)\right) = \alpha\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right) + \sum_{l=1}^{k} t_l w_l\left(u_1, u_2, \ldots, u_m\right)$$

fonksiyonuna karşılık gelir. Bu fonksiyonun kısmi türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial u_i} &= \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} + \sum_{l=1}^{k} t_l \frac{\partial w_l}{\partial u_i} \quad , \ 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial e}{\partial t_l} &= w_l \quad , \ 1 \leq l \leq k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $m + k = n$ vektörün yine n adet $\frac{\partial \alpha}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \alpha}{\partial u_m}$ ve $w_1, w_2, \ldots, w_k$ lineer bağımsız vektörleriyle iç çarpımı alınırsa $n \times n$ tipinde

$$\begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle + \sum\limits_{l=1}^{k} t_l \left\langle \frac{\partial w_l}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle & | & \sum\limits_{l=1}^{k} t_l \left\langle \frac{\partial w_l}{\partial u_i}, w_l \right\rangle \\ --- & | & --- \\ \mathbf{0} & | & I_{k \times k} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin rankı, E nin ilgili noktadaki Jakobiyen matrisinin rankıyla aynıdır. Diğer taraftan,

$$\left\langle w_l, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \frac{\partial w_l}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle + \left\langle w_l, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_j} \right\rangle = 0$$

olduğundan sol üst blok matrisi, $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle$ olmak üzere,

$$g_{ij} - \sum_{l=1}^{k} t_l \left\langle w_l, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_j} \right\rangle$$

şeklinde elde edilir. Buna göre şu sonucu elde etmiş olduk: Bu matris $m \times m$ tipindedir ve rankı r ise;

Sonuç: $p + tv$, M nin p noktasında (katlılığı $\mu = m - r$) olan bir odak noktasıdır ancak ve ancak

$$g_{ij} - \left\langle tv, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_j \partial u_j} \right\rangle \tag{3.1}$$

matrisi singülerdir, yani bu matrisin rankı $= r < m$ dir (burada $v = \sum_{l=1}^{k} t_l w_l$ olarak düşünülüyor).

Şimdi, (g_{ij}) nin birim matris olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1) singülerdir ancak ve ancak $\frac{1}{t}$, $(\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisinin özdeğeridir. Ayrıca μ katlılığı özdeğer olarak $\frac{1}{t}$ nin katlılığına eşittir. ■

Şimdi de bir $x \in \mathbb{R}^n$ sabit noktası için

$$L_x : M \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad L_x(p) = \|x - p\|^2$$

ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyona "uzaklık fonksiyonu" denmektedir.

Yerel koordinatlarda bu fonksiyonu

$$L_x(\alpha(u_1, ..., u_m)) = \|x - \alpha(u_1, ..., u_m)\|^2 = \langle x, x \rangle - 2\langle x, \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $1 \leq i \leq m$ olmak üzere,

$$\frac{\partial L_x}{\partial u_i} = -2 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, x - \alpha \right\rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla bir $\alpha(u_0) = p \in M$, L_x in bir kritik noktasıdır ancak ve ancak $x-p$, p noktasında M ye diktir. Bir kritik noktada L_x in ikinci mertebeden kısmi türevleri $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq m$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial u_i \partial u_j} = 2\left(\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u_i \partial u_j}, x - \alpha \right\rangle\right)$$

ile verilir. Teorem 3.1.3 nin ispatında olduğu gibi $x = p + tv$ alınırsa,

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial u_i \partial u_j} = 2(g_{ij} - t\,\langle v, \ell_{ij} \rangle)$$

olur. O halde şu teoremi ispatlamış olduk:

Teorem 3.1.4 *$p \in M$ noktası L_x in bir dejenere kritik noktasıdır ancak ve ancak x noktası M nin p noktasında bir odak noktasıdır. (Burada x, p noktasındaki normal düzlem üzerindedir.)*

Bu sonucu Sard teoremiyle birleştirerek aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.1.5 *Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için (yani sıfır ölçümlü bir küme hariç) L_x uzaklık fonksiyonunun dejenere kritik noktası yoktur.*

Yukarıdaki teori bir kritik noktada $L_x : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun indeksini belirlemek içinde kullanılabilir.

Teorem 3.1.6 ***(L_x için indeks teoremi)*** *Bir $p \in M$ dejenere olmayan kritik noktasında L_x uzaklık fonksiyonunun indeksi x ile p arasındaki doğru parçası üzerinde bulunan odak noktalarının sayısına eşittir; her odak nokta katlılığıyla sayılıyor.*

İspat: L_x uzaklık fonksiyonunun dejenere olmayan bir p kritik noktasındaki indeksi $\frac{\partial^2 L_x}{\partial u_i \partial u_j} = 2(g_{ij} - t\,\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisinin negatif özdeğerlerinin sayısına eşittir. g_{ij} nin birim matris olduğu varsayılırsa, indeks $(\langle v, \ell_{ij} \rangle)$ matrisinin $\geq \frac{1}{t}$ olan özdeğerlerinin sayısına eşittir. Bu durumu Teorem 3.1.3 ile karşılaştırınca sonuç çıkar. ■

Şimdi M, m-boyutlu, bağlantılı, düzgün bir manifold ve $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olsun. Her $p \in M$ için $f(M)$ nin $f(p)$ noktasından geçen k-boyutlu normal düzlemi $\nu_p(f)$ ile gösterilsin. Bu durumda f immersiyonunun normal vektör demeti,

$$N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : f(p) + v \in \nu_p(f)\}$$

ile tanımlanır. $N(f)$ in $(m+k)$-boyutlu bir düzgün manifold olduğunu belirtelim.

$E : N(f) \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, $E(p,v) = f(p) + v$ ile tanımlı E ye "uç nokta dönüşümü" denir ve bu düzgün bir fonksiyondur.

Her immersiyon yerel olarak embeding olduğundan f immersiyonunun odak noktaları kümesinden bahsedebiliriz. (U,φ), bir $p \in M$ noktası komşuluğunda bir koordinat kartı olmak üzere yukardaki hesaplamaları $\alpha = f \circ \varphi^{-1}$, yani

$\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_m) = f \circ \varphi^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$

alarak f immersiyonu üzerine kolayca taşıyabiliriz.

Bu durumda Teorem 3.1.4 şu şekilde ifade edilebilir: $p \in M$ noktası L_x in bir dejenere kritik noktasıdır ancak ve ancak x noktası $f(M)$ nin $f(p)$ noktasında (veya kısaca f nin p noktasında) bir odak noktasıdır. f nin p noktasındaki bütün odak noktalarını $F_p(f)$ veya kısaca $F(p)$ ile gösteriyoruz.

Örnek 3.1.7 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = (5\cos\theta, 3\sin\theta)$ ile verilen f nin bir immersiyon olduğunu göstererek, uzaklık fonksiyonu yardımıyla odak nokta kümesini belirleyelim.*

$f'(\theta) = (-5\sin\theta, 3\cos\theta) \neq (0,0)$

olduğundan f bir immersiyondur. $w = (x,y)$ sabit bir nokta, $L_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$L_w(\theta) = \|(x,y) - f(\theta)\|^2 = \|(x,y) - (5\cos\theta, 3\sin\theta)\|^2 = (x - 5\cos\theta)^2 + (y - 3\sin\theta)^2$

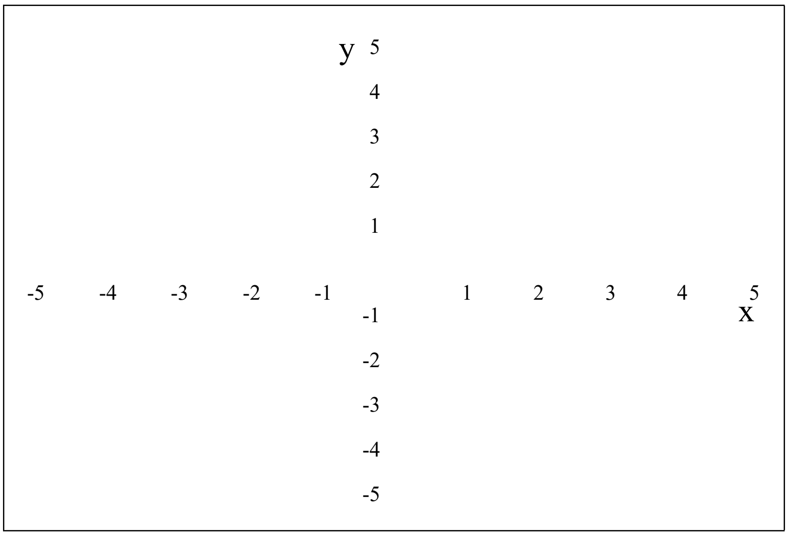
uzaklık fonksiyonu olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_w}{\partial \theta} &= 10x\sin\theta - 6y\cos\theta - 32\cos\theta\sin\theta \\
\frac{\partial^2 L_w}{\partial \theta^2} &= -64\cos^2\theta + 10x\cos\theta + 6y\sin\theta + 32
\end{aligned}$$

$\frac{\partial L_w}{\partial \theta} = 0$ *ve* $\frac{\partial^2 L_w}{\partial \theta^2} = 0$ *eşitliklerinden x ve y çözülürse,*

$$\begin{aligned}
x &= \frac{16}{5}\cos^3\theta \\
y &= \frac{-16}{3}\sin^3\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $\theta \in \mathbb{R}$ için $F(\theta) = (\frac{16}{5}\cos^3\theta, \frac{-16}{3}\sin^3\theta)$, f nin odak nokta kümesinin parametrik denklemidir.



Şekil 3.1 *$f(\theta) = (5\cos\theta, 3\sin\theta)$ elips eğrisi ve odak kümesi*

Örnek 3.1.8 *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta, \theta)$ ile verilen f nin bir immersiyon olduğunu göstererek, uzaklık fonksiyonu yardımıyla odak nokta kümesini belirleyelim.*

$f'(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, 1) \neq (0,0,0)$

olduğundan f bir immersiyondur. $w = (x, y, z)$ sabit bir nokta, $L_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_w(\theta) &= \|(x,y,z) - f(\theta)\|^2 = \|(x,y,z) - (\cos\theta, \sin\theta, \theta)\|^2 \\ &= (x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 + (z - \theta)^2 \end{aligned}$$

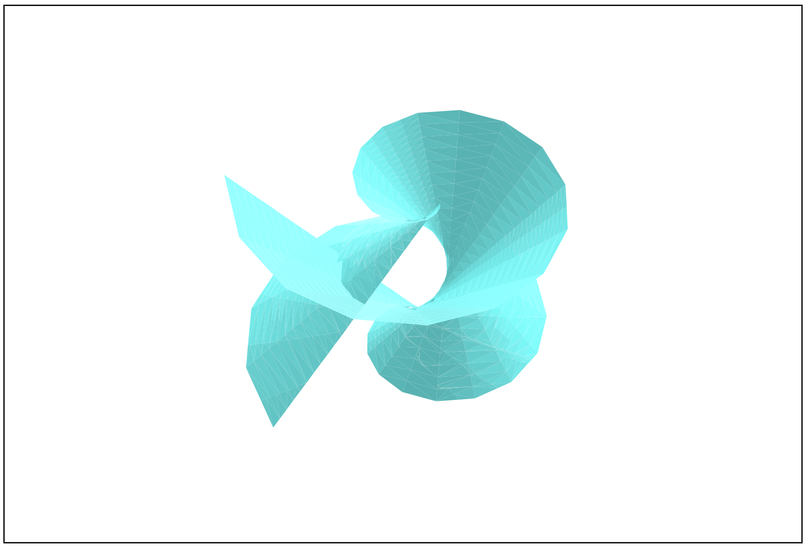
uzaklık fonksiyonu olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_w}{\partial \theta} &= 2\theta - 2z - 2y\cos\theta + 2x\sin\theta \\ \frac{\partial^2 L_w}{\partial \theta^2} &= 2x\cos\theta + 2y\sin\theta + 2 \end{aligned}$$

$\frac{\partial L_w}{\partial \theta} = 0$ *ve* $\frac{\partial^2 L_w}{\partial \theta^2} = 0$ *eşitliklerinden $z = s$ alarak x ve y çözülürse,*

$$\begin{aligned} x &= s\sin\theta - \cos\theta - \theta\sin\theta \\ y &= \theta\cos\theta - s\cos\theta - \sin\theta \\ z &= s \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise f nin odak nokta kümesinin parametrik denklemidir.



Şekil 3.2 $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \theta)$ *helis eğrisi ve odak kümesi*

BÖLÜM 4

İTME UZAYI

Bu son bölümde bir manifoldun bir Öklid uzayına verilen bir immersiyonuna paralel immersiyonlar ele alınacak ve bir immersiyonun global düz normal demetli olması açıklanacaktır. Global düz normal demetli bir immersiyon için tanımlanan itme uzayı (veya öteleme uzayı) kavramı üzerine çalışılacaktır. Bu bölümün 4.3 kısmı bu tezin orijinal kısmıdır.

4.1 Paralel İmmersiyonlar

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon ve $\xi : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer her $p \in M$ için $f(p) + \xi(p) \in \nu_p(f)$ oluyorsa ξ ye f için bir *normal vektör alanı* denir.

Tanım 4.1.1 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon ve ξ, f için bir normal vektör alanı olsun. Her $p \in M$ için p noktası komşuluğunda $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\frac{\partial \xi}{\partial p_i}$, f için p noktasında bir teğet vektör ise ξ ye paralel normal vektör alanı denir.*

M bağlantılı olduğundan, M üzerindeki bir paralel normal vektör alanının normunun sabit olduğunu belirtelim.

Tanım 4.1.2 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olsun. Her $p \in M$ noktasının uygun bir U komşuluğunda paralel normal vektör alanlarından oluşan ortonormal bir $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ kümesi varsa f nin normal demeti yerel düzdür denir. Eğer $U = M$ alınabiliyor ise f nin normal demeti global düz veya kısaca düzdür denir.*

Bu çalışmada f nin düz normal demetli yani global düz normal demetli olduğunu kabul ediyoruz. Normal demet yerel düz olduğunda, her $p \in M$ için p noktasında odak kümenin $\nu_p(f)$ normal düzlemi üzerinde en çok m alt düzlemin birleşiminden oluştuğu veya boş küme olduğu bilinmektedir [12], [4].

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olsun ve $\xi : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ nin f için bir paralel normal vektör alanı olduğunu kabul edelim. $f_\xi : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ dönüşümü

$$f_\xi (p) = f (p) + \xi (p)$$

ile tanımlansın. Eğer f_ξ bir immersiyon ise f_ξ ye f için bir *paralel immersiyon,* ξ ye de *immersive paralel normal vektör alanı* denir. Her $p \in M$ noktası için f ve f_ξ nin normal düzlemlerinin aynı olduğunu belirtelim. f ile f_ξ nin odak noktalarının aynı olduğu [15] de ispatlanmıştır. Aşağıda bu ispatı [15] de olduğu gibi veriyoruz. Bu teoremin bir sonucu olarak, her $p \in M$ için $f (p)$ ile $f_\xi (p)$ arasındaki katlılık dahil odak nokta sayısı sabittir. Bu sabit sayıya f_ξ *paralel immersiyonunun indeksi* denir.

Teorem 4.1.3 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir embeding ve $n : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, f için bir birim paralel normal vektör alanı olsun. Bu durumda, $f_{(n,t)} (p) = f (p) + tn (p)$ olmak üzere;*

(i) *$f_{(n,t)}$ bir immersiyondur ancak ve ancak her $p \in M$ için $f_{(n,t)} (p)$, f nin p noktasında bir odak noktası değildir.*

(ii) *$f_{(n,t)}$ nin p noktasındaki odak noktaları kümesi f nin p noktasındaki odak noktaları kümesine eşittir.*

İspat:

(i) $n_2, ..., n_k$ bir $p \in M$ noktası komşuluğunda birim normal vektör alanları ve $\{n, n_2, ..., n_k\}$ ortonormal bir küme olsun. Bu durumda her $p \in M$ için $L_x (p) = \|x - f (p)\|^2$ uzaklık fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{\partial L_x}{\partial p_i} = -2 \left\langle x - f (p) , \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle , \qquad i = 1, ..., m$$

ve $l = 1, ..., m$ için

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial p_i \partial p_l} = -2 \left\langle x - f (p) , \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial p_l}, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle$$

elde edilir. Bu durumda x, f nin p noktasında odak noktasıdır ancak ve ancak $i = 1, ..., m$ ve $l = 1, ..., m$ için

$$\left\langle x - f (p) , \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle = 0$$

ve

$$\det\left(\left\langle x-f\left(p\right),\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_l}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial p_l},\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle\right)=0$$

sağlanır. Buna göre, bir $s, s_2, ..., s_k$ için

$$x=f\left(p\right)+sn\left(p\right)+\sum_{\alpha=2}^{k}s_\alpha n_\alpha\left(p\right)$$

ve

$$\det\left(\left\langle sn\left(p\right)+\sum_{\alpha=2}^{k}s_\alpha n_\alpha\left(p\right),\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_l}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial p_l},\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle\right)=0$$

olur. p noktasında koordinatların $i=1,...,m, \quad l=1,...,m$ olmak üzere

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial p_i},\frac{\partial f}{\partial p_l}\right\rangle=\delta_{il}$$

olacak şekilde seçildiğini kabul edebiliriz. n paralel olduğundan $i=1,...,m$ olmak üzere en az bir $a_{ij}\in\mathbb{R}$ için

$$\frac{\partial n}{\partial p_i}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j}$$

olur. Bu durumda $i=1,...,m, \quad l=1,...,m$ için

$$\left\langle\frac{\partial n}{\partial p_l},\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle=\left\langle\sum_{j=1}^{m}a_{lj}\frac{\partial f}{\partial p_j},\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle=a_{li}$$

olur. Buradan

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial p_l},\frac{\partial n}{\partial p_i}\right\rangle=a_{il}$$

olur ve $\left\langle n,\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle=0$ olduğundan

$$\left\langle n,\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_l}\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial n}{\partial p_l},\frac{\partial f}{\partial p_i}\right\rangle=-a_{li}$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\langle\frac{\partial n}{\partial p_l},\frac{\partial n}{\partial p_i}\right\rangle=\left\langle\sum_{j=1}^{m}a_{lj}\frac{\partial f}{\partial p_j},\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}a_{lj}a_{ij}$$

elde edilir ve $\left\langle n,\frac{\partial n}{\partial p_i}\right\rangle=0$ olduğundan

$$\left\langle n,\frac{\partial^2 n}{\partial p_i\partial p_l}\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial n}{\partial p_l},\frac{\partial n}{\partial p_i}\right\rangle=-\sum_{j=1}^{m}a_{lj}a_{ij}$$

olur. $\frac{\partial n}{\partial p_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial p_j}$ den

$$\frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_l} = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l} \frac{\partial f}{\partial p_j} + a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_l} \right)$$

bulunur. Bundan dolayı $\alpha = 2, ..., k$ için

$$\left\langle n_\alpha, \frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left\langle n_\alpha, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle$$

olur. $I = (\delta_{li})$, $A = (a_{li})$, $B_\alpha = \left\langle n_\alpha, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle$ olsun. Bu durumda bir $s, s_2, ..., s_k$ için $x \in \mathbb{R}^{m+k}$, f nin p noktasında bir odak noktasıdır ancak ve ancak

$$x = f(p) + sn(p) + \sum_{\alpha=2}^{k} s_\alpha n_\alpha(p)$$

ve p noktasında

$$\det \left(-sA + \sum_{\alpha=2}^{k} s_\alpha B_\alpha(p) - I \right) = 0$$

dır.

Burada $f_{(n,t)}(p) = f(p) + tn(p)$ olduğundan, $f_{(n,t)}(p)$ bir immersiyondur
$\Longleftrightarrow$ her $p \in M$ için p noktasında $\det \left(\left\langle \frac{\partial f_{(n,t)}}{\partial p_i}, \frac{\partial f_{(n,t)}}{\partial p_l} \right\rangle \right) \neq 0$
$\Longleftrightarrow$ her $p \in M$ için p noktasında

$$\det \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i} + t \frac{\partial n}{a \partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_l} + t \frac{\partial n}{\partial p_l} \right\rangle \right) = \det(I + 2tA + t^2 A^2) = \det(I + tA)^2 \neq 0$$

$\Longleftrightarrow$ her $p \in M$ için $\det(I + tA) \neq 0$
$\Longleftrightarrow$ her $p \in M$ için $f_{(n,t)}(p) = f(p) + tn(p)$, f nin p noktasında bir odak noktası değildir.

(ii) Şimdi, $f_{(n,t)}$ nin odak noktalarını anlamaya çalışacağız.

y, $f_{(n,t)}$ nin p noktasında odak noktasıdır ancak ve ancak $i = 1, ..., m$ için

$$\left\langle y - f(p) - tn(p), \frac{\partial f}{\partial p_i} + t \frac{\partial n}{\partial p_i} \right\rangle = 0$$

ve

$$\det \left(\left\langle y - f(p) - tn(p), \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} + t \frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial p_l} + t \frac{\partial n}{\partial p_l}, \frac{\partial f}{\partial p_i} + t \frac{\partial n}{\partial p_i} \right\rangle \right) = 0$$

dır. Buradan, en az bir $r, r_2, ..., r_k \in \mathbb{R}$ için

$$y = f_{(n,t)}(p) + rn(p) + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha n_\alpha(p) = f(p) + (t+r)n(p) + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha n_\alpha(p)$$

ve

$$\det\left(r\left\langle n(p), \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} + t\frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha \left\langle n_\alpha(p), \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_l} + t\frac{\partial^2 n}{\partial p_i \partial p_l} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial p_l} + t\frac{\partial n}{\partial p_l}, \frac{\partial f}{\partial p_i} + t\frac{\partial n}{\partial p_i} \right\rangle \right) = 0$$

olur. Böylece $y \in \mathbb{R}^{m+k}$, $f_{(n,t)}$ nin p noktasında odak noktasıdır ancak ve ancak en az bir $r, r_2, ..., r_k \in \mathbb{R}$ için

$$y = f(p) + (t+r)n(p) + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha n_\alpha(p)$$

ve p noktasında

$$\begin{aligned}
&\det\left(-rA - rtA^2 + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha B_\alpha + t\sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha AB_\alpha - I - 2tA - t^2A^2\right) \\
&= \det(tA + I)\left(-(t+r)A + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha B_\alpha - I\right) \\
&= \det(tA + I)\det\left(-(t+r)A + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha B_\alpha - I\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

(i) ye göre $f_{(n,t)}$ bir immersiyondur ancak ve ancak her $p \in M$ için $f(p) + tn(p)$, f nin p noktasında bir odak noktası değildir. Bu ise $f_{(n,t)}$ bir immersiyondur ancak ve ancak p noktasında $\det(tA + I) \neq 0$ olması anlamına gelir. Bu nedenle $y \in \mathbb{R}^{m+k}$, $f_{(n,t)}$ nin p noktasında odak noktasıdır ancak ve ancak en az bir $r, r_2, ..., r_k \in \mathbb{R}$ için

$$y = f(p) + (t+r)n(p) + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha n_\alpha(p)$$

ve

$$\det\left(-(t+r)A + \sum_{\alpha=2}^{k} r_\alpha B_\alpha - I\right) = 0$$

olur. Buradan $s = t + r$ olmak üzere y, f nin p noktasında bir odak noktasıdır. ■

Bu teoremi biz kendi notasyonumuzla şöyle düzenleyebiliriz:

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon ve $\xi : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, f için bir paralel normal vektör alanı olsun. Bu durumda,

(i) *f_ξ bir immersiyondur ancak ve ancak her $p \in M$ için $f_\xi(p)$, f nin p noktasında bir odak noktası değildir.*

(ii) *$x \in \mathbb{R}^{m+k}$, f_ξ nin p noktasında bir odak noktasıdır ancak ve ancak x , f nin p noktasında bir odak noktasıdır. Böylece her $p \in M$ için $F_p(f_\xi) = F_p(f)$ dir.*

4.2 İtme Uzayı

M, m-boyutlu, bağlantılı, yönlendirilebilir, düzgün bir manifold ve $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düz normal demetli bir immersiyon olsun. O halde f için $\xi_1, \ldots, \xi_k : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ paralel normal vektör alanlarının ortonormal bir kümesi vardır. Böyle bir immersiyon için $\Omega(f)$ olarak tanımlanan itme uzayı kavramı ilk olarak [2] de tanımlanmıştır.

$\mathbf{t} = (t_1, t_2 \ldots t_k) \in \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$f_\mathbf{t} = f + t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \ldots + t_k\xi_k$

ile tanımlansın, yani her $p \in M$ için $f_\mathbf{t}(p) = f(p) + t_1\xi_1(p) + t_2\xi_2(p) + \ldots + t_k\xi_k(p)$ olsun. Bu durumda f immersiyonunun itme uzayı

$\Omega(f) = \left\{\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k : f_\mathbf{t} \text{ bir immersiyondur}\right\}$

şeklinde tanımlanabilir. Buna denk olarak

$\Omega(f) = \left\{\mathbf{t} = (t_1, t_2 \ldots t_k) \in \mathbb{R}^k : \forall p \in M \text{ için } f_\mathbf{t}(p), p \text{ de odak nokta değildir}\right\}$

olur. $\Omega(f)$ nin sonlu sayıda yol bağlantılı bileşeni olduğu ve $0 \leq i \leq m$ olmak üzere, her bir bileşene o bileşenin indisi denen bir i tam sayısı atanabileceği ve M kompakt iken $\Omega(f)$ nin açık olduğu bilinmektedir. $\Omega(f)$ nin tanımı seçilen $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ortonormal paralel normal vektör alanlarına bağlıdır, ancak farklı bir seçim yapıldığında izometrik bir kümenin oluştuğu [2] de gösterilmiştir. Normal demetin yerel düz olması durumunda itme uzayının nasıl tanımlanabileceği [2] de belirtilmiştir. Normal demeti yerel düz olmayan genel bir immersiyon için itme bölgesi denen bir küme tanımlanabilmektedir ve bu durum [3] makalesinde çalışılmıştır.

Örnek 4.2.1 *$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{1+1}=\mathbb{R}^2$, $f(\theta)=(5\cos\theta,3\sin\theta)$ ile verilen f immersiyonunun itme uzayı $\Omega(f)$ yi bulalım.*

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (5\cos\theta,3\sin\theta) \\ f'(\theta) &= (-5\sin\theta,3\cos\theta) \qquad \textit{olmak üzere} \\ \xi(\theta) &= \left(\frac{-3\cos\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}},\frac{-5\sin\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}}\right) \end{aligned}$$

f için birim paralel normal vektör alanıdır.

$$f_t(\theta)=f(\theta)+t\xi(\theta)=\left(5\cos\theta+t\frac{-3\cos\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}},3\sin\theta+t\frac{-5\sin\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}}\right)$$

olarak tanımlansın. f nin odak nokta kümesinin her $\theta\in\mathbb{R}$ için

$$F(\theta)=(\frac{16}{5}\cos^3\theta,\frac{-16}{3}\sin^3\theta)$$

olduğunu 3. bölümde göstermiştik.

$$\begin{aligned} f_t(\theta) &= F(\theta)\Longrightarrow\left(5\cos\theta+t\frac{-3\cos\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}},3\sin\theta+t\frac{-5\sin\theta}{\sqrt{9+16\sin^2\theta}}\right) \\ &= (\frac{16}{5}\cos^3\theta,\frac{-16}{3}\sin^3\theta) \\ &\Longrightarrow t=\frac{1}{5}\left(\frac{16}{3}\sin^2\theta+3\right)\sqrt{16\sin^2\theta+9} \end{aligned}$$

elde edilir. $\Omega(f)$ yi bulmak için t nin maksimum ve minimum noktalarını belirlemeliyiz. $-1\le\sin\theta\le 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{1}{5}\left(\frac{16}{3}\cdot 1^2+3\right)\sqrt{16\cdot 1^2+9}=\frac{25}{3} \\ t_{\min} &= \frac{1}{5}\left(\frac{16}{3}\cdot 0^2+3\right)\sqrt{16\cdot 0^2+9}=\frac{9}{5} \end{aligned}$$

olur.

O halde $t\in\left[\frac{9}{5},\frac{25}{3}\right]$ için f_t bir immersiyon değildir. Bu durumda $t\in\left(-\infty,\frac{9}{5}\right)\cup\left(\frac{25}{3},\infty\right)$ için f_t, f nin paralel immersiyonudur ve

$$\Omega(f)=\left(-\infty,\frac{9}{5}\right)\cup\left(\frac{25}{3},\infty\right)$$

elde edilir.

Sıradaki örnek ilk olarak [6] da çalışılmıştır:

Örnek 4.2.2 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+2} = \mathbb{R}^3,\ f(\theta) = (\theta, \cos\theta, \sin\theta)$ *ile verilen* f *immersiyonunun itme uzayı* $\Omega(f)$ *yi bulalım.*

$$f'(\theta) = (1, -\sin\theta, \cos\theta) \neq (0,0,0)$$

olduğundan f *bir immersiyondur.* $f'(\theta) = (1, -\sin\theta, \cos\theta)$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}
\xi_1(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\theta}{\sqrt{2}})(1, \sin\theta, -\cos\theta) + \sin(\frac{\theta}{\sqrt{2}})(0, -\cos\theta, -\sin\theta) \\
\xi_2(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\theta}{\sqrt{2}})(1, \sin\theta, -\cos\theta) - \cos(\frac{\theta}{\sqrt{2}})(0, -\cos\theta, -\sin\theta)
\end{aligned}$$

f *için birim paralel normal vektör alanlarıdır.*

$$f_{(t,s)}(\theta) = f(\theta) + t\xi_1(\theta) + s\xi_2(\theta)$$

olarak tanımlansın. $w = (x, y, z)$ *sabit bir nokta,* $L_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
L_w(\theta) &= \|(x,y,z) - f(\theta)\|^2 = \|(x,y,z) - (\theta, \cos\theta, \sin\theta)\|^2 \\
&= (x-\theta)^2 + (y - \cos\theta)^2 + (z - \sin\theta)^2
\end{aligned}$$

uzaklık fonksiyonu olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_w}{\partial\theta} &= -2(x - \theta - y\sin\theta + z\cos\theta) \\
\frac{\partial^2 L_w}{\partial\theta^2} &= 2(1 + y\cos\theta + z\sin\theta)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $w = (x, y, z)$, f *nin* θ *noktasında bir odak noktasıdır ancak ve ancak* θ, L_w *fonksiyonunun bir dejenere kritik noktasıdır; yani* $\frac{\partial L_w}{\partial\theta} = 0$ *ve* $\frac{\partial^2 L_w}{\partial\theta^2} = 0$ *dır.* $\frac{\partial L_w}{\partial\theta} = 0$ *olduğundan her* $\theta \in \mathbb{R}$ *ve bir* $t, s \in \mathbb{R}$ *için* $w = (x,y,z) = f_{(t,s)}(\theta)$ *dır. Buradan*

$$w = f_{(t,s)}(\theta) = f(\theta) + t\xi_1(\theta) + s\xi_2(\theta)$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
x &= \theta + \frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} \\
y &= \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta(t\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} + s\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}}\cos\theta) + \cos\theta(s\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} - t\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}}) \\
z &= \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta(t\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} + s\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}}\cos\theta) + \sin\theta(s\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} - t\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

elde edilir ve bir θ *dejenere kritik noktasında,*

$$\frac{\partial^2 L_w}{\partial\theta^2} = 2(1 + y\cos\theta + z\sin\theta) = 0$$

olduğundan y ve z nin yerine yazılmasıyla

$$2 - t\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} + s\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} = 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$f_{(t,s)} \text{ bir immersiyon değildir} \Longleftrightarrow 2 - t\sin\frac{\theta}{\sqrt{2}} + s\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}} = 0$$

olur. Buradan

$$\Omega(f) = \left\{(t,s) : t^2 + s^2 < 4\right\}$$

elde edilir.

Şimdi, itme uzayının bileşenlerine ilişkin bazı sonuçları [7] de olduğu gibi veriyoruz.

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \Omega(f)$ olsun. ξ_1,ξ_2,...,ξ_k; her $p \in M$ için $f(p)$ noktasındaki k-boyutlu normal düzlem için bir taban oluşturan M üzerinde tanımlı birim paralel normal vektör alanları olmak üzere,

$$\xi(a) : M^m \to \mathbb{R}^{m+k}, \quad \xi(a)(p) = \sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i(p)$$

ile tanımlansın [2]. Bu durumda $\xi(a)$, M üzerinde f için bir immersive paralel normal vektör alanı olur.

$a \in \Omega(f)$ olsun. a nın indeksi *ind* a, $f_{\xi(a)}$ immersiyonunun indeksi olarak tanımlanır.

Eğer A, $\Omega(f)$ nin bir yol bağlantılı bileşeni ve $a, b \in A$ ise *ind* a = *ind* b olduğu [2] den bilinmektedir. Bu durumda A nın indeksi bir $a \in A$ için *ind* a olarak tanımlanır. O halde $\Omega(f)$ in her yol bağlantılı bileşenine bir indeks atanabilir. $\Omega(f)$ nin μ indeksli yol bağlantılı bileşenlerinin birleşimini Ω^μ ile göstereceğiz. Dolayısıyla $\Omega(f) = \Omega^0 \cup \Omega^1 \cup \cdots \cup \Omega^m$ olur. Burada Ω^0 ın daima boştan farklı, diğerlerinin ise boş ya da boştan farklı olabileceğini belirtelim.

Örnek 4.2.3 *[7]* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^{2+2}$, $f(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi)$ *ile verilen* f *immersiyonunun uzaklık fonksiyonu yardımıyla odak nokta kümesini ve itme uzayını belirleyelim.* f *nin bir immersiyon olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca* θ *ve* ϕ, 2π *moduna göre alınırsa* $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^{2+2}$ *bir embeding olur.*

$$\begin{aligned}
\xi_1(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi), \\
\xi_2(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\theta, -\sin\theta, \cos\phi, \sin\phi)
\end{aligned}$$

birim normal vektör alanlarıdır ve her $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *için normal düzlemlerinin bir tabanını oluşturur. En az bir* $t, s \in \mathbb{R}$ *için* $\xi(\theta,\phi) = t\xi_1(\theta,\phi) + s\xi_2(\theta,\phi)$ *yazılırsa,*

$$\begin{aligned} f_{(t,s)}(\theta,\phi) &= f(\theta,\phi) + t\xi_1(\theta,\phi) + s\xi_2(\theta,\phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((1+t-s)\cos\theta,\ (1+t-s)\sin\theta,\ (1+t+s)\cos\phi,\ (1+t+s)\sin\phi\right) \end{aligned}$$

olur. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *için* $L_x(\theta,\phi) = \|x - f(\theta,\phi)\|^2$ *uzaklık fonksiyonu kullanılarak*

$$\frac{\partial L_x}{\partial\theta} = \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1\sin\theta - x_2\cos\theta)\ , \qquad \frac{\partial L_x}{\partial\phi} = \frac{2}{\sqrt{2}}(x_3\sin\phi - x_4\cos\phi)\ ,$$
$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial\theta^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}(x_1\cos\theta + x_2\sin\theta)\ , \qquad \frac{\partial^2 L_x}{\partial\phi^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}(x_3\cos\theta + x_4\sin\theta)\ ,$$
$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial\phi\partial\theta} = \frac{\partial^2 L_x}{\partial\theta\partial\phi} = 0.$$

bulunur. Buradan

$$HL_x(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L_x}{\partial\theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 L_x}{\partial\phi^2} \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda $f_{(t,s)}(\theta,\phi)$*,* f *nin* (θ,ϕ) *noktasında bir odak noktasıdır* $\Longleftrightarrow$ (θ,ϕ)*,* L_x *in dejenere kritik noktasıdır. O halde* $\frac{\partial L_x}{\partial\theta} = 0 = \frac{\partial L_x}{\partial\phi}$ *eşitliğinden, en az bir* $t, s \in \mathbb{R}$*, her* $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2$ *için* $x = f_{(t,s)}(\theta,\phi)$ *elde ederiz.* x *yerine* $f_{(t,s)}(\theta,\phi)$ *yazılıp* $\det HL_x(\theta,\phi) = 0$ *olduğu kullanılırsa,*

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}}(1+t-s) & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}(1+t+s) \end{bmatrix} &= 0 \\ &\Longleftrightarrow (1+t+s)(1+t-s) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1+t)^2 - s^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow s = \pm(1+t) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan f *nin* $(\theta,\phi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *noktasında odak kümesi,*

$$\begin{aligned} d_1 &= \{\sqrt{2}(1+t)(\cos\theta, \sin\theta, 0, 0) \in \mathbb{R}^4,\ t \in \mathbb{R}\} \\ d_2 &= \{\sqrt{2}(1+t)(0, 0, \cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^4,\ t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

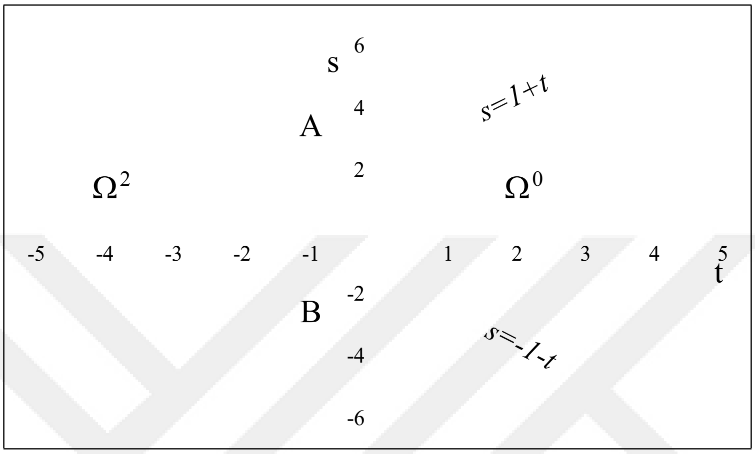
olmak üzere

$$F(\theta,\phi) = d_1 \cup d_2$$

elde edilir. Bu ise birbirine dik iki doğru belirtir ve tüm (θ,ϕ) taban noktaları için bu doğrular aynıdır. f immersiyonun itme uzayı belirlenirse,

$$\Omega(f)=\mathbb{R}^2-\{(t,s)\in\mathbb{R}^2 : s=\pm(1+t)\}$$

bulunur. Aşağıdaki şekilde $\Omega^1=A\cup B$ ve $\Omega(f)=\Omega^0\cup\Omega^1\cup\Omega^2$ olmak üzere $\Omega(f)$ itme uzayı ve bileşenleri gösterilmiştir.



Şekil 4.1 *$\Omega(f)$ itme uzayı ve bileşenleri*

Önerme 4.2.4 *[7] $f: M^m\to\mathbb{R}^{m+k}$ düz normal demetli bir immersiyon ve ξ ile η, f için sırasıyla λ ve μ indeksli immersive paralel normal vektör alanları olsun. Bu durumda, her $p\in M$ için, $f_\xi(p)$ ile $f_\eta(p)$ yi birleştiren doğru parçası üzerindeki p noktasındaki odak noktaların katlılık dahil sayısı sabittir ve $\max\{0,\lambda+\mu-m\}\leq l\leq\min\{\lambda,\mu\}$ olmak üzere en az bir $l\in\mathbb{N}$ için bu sayı $\lambda+\mu-2l$ dir.*

İspat: $f_\xi+(\eta-\xi)=f_\eta$ olduğundan $\eta-\xi$, f_ξ immersiyonu için bir immersive paralel normal vektör alanıdır [2] ve bunun f_ξ için sabit olan indeksini bulmamız gerekiyor. Burada bu sabiti belirlemeye çalışıyoruz.

$p\in M$ olsun ve $x=f_\xi(p)$ ve $y=f_\eta(p)$ olarak alınsın. Eğer $f(p),x,y$ noktaları doğrusalsa, bu durumda $f_\xi(p)$ ile $f_\eta(p)$ yi birleştiren doğru parçası üzerindeki p noktasında odak noktaların katlılık dahil sayısı $f(p)$ nin pozisyonuna göre $\lambda+\mu$ ya da $|\lambda-\mu|$ dir ve $l=0$, $l=\lambda$ veya $l=\mu$ alınabilir. Diğer taraftan, $\nu_p(f)$ üzerinde köşeleri $f(p),x,y$ olan üçgeni ve bu üçgeni kapsayan $Q(p)$ ile göstereceğimiz 2-boyutlu düzlemi ele alalım. Eğer boştan farklı ise $Q(p)\cap F_p(f)$ nin en çok m tane doğrunun birleşimi olduğunu biliyoruz, çünkü $F_p(f)$, $\nu_p(f)$ üzerinde en çok m tane hiperdüzlemin birleşimidir [12].

Eğer $u, v \in \nu_p(f)$ ise bu durumda $\overline{uv}$ notasyonu u ile v yi birleştiren doğru parçasını gösterir. $\overline{f(p)\,x}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısının λ ve $\overline{f(p)\,y}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısının μ olduğunu biliyoruz. Şimdi, $l(p) \geq 0$ bir tam sayı olsun ve $l(p)$ doğrularının(katlılık dahil) hem $\overline{f(p)\,x}$ hem de $\overline{f(p)\,y}$ kenarlarıyla kesiştiğini kabul edelim. $0 \leq l(p) \leq \min\{\lambda, \mu\}$ olduğu açıktır. O halde $\overline{f(p)\,x}$ ile kesişen kalan $\lambda - l(p)$ doğru $\overline{xy}$ ile kesişmek zorundadır. Benzer şekilde $\overline{f(p)\,y}$ ile kesişen kalan $\mu - l(p)$ doğru da $\overline{xy}$ ile kesişmek zorundadır. Buradan $\overline{xy}$ üzerindeki toplam sayıyı $\lambda - l(p) + \mu - l(p) = \lambda + \mu - 2l(p)$ elde ederiz. Böylece $f_\xi(p)$ ile $f_\eta(p)$ yi birleştiren doğru parçası üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısının $\lambda + \mu - 2l(p)$ olduğu sonucunu çıkarırız. Fakat f_ξ nin paralel immersiyonu $(f_\xi)_{(\eta-\xi)}$ nin indeksi bir sabit sayıdır, o halde her $p \in M$ için $l(p)$ sabittir.

$l = l(p)$ alalım. $Q(p)$ üzerinde en çok m tane doğru olduğundan $\lambda + \mu - m \leq l$ dir. O halde $\max\{0, \lambda + \mu - m\} \leq l \leq \min\{\lambda, \mu\}$ olur. ■

Tanım 4.2.5 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düz normal demetli bir immersiyon olsun. Bu durumda $d(f)$, $\Omega(f)$ nin yol bağlantılı bileşenlerinin toplam sayısı olarak tanımlanır.*

$d(f) \leq \alpha(m,k)$ olduğu [2] de kanıtlanmıştır. Burada $\alpha(m,k)$, m-boyutlu hiperdüzlemlerin tümleyenindeki yol bağlantılı bölgelerin sayısıdır ve $\mathbb{R}^k$ daki en genel durum,

$$\alpha(m,k) = \begin{cases} 2^m & m \leq k \\ \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} & m > k \end{cases}$$

şeklindedir.

$f : M^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2+k}$, 2-boyutlu M manifoldunun düz normal demetli bir immersiyonu olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktası için $F_p(f)$, $\nu_p(f)$ üzerinde en çok 2 hiperdüzlemin birleşimidir. Böylece $F_p(f)$, $\nu_p(f)$ yi en çok 4 yol bağlantılı bölgeye ayırır ve $k \geq 2$ için $\Omega(f)$ nin 1 indeksli yol bağlantılı bileşenlerinin sayısı en çok 2 olabilir.

Aşağıda bu durum genelleniyor ve $m \geq 3$ olmak üzere $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli yol bağlantılı bileşenlerinin sayısına ilişkin bir sonuç ispatlanıyor. $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düz normal demetli bir immersiyon olsun. Bu durumda M üzerinde tanımlı $\{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$ birim paralel normal vektör alanları mevcuttur. Her $p \in M$ için

$$\varphi_p : \nu_p(f) \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi_p\left(f(p) + \sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i(p)\right) = (a_1, a_2, ..., a_k)$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Teorem 4.2.6 *[7] $m \geq 2$ ve $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düz normal demetli bir immersiyon olsun. A, B nin $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli iki farklı yol bağlantılı bileşeni ve $a \in A$, $b \in B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $p \in M$ için $\nu_p(f)$ deki tüm odak hiperdüzlemler, köşeleri $f(p)$, $\varphi_p^{-1}(a)$, $\varphi_p^{-1}(b)$ olan $\triangle$ üçgeni ile kesişir ve ayrıca $\varphi_p^{-1}(a)$ ve $\varphi_p^{-1}(b)$ arasındaki doğru parçası üzerinde bulunan odak noktaların katlılık dahil sayısı 2 olur.*

İspat: $a \in A$, $b \in B$ olsun. Bu durumda $\xi = \xi(a)$ ve $\eta = \xi(b)$ olacak şekilde paralel normal vektör alanları vardır öyle ki *indeks* $f_\xi =$ *indeks* $f_\eta = m-1$ dir. Önerme 4.2.4 e göre, her $p \in M$ için $f_\xi(p) = \varphi_p^{-1}(a)$ ile $f_\eta(p) = \varphi_p^{-1}(b)$ arasındaki odak noktaların katlılık dahil sayısı, $m-2 \leq l \leq m-1$ olmak üzere en az bir $l \in \mathbb{N}$ için $2(m-1)-2l$ elde edilir. a ve b farklı bileşenlerde olduğundan her $p \in M$ için $f_\xi(p)$ ve $f_\eta(p)$ arasında en az bir odak nokta olmak zorundadır. O halde $l = m-2$ bulunur.

$Q \subset \nu_p(f)$, köşeleri $f(p)$, $\varphi_p^{-1}(a)$, $\varphi_p^{-1}(b)$ noktaları olan $\triangle$ üçgenini kapsayan düzlem olsun. $l = m-2$ olduğundan her $p \in M$ için $\overline{f_\xi(p) f_\eta(p)}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısı 2 olur ve bunun sonucu olarak $\triangle$ üçgeni ile kesişen m tane odak doğru olduğu görülür. Q da m tane doğru olduğundan, bu durum her $p \in M$ için $\nu_p(f)$ üzerindeki tüm odak hiperdüzlemlerin $\triangle$ üçgeni ile kesiştiğini gösterir. ■

Teorem 4.2.7 *[7] $m \geq 3$ olmak üzere, $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ bir kompakt manifoldun düz normal demetli bir immersiyonu olsun. Bu durumda $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli yol bağlantılı bileşenlerinin sayısı en çok 2 olur.*

İspat: $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli en az üç tane yol bağlantılı bileşeninin olduğunu kabul edelim ve bunlara A, B, C diyelim. $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ alalım. $p \in M$ keyfi bir nokta olsun ve $\nu_p(f)$ üzerinde $x = \varphi_p^{-1}(a)$, $y = \varphi_p^{-1}(b)$, $z = \varphi_p^{-1}(c)$ noktalarını göz önüne alalım. a, b, c noktaları farklı bileşenlerde bulundukları için x, y, z nin odak olmayan farklı noktalar oldukları açıktır.

a, b, c noktaları farklı bileşenlerde bulunduklarından her bir $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{zx}$ doğru parçası üzerinde en az bir odak nokta vardır. O halde $x, y, f(p)$ noktalarının doğrusal olamayacağını kontrol edebiliriz. Varsayalım ki bu noktalar bir ℓ doğrusunda bulunsun. Eğer $f(p)$, $\overline{xy}$ üzerinde ise bu durumda ℓ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısı en az $(2m-2)$ olur ki $2m-2 > m$ olduğundan $m \geq 3$ için bu mümkün değildir. Eğer $f(p)$, $\overline{xy}$ üzerinde değilse bu durumda ℓ üzerinde $f(p)$ nin x, y noktalarına göre pozisyonuna bağlı olarak

$\overline{f(p)\,x}$ veya $\overline{f(p)\,y}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısı m elde edilir. Bu da bu sayının $(m-1)$ olduğu hipoteziyle çelişir. Benzer şekilde $x, z, f(p)$ noktalarının; $y, z, f(p)$ noktalarının veya $x, y, z, f(p)$ noktalarının doğrusal olamayacağı da elde edilebilir.

Teorem 4.2.6 ya göre tüm odak doğrular köşeleri $x, y, f(p)$ olan üçgenle kesişmek zorundadır ve ayrıca $\overline{xy}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısı 2 dir. Benzer şekilde aynı sonucu, köşeleri $y, z, f(p)$ ve $x, z, f(p)$ olan üçgenleri göz önüne alarak da elde ederiz.

Şimdi x, y, z noktalarının doğrusal olmadığını göstereceğiz. Eğer x, y, z noktalarının hepsi aynı doğru üzerinde bulunuyorsa yukarıdaki tartışmaya göre $\overline{xy}, \overline{yz}, \overline{zx}$ doğru parçaları üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısı 2 dir. Genelliği bozmadan y noktasının $\overline{xz}$ üzerinde olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $\overline{xz}$ üzerindeki odak noktaların katlılık dahil sayısını $2 + 2 = 4$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir.

Şimdi köşeleri x, y, z olan üçgeni ele alalım. Dikkat edilecek 3 durum söz konusudur.

Durum 1: $f(p)$ nin şekil 4.2 de gösterilen, köşeleri x, y, z olan üçgen ile sınırlı olan I. bölgede olduğunu kabul edelim. Teorem 4.2.6 ya göre köşeleri $x, f(p), z$ olan üçgeni ele aldığımızda $\overline{xf(p)}$ ve $\overline{zf(p)}$ ile kesişen en az bir odak doğru vardır. Benzer şekilde köşeleri $x, f(p), y$ olan üçgeni ele aldığımızda $\overline{xf(p)}$ ve $\overline{yf(p)}$ ile kesişen bir odak doğru vardır. Ayrıca köşeleri $y, f(p), z$ olan üçgeni ele aldığımızda $\overline{yf(p)}$ ve $\overline{zf(p)}$ ile kesişen de bir odak doğru vardır. Bu odak doğrular mecburen farklıdır ve birlikte $f(p)$ yi sınırlarlar. Bu da gösteriyor ki $f(p)$, $\nu_p(f)$ üzerindeki odak doğruların tümleyenlerinde sınırlı bir bölgededir.

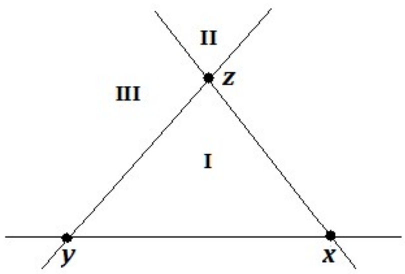
Durum 2: $f(p)$ nin şekil 4.2 de gösterilen II. bölgede olduğunu kabul edelim. Köşeleri $z, f(p), y$ olan üçgeni göz önüne alalım. Teorem 4.2.6 ya göre $\overline{f(p)\,z}$ ve $\overline{zy}$ ile kesişen bir odak doğru olmak zorundadır ve bu doğru mutlaka $\overline{xf(p)}$ ve $\overline{xy}$ ile kesişir. Benzer şekilde köşeleri $x, f(p), z$ olan üçgeni göz önüne aldığımızda $\overline{f(p)\,z}$ ve $\overline{zx}$ ile kesişen bir odak doğru olmalıdır ve bu doğru $\overline{f(p)\,y}$ ve $\overline{xy}$ ile kesişmek zorundadır. O halde $\overline{xy}$ üzerinde en az 2 odak nokta elde ederiz. Fakat yine Teorem 4.2.6 yı ve köşeleri $x, f(p), y$ olan üçgeni göz önüne aldığımızda bu sayı tam olarak 2 dir. Bu yüzden $\overline{xy}$ ile kesişen başka odak doğru yoktur. Şimdiye kadar hem $\overline{xf(p)}$ hem de $\overline{zf(p)}$ ile kesişen bir odak doğrumuz var. Teorem 4.2.6 yı ve köşeleri $x, f(p), z$ olan üçgeni göz önüne aldığımızda, $\overline{xf(p)}$ ve $\overline{zf(p)}$ ile kesişen $(m-3)$ tane daha odak doğru gereklidir ve bu doğrular $\overline{yf(p)}$

ile kesişmek zorundadır. Bununla birlikte, hem $\overline{xf(p)}$ hem de $\overline{xz}$ ile kesişen bir tane daha odak doğru vardır ki bu $\overline{xy}$ veya $\overline{zy}$ ile kesişmek zorundadır. $\overline{xy}$ ile kesişen daha fazla odak doğru olmadığını biliyoruz. O halde hem $\overline{xf(p)}$ hem de $\overline{xz}$ ile kesişen odak doğru $\overline{zy}$ ile de kesişmek zorundadır. Bu da gösteriyor ki $\xi(a)$, a ya karşılık gelen immersive paralel normal vektör alanı olmak üzere her $p \in M$ için $z = f_{\xi(a)}(p)$, $\nu_p(f)$ üzerindeki odak doğrular ile sınırlıdır.

Durum 3: $f(p)$ nin şekil 4.2 de gösterilen III. bölgede olduğunu kabul edelim. Bu durumda her odak doğrunun köşeleri $f(p), x, y$ olan üçgenle kesişmek zorunda olduğunu biliyoruz. Ama aynı zamanda $\overline{f(p)z}$ ve $\overline{zx}$ ile kesişen bir odak doğru da olmak zorundadır. O halde bu doğru köşeleri $f(p), x, y$ olan üçgen ile kesişemez. Bu da Teorem 4.2.6 ya göre bir çelişki verir. Buradan Durum 3 ün meydana gelemeyeceği sonucu çıkar.

p, M de keyfi bir nokta ve ${\varphi_p}^{-1}$ bir izometri olduğundan her $p \in M$ için ya Durum 1 geçerlidir ya da Durum 2 geçerlidir; yani her $p \in M$ için ya $f(p)$, $\nu_p(f)$ üzerindeki odak doğrular ile sınırlıdır ya da $f_{\xi(a)}(p)$, $\nu_p(f)$ üzerindeki odak doğrular ile sınırlıdır.

Şimdi, en az bir $w \in \mathbb{R}^{m+2}$, f için L_w uzaklık fonksiyonunu alalım. M kompakt olduğundan L_w nin m indeksli bir kritik noktası vardır. O halde w ile $f(p)$ noktaları arasındaki doğru parçası üzerinde p tabanlı odak noktaların katlılık dahil sayısı m dir ve böylece $\{f(p) + t(w - f(p)) \mid t \leq 0\} \subset \nu_p(f)$ ışını üzerinde p tabanlı odak nokta yoktur. Bu da gösteriyor ki en az bir $p \in M$ için $f(p)$, $\nu_p(f)$ üzerindeki odak hiperdüzlemler ile sınırlı değildir ve benzer bir durum en az bir $q \in M$ için, $f_{\xi(a)}$ immersiyonunu ele aldığımızda $f_{\xi(a)}(q)$ için de geçerlidir. O halde $\Omega(f)$ nin bu şekilde yol bağlantılı A, B, C bileşenleri olamaz. Dolayısıyla $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli en çok iki yol bağlantılı bileşeni olabilir.



Şekil 4.2 *I., II. ve III. bölgeler*

■

Teorem 4.2.7 $k > 2$ olan bir immersiyon için geçerli değildir. Çarpım immersiyonlarını alarak bunu görebiliriz. Örnek 4.2.3 deki, $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ embedingi için $\Omega(f)$ nin 1 indeksli iki tane yol bağlantılı bileşeni vardır. Şimdi $p, q \in \mathbb{T}^2$ olmak üzere

$$f \times f : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{4+4}, \qquad (f \times f)(p, q) = (f(p), f(q))$$

yi ele alalım. f düz normal demetli olduğundan $f \times f$ nin de düz normal demetli ve $\Omega(f \times f) \equiv \Omega(f) \times \Omega(f)$ olduğunu belirtelim [2]. Bu durumda $\Omega(f \times f)$ in 3 indeksli 4 tane yol bağlantılı bileşeni olduğu kolayca görülebilir.

Burada, $m > 2$ ve $k > 2$ için, $\Omega(f)$ nin $(m-1)$ indeksli yol bağlantılı bileşenlerinin sayısının en çok kaç olduğu açık bir problemdir.

4.3 İtme Uzayı, İnversiyon ve Φ Konform Dönüşümü

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ şeklinde bir immersiyon olsun. Her $p \in M$ için $f(p) \neq \mathbf{0}$ ise $\frac{f}{\|f\|^2} : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ fonksiyonu da bir immersiyondur. Burada önce aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 4.3.1 $\Theta : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Theta(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ *fonksiyonu bir immersiyondur. Bu* Θ *ya bir inversiyon denmektedir.*

İspat: Θ bire birdir: $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ve $\Theta(x) = \Theta(y)$ ise $\frac{x}{\|x\|^2} = \frac{y}{\|y\|^2}$ olur ve buradan $\|x\| = \|y\|$ elde edilir. Buradan ise $x = y$ bulunur. Diğer taraftan Θ örtendir: $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ve $\Theta(x) = y$ ise $\frac{x}{\|x\|^2} = y$ olur ve buradan $\frac{1}{\|x\|} = \|y\|$ elde edilir ve $x = \frac{y}{\|y\|^2}$ bulunur. O halde Θ örtendir. Buradan $\Theta^{-1} = \Theta$ olduğu anlaşılır ve dolayısıyla Θ düzgün olduğundan Θ^{-1} de düzgündür. O halde Θ bir difeomorfizmadır ve dolayısıyla immersiyon olduğu anlaşılır. ■

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ şeklinde bir immersiyon olsun. Her $p \in M$ için $f(p) \neq \mathbf{0}$ ise son önermenin bir sonucu olarak $\frac{f}{\|f\|^2} = \Theta \circ f$ olduğundan iki immersiyonun bileşkesi olan $\frac{f}{\|f\|^2}$ bir immersiyondur. Diğer taraftan f nin normal demeti yerel düzdür ancak ve ancak $\frac{f}{\|f\|^2}$ nin normal demetinin yerel düz olduğu [6] da gösterilmiştir.

$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ şeklinde $(k = 1)$ bir immersiyon ve her $p \in M$ için $f(p) \neq \mathbf{0}$ olsun. Bu kısımda aşağıda verilen Φ konform dönüşümü ile $\Phi \circ f$ ve $\Phi \circ \frac{f}{\|f\|^2}$ bileşke dönüşümlerinin de birer immersiyon olduğunu ve bu immersiyonların itme uzaylarını karşılaştırarak eşit alınabileceğini gösteriyoruz. Tezin bu kısmı [8] ile bir sempozyumda sunulmuştur.

$\Phi : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}$, $x = (x_1, ..., x_{m+1})$ olmak üzere

$$\Phi(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, ..., \frac{2x_{m+1}}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right)$$

konform dönüşümü ve

$$g = \Phi \circ f : M^m \longrightarrow \mathbb{S}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+2}, \quad g = \left(\frac{2f}{1 + \|f\|^2}, \frac{\|f\|^2 - 1}{1 + \|f\|^2} \right)$$

olsun. Bu durumda g nin bir immersiyon olduğu kolayca görülür. Ayrıca g, g immersiyonu için bir birim normal vektör alanıdır. Çünkü $\langle g, g \rangle = 1$ ve $1 \leq i \leq m$ için $\left\langle \frac{\partial g}{\partial p_i}, g \right\rangle = 0$ dır. Eğer ξ, f için bir birim normal vektör alanı ise

$$\eta = \frac{1}{1 + \|f\|^2} \left(\left(1 + \|f\|^2\right) \xi - 2 \langle f, \xi \rangle f, \ 2 \langle f, \xi \rangle \right)$$

ile verilen η, g için bir birim normal vektör alanıdır. Aşağıdaki önerme kolayca ispatlanabilir.

Önerme 4.3.2 *g, η normal vektör alanları g için birim paralel normal vektör alanlarıdır.*

O halde $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$g_{(t,s)}(p) = g(p) + tg(p) + s\eta(p)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \Omega(g) &= \Omega(\Phi \circ f) \\ &= \left\{ (t, s) \in \mathbb{R}^2 : \forall p \in M \text{ için } g_{(t,s)}(p), \, p \text{ noktasında odak nokta değildir} \right\} \end{aligned}$$

olur.

$H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $H(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, -x_n)$ ile verilen H lineer dönüşümünü ele alalım. Burada H nin $\mathbb{R}^n$ deki $x_n = 0$ düzlemine göre yansıma olduğu görülür. Burada $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ için $\tilde{x} = (x_1, x_2, \cdots, -x_n)$ ile tanımlanırsa $H(x) = \tilde{x}$ olur. Aşağıdaki önerme her $k \geq 1$ için doğrudur. İspatı sadece $k = 2$ için verelim.

Önerme 4.3.3 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ bir immersiyon ve $H : \mathbb{R}^{m+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ yukarda belirtildiği gibi olmak üzere $\tilde{f} = H \circ f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ olsun. Bu durumda $\tilde{f}$ bir immersiyondur.*

İspat: H bir difeomorfizma ve f bir immersiyon olduğundan $\tilde{f} = H \circ f$ bir immersiyondur. ■

Önerme 4.3.4 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ bir immersiyon ve ξ ve η, f için iki birim paralel normal vektör alanı olsun. Bu durumda $\tilde{\xi}$ ve $\tilde{\eta}$, $\tilde{f}$ için iki birim paralel normal vektör alanıdır.*

İspat: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{m+1}, f_{m+2})$ ve

$$\begin{aligned} \xi &= \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}, \xi_{m+2}\right), \\ \eta &= \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}, \eta_{m+2}\right) \end{aligned}$$

f için iki birim paralel normal vektör alanı olsun.

Buradan $\tilde{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{m+1}, -f_{m+2})$ ve

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}, -\xi_{m+2}\right), \\ \tilde{\eta} &= \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}, -\eta_{m+2}\right) \end{aligned}$$

ile verilen $\tilde{\xi}$ ve $\tilde{\eta}$ nın $\tilde{f}$ için iki birim paralel normal vektör alanı olduğu görülür. ■

Önerme 4.3.5 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ bir immersiyon ve $p \in M$ olsun. Bu durumda bir $x \in \mathbb{R}^{m+2}$, f nin p noktasında bir odak noktasıdır ancak ve ancak $\tilde{x}$, $\tilde{f}$ nin p noktasında bir odak noktasıdır.*

İspat: Uzaklık fonksiyonları; f için $L_x(p) = \|x - f(p)\|^2$ ve $\tilde{f}$ için $L_{\tilde{x}}(p) = \left\|\tilde{x} - \tilde{f}(p)\right\|^2$ olduğundan $L_x = L_{\tilde{x}}$ olur ve sonuç buradan elde edilir. Daha açık olarak; bir $p \in M$ için

$$\frac{\partial L_{\tilde{x}}(p)}{\partial p_i} = 0 \Longleftrightarrow \left\langle \tilde{x} - \tilde{f}(p), \frac{\tilde{f}(p)}{\partial p_i} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left\langle x - f(p), \frac{f(p)}{\partial p_i} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial L_x(p)}{\partial p_i} = 0$$

olur ve dolayısıyla p, $L_{\tilde{x}}$ nin kritik noktasıdır ancak ve ancak p, L_x in bir kritik noktasıdır. Ayrıca

$$\det\left(\frac{\partial^2 L_{\tilde{x}}(p)}{\partial p_i \partial p_j}\right) = 0 \Longleftrightarrow \det\left(\frac{\partial^2 L_x(p)}{\partial p_i \partial p_j}\right) = 0$$

ifadesinden p, $L_{\tilde{x}}$ nin bir dejenere kritik noktasıdır ancak ve ancak p, L_x in bir dejenere kritik noktasıdır. ■

Örnek 4.3.6 *f, $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = (\theta, \theta^2)$ ile $\tilde{f}(\theta) = (\theta, -\theta^2)$ immersiyonlarının odak kümelerini karşılaştıralım.*

f nin odak kümesini hesaplayalım:

$$L_{(x,y)}(\theta) = \|(x,y) - f(\theta)\|^2 = (x-\theta)^2 + (y-\theta^2)^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{dL_{(x,y)}(\theta)}{d\theta} &= 2\theta - 2x - 4y\theta + 4\theta^3 = 0 \\ \frac{d^2L_{(x,y)}(\theta)}{d\theta^2} &= 12\theta^2 - 4y + 2 = 0 \end{aligned}$$

denklemlerinde x ve y çözülürse

$$x = -4\theta^3 \ , \quad y = 3\theta^2 + \frac{1}{2}$$

elde edilir. Yani f nin bir θ noktasındaki odak noktası

$$F(\theta) = \left(-4\theta^3, 3\theta^2 + \frac{1}{2}\right)$$

olur. Benzer şekilde $\tilde{f}$ nin bir θ noktasındaki odak noktası

$$\widetilde{F}(\theta) = \left(-4\theta^3, -3\theta^2 - \frac{1}{2}\right)$$

bulunur. O halde, (x,y), f nin bir θ noktasında odak noktasıdır ancak ve ancak $(x,-y)$, $\tilde{f}$ nin θ noktasında odak noktasıdır.

Teorem 4.3.7 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+2}$ bir immersiyon ve ξ ve η, f için birim paralel normal vektör alanları olsun. Bu durumda $f_{(t,s)} = f + t\xi + s\eta$, f için bir paralel immersiyondur ancak ve ancak $\tilde{f}_{(t,s)} = \tilde{f} + t\tilde{\xi} + s\tilde{\eta}$, $\tilde{f}$ için bir paralel immersiyondur.*

İspat: $f_{(t,s)} = f + t\xi + s\eta$, f için bir paralel immersiyon olsun. O halde, her $p \in M$ için $f_{(t,s)}(p)$, f nin p noktasında odak noktası değildir ancak ve ancak $\tilde{f}_{(t,s)}(p)$, $\tilde{f}$ nin p noktasında odak noktası değildir. Buradan $\tilde{f}_{(t,s)} = \tilde{f} + t\tilde{\xi} + s\tilde{\eta}$, $\tilde{f}$ için bir paralel immersiyondur. ■

Teorem 4.3.8 *Yukardaki notasyonlarla $\Omega(f) = \Omega(\tilde{f})$ olur.*

İspat: Burada $\Omega(f)$ ve $\Omega(\tilde{f})$ yi tanımlamak için sırasıyla $\{\xi, \eta\}$ ve $\left\{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}\right\}$ birim paralel normal vektör alanlarını kullanıyoruz. $(t,s) \in \Omega(f)$ olsun. O halde her $p \in M$ için $f(p) + t\xi(p) + s\eta(p)$, f için p noktasında odak nokta değildir. Dolayısıyla her $p \in M$ için $\tilde{f}(p) + t\tilde{\xi}(p) + s\tilde{\eta}(p)$, $\tilde{f}$ için p noktasında odak nokta değildir. O halde $(t,s) \in \Omega(\tilde{f})$olur. Buradan $\Omega(f) \subset \Omega(\tilde{f})$ olur. Tersi de benzer şekilde elde edilir ve $\Omega(f) = \Omega(\tilde{f})$ olur. ■

Teorem 4.3.9 *$f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ bir immersiyon ve her $p \in M$ için $f(p) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\Omega(\Phi \circ f) = \Omega(\Phi \circ \dfrac{f}{\|f\|^2})$ alınabilir.*

İspat: $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ bir immersiyon ve her $p \in M$ için $f(p) \neq 0$ olsun. f immersiyon iken $\dfrac{f}{\|f\|^2}$ nin bir immersiyon olduğu yukarıda gösterilmişti. Dolayısıyla $\Phi \circ \dfrac{f}{\|f\|^2}$ bir immersiyondur. $g = \Phi \circ f$ alınırsa $\Phi \circ \dfrac{f}{\|f\|^2} = \tilde{g}$ olduğu görülür. Teorem 4.3.8 göz önüne alınırsa $\Omega(g) = \Omega(\tilde{g})$ elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] Bröcker T and Jänich K (1982) *Introduction to Diferential Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 172 pp.

[2] Carter S and Sentürk Z (1994) The space of immersions parallel to a given immersion. *J. London Math. Soc.*, 50 (2): 404-416.

[3] Carter S and West A (2002) The push-out region of an immersed manifold. *Journal of Geometry*, 74: 44-60.

[4] Cecil T E and Ryan P J (2015) *Geometry of Hypersurfaces*. Springer, Berlin, 596 pp.

[5] Gauld D B (2006) *Diferential Topology: An Introduction*. Dover Publications, New York, 256 pp.

[6] Kaya Y (2000) Relations Between the Topology of a Manifold and the Topology of Its Space of Parallels. *Phd Thesis*, Univ. of Leeds, Dept. of Pure Math., Leeds, 105 pp.

[7] Kaya Y (2012) On the Components of the Push out Space with Certain Indices. *The Mathematical Journal of the University of Padua*, 127 (1): 1-16.

[8] Kaya Y ve Sağlam N B (2019) İtme uzayı üzerine bir özellik. *14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu*, 29 Haziran 2019, Ankara, 6 s.

[9] Marcus Mand Minc H (1968) *Elementary Linear Algebra*. The Macmillan Company, New York, 256 pp.

[10] Milnor J (1973) *Morse Theory*. Princeton University Press, New Jersey, 160 pp.

[11] Mukherjee A (2005) *Topics in Diferential Topology*. Hindustan Book Agency, Delhi, 454 pp.

[12] Palais R S and Terng C L (1988) *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 280 pp.

[13] Prasalov V V (2006) *Elements of Combinatorial and Diferential Topology*. The American Mathematical Society, Rhode Island, 342 pp.

[14] Shastri A R (2011) *Elements of Diferential Topology*. CRC Press, Florida, 319 pp.

[15] Sentürk Z (1994) Parallel Immersions of Manifolds into the Euclidean Spaces. *PhD Thesis*, University of Leeds, Dept. of Pure Math., Leeds, 128 pp.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılı Üsküdar/İSTANBUL doğumlu olan Necat Barış SAĞLAM, ilk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra 2016 yılında Ankara Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü bitirdi. 2016 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı olarak Zonguldak ilinde başladığı Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği görevine halen devam etmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

Adres : Yeni Mahalle Karakök Sok. No:12 D/6 Devrek/ZONGULDAK
E-Posta : baris2411@gmail.com