T.C.
Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

KLINGENBERG DÜZLEMLERİ

DERYA ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

KLINGENBERG DÜZLEMLERİ

Derya ASLAN

T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLINGENBERG DÜZLEMLERİ

Derya ASLAN

Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ ONAYI

Derya ASLAN tarafından hazırlanan "KLINGENBERG DÜZLEMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Başkan : Prof.Dr.Süleyman ÇİFTÇİ.......................... İmza
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr.Öğr.Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN............... İmza
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç.Dr. Atilla AKPINAR........................... İmza
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
28../1./2018

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/09/2018

Derya ASLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KLINGENBERG DÜZLEMLERİ

Derya ASLAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Bu çalışmada afin Klingenberg düzlemleri, projektif Klingenberg düzlemleri, Hjemslev düzlemleri ve bölüm düzlemleri ile ilgili bazı temel bilgiler çeşitli kaynaklardan faydalanılarak derlenmiş ve Projektif Klingenberg düzlemlerinin cebirsel yapılarla koordinatlanması ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Projektif ve afin Klingenberg düzlemleri, Hjelmslev düzlemleri, bölüm düzlemleri, Moufang Klingenberg düzlemleri.
2018, vi + 46 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

KLINGENBERG PLANES

Derya ASLAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

In this study, some fundemental knowledges about afin Klingenberg planes, projective Klingenberg planes, Hjemslev planes and quotient planes collected from various and coordination of projective Klingenberg planes with algebraic structures has been investigated.

Key words: Projective and afin Klingenberg planes, Hjemslev planes, quotient planes, Moufang Klingenberg planes,
2018, vi + 46 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten, üzerimde her türlü yardımı, desteği ve emeği olan çok değerli hocam Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ'ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca bana birçok konuda destek olan ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Basri ÇELİK, Doç. Dr. Atilla AKPINAR, Araş. Gör. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN ve Araş. Gör. Abdurrahman DAYIOĞLU' na da en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmayı yürütürken geçirdiğim süre zarfında benden hiçbir desteği esirgemeyen, maddi ve manevi gücünü yanımda hissettiğim sevgili eşime de saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Derya ASLAN
26/09/2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
2. KURAMSAL TEMELLER..2
3. KLINGENBERG DÜZLEMLERİ VE İKİ GROSS FUNCTOR 7
3.1 Klingenberg Düzlemleri 7
3.2 Türetilmiş Afin Klingenberg Düzlemleri 15
3.3 Sayısal Sabitler ve Grossly 1-1 Çarpanlara Ayırma 17
3.4 Hjelmslev Düzlemleri 26
3.5 Bölüm Düzlemleri ve Görüntü Düzlemleri 27
4. DÜZLEMSEL SEXTERNARY HALKALAR VE MOUFANG KLİNGENBERG DÜZLEMLERİ...32
4.1 Düzlemsel Sexternary Halkalar 32
4.2 Moufang Klingenberg Düzlemleri...39
5. SONUÇ..44
KAYNAKLAR..45
ÖZGEÇMİŞ 46

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\|P \vee Q\|$	P ve Q dan geçen doğrular kümesinin eleman sayısı
$\| g \cap h \|$	g ve h nin üzerindeki noktalar kümesinin eleman sayısı
$L(P, g)$	P den geçen g ye paralel olan tek doğru
I	Üzerinde olma bağıntısı
$\sim$	Komşuluk bağıntısı
$\|\|$	Paralellik bağıntısı
$/$	Yarıparalellik bağıntısı
$\simeq$	Yakınlık bağıntısı
κP	P noktasına komşu olan noktaların kümesi
κg	g doğrusuna komşu olan doğruların kümesi
$\pi(g)$	g yi bulunduran demet
g_∞	Demetlerin kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
PK-	Projektif Klingenberg düzlemi
AK-	Afin Klingenberg düzlemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. Nokta ve doğruların ω altında görüntüsü……………………………………14
Şekil 3.2. Aynı komşuluktaki doğruların ω altındaki görüntüsü……………………….20
Şekil 3.3. j doğrusu üzeindeki u tane noktanın ω altındaki görüntüsü………………....21
Şekil 3.4. h ye paralel olan doğrunun ω altındaki görüntüsü………………………….22
Şekil 3.5. RH doğrusunun $\omega^{*}\kappa$ altındaki görüntüsü…………………………………...22
Şekil 3.6. PK- düzleminde g ye komşu olan doğrular atıldığında elde kalan doğrular..26
Şekil 4.1. Tamdörtgen……………………………………………………………….32
Şekil 4.2. (x,y) noktasının koordinatı ……………………………………………….33
Şekil 4.3. $(\infty_{\omega})_0$ noktasının koordinatı…………………………………………….....34
Şekil 4.4. $(\infty_0)_z$ noktasının koordinatı………………………………………………34
Şekil 4.5. $[m,k]$ doğrusunun koordinatı……………………………………………..35
Şekil 4.6. $[p]_n$ doğrusunun koordinatı………………………………………………36
Şekil 4.7. $[\infty_q]_n$ doğrusunun koordinatı……………………………………………36
Şekil 4.8 : T_1'in iyi tanımlı olduğunu koordinat yardımıyla gösterme…………………38

1. GİRİŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Tez orijinal yeni sonuçlar kapsamamaktadır. Bu tezin amacı afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemlerini çalışacak matematikçiler için temel bilgileri kapsayan, çalışmalarını dayandıracakları özlü bir kaynak hazırlamaktır. Tez bir derlemedir. Ancak güncel bir konu olan afin ve projektif Klingenberg düzlemleri hakkında birçok kaynak taranarak güncel bilgiler ve araştırmalarda incelenmeye çalışılmıştır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde tezdeki bölümler özet olarak tanıtılmaktadır.

İkinci bölüm olan kuramsal temeller bölümünde tezin esasını teşkil eden afin ve projektif Klingenberg düzlemlerinin incelenmesinde ihtiyaç duyulan temel kavramlar tanıtılacaktır. Bunun için Nomizu (1966), Hungerford (1974), McDonald (1976), Jacobson (1985), Fraleigh (1989), Asar ve ark. (2009), Erdoğan (2014), Çiftçi (2015) kaynakları esas alınmıştır. Bu bilgiler kullanılacak olan cebirsel kavramları ve geometrik kavramları ve önermeleri kapsamaktadır.

Üçüncü bölüm beş alt başlık halinde düzenlenmiştir. Birinci alt başlık afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemleri ile ilgili bazı tanım ve teoremleri içermektedir. Esas olarak afin düzlem ve projektif düzlem hakkındaki bilgiler, afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemlerinin özel hallerinden elde edilmiş olarak düşünülebilir. Afin düzlemler ve projektif düzlemler afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemlerinin birer özel sınıfıdır. İkinci alt başlıkta türetilmiş afin Klingenberg düzlemleri ele alınarak bir projektif Klingenberg düzleminden bir afin Klingenberg düzleminin nasıl elde edileceğinin yapısı anlatılmış ve bu yapıyla ilgili tanım ve teoremler incelenmiştir. Üçüncü alt başlıkta sayısal sabitler ve grosly birebir çarpanlara ayırma konusu çalışılmış ve bu kısımda afin ve projektif Klingenberg düzlemleriyle ilgili bazı dönüşümler ve sayısal özellikler incelenmiştir. Dördüncü alt başlıkta Hjemslev düzlemleri ele alınmış ve Hjemslev düzlemleri ile ilgili bazı temel bilgiler üzerinde durulmuştur. Hjemslev düzlemleri çok genel geometrik yapılar olup afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemleri Hjemslev düzlemlerinin özel sınıfları olarak ele alınabilir. Beşinci ve son alt başlıkta ise bölüm düzlemleri ve görüntü düzlemlerinin tanımları verilmiş bunların yapıları ele alınmıştır. Bu kısımda ayrıca bölüm düzlemleri ve görüntü düzlemleri ile ilgili tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise Çelik (1995) deki lokal alternatif halkalar ve Moufang Klingenberg düzlemleri ele alınmıştır. Bir lokal alternatif halka üzerine bir Moufang Klingenberg düzleminin nasıl koordinatlanacağı Dugas (1978), Keppens (1988), Baker (1991), Çelik (1995) çalışmaları esas alınarak incelenmiştir. Bu kısımda ayrıca bir Moufang projektif Klingenberg düzlemine karşılık gelecek bir cebirsel yapının nasıl kurulacağı ve sexternary halka olarak adlandırılan bu cebirsel yapıların özellikleri ile onların elde edildiği Moufang Klingenberg düzleminin geometrik özellikleri arasındaki ilişkilerden bir kısmı Keppens (1988) ve Akpınar (2007) çalışmaları incelenmiştir. Ayrıca bir sexternary halka kullanılarak bir projektif Klingenberg düzleminin nasıl kurulacağı üzerinde durulmuştur. Bu çalışmalar yapılırken bir Moufang projektif Klingenberg düzlemi için koordinatlamanın yapılışı ve sexternary halkalar hakkında faydalanılan kaynaklardaki bilgilerde bazı küçük düzenlemeler ve düzeltmeler yapılmıştır.

Beşinci ve son bölümde tez ile ilgili genel bir değerlendirmenin yapıldığı sonuç kısmı bulunmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde verilen temel kavramları literatürdeki birçok cebir kitabında bulmak mümkündür. Burada esas olarak Nomizu (1966), Hungerford (1974), McDonald (1976), Jacobson (1985), Fraleigh (1989), Asar ve ark. (2009), ÖZEN Erdoğan (2014), Çiftçi (2015) kaynakları esas alınmıştır.

Tanım 2.1.1: G bir küme ve * : $G \times G \to G$ bir iç işlem olsun. Eğer,

G1) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

G2) Her $a \in G$ için $a * e = a = e * a$ olacak şekilde en az bir $e \in G$ vardır.

G3) Her $a \in G$ için $a^{-1} * a = e = a * a^{-1}$ olacak şekilde en az bir $a^{-1} \in G$ vardır

şartları sağlanıyorsa $(G,*)$ ikilisine bir grup denir ve bu grup, eğer bir karışıklık söz konusu olmayacaksa, kısaca G ile gösterilir. $G1$ şartına $*$ işleminin birleşme (asosyatiflik) özelliği, $G2$ şartını sağlayan e elemanına $*$ işleminin etkisiz elemanı, $G3$ şartındaki a^{-1} elemanına da a elemanının $*$ işlemine göre tersi denir.

Tanım 2.1.2: $(G,*)$ grubu için

$\forall\, a, b \in G$ için $a * b = b * a$

şartı sağlanıyorsa G ye değişmeli (komütatif) grup ya da Abel grubu denir.

Tanım 2.1.3: G, bir grup ve G' , G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G' , G nin işlemine göre bir grup ise o zaman G' ne G nin bir alt grubu denir.

Tanım 2.1.4: $(G,*)$ ve $(G',*')$ iki grup ve $\Phi: G \to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in G$ için

$\Phi(a * b) = \Phi(a) *' \Phi(b)$

şartı sağlanıyorsa Φ dönüşümüne G den G' ne bir homomorfizm denir. Eğer Φ homomorfizmi birebir ve örten ise Φ dönüşümüne bir izomorfizm denir.

Tanım 2.1.5: $\Phi: G \to G'$ bir homomorfizm olsun ve G' nün etkisiz elemanı e' ile gösterilsin. Bu durumda G nin, görüntüsü e' olan elemanlarının oluşturduğu $\Phi^{-1}(\{e'\})$ alt grubuna Φ dönüşümünün çekirdeği denir ve $Ker(\Phi)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6: R herhangi bir küme ve $+$ ile . bu küme üzerinde tanımlı herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer,

H1) $(R,+)$ değişmeli gruptur.

H2) . işlemi birleşmelidir.

H3) Her $a,b,c \in R$ için $a\,.\,(b+c) = a\,.\,b + a\,.\,c$ ve $(a+b).\,c = a\,.\,c + b\,.\,c$ dir.

şartları gerçekleniyorsa $(R,+,.)$ sistemine bir halka denir. Bazen kısalık olması bakımından $(R,+,.)$ halkası R ile gösterilir.

Bir $(R,+,.)$ halkasında birinci işleme genellikle toplama, ikinci işleme de çarpma işlemi adı verilir. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana özdeşlik adı verilir. Eğer R halkasında özdeşlik elemanı varsa R ye özdeşlikli halka, çarpma işlemi değişmeli ise R ye değişmeli (komütatif) halka denir.

Tanım 2.1.7: R özdeşlikli bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 1$ olacak şekilde $b \in R$ varsa $b\ ye\ a$ nın sağ tersi ve $ca = 1$ olacak şeklide $c \in R$ varsa $c\ ye\ a$ nın sol tersi denir. Eğer $d \in R$ olmak üzere $ad = da = 1$ ise $d\ ye\ a$ nın bir tersi ve a ya da birimsel eleman denir.

Tanım 2.1.8: R bir halka ve $a,b \in R$ olsun. Eğer $a,\ b \neq 0$ iken $a.b = 0$ oluyor ise a ya sol sıfır böleni ve b ye sağ sıfır böleni denir. R halkasının değişmeli olması halinde yalnızca sıfır böleni ifadesi kullanılır.

Tanım 2.1.9: $(R,+,.)$ bir halka olsun. Eğer R nin bir R' alt kümesi R halkasının işlemleri altında bir halka oluşturuyorsa R' ne R nin alt halkası denir.

Tanım 2.1.10: R nin her a elemanı için $aI \subseteq I$ ve $Ia \subseteq I$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına, R halkasının ideali denir.

Tanım 2.1.11: R bir halka ve $M \neq R$, R nin bir ideali olsun. Eğer $M \subset I \subset R$ şartını sağlayan hiçbir I ideali yoksa M ye R nin maksimal ideali denir.

Tanım 2.1.12: Aşağıda birbirine denk olarak verilen şartlardan bir tanesini sağlayan değişmeli bir R halkasına bir lokal halka denir.

a) R nin bir tek maksimal ideali vardır.

b) R nin tüm birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir tek has idealde kapsanır.

c) R nin birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir has ideal oluşturur.

d) $\forall\, r \in R$ için ya r ya da $r-1$ birimdir.

Tanım 2.1.13: $(\mathrm{R},+,.)$ ve $(R',+',.')$ iki halka, $\Phi : R \rightarrow R'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a,b \in R$ için

1) $\Phi(a+b) = \Phi(a) +' \Phi(b)$

2) $\Phi(a.b) = \Phi(a)\ .'\ \Phi(b)$

şartları sağlanıyorsa Φ dönüşümüne R den R' ne bir homomorfizm denir.

Tanım 2.1.14: $(\mathrm{R},+,.)$ ve $(R',+',.')$ iki halka olsun. $\Phi : R \rightarrow R'$ birebir ve örten bir homomorfizm ise Φ dönüşümüne R den R' ne bir izomorfizm denir.

Tanım 2.1.15: Eğer $(R,+,\cdot)$ bir özdeşlikli halka ve $R-\{0\}$ ın her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(R,+,\cdot)$ halkasına bölümlü halka veya aykırı cisim denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya *cisim* adı verilir.

Tanım 2.1.16: $(F,+,\cdot)$ bir cisim ve $(V,\oplus)$ bir abel grubu olsun. Eğer $\circ : F \times V \rightarrow V$ dış işlemi her $x,y \in V$ ve her $a,b \in F$ için;

V1) $a \circ (x \oplus y) = (a \circ x) \oplus (a \circ y)$

V2) $(a+b) \circ x = (a \circ x) \oplus (b \circ x)$

V3) $(a \cdot b) \circ x = a \circ (b \circ x)$

V4) $1 \in F$ özdeşlik elemanı için, $1 \circ x = x$ dir.

şartları sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir ve eğer bir karışıklık olmayacaksa F cismi belirtilmeden kısaca V ile gösterilir.

Eğer V nin bir W altkümesi, V vektör uzayının işlemleri altında bir vektör uzayı ise, W ya V nin bir altvektör *uzayı* ya da kısaca altuzayı denir.

Tanım 2.1.17: R, $1 \neq 0$ özdeşlikli bir halka ve M toplamsal değişmeli bir grup olsun. $\forall a \in R$ ve $\forall x \in M$ için $(a,x) \to ax$ olacak şekilde tanımlı $R \times M \to M$ dış işlemi tüm $a,b \in R$ ve tüm $x,y \in M$ elemanları için aşağıdaki şartları sağlıyorsa M kümesine R halkası üzerinde bir birimli modül denir:

1) $a(x+y) = ax + ay$

2) $(a+b)x = ax + bx$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$ dir.

Tanım 2.1.18: R özdeşlikli ve değişmeli bir halka ve M ise R halkası üzerine kurulan bir modül olsun. M nin bir S alt kümesi için aşağıdaki iki özellik geçerli ise S ye M nin bir alt modülü denir.

1) $\forall\, x, y \in S$ için $x + y, x - y \in S$ dir.

2) $\forall x \in S$ ve $\forall c \in R$ için $cx \in S$ dir.

Tanım 2.1.19: R özdeşlikli bir halka ve M ise R halkası üzerine kurulan bir modül olsun. Eğer M nin boş kümeden farklı bir bazı var ise M ye bir serbest (free) modül denir.

Tanım 2.1.20: V , $(F, +, .)$ cismi üzerinde iç ve dış işlemleri sırasıyla, $\oplus$ ve o olan bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan ikinci iç işlem olan $\oplus$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde bir cebir denir. Her $c \in F$ ve her $x, y, z \in V$ için

C1) $(c\ o\ x) \otimes y = x \otimes (c\ o\ y) = c\ o\ (x \otimes y)$

C2) $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

C3) $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ dir.

Çoğunlukla iç ve dış işlemleri gösterirken kullanılan $\otimes$ ve o simgeleri yerine işlemler, elemanlar yan yana yazılarak da gösterilebilir. Eğer bir V cebirinde

$\forall x, y, z \in V$ için $(xy)z = x(yz)$

şartı da sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde birleşmeli bir cebir denir.

Tanım 2.1.21: $\wp$ elemanlarına nokta denilen bir küme ve $\mathcal{g}$ ise elemanlarına doğru denilen $\wp$ nin altkümelerinin bir kümesi olsun. $X \in \wp$ ve $d \in \mathcal{g}$ için X noktasının d doğrusunun üzerinde olduğunu, yani d doğrusunun X noktasından geçtiğini ifade etmek üzere $X\ I\ d$ sembolü kullanılsın. Böyle oluşturulan $U = (\wp, \mathcal{g}, I)$ için sistemine bir geometrik yapı denir. Bazen $U = (\wp, \mathcal{g}, I)$ yerine kısaca $U = (\wp, \mathcal{g})$ yazılır ve $(\wp, \mathcal{g})$ uzayı olarak da isimlendirilir.

Tanım 2.1.22: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $(\wp, \mathcal{g})$ uzayına bir lineer uzay denir.
L1) Her doğru en az iki nokta kapsar.
L2) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

Tanım 2.1.23: Aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $U = (\wp, \mathcal{g})$ lineer uzayına bir projektif düzlem denir.
PD1) Herhangi iki doğru kesişir.
PD2) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.
Genellikle $\wp$ noktalar kümesinin elemanları büyük harflerle, $\mathcal{g}$ doğrular kümesinin elemanları küçük harflerle gösterilir. A ve B noktalarından geçen doğru $A \cup B$ ile veya kısaca AB ile gösterilir. Benzer şekilde a ve b doğrularının arakesiti $a \cap b$ ile veya kısaca ab ile gösterilir. Bir projektif düzlem genellikle. $U = (\wp, \mathcal{g}, I)$ yerine $P = (\wp, \mathcal{g}, I)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.24: Aşağıdaki şartları sağlayan $(\wp, \mathcal{g})$ geometrik yapısına bir projektif uzay denir.
PU1) İki farklı X, Y noktası tam olarak bir XY doğrusu üzerindedir.
PU2) $A \neq B \neq C \neq D$ özelliğinde dört nokta A, B, C, D olsun. AB ve CD doğrularının bir ortak noktası varsa bu takdirde AD ve BC doğrularının da bir ortak noktası vardır.
PU3) Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.
PU4) Hiç ortak noktası olmayan en az iki doğru vardır.

Tanım 2.1.25: $(\wp, \mathcal{g})$ bir geometrik yapı olsun. $P' = (\wp', \mathcal{g}')$ bir projektif uzay ve Φ, N kümesinden N' kümesine bir dönüşüm olsun. Eğer $\mathcal{g}$ nin her d doğrusu için ,$\Phi(d)$ $\mathcal{g}'$ nün doğrusu ise Φ ye bir homomorfizm denir.

Tanım 2.1.26: P ve P' herhangi iki projektif düzlem olsun. P den P' ne birebir ve örten homomorfizm varsa bu projektif düzlemler izomorftur denir. Bu fonksiyona da izomorfizim adı verilir. Bir projektif düzlemi kendisine dönüştüren izomorfizme kolinasyon veya otomorfizm denir.

Tanım 2.1.27: P bir projektif uzay olsun. $\forall P, Q \in U, P \neq Q \Rightarrow PQ \subset U$ şartını sağlayan bir U alt kümesine P nin bir alt uzayı denir.

Tanım 2.1.28: Bir P projektif uzayının kendisini üreten bağımsız bir alt kümesine P nin bir bazı denir.

3. KLINGENBERG DÜZLEMLERİ VE İKİ GROSS FUNCTOR

3.1 Klingenberg Düzlemleri

Beş kısımdan oluşan bu bölümde öncelikle projektif Klingenberg ve Afin Klingenberg düzlemleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecek daha sonra Hjelmslev düzlemleri ve bölüm düzlemleri konuları tanım ve teoremleri ile birlikte ele alınacaktır. Bölümün beş kısmının tamamında ele alınan tanım ve teoremler için Bacon (1976) esas alınmıştır.

Tanım 3.1.1: Elemanları noktalar olan bir $\wp$ kümesi ve elemanları doğrular olan bir $\mathcal{g}$ kümesi alalım. I, $\wp \cup \mathcal{g}$ üzerinde $X\ I\ y$ iken $X \in \wp$ noktası $y \in \mathcal{g}$ doğrusunun üzerinde olacak şekilde adına üzerinde olma bağıntısı denilen bir bağıntı olsun. $\wp$ nin elemanları P, Q ... ; $\mathcal{g}$ nin elemanları g, h ... şeklinde gösterilir ve ($\wp$,$\mathcal{g}$,I) ya bir geometrik yapı denir ve benzer terimler kullanılır. $P\ ve\ Q$ dan geçen doğruların kümesinin eleman sayısını $|P \vee Q|$ ile ifade edilir, yani bu küme $\{\, g|\ P\ I\ g\ ve\ Q\ I\ g \,\}$ dir. Eğer $|P \vee Q| = 1$ ise PQ ve $P \vee Q$ nun ikisi de $P\ ve\ Q$ dan geçen doğru olarak gösterilir. $|\ g\ \cap h\ |$ yi $g\ ve\ h$ nin üzerindeki noktaların kümesinin eleman sayısı olarak ifade edilir. Eğer $|\ g\ \cap h\ | = 1$ ise $g\ ve\ h$ nin üzerindeki nokta $g \cap h$ olarak belirlenir. Eğer $P\ I\ g$ ve $Q\ I\ g$ ise $P, Q\ I\ g$; eğer $P\ I\ g$ ve $P\ I\ h$ ise $P\ I\ g, h$ olarak gösterilir. $(\wp, \mathcal{g}, \mathrm{I})\ ve\ (\wp', \mathcal{g}', I')$ iki geometrik yapı olsun. Her $P \in \wp$ için $\omega P \epsilon \wp'$, her $g\ \in \mathcal{g}$ için $\omega g \epsilon \mathcal{g}'$ ve $(\wp, \mathcal{g}, I)$ sisteminde $P\ I\ g$ olduğunda $(\wp', \mathcal{g}', I')$ sisteminde de $\omega P\ I'\ \omega g$ olur şartları sağlanıyorsa ω: $(\wp, \mathcal{g}, \mathrm{I}) \longrightarrow (\wp', \mathcal{g}', I')$ dönüşümüne bir geometrik yapı homomorfizmi denir.

Tanım 3.1.2: A bir geometrik yapı olsun. $\|$, A nın doğruları üzerinde bir denklik bağıntısı ve ρ ise A nın noktaları ve doğruları üzerinde eşitlik bağıntısı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığında (A,$\|, \rho$) geometrik yapısına bir afin düzlem denir;

i) A nın farklı P, Q noktalarından tam olarak bir g doğrusu geçer öyle ki; $P, Q\ I\ g$ dir.

ii) m bir doğru ve S, m nin üzerinde olmayan bir nokta iken $S\ I\ n$ ve $|n \cap m| =\ 0$ olacak şekilde tam olarak bir n doğrusu vardır.

iii) A nın doğrudaş olmayan üç noktası vardır.

Bir afin düzlemde $b\ ve\ c$ gibi iki doğrunun paralelliği yani $b \parallel c$ i olması ya $|b \cap c| = 0$ veya $b = c$ olarak tanımlanır. Paralellik bağıntısının bir denklik bağıntısı olacağı açıktır.

Tanım 3.1.3: V bir geometrik yapı ve ρ de V nin nokta ve doğrularının üzerindeki eşitlik bağıntısı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlandığında (V, ρ) sistemine bir projektif düzlem denir;

i) V nin farklı P, Q noktasından tam olarak bir g doğrusu geçer öyle ki ; $P, Q\ I\ g$ dir.

ii) V nin farklı h, k doğruları bir tek T noktasında kesişir öyle ki; $T\ I\ h, k$ dir.

iii) V nin herhangi üçü doğrudaş olmayan birbirinden farklı dört noktası vardır.

Afin ve projektif düzlem tanımlarında verilen aşikâr denklik bağıntısı olan eşitlik bağıntıları, bu düzlemleri aşağıda tanımı verilecek olan afin Klingenberg ve projektif Klingenberg düzlemleri olarak ele alabilmek için eklenmiştir.

Tanım 3.1.4: A = ($\wp$,$\mathcal{g}$,I) bir geometrik yapı, $\parallel$ A nın doğruları üzerinde paralellik denilen bir denklik bağıntısı ve $\sim$, A nın doğruları ve noktaları arasında komşuluk denilen bir denklik bağıntısı olsun. İki elemanın aynı komşulukta olmaması $\nsim$ ile gösterilsin. A nın bir P noktası ve bir g doğrusu için P den geçen g ye paralel olan bir tek doğru vardır şartı sağlanıyor ve $(A, \parallel, \sim)$ sisteminden $(A^{\#}, \parallel, \rho)$ afin düzlemine aşağıdaki şartları sağlayan örten bir φ geometrik yapı homomorfizmi varsa $(A, \parallel, \sim)$ sistemine bir Afin-Klingenberg düzlemi denir ve kısaca AK-ile gösterilir.

Her $P, Q \in \wp$ ve her $g, h \in \mathcal{g}$ için:

i) Eğer $\varphi P \neq \varphi Q$ ise A da $P\ ve\ Q$ dan geçen bir tek doğru vardır.

ii) Eğer $\varphi g\ ve\ \varphi h$, $A^{\#}\ nin$ bir tek noktasında kesişiyorsa, $g\ ve\ h$ de A nın bir tek noktasında kesişir.

iii) Eğer $|g \cap h| = 0$ ise $\varphi g \parallel \varphi h\ dir.$

iv) $P{\sim}Q \Leftrightarrow \varphi P = \varphi Q\ dir.$

v) $g{\sim}h \Leftrightarrow \varphi g = \varphi h\ dir.$

φ ye A nın yapı dönüşümü denir. $P\ ve\ g$ A nın nokta ve doğruları iken, P den geçen g ye paralel olan tek doğru $L(P, g)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5: $V = (\wp, \mathcal{g}, I)$ geometrik yapı ve $\sim$,V nin noktaları ve doğruları arasında komşuluk denilen bir denklik bağıntısı olsun.

$(V, \sim)$ sisteminden $(V^{\#}, \rho)$ projektif düzlemine örten bir φ geometrik yapı homomorfizmi her $P, Q \in \wp\,; g, h \in \mathcal{g}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(V, \sim)$ sistemine bir Projektif-Klingenberg düzlemi denir ve kısaca PK ile gösterilir:

i) Eğer $\varphi P \neq \varphi Q$ ise V nin $P\ ve\ Q$ noktasından geçen bir tek doğru vardır.

ii) Eğer $\varphi g \neq \varphi h$ ise V nin $g\ ve\ h$ doğruları bir tek noktada kesişirler.

iii) $P \sim Q \Leftrightarrow \varphi P = \varphi Q\ dır.$

iv) $g \sim h \Leftrightarrow\ \varphi g = \varphi h\ dir.$

φ dönüşümüne, V nin geometrik yapı dönüşümü denir.

Eğer V, AK-düzlemi ya da PK-düzleminden herhangi biri ise V bir Klingenberg düzlemidir denir. Bir üzerinde olma bağıntısı I, bir komşuluk bağıntısı $\sim$ ve bir paralellik bağıntısı ∥ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki önerme gerçekte paralel formda yazılan iki önermedir. Bu bölümün geri kalanında sık sık benzer paralel formlar kullanılacaktır.

Önerme 3.1.6: Herhangi bir afin düzlemi (projektif düzlemi) özdeşlik (birim) dönüşümü ile bir AK- düzlemidir (PK- düzlemidir).

Tanım 3.1.7: Bir (V,∥,∼) ya da (V,∼) Klingenberg düzlemini genellikle V ile gösterilir. V bir Klingenberg düzlemi olsun. P noktasına komşu olan noktaların kümesi κP ile, g doğrusuna komşu olan doğruların kümesi de κg ile gösterilsin. $Q\ \in\ \kappa P$; $h\ \in\ \kappa g$ öyle ki $Q\ I\ h$ olduğunda κP noktaları, κg doğruları için $\kappa P\ I\ \kappa g$ olur sonucu ile birlikte yeni bir V^* geometrik yapısı oluşturulur ve V^* yapısına $\sim$ ile indirgenen bir geometrik yapı denir. Eğer V bir AK- düzlemi ise $k\ \in \kappa g$; $m \in \kappa h$ ve $k \parallel m$ olacak şekilde k, m doğruları var ise indirgenmiş paralellik bağıntısı $\kappa g \parallel \kappa h$ ile tanımlanır.

ρ, V nin noktaları ve doğruları üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Eğer V bir AK- düzlemi ise $(V^*, \|, \rho)$ sistemine V nin gross yapısı denir. Eğer V bir PK- düzlemi ise $(V^*, \rho\ )$ sistemine V nin gross yapısı, κ dönüşümüne de komşuluk dönüşümü denir.

V ve V' geometrik yapı olsunlar ve ω: V⟶V' bir dönüşüm olsun. V de her $P\ I\ g$ olduğunda , V' de ωP I ωg oluyorsa , ω ya I yı koruyan dönüşüm denir. Eğer V' de ωP I ωg olduğunda, V de $Q\ ve\ h$ vardır öyle ki $Q\ I\ h$; $\omega Q = \omega P$ ve $\omega h = \omega g$ oluyorsa ω dönüşümüne I yı yansıtan dönüşüm denir. Bu terimler açık bir şekilde diğer bağıntılara genişletilir.

Tanım 3.1.8: A ve A′ AK- düzlemi olsunlar. Paralellik ve komşuluk bağıntılarını koruyan bir ω: A ⟶A′ geometrik yapı homomorfizmine bir afin-Klingenberg düzlem homomorfizmi denir (A da P I g olması A′ de ωP I ωg yi gerektirir).

Tanım 3.1.9: V, V′ PK- düzlemi olsunlar. Komşuluk bağıntısını koruyan ω: V ⟶ V′ geometrik yapı homomorfizmine bir projektif-Klingenberg düzlem homomorfizmi denir.

ω bir AK- ya da PK- düzlem homomorfizmi olduğunda ω: V $\longrightarrow$ V$'$ dönüşümüne bir Klingenberg düzlem homomorfizmi denir.

Açıklama: Her projektif (afin) düzlem homomorfizminin aynı zamanda bir PK- (AK-) düzlem homomorfizmi olduğu açıktır.

Önerme 3.1.10: $\varphi: V \longrightarrow V^{\#}$ yapı dönüşümü ve $\kappa: V \longrightarrow V^{*}$ komşuluk dönüşümü ile birlikte V bir Klingenberg düzlemi olsun. Bu takdirde κ, V nin yapı dönüşümüdür ve burada $\theta_{\kappa} = \varphi$ olacak şekilde bir $\theta: V^{*} \longrightarrow V^{\#}$ izomorfizmi vardır. Ayrıca herhangi bir yapı dönüşümü bir Klingenberg düzlem homomorfizmidir.

İspat : $\varphi: V \longrightarrow V^{\#}$, V nin yapı dönüşümü olsun. Her bir P noktası ve g doğrusu için $\theta_{\kappa g} = \varphi$g ; $\theta_{\kappa P} = \varphi$Polan bir $\theta: V^{*} \longrightarrow V^{\#}$ dönüşümü tanımlansın. Önce θ nın birebir ve örten olduğu gösterilmelidir.

$\kappa P \neq \kappa R \Rightarrow$ P $\nsim$ R $\Rightarrow \varphi P \neq \varphi R \Rightarrow \theta_{\kappa P} \neq \theta_{\kappa R}$ olur. θ birebirdir.

Her $\varphi P \in V^{\#}$ için $\exists$κP $\in V^{*} \ni \theta_{KP} = \varphi P$ olur. θ örtendir.

Eğer φP I φg ise $\varphi h \neq \varphi g$ doğrularını φP noktasından geçecek şekilde alınsın. $Q\ Ig, h$ olacak şekilde bir tek Q noktası vardır. Ayrıca $\varphi Q = \varphi P$; böylece $\kappa P\ I\ \kappa g$ dir ve θ üzerinde olmayı yansıtır. Dolayısıyla θ bir izomorfizimdir.

Eğer V bir AK-düzlemi ise, θ nın paralellik bağıntısını koruduğu ve yansıttığı gösterilmelidir. Eğer V de b $\|$ b' ise $|b \cap b'| = 0$ ya da b $= b'$ den birisi geçerlidir. Bundan dolayı φb $\|$ $\varphi b'$ dir ve φ paralellik bağıntısını korur.

Eğer $\kappa g \| \kappa h$ ise $g \sim g'$; $h \sim h'$ ve $g' \| h'$ olacak şekilde g', h' vardır. Böylece $\theta_{\kappa g} = \varphi g' \| \varphi h' = \theta_{\kappa h}$ dir ve θ paralellik bağıntısını korur. φk $\|$ φm olduğunu varsayılsın. φj , φk ye paralel olmayan bir doğru olsun. O halde $|j \cap k| = 1$ dir. $J\ I\ j, k$ alalım. O zaman φk $\|$ φm ; $\varphi L(J, m) \| \varphi k$ veφJ I φk, $\varphi L(J, m)$; dolayısıyla $\varphi k = \varphi L(J, m)$dir. Böylece κ$k =$ κ$L(J, m)$; yani $\kappa k \| \kappa m$ dir. Bundan dolayı θ paralellik bağıntısını yansıtır.

Dolayısıyla V, bir AK- (PK-) düzlemi ise $(V^{*}, \|, \rho)$ bir afin düzlemdir $((V^{*}, \rho)$ bir projektif düzlemdir) ve $\kappa: V \longrightarrow V^{*}$,V nin bir yapı dönüşümüdür.

Şimdi $\kappa, \theta\ ve\ \varphi$ nin Klingenberg düzlem homomorfizmleri olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.1.11: $\sim$ komşuluk bağıntısıyla birlikte V bir Klingenberg düzlemi olsun. $P \simeq g \Leftrightarrow$ κP I κg ile V nin doğruları ve noktaları arasında (yakın ya da yakınlık adı verilen) bir $\simeq$ bağıntısı tanımlarız. $\simeq, \sim, \|$ nin olumsuzları sırasıyla $\not\simeq$, $\nsim$, $\nparallel$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.12: (A, $\|$, $\sim$) bir AK- düzlemi olsun. Paralel doğruların denklik sınıfı bir demet olarak adlandırılır ve demetler Γ, Λ vb. ile gösterilir. Eğer g, A nın bir doğrusu ise $\pi(g)$, g yi bulunduran demeti göstersin. Eğer P, A nın bir noktası ve Γ, A nın bir demeti ise P den geçen Γ nın tek doğrusunu $L(P, \Gamma)$ ile gösterilir.

g_∞ demetlerin kümesi olarak belirtilir. Üzerinde olma bağıntısı, komşuluk dönüşümü, komşuluk bağıntısı ve yakınlık bağıntısı için kullanılan sembol ve terimlerin demetlere ve g_∞ a etkisi kolayca belirlenip bunlara genişletilebilir.

Örneğin (A,$\|$,$\sim$) nın A^* gross yapısıyla ilgili projektif düzlemde $\sum$ bir demet iken $\sum I\ g_\infty$ yazılır ve $\kappa\Gamma\ \ I\ \kappa h$ olduğunda $\Gamma\ \simeq\ h$ gösterilir.

Tanım 3.1.13: (A, $\|$,$\sim$) bir AK- düzlemi olsun. A nın doğruları üzerinde, her $g, h\ \in \mathcal{G}$ için $g\ /\ h \Leftrightarrow$ κg $\|$ κh olacak şekilde (olumsuzu $\not/$ ile gösterilen) bir "/" bağıntısı tanımlanır ve bu $/$ bağıntıya yarıparalellik bağıntısı denir.

Tanım 3.1.14: Bir (V, $\|$, $\sim$) AK-düzlemi (bir (V,$\sim$) PK-düzlemi) genellikle V ile gösterilir. Üzerinde olma yapısı, gross yapısı ve komşuluk dönüşümü sırasıyla V, V^*, κ ile gösterilir. Benzer şekilde V' PK- düzleminin gross yapısı $(V')^*$ ve komşuluk dönüşümü κ' ile gösterilir. Genellikle paralellik bağıntısı "$\|$ " ile komşuluk bağıntısı " $\sim$ " ile belirtilecektir.

Önerme 3.1.15: V , V' Klingenberg düzlemleri olsunlar. Bunların üzerindeki yapı dönüşümleri sırasıyla φ: V$\longrightarrow V^\#$ ve φ': $V' \longrightarrow (V')^\#$ olsunlar. Ayrıca ω: V$\longrightarrow V'$ bir Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun. $\omega^\#\varphi = \varphi'\omega$ olacak şekilde bir tek $\omega^\#: V^\# \longrightarrow (V')^\#$ Klingenberg düzlem homomorfizmi vardır.

İspat: Önce yukarıda tanımlanan $\omega^\#: V^\# \longrightarrow (V')^\#$ dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu, yani üzerinde olmayı koruyan bir dönüşüm olduğu gösterilmelidir. $\omega^\#$ nin tanım kümesi olan $V^\#$ de bir φP noktası ve bir φg doğrusu için $\varphi P\ I\ \varphi g$ iken $\omega^\#\varphi P\ I\ \omega^\#\varphi g$ olduğu gösterilmelidir. $\varphi P\ I\ \varphi g$ iken V de $Q\ I\ h$ ve $\varphi Q = \varphi P$, $\varphi h = \varphi g$ olacak şekilde Q noktası ile h doğrusunun varlığı Önerme 3.1.10 dan söylenebilir. Bu durumda $\omega Q\ I\ \omega h$ ve $\varphi'\omega Q\ I\ \varphi'\omega h$ olacağı ω ve φ' homomorfizmlerinin üzerinde olmayı korumasından yazılabilir. $\varphi'\omega Q = \omega^\#\varphi P$ ve

$\varphi'\omega h = \omega^{\#}\varphi g$ olduğundan $\varphi P \; I \; \varphi g$ iken $\omega^{\#}\varphi P \, \mathrm{I} \, \omega^{\#}\varphi g$ olur ki bu, $\omega^{\#}$ nin homomorfizm olduğunu yani üzerinde olmayı koruduğunu gösterir.

Tanım 3.1.16: Eğer ω: V$\longrightarrow V'$ bir Klingenberg düzlem homomorfizmi ve ω^* : V^* $\longrightarrow (V\,')^*$, $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olacak şekilde tek homomorfizm ise bu takdirde ω^* dönüşümüne ω nın gross dönüşümü denir.

Önerme 3.1.17: Eğer ω: V$\longrightarrow V'$ bir AK- (PK-) düzlem homomorfizmi ise bu takdirde ω yakınlık ve yarıparalellik bağıntılarını korur (yakınlık bağıntısını korur).

İspat: κ' : V' $\longrightarrow (V')^*$ olmak üzere ;

ω: V$\longrightarrow V'$ dönüşümü için, g $\| h$ iken $\omega g \parallel \omega h$ olduğu gösterilmelidir.

Eğer $\omega g \nparallel \omega h$ olsa $\kappa'\omega g \neq \kappa'\omega h$ olur. Dolayısıyla $\omega^*\kappa g \neq \omega^*\kappa h$ olur ki buradan da $\kappa g \neq \kappa h$ olacağı çıkar. Hâlbuki g||h iken $\kappa g = \kappa h$ dir. Dolayısıyla $\omega^*\kappa g = \omega^*\kappa h$ dir. Bu yüzden de $\omega g \parallel \omega h$ olmak zorundadır. O halde paralellik bağıntısı korunmuş olur. Ayrıca ω nın gross dönüşümü, üzerinde olma ve paralellik (üzerinde olma) bağıntılarını koruduğundan ω da yakınlık ve yarıparalellik bağıntılarını korur.

Tanım 3.1.18: ω: V$\longrightarrow V'$ bir Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun. Eğer ω^* dönüşümü 1-1 (örten, 1-1 ve örten) ise ω^* dönüşümüne grossly 1-1 denir. Eğer ω^* bir izomorfizm ise ω ya grossly izomorfizm denir

Eğer ω bir PK- (AK-) düzlem homomorfizmi ise ve eğer ω^* bir nondejenere ise, yani V^* ın $(V')^*$ da ω^* altındaki görüntüsü herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta kapsıyorsa (doğrudaş olmayan üç nokta kapsıyorsa) bu takdirde ω nondejeneredir denir.

Önerme 3.1.19: ω: V$\longrightarrow V'$ bir nondejenere PK- (AK-) düzlem homomorfizmi ise bu takdirde V^* ın $(V')^*$ da ω^* grossly dönüşümü altındaki görüntüsü bir projektif (bir afin) düzlemdir.

İspat: ω^* : V^* $\longrightarrow (V')^*$ dönüşümü için ω: V$\longrightarrow V'$ bir PK- düzlem homomorfizmi ise $(V')^*$ daki farklı iki noktadan geçen bir tek doğru var olduğu gibi farklı iki doğrunun da bir tek ortak noktası vardır. ω^* nondejenere olduğundan $(V')^*$ da herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır. O halde $(V')^*$ bir projektif düzlemdir. Benzer olarak ω: V$\longrightarrow V'$ bir AK- düzlem homomorfizmi ise $A_1 ve\, A_2$ aksiyomları sağlanır. ω^* bir nondejenere olduğu için de A_3 sağlanır. Dolayısıyla $(V')^*$ bir afin düzlemdir.

Önerme 3.1.20: Eğer bir AK- (PK-) düzleminde $P \nsim Q$ ise bu takdirde $P\ ve\ Q$ dan geçen bir tek doğru vardır. Bir AK- düzleminde $g \nmid h$ (bir PK-düzleminde $g \nsim h$) ise bu takdirde $g\ ve\ h$ bir tek noktada kesişir.

İspat: Eğer $P \nsim Q$ ise $\kappa P \neq \kappa Q$ dur. $\kappa P \neq \kappa Q$ olduğundan $P\ ve\ Q$ dan geçen bir tek doğru vardır (AK- (i) şartı gereği).

Eğer V bir AK- düzlemi ve $g \nmid h$ ise $\kappa g \nparallel \kappa h$ dir. $\kappa g \nparallel \kappa h$ olduğundan $\kappa g\ ve\ \kappa h$ bir tek noktada kesişir ve böylece $g\ ve\ h$ de bir tek noktada kesişir (AK- ii gereği).

Eğer V bir PK- düzlemi ve g≁h ise bu takdirde $\kappa g \neq \kappa h$ dir. Bu durumda $g\ ve\ h$ doğruları bir tek noktada kesişir (PK- ii gereği).

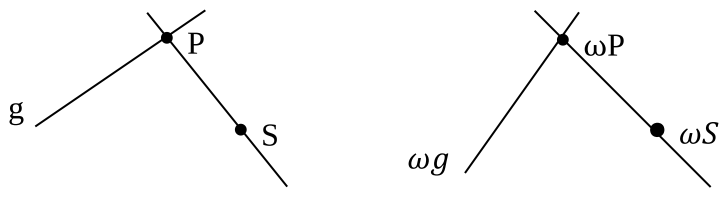
Önerme 3.1.21: ω: V⟶ V' bir nondejenere AK- (PK-) düzlem homomorfizmi olsun. Bir P noktası ile bir g doğrusu $\omega P\ I\ \omega g$ özelliğinde olsun. Bu takdirde $P\ I\ h,\ Q\ I\ g$ ve $\omega P = \omega Q$; $\omega g = \omega h$ olacak şekilde bir Q noktası ve bir h doğrusu vardır.

İspat: Hipotez gereği ω: V⟶ V' bir nondejenere AK- düzlem homomorfizmi ve $\omega P\ I\ \omega g$ özelliğinde bir P noktası ve bir g doğrusu alınsın.

S,V nin $\omega S, \omega g$ ye komşu olmayacak özellikteki bir noktası olsun. ω nondejenere olduğundan böyle bir nokta vardır. $\omega P \nsim \omega S$ olduğundan $P \nsim S$ dir ve P, S noktalarından geçen bir tek PS doğrusu vardır. (Bkz. Şekil 3.1)

ω:V⟶V'

P, S, g ⟶ωP, ωS, ωg $P\ I\ g$ ⟶ ωP I ωg



Şekil 3.1 : Nokta ve doğruların ω altında görüntüsü

ω yarıparalellik, paralellik (komşuluk) bağıntılarını korur ve yansıtır.

$\omega(PS) \nmid \omega g$ olduğundan $PS \nmid g$ dir. ($\omega(PS) \nsim \omega g$ olduğundan $PS \nsim g$ dir.) ve PS ve g nin kesişimi olan bir tek Q noktası vardır. Bu takdirde $Q\ I\ g$ ve $\omega Q = \omega(PS) \cap \omega g = \omega P$ dir.

Eğer ω bir PK- düzlem homomorfizmi ise dual tartışma gösterir ki $P\ I\ h$ ve $\omega h = \omega g$ olacak şekilde bir h doğrusu vardır. Farz edelim ki ω bir AK- düzlem homomorfizmi olsun. $h = L(P, g)$ olsun. Bu takdirde $\omega P\ I\ \omega h, \omega g$ ve $\omega h \| \omega g$ dir. Yani $\omega h = \omega g$ dir.

Sonuç 3.1.22: Herhangi bir komşuluk dönüşümü nondejeneredir. Böylece bir AK-düzleminde herhangi bir noktadan geçen ikişer ikişer komşu olmayan en az 3 doğru vardır ve herhangi bir doğru üzerinde de ikişer ikişer komşu olmayan 3 demet vardır.

İspat: $\kappa: V \longrightarrow V^*$ komşuluk dönüşümü (Önerme 3.1.10 gereği V Klingenberg düzleminin yapı dönüşümüdür ve herhangi bir yapı dönüşümü de Klingenberg düzlem homomorfizmidir.) bir afin düzlem olduğundan herhangi bir noktasından en az 3 doğru geçer, bu doğruların her biri de V de ikişer ikişer komşu olmayan üç farklı doğrunun görüntüsü olarak alınabilir. Dolayısıyla V nin κ komşuluk dönüşümü ile P noktasına dönüşen bir noktasından ikişer ikişer komşu olmayan en az 3 doğru geçer.

Önerme 3.1.23: AK- (PK-) düzlemlerinin sınıfı AK- (PK) düzlem homomorfizmleri ve onların birleşimleriyle birlikte bir $\tilde{A}$ kategori (bir $\tilde{V}$ kategori) biçimlendirir. $\tilde{A}^*$ ($\tilde{V}^*$) alt kategori gösterir ki elemanları afin (projektif) düzlemlerdir. $\underset{\sim}{G}'A : \tilde{A}^* \longrightarrow \tilde{A}$ $\left(\underset{\sim}{G}'V: \tilde{V}^* \longrightarrow \tilde{V}\right)$ kapsama ile tanımlanan functor olsun. Eğer V bir AK- (PK-) düzlemi ise bu takdirde (κ, V^*) $\underset{\sim}{G}'A$ ya göre V nin ($\underset{\sim}{G}'V$ ye göre) bir üniversal dönüşümdür.

Önerme 3.1.24: Bir V AK- (PK-) düzlemini onun V^* gross yapısına götüren ve AK- (PK-) düzlem homomorfizmi ω yı onun gross dönüşümü ω^* a götüren $\underset{\sim}{G}A : \tilde{A} \longrightarrow A^*$ dönüşümü bir functordur ve $\underset{\sim}{G}'A$ $\left(\underset{\sim}{G}'V\right)$ nin sol adjointidir.

Sonuç 3.1.25: Afin (projektif) düzlemler kategorisi (sınıfı) AK- (PK-) düzlem kategorisinin bir alt kategorisidir ve yansıtıcı $\underset{\sim}{G}A$ funktorüdür ($\underset{\sim}{G}v$ funktorüdür) .

Tanım 3.1.26: $\underset{\sim}{G}A$ funktoruna ($\underset{\sim}{G}V$) $\tilde{A}$ nın gross funktoru denir.

3.2 Türetilmiş Afin Klingenberg Düzlemleri

Bu kısımda bir PK- düzleminden bir AK- düzlemi elde edilecektir ve bu yapı aşağıdaki gibi kurulacaktır:

Yapı 3.2.1: (V,$\sim$) nın bir PK- düzlemi olsun. V nin g ye yakın olan bütün noktaları ve V nin g ye komşu olan bütün doğruları çıkarılarak elde edilen geometrik yapı $A(V,g)$ ile gösterilsin. V de $h, k\ ve\ g$ nin ortak bir noktası var olduğunda A(V,g) nin $k\ ve\ h$ doğruları paralel kabul edilsin ve bu durumda $h \parallel k$ yazılsın yani A(V,g) nin doğruları arasında tanımlanan bu paralellik bağıntısı $\parallel$ ile gösterilsin. A(V,g) nin doğruları ve noktaları üzerinde "o " bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$A(V,g)$ de $P\ o\ Q \iff V$ de $P \sim Q$ ve $P, Q \nsim g$ dir.

$A(V,g)$ de $h\ o\ k \iff V$ de $h \sim k$ ve $h, k \nsim g$ dir.

Önerme 3.2.2: V bir PK- düzlemi ve g, V nin bir doğrusu olsun. Bu takdirde yukarıdaki gibi tanımlanan $(A(V,g), \parallel, o)$ bir AK- düzlemidir. Herhangi bir ω: V$\longrightarrow V'$ grossly 1-1 PK- düzlem homomorfizmi, bir $\omega_g: A(V,g) \longrightarrow A(V', \omega_g)$ grossly 1-1 AK-düzlem homomorfizmine indirgenir.

İspat: $A(V,g)$ nin bir geometrik yapı olduğu görülür ve g ye koşu olmayan her bir doğru g yi bir tek noktada kestiğinden yukarıda tanımlanan $\parallel$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Buna paralellik bağıntısı denir. $P\ ve\ h$ $A(V,g)$ nin bir noktası ve bir doğrusu olsun. Bu takdirde $P \nsim (h \cap g)$ olduğundan P, V de g nin yakını değildir. Böylece V de $P\ ve\ h \cap g$ yi birleştiren bir tek m doğrusu vardır ve $P\ I\ m$ olduğundan $m \nsim g$ dir; öyle ki m, $A(V,g)$ dedir ve m, $A(V,g)$ nin P den geçen ve h ye paralel olan tek doğrusudur. $(A(V^*, \kappa g), \parallel, \delta)$ nin bir afin düzlem olduğu gözlenir.

$\kappa: V \longrightarrow V^*$ V nin bir komşuluk dönüşümü iken bütün P noktaları ve g doğruları için $\alpha P = \kappa P$; $\alpha g = \kappa g$ olacak şekilde $\alpha: A(V,g) \longrightarrow A(V^*, \kappa g)$ tanımlansın. α nın iyi tanımlı olduğu gözlenir.

Eğer $\alpha P \neq \alpha Q$ ise bu takdirde $\kappa P \neq \kappa Q$ olacağından $P\ ve\ Q$ dan geçen V nin bir tek m doğrusu vardır. $P\ I\ m$ olduğundan $m \nsim g$ dir. Bu yüzden m, $A(V,g)$ nin P ve Q noktalarını birleştiren tek doğrusudur. Eğer $\alpha h\ ve\ \alpha k$ bir tek noktada kesişiyorsa $\kappa h \neq \kappa k$ dir ve V^* ın $\kappa h\ ve\ \kappa k$ üzerindeki tek noktası olan $\kappa P, \kappa g$ nin üzerinde değildir. Böylece V nin $k\ ve\ h$ üzerindeki tek Q noktası g ye yakın değildir ve $A(V,g)$ dedir. Eğer $A(V,g)$ de $|h \cap k| = 0$ ise bu takdirde V de $h \sim k$ dolaysıyla $\alpha h \parallel \alpha k$ dir ya da $(h \cap k) \simeq g$ ve $\kappa(h \cap k)\ I\ \kappa g$; bu yüzden de $\alpha h \parallel \alpha k$ dir. Ayrıca herhangi bir doğruya o bağlantılı hiçbir nokta bulunmadığından bütün P, Q noktaları ve h, k doğruları için ;

P o Q ⟺ P ~ Q ⟺ $\alpha P = \alpha Q$ ve

h o k⟺ h ~ k ⟺ $\alpha h = \alpha k$ dir.

Böylece $(A(V,g), \parallel, o)$ bir AK-düzlemidir.

ω: V⟶ V' bir grossly 1-1 PK- düzlem homomorfizmi olsun. ω^* 1-1 olduğundan ω^*, $A(V^*, \kappa g)$ nin nokta ve doğrularını $A((V')^*, \kappa' \omega(g))$ nin nokta ve doğrularına götürür ve ω, $A(V,g)$ nin nokta ve doğrularını $A(V', \omega(g))$ nin nokta ve doğrularına götürür. Eğer $A(V,g)$ de $h \parallel k$ ise bu takdirde g nin üzerindeki noktalar $\omega(g)\ nin$ üzerine gideceğinden $A(V', \omega(g))$ de $\omega h \parallel \omega k$ elde edilir. $A(V,g)$ nin bütün P noktaları ve h doğruları için $\omega_g : A(V,g) \longrightarrow (V', \omega g)$ dönüşümü $\omega_g(P) = \omega P$; $\omega_g(h) = \omega h$ şeklinde tanımlanır. ω, komşuluk bağıntısını koruduğundan ω_g komşuluk bağıntısını korur. Şimdi ω_g nin grossly 1-1 AK- düzlem homomorfizmi olduğu açıktır.

Tanım 3.2.3: V bir PK-düzlemi ve g V nin bir doğrusu olsun. Yukarıdaki gibi tanımlanan $A(V,g)$ yapısına (V,g) den türetilmiş AK- düzlemi denir.

Eğer ω : V ⟶ V' bir grossly 1-1 PK- düzlem homomorfizmi ise ω_g: A(V, g) ⟶ $A(V', \omega g)$ dönüşümüne ω dan türetilmiş dönüşüm denir.

3.3 Sayısal Sabitler ve Grossly 1-1 Çarpanlara Ayırma

Bu kısımda AK (PK)- düzlemleriyle ilgili bazı dönüşümler ve sayısal özellikler incelenecektir.

Önerme 3.3.1: ω: A ⟶ A' bir nondejenere afin düzlem homomorfizmi olsun. Bu takdirde ω bir gömmedir. Yani ω 1-1 dir ve üzerinde olma, paralellik, komşuluk bağıntılarını korur ve yansıtır.

İspat: A nın paralel olmayan g, h doğrularını alalım. Bu takdirde $|g \cap h| = 1$ dir. g doğrusu h ye paralel her doğruyla kesişir. Bu yüzden ωg , $\omega L(P,h)$ biçimindeki her doğruyla kesişir. Böylece önerme 3.1.21 gereği ωg , ωh ye paralel olan her doğru ile kesişir. A nın görüntüleri A' nde doğrudaş olmayan P, Q, R noktalarını alalım. Bu takdirde ωg, $\omega L(P,h)$, $\omega L(Q,h)$ ve $\omega L(R,h)$ doğrularıyla kesişir. Bu doğrulardan en az ikisi farklıdır. Böylece ωg üçüne birden paralel olamaz. Bu yüzden ωg , ωh ye paralel değildir. P, R farklı noktalar olsun ve $k = PR$ alalım. ωQ , ωk nin üzerinde olmayacak şekilde bir Q noktası alalım. Bu takdirde QP, QR ye paralel değildir. Bundan dolayı $\omega P \neq \omega R$ dir. Böylece ω , noktalar kümesi üzerinde 1-1 dir. Önerme 3.1.21 gereği ω üzerinde olmayı yansıtır ve dolayısıyla doğrular üzerinde de 1-1 dir.

Eğer $\omega g \parallel \omega h$ ise bu takdirde ya $\omega g = \omega h$ dir ve bu yüzden de $g \parallel h$ dir ya da $|\omega g \cap \omega h| = 0$ dır. Dolayısıyla $|g \cap h| = 0$ dır ve $g \parallel h$ dir. Böylelikle ω 1-1 dir ve üzerinde olma ve paralellik bağıntısını yansıtır. Bu yüzden ω bir gömmedir.

“ Sayısı” ibaresi “kümenin kardinalitesi” anlamında kullanılacaktır.

$\omega :$ V $\longrightarrow V'$ nin nondejenere bir AK- (PK-) düzlem homomorfizmi olduğu kabul edilsin. Burada ω , $\omega = \omega''\theta$ şeklinde öyle bir çarpanlara ayırma yapılacak ki θ, 1-1 ve örten olsun ve ω'' grossly 1-1 olsun. Önce φ'': V $\longrightarrow V''$ yapı dönüşümü ile bir $(V, \parallel, o)$ AK- düzlemi ((V,o) PK-düzlemi) inşa edilir. V'' bir afin düzlem olsun ki onun nokta ve doğruları V^* ın nokta ve doğrularının ω^* altındaki görüntüleridir ve I , ‖ , ~ bağıntıları (I , ~ bağıntıları) $(V')^*$ dan indirgenmiştir.

ω^*: V* $\longrightarrow V''$

$\kappa P, \kappa g \ \longrightarrow \ \omega^*\kappa P, \omega^*\kappa g = \kappa'\omega g$

Bir φ'': V $\longrightarrow V''$ dönüşümü bütün Q noktaları ve bütün h doğruları için $\varphi'' Q = \kappa'\omega Q$ ve $\varphi'' h = \kappa'\omega h$ olarak tanımlansın. Eğer Q, P noktaları V nin noktaları iseler $Q \, o \, P \Leftrightarrow \varphi'' Q = \varphi''$ ve eğer g, h doğruları V nin doğruları iseler $g \, o \, h \Leftrightarrow \varphi'' g = \varphi'' h$ şeklinde tanımlansın.

$V \ \longrightarrow \ V' \ \longrightarrow \ (V')^* = V''$

$Q, h \ \longrightarrow \ \omega Q, \omega h \ \longrightarrow \ \kappa'\omega Q \ , \kappa'\omega h$

Bu takdirde kapsamayla $\theta :$ (V, ‖ , ~) $\longrightarrow$ (V , ‖ , o) (θ: $(V, \sim) \longrightarrow (V, o)$) tanımlansın ve ω'' : (V , ‖ , o) $\longrightarrow V'$ (ω'' : (V, o) $\longrightarrow V'$) dönüşümü bütün Q noktaları ve bütün h doğruları için $\omega'' Q = \omega Q$; $\omega'' h = \omega h$ olarak tanımlansın. Buna göre **$\omega''\theta$ ya, ω nın grossly 1-1 çarpanlara ayrılması ve ω'' ne de ω nın grossly 1-1 çarpanı** denir.

Önerme 3.3.2 : ω : V$\longrightarrow V'$ bir nondejenere AK (PK) -düzlem homomorfizmi olsun. Bu takdirde yukarıdaki gibi tanımlanan θ dönüşümü 1-1 ve örten AK (PK)-düzlem homomorfizmidir. Yukarıdaki gibi tanımlanan ω'' bir grossly 1-1 AK (PK)-düzlem homomorfizmidir. $\omega = \omega''\theta$ ve $\sim \subseteq$ o dur. Eğer ω bir AK- düzlem homomorfizmi ise bu takdirde $\theta = 1_V$ dir.

İspat: ω komşuluk bağıntısını koruduğundan $\sim \subseteq$ o dır. $(V, \| , o)$ nın ((V , o) nın) yukarıda tanımlanan φ'' dönüşümü ile birlikte bir Klingenberg düzlemi olduğunu gösterilmelidir.

$$\underbrace{\mathrm{V} \longrightarrow V' \longrightarrow (V')^{*}}_{\varphi''} = V''$$

$\varphi''P \neq \varphi''Q \Rightarrow \kappa'\omega P \neq \kappa'\omega Q \Rightarrow \omega P \neq \omega Q \Rightarrow P \neq Q$ olur. Böylece V' de $P\ ve\ Q$ dan geçen bir tek doğru vardır (i sağlandı).

$\varphi''g\ ve\ \varphi''h$, V'' de bir tek noktada kesişsin. Bu durumda

$|\varphi''g \cap \varphi''h| = 1$

$\Rightarrow |\kappa'\omega g \cap \kappa'\omega h| = 1$

$\Rightarrow |\omega g \cap \omega h| = 1$

$\Rightarrow |g \cap h| = 1$ olur.

Bu durumda $g\ ve\ h$ de V nin bir tek noktasında kesişir (ii sağlandı).

Eğer V de,

$|g \cap h| = 0$ ise $|\omega g \cap \omega h| = 0$

$\Rightarrow |\kappa'\omega g \cap \kappa'\omega h| = 0$

$\Rightarrow \kappa'\omega g \parallel \kappa'\omega h \Rightarrow \varphi''g \parallel \varphi''h$ dir (iii sağlandı).

$P\ o\ Q \Leftrightarrow P \sim Q \Leftrightarrow \varphi''P = \varphi''Q$ dir. (iv sağlandı)

$g\ o\ h \Leftrightarrow g \sim h \Leftrightarrow \varphi''g = \varphi''h$ dir. (v sağlandı)

Böylece $(V, \| , o)$, φ'' dönüşümü ile birlikte bir AK- düzlemidir ω'' bir grossly 1-1 Klingenberg düzlem homomorfizmidir.

$$\underbrace{(V, \| , \sim) \xrightarrow{\theta} (V, \| , o) \xrightarrow{\omega''}}_{\omega} V'$$

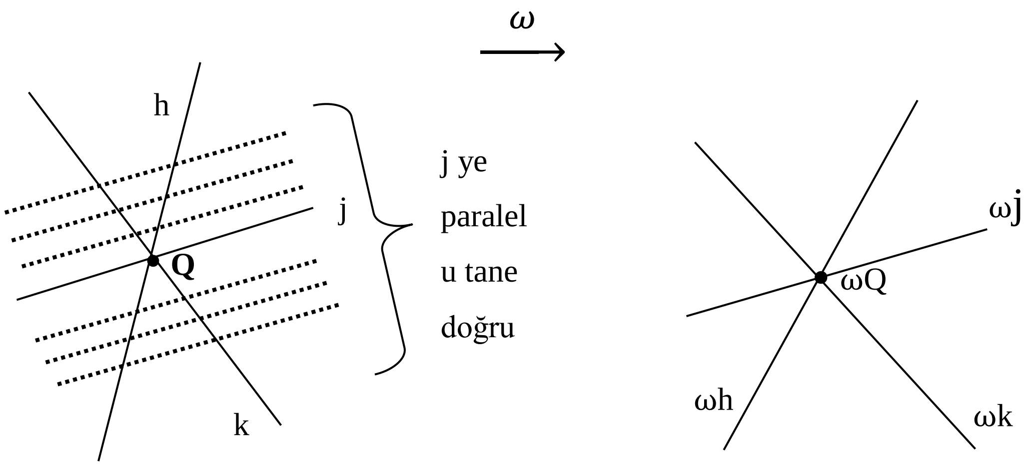
θ bir 1-1 ve örten Klingenberg düzlem homomorfizmidir ve $\omega''\theta = \omega$ dır.

Eğer ω bir AK- düzlem homomorfizmi ise ω gross dönüşümü Önerme 3.3.1 gereği 1-1 dir. Böylece $\theta = 1_V$ dir.

Teorem 3.3.3: $\omega : \mathrm{V} \longrightarrow V'$ bir nondejenere AK- (PK-) düzlem homomorfizmi olsun. $P\ I\ g$ olacak şekilde V nin bir P noktası ve bir g doğrusu alınsın. g üzerinde ω ile ωP ye dönüşen u tane noktanın var olduğu farz edilsin. $Q\ I\ h$ olacak şekilde herhangi bir Q noktası ve herhangi bir h doğrusu alınsın. Bu takdirde h üzerinde ωQ ya dönüşen u tane noktası ,V nin ωQ ya dönüşen u^2 tane noktası , Q dan geçen ωh ye dönüşen u tane doğrusu, V nin ωh ye dönüşen u^2 tane doğrusu vardır. Eğer V bir AK- düzlemi ise ωh ye dönüşen u tane doğru h ye paraleldir. Eğer $u \neq 1$ ise bu takdirde u, $(V')^*$ da kapsanan ve de nokta ve doğruları (ω^* altında) V^* ın nokta ve doğrularının görüntüleri olan afin (projektif) düzleminin mertebesi olan w sayısına eşit ya da ondan büyüktür.

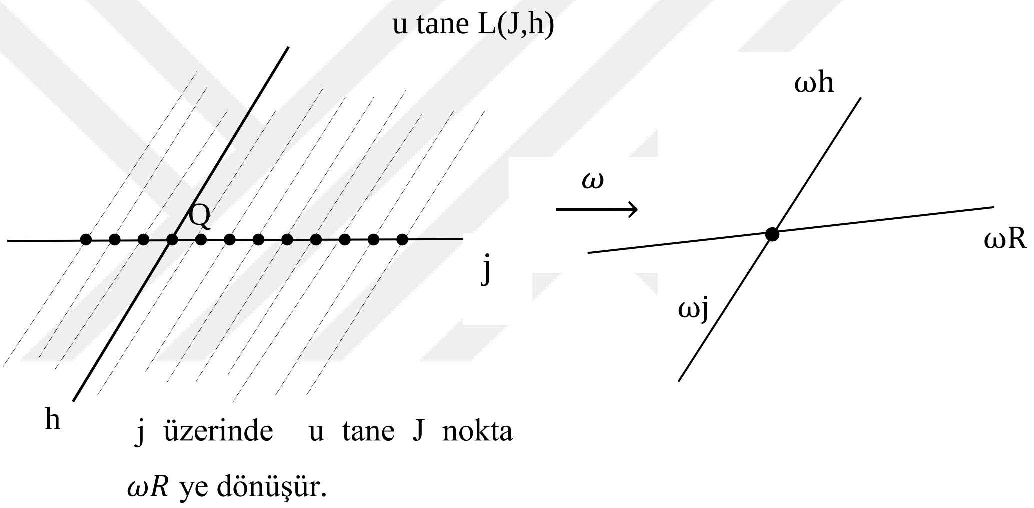
İspat: $Q\ I\ h$ şeklindeki her Q, h nokta ve doğru ikilisi için h üzerinde olup ω ile ωQ ya dönüşen noktaların sayısı $u(Q, h)$ olarak tanımlansın. Önerme 3.1.21 aşağıda tekrar tekrar kullanılacaktır.

Önce V nin bir AK- düzlemi ve ω nın grossly 1-1 ve nondejenere olduğunu kabul edilsin. $Q\ I\ h, k$ ve j, Q dan geçen $j \nsim h, k$ olsun. Bu takdirde ω grossly 1-1 olduğundan $u(Q, h)$ nin, ω ile ωj ye dönüşen j doğrusuna paralel doğruların sayısına eşit olduğu açıktır (Bkz. Şekil 3.2)



Şekil 3.2 : Aynı komşuluktaki doğruların ω altındaki görüntüsü

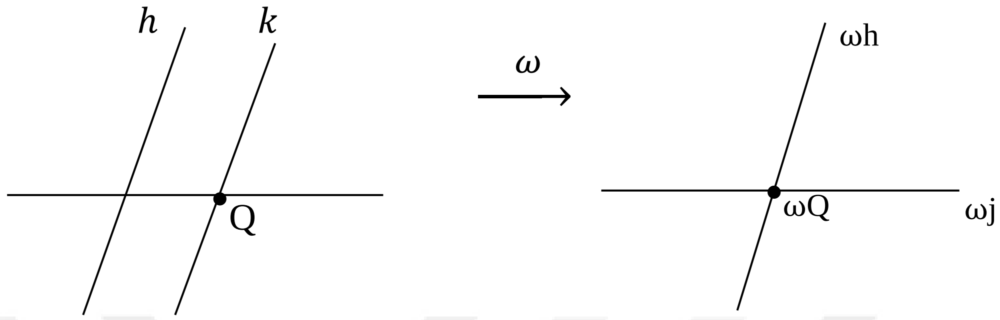
Bu yüzden simetriden $u(Q,h) = u(Q,k)$ dir. Dolayısıyla $Q\ I\ h$ oluğundan $u(Q,h)$, h den bağımsızdır. $R \nsim Q$ olacak şekilde R,Q noktaları alınsın ve $j = RQ$ olsun. $Q\ I\ h$; $R\ I\ k$ ve $h,k \nsim j$ olacak şekilde h,k doğruları alınsın. Yukarıdakine benzer bir tartışma ile $u(Q\ ,h) = u(R,k)$ olduğu görülür. Böylece $Q\ I\ h$ olduğundan $u(Q,h)$, Q ve h den bağımsızdır. $u(P,g)$ alalım $Q\ I\ h$; $h \nsim j$ olsun. j üzerinde olup ωQ ya dönüşen u tane J noktanın her biri için h ye paralel olan ve ωh ye dönüşen bir $L(J,h)$ doğrusu vardır. Bu u tane doğrunun tümü farklıdır ve bu doğruların her biri üzerinde ωQ ya dönüşen u tane nokta vardır. Bu u^2 tane noktanın tamamı farklıdır ve ωQ ya dönüşen herhangi bir nokta bunlardan biridir. Bundan dolayı V nin u^2 tane noktası ωQ ya dönüşür (Bkz. Şekil 3.3)



Şekil 3.3 : j doğrusu üzerindeki $\boldsymbol{u}$ tane noktanın **ω** altındaki görüntüsü

$Q\ I\ h$ ve $R\ I\ h$; $R \nsim Q$ olsun. j,R den geçen ve $j \nsim h$ şeklinde bir doğru olsun. j üzerinde ωR ya dönüşen u tane J noktası ve ωh ye dönüşen u tane QJ doğrusu vardır. ωk = ωh olacak biçimde Q dan geçen herhangi bir k doğrusu j ye yarıparalel değildir. Dolayısıyla k,j yi ωR ye dönüşen bir K noktasında keser. Bu yüzden Q dan geçen ωh ye dönüşen tam olarak u tane doğru vardır. j üzerinde ωR ye dönüşen u tane nokta var ve her birinden geçen ωh ye dönüşen u tane doğru vardır. Bu u^2 doğruların hepsi farklıdır ve ω nın ωh ye dönüştürdüğü herhangi bir doğru onlardan biridir.
$Q\ I\ h$ ve $Q\ I\ j$; $j \nsim h$ olsun. j üzerindeki ωQ ya dönüşen u tane J noktasının her biri için ωh ye dönüşen $L(\ J,h)$ doğrusu vardır ve bu u tane doğrunun tamamı farklıdır. ωh

ye dönüşen h doğrusuna paralel olan herhagi bir doğru j ye yarıparalel değildir ve j ile görüntüsü ωQ olan bir noktada kesişir. Dolayısıyla ωh ye dönüşen h ye paralel olan u tane doğru vardır. $u \neq 1$ ve $h\ ve\ k$ nin ωk = ωh olacak şekide farklı paralel doğrular olduklarını varsayılsın (Bkz. Şekil 3.4).



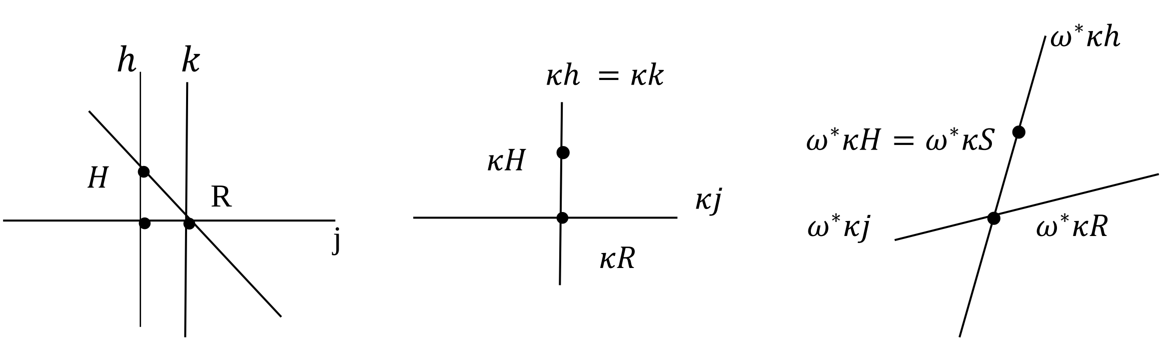
Şekil 3.4 : h ye paralel olan doğrunun ω altındaki görüntüsü

j, k ye yarıparalel olmayan bir doğru olsun. $R = k \cap j$ alalım ve w, noktaları ve doğruları (ω^* altında) V^* $\imath n$ noktaları ve doğrularının görüntüleri olan afin düzlemin mertebesi olsun.

ω^*: $V^* \longrightarrow (V')^*$

ω ve κ' nün ikisi de nondejenere ve $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olduğundan $\omega^*\kappa$h üzerinde olup, $\omega^*\kappa R$ ye eşit olmayan her bir $\omega^*\kappa S$ görüntü noktası için h üzerinde $\omega^*\kappa H = \omega^*\kappa S$ olacak şekilde bir H noktası vardır ve $R\ ve\ H$ den geçen tek bir RH doğrusu vardır. (Bkz. Şekil 3.5)

$$(V\ de) \xrightarrow{\kappa} (V^*\ da) \xrightarrow{\omega^*} (V')^*\ da$$



Şekil 3.5 : RH doğrusunun $\omega^*\kappa$ altındaki görüntüsü

Bu $w-1$ tane doğrunun tamamı farklıdır. $|h \cap k| = 0$ olduğundan hiçbiri k ye eşit değildir, fakat onların tamamı ωk ye dönüşür, dolayısıyla $u \geq w$ dir.

Önerme 3.3.1 gereği herhangi bir nondejenere AK- düzlem homomorfizmi grossly 1-1 dir. Eğer ω , bir nondejenere PK- düzlem homomorfizmi olsuğunda $\omega''\theta$ ile ω nın grossly 1-1 çarpanlara ayrılması gösterilecek ($\omega = \omega''\theta$). $g,\ g', g''$ doğrularının κg, $\kappa' g, \kappa'' g$ görüntüleri ω^* da nondejenere bir üçgenin kenarları olsun. ω'' den indirgenen ve tanım bölgeleri $A(V,g), A(V,g')\ ve\ A(V,g'')$ olan homomorfizmleri kullanarak ve de AK- düzlem homomorfizmleri için yukarıda verilen sonucu kullanarak bu teoremin ω'' ve dolayısıyla ω için geçerli olduğu kolayca görülür.

ω : V$\longrightarrow V'$

ω_g: A(V, g) $\longrightarrow$ A$(V', \omega g)$

$\omega'_{g'}$: A(V,g') $\longrightarrow$ A$(V', \omega' g')$

$\omega''_{g''}$: A(V,g'') $\longrightarrow$ A$(V', \omega'' g'')$

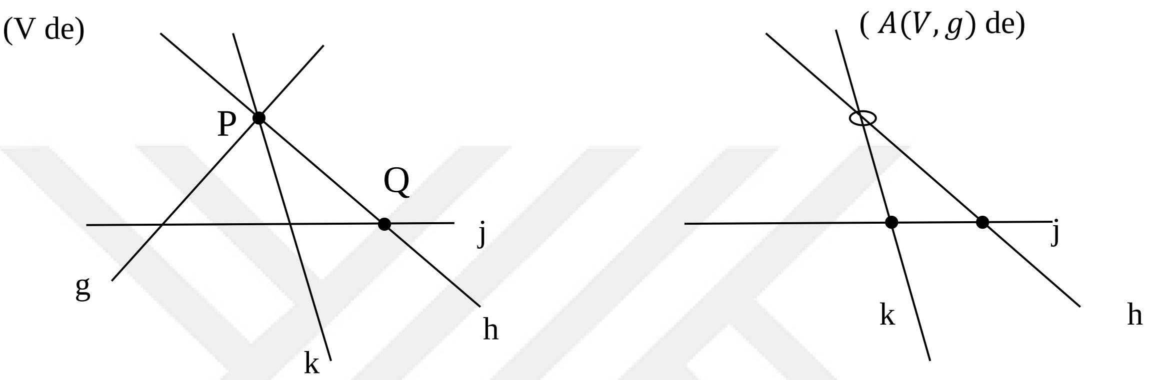
Tanım 3.3.4: ω : V$\longrightarrow V'$ bir nondejenere Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun ve $u\ ile\ w$ teorem 3.3.3 de verildiği gibi olsunlar. Bu takdirde u ya ω nın derecesi ve w ya ω nın dağılması (dispersiyonu) denir.

Tanım 3.3.5: V bir Klingenberg düzlemi olsun. V nin komşuluk dönüşümünün mertebesine V nin derecesi ve V nin gross dönüşümünün mertebesine V nin mertebesi denir.

Sonuç 3.3.6: Eğer V, r mertebeli ve t dereceli bir AK- (PK-) düzlemi ise bir noktaya komşu olan t^2 tane nokta, bir doğruya komşu olan t^2 tane doğru vardır. Eğer V de PIg ise g üzerinde P ye komşu olan t tane nokta ve P den geçen g ye komşu olan t tane doğru vardır. Aynı zamanda bir noktadan geçen $r.t + t$ doğru, bir doğru üzerinde $r.t$ nokta ($r.t + t$ nokta) , V de $r^2.t^2$ nokta ($r^2.t^2 + r.t^2 + t^2\ nokta$), $r^2.t^2 + r.t^2$ doğru ($r^2.t^2 + r.t^2 + t^2\ doğru$) vardır. Eğer V bir AK-düzlemi ise bir doğruya paralel ve komşu t tane doğru ve bir paralel sınıfında $r.t$ tane doğru vardır. Eğer $t \neq 1$ ise bu takdirde $t \geq r$ dir.

Önerme 3.3.7: Eğer V, r mertebeli ve t dereceli bir PK- düzlemi ve g V nin bir doğrusu ise bu takdirde $A(V,g)$ AK- düzlemi r mertebeli ve t derecelidir.

İspat: Önerme 3.2.2 ve $A(V,g)$ nin kuruluşundan açıktır. V de her doğru üzerinde $r+1$ nokta var olduğunda $A(V,g)$ de (P noktası ve ona yakın noktalar atıldığından) her doğru üzerinde r tane nokta vardır. V de her noktadan $r+1$ tane doğru geçtiğinden $A(V,g)$ de (g ve g ye komşu olan noktalar atıldığından) her noktadan r tane doğru geçer. V de toplam doğru sayısı ve toplam nokta sayısı r^2+r+1 olup $A(V,g)$ de toplam toplam doğru sayısı r^2+r ve toplam nokta sayısı r^2 dir. Böylece $A(V,g)$ afin düzlemi de r mertebeli ve t derecelidir. (Bkz. Şekil 3.6)



Şekil 3.6 : PK- düzleminde g ye komşu olan doğrular atıldığında elde kalan doğrular

Önerme 3.3.8: Eğer V bir projektif düzlem ve ω: V $\longrightarrow$ V' bir nondejenere PK-düzlem homomorfizmi ise bu takdirde ω bir gömmedir ya da ω nın derecesi sonlu değildir ve dolayısıyla V de sonlu değildir. Eğer V bir afin düzlem ve ω: V $\longrightarrow$ V' bir nondejenere AK- düzlem homomorfizmi ise bu takdirde ω bir gömmedir.

İspat: Öncelikle V nin bir projektif düzlem olduğunu varsayalım. Eğer ω nın derecesi 1 ise bu takdirde ω birebirdir ve Önerme 3.1.21 gereği ω bir gömmedir. ω nın "u" derecesinin birden büyük olduğunu kabul edelim ve $\omega h = \omega k$ olacak şekilde farklı h,k doğruları alalım. $H\ I\ k$; $K\ I\ k\ \omega H \nsim \omega K$ olsun öyle ki $\omega Q \sim \omega H$ olacak şekilde $Q\ I\ h,k$ noktası $\omega R \sim \omega K$ olacak şekilde hiçbir $R\ I\ h,k$ noktası yoktur. (Eğer $\omega Q \sim \omega H$ olacak şekilde $Q\ I\ h,k$ noktası olsaydı $h \sim HK \sim k$ ve $QH \sim h \sim k$ olurdu.) ω ve κ' nondejenere olduklarından $H\ ve\ K$ noktaları vardır. k üzerinde ωk ye dönüşen u tane S noktası vardır. Bu u tane SH doğrunun tamamı farklıdır ve hiçbiri h ye eşit değildir. Onların hepsi ωh ye dönüştüklerinden $u \geq u + 1$ dir. Böylece u sonlu değildir ve dolayısıyla V de sonlu değildir. Eğer V afin düzlem ise, bu takdirde önerme 3.3.1 gereği ω nın gross dönüşümü bir gömmedir.

Sonuç 3.3.9: Her nondejenere AK- düzlem homomorfizmi (tanım bölgesi sonlu olan her nondejenere PK- düzlem homomorfizmi) grossly 1-1 dir.

İspat: V bir AK- düzlemi (V bir sonlu PK- düzlemi) olsun. ω, nondejenere AK- düzlem homomorfizminin gross dönüşümü ω^*: $V^* \longrightarrow (V')^*$ bir gömme olduğundan 1-1 dir. Dolayısıyla ω da grossly 1-1 dir.

Önerme 3.3.10: V bir Klingenberg düzlemi P, Q V nin $|P \vee Q| = 0$ biçimindeki noktaları olsun. Bu takdirde $|B \vee P| \neq 0$ ve $|B \vee Q| \neq 0$ olacak şekilde $B \sim P$, $B \sim Q$ özelliğinde bir P noktası vardır.

İspat: $P \sim Q$ dur. Aksi halde $|P \vee Q| \neq 0$ olurdu. İlk olarak V nin bir AK- düzlemi olduğu kabul edilsin. Γ, Σ nin komşu olmayan demetleri olsun ve $B = L(P, \Gamma) \cap L(Q, \Sigma)$ olsun. $Q \epsilon \Sigma$ ve $P \epsilon \Gamma$ olup $B \epsilon \Gamma$ ve $B \epsilon \Sigma$ olduğundan $B \sim P, Q$ olur.

V bir PK- düzlemi olsun. k, P ye yakın olmayan bir doğru olsun. K, K', k nin komşu olmayan noktaları ve $B = PK \cap QK'$ olsun. $B \sim P, Q$ olduğu görülür.

Önerme 3.3.11: ω : V $\longrightarrow$ V' bir grossly 1-1 Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun. Eğer P ile Q, V nin noktaları iseler bu takdirde $\omega P \sim \omega Q \Leftrightarrow P \sim Q$ ve g ile h V nin doğruları iseler bu takdirde $\omega g \sim \omega h \Leftrightarrow g \sim h$ dir.

3.4 Hjelmslev Düzlemleri

Bu kısımda Hjelmslev düzlemleri ile ilgili temel bazı bilgiler verilecektir.

Tanım 3.4.1: A bir AK- düzlemi olsun. A aşağıdaki şartları sağladığında A ya bir afin Hjelmslev düzlemi ya da AH- düzlemi denir.

AH1) $P \sim Q$ ise $|P \vee Q| > 1$ dir.

AH2) $g \sim h$ ise $|g \cap h| \neq 1$ dir.

Tanım 3.4.2: V bir PK- düzlemi olsun. V aşağıdaki şartları sağladığında V ye bir projektif Hjelmslev düzlemi ya da PH –düzlemi denir.

PH1) $P \sim Q$ ise $|P \vee Q| > 1$ dir.
PH2) $g \sim h$ ise $|g \cap h| > 1$ dir.

Tanım 3.4.3: A Klingenberg düzleminde $g \sim h$; $P\ I\ g, h$; $Q\ I\ g$ ve $Q \sim P$ iken $Q\ I\ h$ şartı sağlanıyorsa A Klingenberg düzlemine üniformdur denir.
Önerme 3.4.4: V, $r = t$ olacak şekilde r mertebeli ve t dereceli bir sonlu Klingenberg düzlemi olsun. Bu takdirde V bir üniform Hjelmslev düzlemidir.

İspat: P noktası, P ye komşu fakat P den farklı $t^2 - 1$ tane noktanın her birine bu doğrularla birleştirilir ki bunların sayısı t den az veya t ye eşittir. V, t dereceli olduğundan bir noktaya komşu olan t^2 tane nokta ve (P noktası hariç) $t^2 - 1$ tane noktaya birleştirilir. P den geçen $(r+1).t$ doğrunun her biri bu noktaların tam olarak $(t - 1)$ tanesinden geçer. Dolayısıyla $(r+1).t.(t-1) \leq t.(t^2 - 1)$ dir. $r = t$ olduğundan P noktası tam olarak t tane doğru ile P ye komşu olan fakat P ye eşit olmayan tam olarak $t^2 - 1$ tane noktanın her biriyle birleştirilir. Eğer V bir PK-düzlemi ise dual tartıma gösterir ki her bir h doğrusu, h ye komşu olan fakat h ye eşit olmayan $t^2 - 1$ tane doğrunun her biriyle tam olarak t tane noktada kesişir (V, t dereceli olduğundan bir doğruya komşu olan t^2 tane doğru vardır, kendisi hariç $t^2 - 1$ tane doğru ile kesişir.) .
Şimdi V nin bir AK- düzlemi olduğunu varsayalım. h, V nin bir doğrusu olsun. h doğrusu h ye komşu olan fakat paralel olmayan $t.(t-1)$ tane doğrunun her biriyle "t" ye eşit ya da ondan daha küçük bir sayı kadar noktada kesişir. h nin $r.t$ noktalarının her biri bu doğruların tam olarak $t - 1$ tanesinin üzerindedir. Bundan dolayı $r.t.(t-1) \leq t^2.(t-1)$ dir. $r = t$ olduğundan h doğrusu, h ye komşu olan fakat paralel olmayan doğruların her biriyle tam olarak t tane noktada kesişir. Ayrıca h, h ye paralel olan fakat eşit olmayan herhangi bir doğru ile kesişmez.
V, AK- ya da PK- düzlemlerinin her bir doğrusu üzerinde birden fazla nokta olduğundan ve V nin her noktasından birden fazla doğru geçtiğinden V nin Hjelmslev düzlemi olduğu kolayca görülür. Eğer $g \sim h$; $P\ I\ h, g$; $Q\ I\ g$ $Q \sim P$ ise bu takdirde $g = h$ ya da $g\ ve\ h$ tam olarak t tane noktada kesişir. Dolayısıyla onlar $Q\ I\ h$ ve P ye komşu olan g üzerindeki tüm noktalarda kesişirler. Bu yüzden V uniformdur.

Önerme 3.4.5 : Eğer V bir projektif Hjelmslev düzlemi ise ve g V nin bir doğrusu ise bu takdirde $A(V, g)$ bir afin Hjelmslev düzlemidir.

İspat: $A = A(V, g)$ alınsın. Önerme 3.2.2 gereği A bir AK-düzlemidir. Eğer P, Q A nın komşu noktaları iseler bu takdirde V de $P\ ve\ Q$ dan geçen birden fazla h doğrusu vardır. V de $P, Q\ I\ h$ olsun. $P \not\sim g$ olduğundan $h \nsim g$ dir. Böylece A da $P, Q\ I\ h$ ve bu yüzden de A da AH-1 şartı geçerlidir.
A da $k \sim m$ olsun, bu takdirde V de de $k \sim m$ dir. Böylece V de $|k \cap m| > 1$ dir. Eğer $k = m$ ise bu takdirde A da $|k \cap m| > 1$ dir. $k \neq m$ kabul edilsin. V de $H\ I\ k, m$ olsun. Bu takdirde iki doğru üzerindeki her nokta h ye komşudur; öyle ki $H \not\sim g$ ise A da $|k \cap m| = 0$ dır ve eğer $H \not\sim g$ ise A da $|k \cap m| > 1$ dir. Dolayısıyla A bir AH-düzlemidir.

3.5 Bölüm Düzlemleri ve Görüntü Düzlemleri

Bu kısımda bölüm düzlemleri ve görüntü düzlemleri ile ilgili bazı temel bilgiler verilecektir.

Tanım 3.5.1: ω: V $\longrightarrow$ V' bir nondejenere AK- (PK-) düzlem homomorfizmi olsun. ($\wp$,$\mathcal{g}$,I) V nin bir geometrik yapısı olsun. V_i ,{ ωP , $P \in \wp$ } noktalar kümesine ve { ωg , $g \in \mathcal{g}$ } doğrular kümesine sahip olsun. V_i, I , ‖ ve ∼ ($I, \sim$) bağıntılarına sahip olsun ki bunlar V' nün { $\omega P, P \in \wp$ } noktalarına ve $\{\omega g, g \in \mathcal{g}\}$ doğrularına kısıtlanmışlarıdır. V_i ye ω nın görüntü düzlemi denir. Eğer P, V nin bir noktası ise ωP ye ω nın bir görüntü noktasıdır denir. Eğer g, V nin bir doğrusu ise ωg ye ω nın bir görüntü doğrusudur denir.

Önerme 3.5.2 : ω: V $\longrightarrow$ V' bir nondejenere AK- (PK-) düzlem homomorfizmi olsun. ω nın görüntü düzlemi bir AK- (PK-) düzlemidir.

İspat: V nin bir AK- düzlemi olduğunu ve $K'\omega g$ nin $K'\omega h$ yi bir tek noktada kestiğini kabul edilsin. Görüntü düzleminde bu ikisinin üzerinde olan bir noktanın var olduğunu gösterilmelidir.

[V $\underset{\omega}{\rightarrow}$ V' $\underset{\kappa'}{\rightarrow}$ $(V')^*$ / V $\underset{\kappa}{\rightarrow}$ V^* $\underset{\omega^*}{\rightarrow}$ $(V')^*$

$\kappa'\omega P \nsim \kappa'\omega Q$ olsun. $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olduğundan $\omega^*\kappa P \nsim \omega^*\kappa Q$ dur. Bu durumda $\kappa P \nsim \kappa Q$ ve dolayısıyla $P \nsim Q$ dur. Böylece P ve Q dan geçen bir tek g doğrusu vardır. V' bir AK- düzlemi olup görüntü düzleminde ωP ve ωQ yu birleştiren tek doğru ωg doğrusudur (i sağlandı).

$\kappa'\omega g$ ve $\kappa'\omega h$ bir tek noktada kesişsin. $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olduğundan $\kappa'\omega g \nsim \kappa'\omega$h ifadesi $\omega^*\kappa g \nsim \omega^*\kappa h$ olmasını gerektirir. Bu yüzden de $\kappa g \nsim \kappa h$ dir. Bundan dolayı g, h yi bir tek Q noktasında keser. V' bir AK- düzlemi olduğundan görüntü düzleminde ωh ve ωg nin her ikisi üzerinde olan tek nokta ωQ noktasıdır (ii sağlandı).

$|\kappa'\omega g \cap \kappa'\omega h| = 0$ olsun. $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olduğundan $|\omega^*\kappa g \cap \omega^*\kappa h| = 0$ dır. Buradan $|\kappa g \cap \kappa h| = 0$ elde edilir. Bu takdirde $|g \cap h| = 0$ dır. V' bir AK- düzlemi olup görüntü düzleminde $\omega g \parallel \omega h$ elde edilir (iii sağlandı).

$\kappa'\omega P \sim \kappa'\omega Q$ olduğundan $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olup $\omega^*\kappa P \sim \omega^*\kappa Q$ yu gerektirir. Bu takdirde $\kappa P \sim \kappa Q$ dur. Buradan da $P \sim Q$ elde edilir. V' bir AK- düzlemi olduğundan görüntü düzleminde $\omega g = \omega h$ olur (iv sağlandı).

$\kappa'\omega g \sim \kappa'\omega h$ olduğundan $\omega^*\kappa = \kappa'\omega$ olup $\omega^*\kappa g \sim \omega^*\kappa h$ olmasını gerektirir. Bu takdirde $\kappa g \sim \kappa h$ dur. Böylece $P \sim Q$ elde edilir. V' bir AK- düzlemi olduğundan görüntü düzleminde $\omega g = \omega h$ olur (v sağlandı).

Tanım 3.5.3: $\omega\colon \mathrm{V} \longrightarrow V'$, $\omega^*\colon \mathrm{V}^* \longrightarrow (V')^*$ gross dönüşümü ile birlikte bir nondejenere AK (PK-) -düzlem homomorfizmi olsun. V'' nokta ve doğruları $\alpha P = \{ Q \mid \omega Q = \omega P \}$, $\alpha g = \{ h \mid \omega h = \omega g \}$ şeklinde olan bir geometrik yapı ve $I, \Delta, \parallel$ (I, Δ) V den indirgenmiş bağıntılar olsunlar (yani V'' de $\alpha P\ I\ \alpha g \Leftrightarrow V\ de\ QI\ h$ olacak şekilde $Q \epsilon\ \alpha P$; $h \epsilon\ \alpha g$ vardır ve bunun gibi…). Bu takdirde $\alpha\colon \mathrm{V} \longrightarrow (\mathrm{V}'', \parallel, \Delta)$ $[\alpha\colon \mathrm{V} \longrightarrow (\mathrm{V}'', \Delta)$] dönüşümüne ω nın bölüm dönüşümü ve $(\mathrm{V}'', \parallel, \Delta)$ [(V'', Δ) sistemine] sistemine de ω nın bölüm düzlemi denir.

Önerme 3.5.4: $\omega\colon \mathrm{V} \longrightarrow V'$ bir nondejenere AK- düzlem (PK- düzlem) homomorfizmi olsun. ω nın görüntü düzlemi AK- düzlemidir (PK-düzlemidir). Eğer ω bir AK- düzlem homomorfizmi ya da bir grossly 1-1 PK- düzlem homomorfizmi ya da bir projektif düzlem homomorfizmi ise bu takdirde ω nın $\alpha\colon \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}''$ bölüm dönüşümü bir örten AK- düzlem (PK- düzlem) homomorfizmidir ve $\theta_\alpha = \omega$ olacak şekilde $\theta : V'' \rightarrow V'$ bir gömme vardır. Ayrıca ω nın bölüm düzlemi ω nın görüntü düzlemine izomorf Klingenberg düzlemidir.

İspat: $\forall\ \alpha P \in\ V''$ için $P\ \in\ V$ dir. ve $\theta\alpha P = \omega P$ dir. α nın örtenliği açıktır.

$\theta : V'' \rightarrow V',\ \alpha P\ \rightarrow\ \omega P\ , \theta\alpha P\ =\ \omega P$ olduğu göz önüne alınarak

$\omega P\ =\ \omega Q$ ise $P{\sim}Q$ olacağı görülür. Dolayısıyla $\alpha P\ =\ \alpha Q$ dir. O halde θ birebirdir.

$\forall\ \omega P\ \in V'$ için $\exists \alpha P \in\ V''$ vardır ve $\theta\alpha P = \omega P$ dir. Bu yüzden θ örtendir.

Aşağıdaki gösterim Önerme 3.5.6 nın ispatını ve ifadesini basitleştirmek için verilmiştir.

Gösterim 3.5.5: ω: V $\longrightarrow\ V'$ bir grossly 1-1 Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun. Q bir nokta ve h bir doğru olmak üzere $Q\ I\ h$ ise h ninω ile ωQ ya dönüşen noktalarının kümesi $\delta(Q,h)$ ile ve Q dan geçip ω ile ωh ye dönüşen doğruların kümesi ɣ(Q,h) ile gösterilsin. $Q\ I\ h\ , Q$ bir demet ve h demetler kümesi olmak üzere ω ile ωQ ya dönüşenlerin kümesi $\delta(Q,h)$ ile gösterilsin.

Önerme 3.5.6: ω: V $\longrightarrow\ W'$, ω': V′ $\longrightarrow\ W'$ birer grossly 1-1 Klingenberg düzlem homomorfizmleri olsunlar. V de $P\ I\ g$, $\delta(P,g)$ olsun ve buna bağlı olarak $\delta'(P,g)$ yukarıdaki gibi tanımlansın (V de $P\ I\ g\ , \delta'(P,g)$) . ɣ(P,g) ve ɣ$'(P,g)$ de benzer şekilde tanımlansın. Eğer P,g çifti için $\delta(P,g) = \delta'(P,g)$ ya da ɣ(P,g) = ɣ$'(P,g)$ ise bu takdirde ω' nün bölüm dönüşümü ω nın bölüm dönüşümü ile aynıdır; üstelik ω nın görüntü düzlemi V ye veya $\delta(P,g)$ kümesine ya da ɣ(P,g) kümesine izomorf olarak belirlenir.

İspat: Eğer Q bir nokta ve h bir doğru ise $\alpha Q\ ve\ \alpha h$,Ttanım 3.5.3 deki gibi tanımlansın ve ω' nün terimleri $\alpha' Q\ ve\ \alpha' h$ de benzer şekilde tanımlansın. Yani ;

$\alpha Q\ = \{P \mid \omega Q\ =\ \omega P\ \}, \alpha h\ = \{g \mid \omega h\ =\ \omega g\ \}$

$\alpha'\mathrm{Q}\ = \{\mathrm{R} \mid \omega'\mathrm{Q}\ =\ \omega'\mathrm{R}\}, \alpha' h = \{\mathrm{k} \mid \omega'\mathrm{h}\ =\ \omega'\mathrm{k}\}$ dir.

İlk olarak V bir AK- düzlemi olsun. Q bir nokta $Q\ I\ h,k$ olsun ve $j,\ j\ \nsim\ h,k$ olacak şekilde Q dan geçen bir doğru olsun. Bu takdirde ω ile ω' grossly 1-1 olduklarından $\delta(Q,h) = \delta'(Q,h)$ olması için gerek ve yeter şart ɣ$(\pi(j),j)$ = ɣ$'(\pi(j),j)$ olmasıdır. Yani,

$\delta(Q,h) = \{P\ _i|P\ I\ h\ ve\ \omega\mathrm{Q}\ =\ \omega\mathrm{P}\ \} = \delta'(Q,h) = \{P\ _i|R\ I\ h\ ve\ \omega'\mathrm{Q}\ =\ \omega'\mathrm{P}\ \Leftrightarrow$

ɣ$(\pi(j),j) = \{d\ _i|d_i\ I\ \pi(j)\ ve\ \omega\mathrm{d}\ =\ \omega\mathrm{j}\ =$

ɣ$'(\pi(j),j)\ = \{d\ _i|d_i\ I\ \pi(j)\ ve\ \omega'\mathrm{d}\ =\ \omega'\mathrm{j}\ \}$ dir.

$\omega(P_i) =\ \omega(Q)$ ve $\omega'(P_i) = \omega'(\mathrm{Q})$ dir.

Dolayısıyla simetriden $\delta(Q,h) = \delta'(Q,h)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(Q,k) = \delta'(Q,k)$ olmasıdır. R, Q; $R \nsim Q$ olacak şekilde noktalar olsunlar. $j = RQ$ olsun ve $h, k\ Q\ I\ h$; $R\ I\ k\ ve\ h, k \nsim j$ olacak şekilde doğrular olsunlar. Yukarıdakine benzer bir tartışma ile $\delta(Q,h) = \delta'(Q,h) \Leftrightarrow \delta(R,k) = \delta'(R,k)$ olduğu görülür. Aynı zamanda $\gamma(Q,j) = \gamma'(Q,j)$ olması için gerek ve yeter şartın $\delta(R,k) = \delta'(R,k)$ olmasıdır. Bu takdirde $\gamma(Q,j) = \gamma'(Q,j)$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(\pi(j), g_\infty) = \delta'(\pi(j), g_\infty)$ olmasıdır.

$Q\ I\ h$ olduğunu kabul edilsin. Hipotez gereği ya $\delta(P,g) = \delta'(P,g)$ ya da $\gamma(P,g) = \gamma'(P,g)$ dir. Yukarıdaki benzer tartışmalar kullanılarak eğer tanımlı ise $\delta(Q,h) = \delta'(Q,h)$ olduğu gösterilir ve eğer tanımlı ise $\gamma(Q,h) = \gamma'(Q,h)$ olduğu gösterilebilir.

h, j doğruları $h \nsim j$ ve Q noktası, $Q\ I\ h, j$ olacak şekilde olsunlar. Bu takdirde yukarıda gösterildiği gibi

$$\alpha Q = \left\{ R \,\middle|\, \begin{array}{c} h' \epsilon\, \gamma\,(\pi(h),h)\ , J\ I\ \ h'\ ve\ J \in \delta(Q,j) \\ \text{özelliğindeki } J \text{ noktaları ve } h' \text{ doğruları için } R \in \delta(J,h'\ )\ dir. \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \mathrm{R} \,\middle|\, \begin{array}{c} h' \in \gamma\,(\pi(h),h),\ J\ I\ h'\ ve\ J\ \in\ \delta'(Q,j) \text{ özelliğindeki} \\ J \text{ noktaları ve } h' \text{ doğruları için } R\ \in \gamma'(J,h')\ dir. \end{array} \right\} = \alpha' Q \text{ dur.}$$

Önerme 3.1.21 gereği eğer $Q, H\ I\ h$; $Q \nsim H$ ise bu takdirde $\alpha Q = \alpha' Q$ ve $\alpha H = \alpha'$H , $\alpha h = \alpha'$h yi gerektirir. Önerme 3.3.11 gereği $P\ ve\ Q$, V nin noktaları iseler bu takdirde $\omega P \sim \omega\, Q \Leftrightarrow P \sim Q \Leftrightarrow \omega' P \sim \omega'\, Q$ dir. V nin $g\ ve\ h$ doğruları için de benzer ifadeler geçerlidir. Bundan dolayı ω nın bölüm dönüşümü ω' ninkine eşittir. Teorem 3.3.5 in ispatının son paragrafındaki benzer bir tartışma ile grossly 1-1 PK- düzlem homomorfizmi için benzer bir sonuç gösterilebilir.

Şimdi ω ile ω' nin AK- düzlem homomorfizmi olduğu kabul edilsin. Q bir nokta $Q\ I\ h, k$ olsun ve $j, j \nsim h, k$ olacak şekilde Q dan geçen bir doğru olsun. Kolayca gösterilebilir ki $\delta(Q,h)$, $\gamma(\pi(j), j)$ tarafından tek olarak belirtilir. İspatın geri kalan kısmı için bu ilk kısımdakine benzer inceleme yapılabilir.

Sonuç 3.5.7: ω: V $\longrightarrow V'$ bir grossly 1-1 Klingenberg düzlem homomorfizmi olsun. Eğer P, V nin bir noktası ise ω görüntü düzlemindeki ωP nin ters görüntüsü izomorfizm hariç P dir.

4. DÜZLEMSEL SEXTERNARY HALKALAR ve MOUFANG KLİNGENBERG DÜZLEMLERİ

Bu bölümün ilk kısmında bir M PK- düzlemi için koordinatlama ve üçlü halkalar faydalanılan kaynaklardaki bilgilerde bazı küçük düzenlemeler yapılarak ele alınmıştır. Bu kaynakların başlıcaları Stevenson (1972), Hughes (1973), Çiftçi (1984), Keppens (1988), Kaya (1992), Çelik (1995) ve Akpınar (2007) çalışmalarıdır.

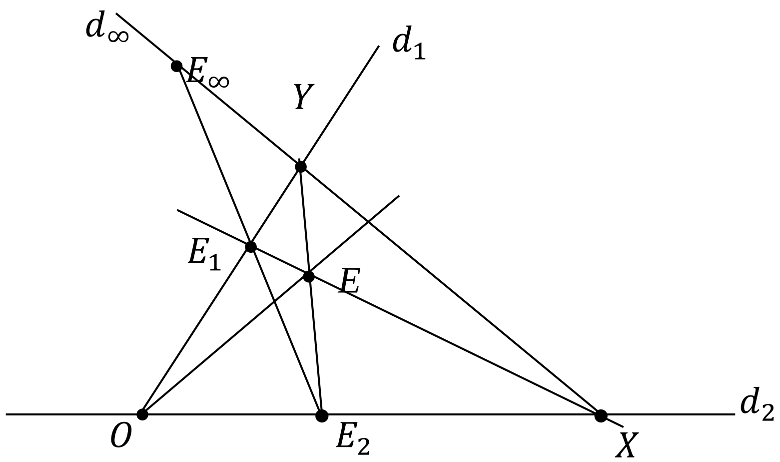
4.1 Düzlemsel Sexternary Halkalar

Bu kısmda bir PK-düzlemini koordinatlamada kullanılacak bir cebir yapısı ele alınacaktır. Bu bilgiler Keppens (1988) ve Akpınar (2007) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 4.1.1: Eğer $A \sim B$ ve $B\ I\ d$ olacak şekilde bir $B\ I\ \wp$ var ise A noktası d doğrusunun yakınındadır denir ve bu durum $A \sim d$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2: $M = (\wp, \mathcal{g}, \in, \sim)$ bir PK- düzlem olsun. (O, X, Y, E) M nin bir bazı (Yani $(\omega(O), \omega(X), \omega(Y), \omega(E))$ kanonik görüntüsü M^* projektif düzleminde bir tamdörtgen) olsun.

OY $:= d_1$, OX $:= d_2$, XY $:= d_\infty$, XE $\cap\, d_1 := E_1$, YE $\cap\, d_2 := E_2$, $E_1E_2 \cap\, d_\infty := E_\infty$ biçiminde gösterilsin. (Bkz. Şekil 4.1.)



Şekil 4.1 : Tamdörtgen

$H_1 :=\{ N \in \wp \mid N \in d_1 , N \nsim Y \}$

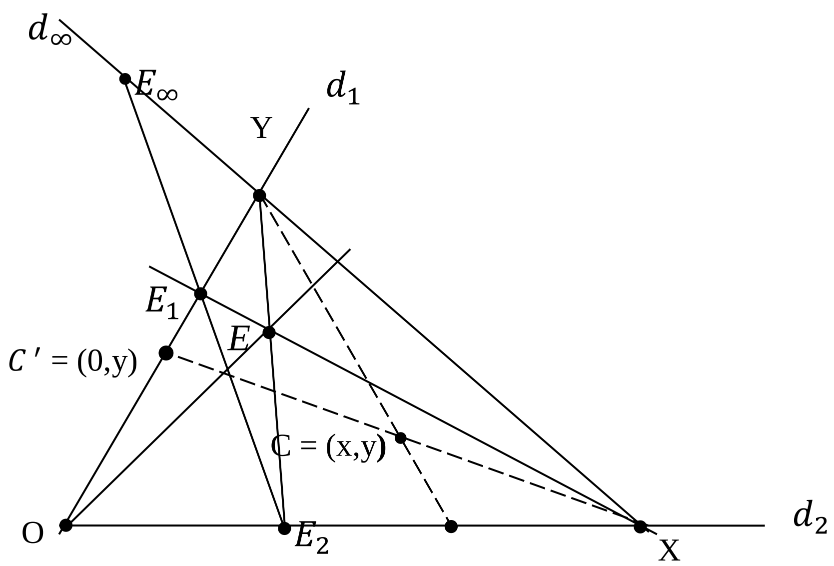
$I_1 :=\{ N \in H_1 \mid N \sim O\}$ ve H_1 kümesinin kardinalitesi k olsun (burada k sonsuz olabilir). Özel olarak 0 ve 1 i bulunduran ama ∞ sembolünü herhangi bir eleman olarak kapsamayan kardinalitesi k olan bir R kümesi alınsın. 1-1 ve örten bir $\theta: H_1 \to R$ fonksiyonu tanımlansın ve özel olarak $\theta(O) = 0$ ve $\theta(E_1) = 1$ olsun. Ayrıca $\theta(I_1) = R_0$ denilsin (Burada $R_0 \subset R$ olduğu açıktır). Böylece H_1 kümesinin elemanları ile R kümesi arasında θ yardımıyla bir eşleme kurulmuştur. Bu eşleme yardımıyla M nin nokta ve doğruları koordinatlanacaktır.

M nin koordinatlanması:

i) $A \in d_1 - [Y]$ (Burada $[Y]$ ile Y nin komşuluğundaki noktaların kümesi gösterilmektedir.) ve $\theta(A) = x$ ise $A = (0, x)$ alınsın.

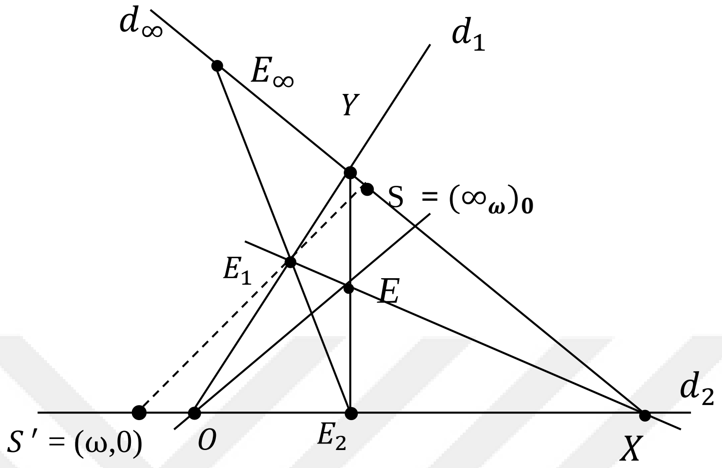
ii) $B \in d_2 - [X]$ olsun. $E_\infty \nsim B$ olduğundan $E_\infty B$ doğrusu ve dolayısıyla $B' = E_\infty B \cap d_1$noktası iyi tanımlıdır. $B \nsim X$ olduğundan $B' \nsim$ Y dir. $B' = (0, \mathrm{x})$ koordinatına sahip ise $B = (x, 0)$ alınsın.

iii) C $\nsim d_\infty$ ise bu takdirde XC ve YC doğruları $C' =$ XC $\cap$ d_1, $C'' =$ YC $\cap$ d_2 noktaları iyi tanımlıdır. C $\nsim d_\infty$ olduğundan $C' \nsim$ Y ve $C'' \nsim$ X dir. $C' = (0, y)$, $C'' = (x, 0)$ ise $C = (x, y)$ alınsın. (Bkz. Şekil 4.2)



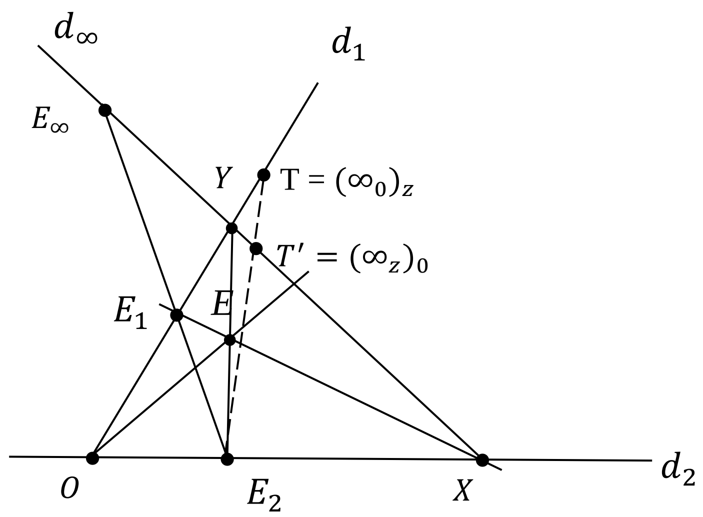
Şekil 4.2 : (x,y) noktasının koordinatı

iv) $S \in d_\infty \cap$ [Y] için S $\nsim E_1$ olduğundan SE_1 doğrusu ve dolayısıyla $S' = SE_1 \cap d_2$ noktası iyi tanımlıdır. $S \sim Y$ olduğundan $SE_1 \sim d_1$ ve $S' \sim O$dur. $S' = (\omega, 0)$ iken S $= (\infty_\omega)_0$ olarak alınsın. Burada $\omega \in R_0$ dır. (Bkz. Şekil 4.3)



Şekil 4.3 : $(\infty_\omega)_0$ noktasının koordinatı

v) $T \in d_1 \cap$ [Y] için TE_2 doğrusu ve $T' =$ T$E_2 \cap d_\infty$ noktası iyi tanımlıdır. $T \sim Y$ olduğundan $T' \sim Y$ dir. $T' = (\infty_z)_0$ iken $T = (\infty_0)_z$ alınsın. Burada $z \in R_0$ dır. (Bkz. Şekil 4.4)



Şekil 4.4 : $(\infty_0)_z$ noktasının koordinatı

vi) $U \in [Y]$ iken $OU\ ve\ XU$ doğruları ile $U' = OU \cap d_\infty$ ve $U'' = XU \cap d_1$ noktaları iyi tanımlıdır. $U \sim Y$ olduğundan $U' \sim Y$ ve de $U'' \sim Y$ dir. $U' = (\infty_\omega)_0$ ve $U'' = (\infty_0)_z$ ise $U = (\infty_\omega)_z$ alınsın. Burada $\omega, z \in R_0$ dır.

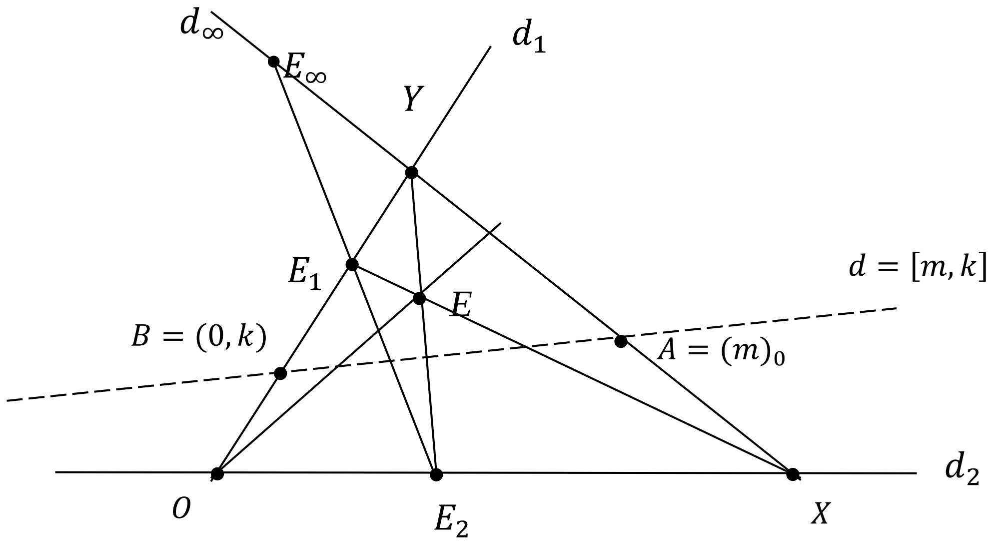
vii) $F \in d_\infty - [\text{Y}]$ olsun. Bu takdirde FE_2 doğrusu ve $F' = FE_2 \cap d_1$ noktası iyi tanımlıdır. $F \nsim Y$ olduğundan $F' \nsim Y$ dir. $F' = (0,\text{y})$ ise $F = (y)_0$ alınsın.

viii) $G \in d_2 \cap [X]$ iken GE_∞ doğrusu ve $G' = GE_\infty \cap d_1$ noktası iyi tanımlıdır. $G \sim X$ olduğundan $G' \sim Y$ dir. $G' = (\infty_0)_z$ ise $G = (0)_z$ alınsın.

ix) $H \sim d_\infty$ ve $H \nsim Y$ olsun. Bu takdirde $OH\ ve\ YH$ doğruları ile $H' = \text{OH} \cap d_\infty$ ve $H'' = \text{YH} \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $H \sim d_\infty$ olduğundan $H'' \sim X$ dir ve $H \nsim Y$ olduğundan $H' \nsim \text{Y}$ dir. $H' = (y)_0$ ve $H'' = (0)_z$ ise $H = (y)_z$ alınsın. Burada $z \in R_0$ dır. Bu koordinatlamaya göre $O = (0,0)$, $X = (0)_0$, $Y = (\infty_0)_0$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (1,0)$, $E_\infty = (1)_0$ ve $E = (1,1)$ dir.

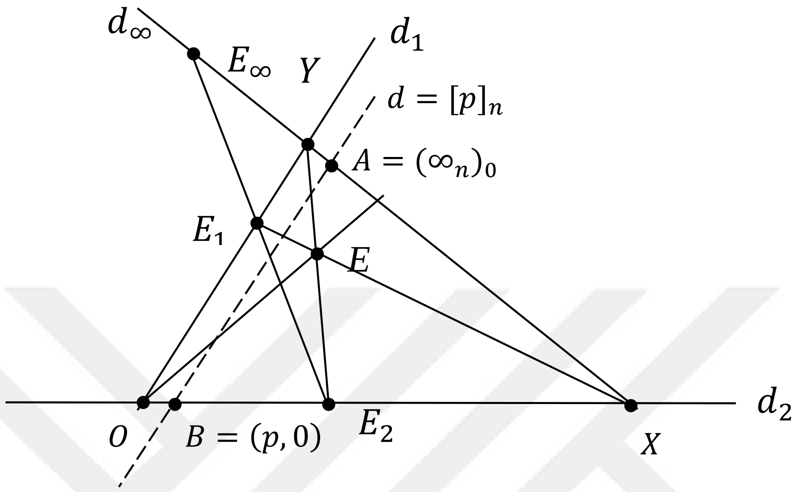
M nin doğrularının koordinatlanması:

i) d, $Y \nsim d$ özelliğinde bir doğru ise $A = d \cap d_\infty$ ve $B = d \cap d_1$ noktaları iyi tanımlıdır. $Y \nsim d$ olduğundan $A, B \nsim Y$ dir. $A = (m)_0$ ve $B = (0, k)$ ise $d = [m, k]$ alınsın. (Bkz. Şekil 4.5)



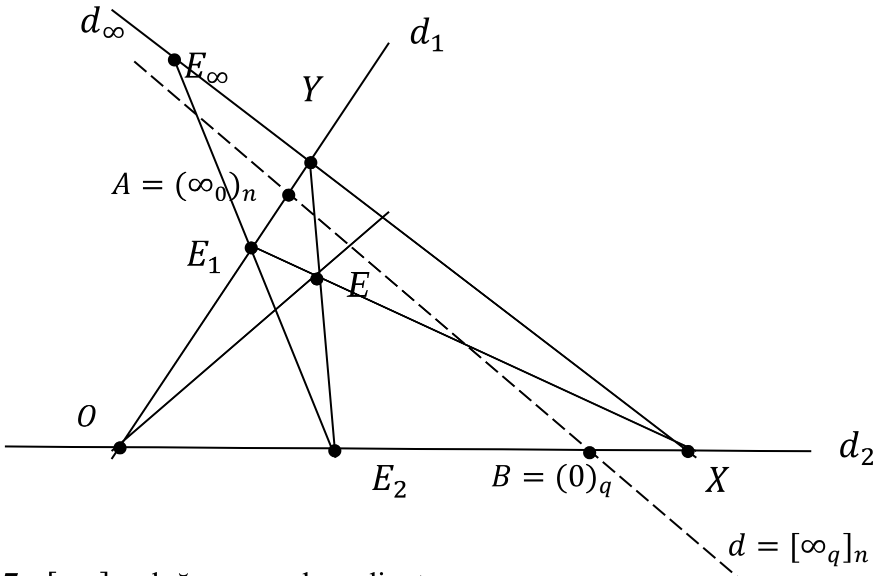
Şekil 4.5 : $[m, k]$ doğrusunun koordinatı

ii) d doğrusu, $Y \sim d$ ved $\nsim d_{\infty}$ özelliğinde bir doğru ise $A = d \cap d_{\infty}$ ve $B = d \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $Y \sim d$ ve d $\nsim$ d_{∞} olduğundan sırasıyla $A \sim Y$ ve $B \nsim X$ dir. $A = (\infty_n)_0$ ve $B = (p, 0)$ ise $d = [p]_n$ alınsın. Buradan, $n \in R_0$ dir. (Bkz. Şekil 4.6)



Şekil 4.6 : $[p]_n$ doğrusunun koordinatı

iii) d doğrusu, $d \sim d_{\infty}$ özelliğindeki bir doğru ise $A = d \cap d_1$ ve $B = d \cap d_2$ noktaları iyi tanımlıdır. $A = (\infty_0)_n$ ve $B = (0)_q$ ise $d = [\infty_q]_n$ alınsın. Burada $q, n \in R_0$ dır. (Bkz. Şekil 4.7)



Şekil 4.7 : $[\infty_q]_n$ doğrusunun koordinatı

Bu koordinatlamaya göre $d_1 = [0]_0$, $d_2 = [0,0]$, $d_\infty = [\infty_0]_0$, $XE = [0,1]$, $YE = [1]_0$, $E_1E_2 = [1,1]$, $E_\infty O = [1,0]$ dır.

Tanım 4.1.3: Boş olmayan bir R kümesi üzerinde tanımlı üçlü işlemler $T_1, T_2, \dots T_n$ olmak üzere $(R, T_1, T_2, \dots T_n)$ $(n+1)$-lisine $n-$ üçlü yapı denir.

Tanım 4.1.4: $0,1 \in R$ ve $0 \neq 1$ olmak üzere bir $(R, T_1, T_2, \dots T_n)$ üçlü yapısında aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa yapıya $n-$ üçlü halka denir.

TR1) T_1, $R \times R \times R$ üzerinde iyi tanımlıdır.

TR2) Her $a, b, c \in R$ için $T_1(a, 0, c) = T_1(0, b, c) = c$ dir.

TR3) Her $a \in R$ için $T_1(a, 1,0) = T_1(1, a, 0) = a$ dır.

TR4) Verilen Her $a, b, c \in R$ için $T_1(a, b, x) = c$ olacak biçimde bir tek $x \in R$ vardır.

$n-$ üçlü halkasında 0 ve 1 elemanları tek türlü bellidir.

M Tanım 4.1.4 deki gibi bir R kümesi yardımıyla koordinatlanmış bir PK- düzlemi olsun. M deki üzerinde olma bağıntısı kullanılarak R üzerinde altı üçlü işlem aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$T_1(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R \times R \times R$ için $(y, z) \in [x, k]$,

$T_2(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R_0 \times R \times R$ için $(z, y) \in [k]_z$,

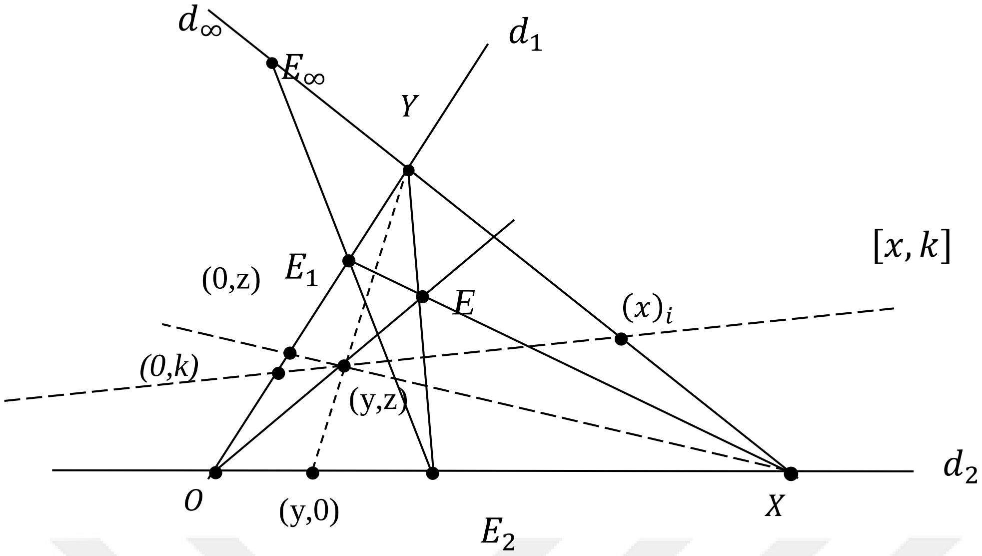
$T_3(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R \times R_0 \times R$ için $(z_y) \in [k, x]$,

$T_4(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R_0 \times R \times R_0$ için $(y)_z \in [\infty_k]_x$

$T_5(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R \times R_0 \times R_0$ için $(\infty_z)_y \in [x]_k$

$T_6(x, y, z) = k \Leftrightarrow \forall\, (x, y, z) \in R_0 \times R_0 \times R_0$ için $(\infty_y)_z \in [\infty_x]_k$

T_1 iyi tanımlıdır. Çünkü $x, y, z \in R$ için (y, z) ile $(x)_0$ noktalarından geçen doğru d_1 doğrusuna komşu değildir ve d_1 ile arakesit noktası bir tektir. Bu arakesit noktası $(\infty_0)_0$ a komşu olmadığından $(0, k)$ koordinatına sahiptir. Yani k, tek türlü bellidir. Aynı zamanda $T_1(R \times R \times R) \subseteq R$ dir. (Bkz. Şekil 4.8)



Şekil 4.8 : T_1'in iyi tanımlı olduğunu koordinat yardımıyla gösterme

$T_{2,}T_3, T_4, T_5$ için de Şekil 4.8 dekine benzer şekiller çizilebilir.

T_2 iyi tanımlıdır. Çünkü $x \in R_0$, $y, z \in R$ için (y, z) ile $(\infty_x)_0$ noktalarından geçen doğru d_2 ye komşu değil ve dolayısıyla d_2 ile arakesit noktası bir tektir. Bu arakesit noktası $(0)_0$ komşu olmadığından $(k, 0)$ koordinatına sahiptir. O halde k tek türlü bellidir ve $T_2(R_0 \times R \times R) \subseteq R$ dir .

T_3 iyi tanımlıdır. Çünkü $(z)_y$ ile $(0, x)$ noktalarından geçen doğru ile d_∞ arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası $(\infty_0)_0$ a komşu olmadığından $(k)_0$ koordinatına sahiptir. Bundan dolayı k tek türlü belirlidir ve $T_3(R \times R_0 \times R) \subseteq R$ dir.

T_4 iyi tanımlıdır. Çünkü $x, z \in R_0$, $y \in R$ için $(y)_z$, $(\infty_0)_x$ noktalarından geçen doğru ile d_2 nin arakesit noktası tek olarak belirli olup $(0)_0$ ile komşu olduğundan $(0)_k$ koordinatına sahiptir. Bu yüzden k tek türlü belirli olup $T_4(R_0 \times R \times R_0) \subseteq R$ dir.

T_5 iyi tanımlıdır. Çünkü $y, z \in R_0$, $x \in R_0$ için $(\infty_z)_y$ ile $(x, 0)$ noktalarından geçen doğru d_∞ komşu değildir. Bu yüzden d_∞ ile bu doğrunun arakesit noktası bir tek olarak belirlidir. Bu arakesit noktası $(\infty_0)_0$ ile komşu olduğundan $(\infty_k)_0$ koordinata sahiptir. Bundan dolayı k tek türlü belirlidir ve $T_5(R \times R_0 \times R_0) \subseteq R$ dir.

T_6 iyi tanımlıdır. $x, y, z \in R_0$ için $(\infty_y)_z$ ile $(0)_x$ noktalarından geçen doğru ile d_1 arakesit noktası bir tektir ve bu arakesit noktası Y ile komşu olduğundan $(\infty_0)_k$ koordinata sahiptir. Bu yüzden k bir tek olarak belirlidir ve $T_6(R_0{\times}R_0{\times}R_0) \subseteq R$ dir.

Sonuç olarak $(R, T_1, T_2, T_3, T_{4,}T_5T_6)$ $6-üçlü$ yapısıdır. Bundan sonra bu yapı için özel olarak ***sexternary yapı*** ismi kullanılacaktır.

Tanım 4.1.5: Bir PK- düzleminden elde edilen sexternary halkasına bir düzlemsel sexternary halkası denir ve PRS ile gösterilir.

4.2 Moufang Klingenberg Düzlemleri

Bu bölümde Moufang Klingenberg düzlem tanımı verilecek ve lokal alternatif halkalar ile koordinatlanan düzlemler hakkında özet biçimde bazı bilgiler verilecektir. Bu bilgiler için Dugas (1978), Keppens (1988), Baker (1991), Çelik (1995) çalışmaları esas alınmıştır.

Tanım 4.2.1: Bir $\mathbb{M}$ PK- düzleminde,

i) Herhangi iki noktayı birleştiren en az bir doğru varsa $\mathbb{M}$ ye noktasal bağlıdır denir.

ii) Herhangi iki doğrunun en az bir arakesit noktası varsa $\mathbb{M}$ ye doğrusal bağlıdır denir.

$\mathbb{M}$ PK- düzlemi hem hem noktasal bağlı, hem de doğrusal bağlı ise $\mathbb{M}$ye kısaca bağlı PK- düzlemi denir.

Tanım 4.2.2: Her $A, B \in \wp$ için $A \sim B$ ve $B\ I\ d$ olacak şekilde bir $B \in \wp$ varsa A noktasına d doğrusunun yakınındadır denir ve bu durum $A \sim d$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.3: " Her $A, B \in \wp$ için $A \nsim M$, $B \nsim M$, $A \nsim e$, $B \nsim e$ özelliğindeki M noktası için A, B, M doğrudaş ise $A\ yı\ B$ ye dönüştüren bir $(M, e) - merkezsel$ kolinasyon vardır." şartı sağlanıyorsa M ye $(M, e) -\ geçişkendir$ denir.

Tanım 4.2.4: $\mathbb{M}$ bir PK- düzlemi olsun. Eğer her (M, e), MIe için M, $(M, e) - geçişken$ ise $\mathbb{M}$ ye Moufang-Klingenberg düzlemi veya kısaca MK-düzlemi denir. $\mathbb{M}$, hem MK- hem de PH- düzlemi ise $\mathbb{M}$ ye kısaca MPH-düzlemi denir.

Önerme 4.2.5: $\mathbb{M}$, bir MK- düzlemi iken $\mathbb{M}^*$ kanonik görüntüsü bir Moufang düzlemidir.

Tanım 4.2.6: Özdeşlikli bir alternatif halkanın birim olmayan elemanlarının I kümesi bir ideal ise halkaya lokal alternatif halka denir.

Bir MK-düzlemi için alternatif bir koordinatlama da aşağıdaki gibi verilmiştir.

$\mathbb{M}$ bir MK- düzlemi ve (O,E,U,V) M nin bir bazı, yani, (Ψ(O),Ψ(E),Ψ(U),Ψ(V)) kanonik görüntüsü $\mathbb{M}^*$ da bir tamdörtgen olsun. OE doğrusu d ile gösterilsin. $w := d \cap UV$,

$\mathbb{H} = \{N \in \wp \mid N\, Id\,, N \nsim W\}\,, I = \{N\, I\, \mathbb{H} \mid N \sim O\}$

olsun ve özel olarak , $0 := O$, $1 := E$ alınsın. Bu durumda $\mathbb{M}$ nin noktaları aşağıdaki gibi koordinatlanır:

$d_\infty \coloneqq UV$ olsun. d nin üzerindeki d_∞ a yakın olmayan noktalar $x \in \mathbb{H}$ olmak üzere $(x, x, 1)$ ile koordinatlansın. $w, z, q, n \in I$ olmak üzere;

i) $N \nsim d_\infty$ ise ,

$(x, x, 1) = NV \cap d, (y, y, 1) = NU \cap d\ iken\ N = (x, y, 1);$

ii) $N \sim d_\infty\,, NV$ ise ,

$(1, z, 1) = (NV \cap UE)O \cap EV, (1, y, 1) = ON \cap EV$ iken $N = (1, y, z)$

iii) $N \sim V$ ise,

$(1,1, z) = NU \cap d$, $(w, 1,1) = ON \cap UE$ iken $N = (w, 1, z)$ olarak koordinatlansın.

$\mathbb{M}$ nin doğruları ise aşağıdaki gibi koordinatlanır:

i) $c \nsim V$ ise,

$(1, m, 1) = (c \cap d_\infty)O \cap EV, \qquad (o, p, 1) = c \cap OV\ iken\ c = [m, 1, p];$

ii) $c \sim V,\ \ c \nsim d_\infty\ ise,$

$(n, 1,1) = (c \cap d_\infty)O \cap UE, \qquad (p, 0,1) = c \cap OU\ iken\ c = [1, n, p];$

iii) $c \sim d_\infty\ ise,$

$(1,0, q) = c \cap OU, \qquad (0,1, n) = c \cap OV\ iken\ c = [q, n, 1]\ dir.$

Doğruların konumuna göre üzerinde olma bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$(x, y, 1)\ I\ [m, 1, p] \Leftrightarrow y = xm + p$

$(1, y, z)\ I\ [m, 1, p] \Leftrightarrow y = m + zp$

$(w, 1, z)\ \notin\ [m, 1, p]$

$(x, y, 1)\ I\ [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$

$(w, 1, z)\ I\ [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$

$(1, y, z) \notin [1, n, p]$
$(1, y, z)\ I\ [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn$
$(w, 1, z)\ I\ [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$
$(x, y, 1) \notin [q, n, 1]$

Bu altı çift gerektirmeden elde edilecek üçlü işlemin (+) ile (.) ikili işlemlerinin nasıl tanımlanacağı ve bu ikili işlemlerin etkisiz elemanlarının 0 ile 1 olduğu iyi bilinmektedir.
Böylece doğrular , üzerindeki noktalarla birlikte aşağıdaki gibi verilebilir :

$[m, 1, p] = \{(x, xm + p, 1) | x \in \mathbb{H}\} \cup \{(1, zp + m, z \mid z \in I)\}$
$[1, n, p] = \{(yn + p, y, 1) | y\ I \in \mathbb{M}\} \cup \{(zp + n, 1, z) \mid z \in I\}$
$[q, n, 1] = \{(1, y, yn + q) | \ y \in \mathbb{H}\} \cup \{(w, 1, wq + n)\ | w \in I\}$

Bununla ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.
Teorem 4.2.7: $\mathbb{M}$ yukarıdaki gibi koordinatlanmış bir MK- düzlemi olsun. Bu takdirde ($\mathbb{H}$, + , .) bir lokal alternatif halkadır ve I birimden farklı elemanların oluşturduğu idealdir. $\mathbb{M}$ de komşuluk bağıntısı aşağıdaki gibi aşağıdaki gibi karakterize edilebilir :
$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in I$, i = 1, 2, 3
$[x_1, x_2, x_3] \sim [y_1, y_2, y_3] \Leftrightarrow x_i - y_i \in I$, i = 1, 2, 3
Sonuç 4.2.8: Her lokal alternatif halkaya karşılık bununla koordinatlanan bir MK- düzlemi vardır ve tersine her MK- düzlemine karşılık bir lokal alternatif halka bulunabilir.

5. SONUÇ

Klingenberg düzlemleri hakkında bilinenler elbette ki bu tezde verilenlerden ibaret değildir. Ayrıca bu konularla ilgili araştırmalar yoğun olarak devam etmektedir. Bu yüksek lisans tezinde Klingenberg düzlemlerini çalışacak araştırmacılar için temel bilgiler düzenli ve tertipli olarak verilmeye çalışılmıştır.

İleriki çalışmalarda bu konuda bilimsel katkı sağlayacak yeni buluşlarda bulunmak hedeflenmektedir. Şimdilik bu çalışma bu konu ile ilgili merak edilenlere temel oluşturacak bilgileri içermektedir.

KAYNAKLAR

Asar, A. O., Arıkan, A., Arıkan, A. 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, Ankara, 373 s.
Atilla, A. 2007. Geometrik Yapılarda Çifte Oran. *Doktora tezi.* Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Estitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 89 s.
Bacon, P.Y. 1976**.** An Introduction to Klingenberg Planes. 3101 NW 2nd Ave. , Gainesville, Florida., 32607, USA, Vol.1, 232 p.
Baker, C.A.,N.D. Lane, J. W. Lorimer. 1991. A Coordinatization for Moufang-Klingenberg Planes. Simon Stevin, 65, 3-22.
Çelik, B. 1995. Non-Assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Projektif Yapılar(Düzlemler). *Doktora Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 74 s.
Çiftçi, S. 1984. Moufang Düzlemleri Üzerine. *Doktora Tezi*, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı. 48 s.
Dugas, M. Verallgemeinerte Andre-Ebenen Mit Epimorphismen Auf Hjelmslev-Ebenen. Geom. Dedic, 8, pp 105-123, 1978.
Erdoğan, F. 2014. Modüller ve Lokal Halkalar üzerine Geometri. *Doktora Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 126 s.
Fraleigh, J. B. 1989. A First Course in Abstract Algebra. Addison Wesley P.C. USA, 518 pp.
Hughes, D.R., F. C. Piper.1973. Projective Planes. New York, Springer-Verlag. 291 p.**Hungerford, T. W. 1974.** Algebra. Halt, Rinehart and Winston Inc., New York, 502 pp.
Jacobson, N. 1985. Basic Algebra I (2. Edition). W. H. Freeman and Company, New York, 499 pp.
Kaya, R. 1992. Projektif Geometri. Eskişehir, Anadolu Üniv. Yay. No: 551. 463 s.
Keppens, D. 1988. Coordinatization of projective Klingenberg planes (Part 1). Simon Stevin, 62, 63-90.
McDonald, B. R. 1976. Geometric Algebra Over Local Rings. Marcel Dekker Inc., New York, 421 pp.
Nomizu, K. 1966. Fundamentals of Linear Algebra. McGraw-Hill, New York, 325 pp.
Stevenson, F.W. 1972. Projective Planes. San Francisco, W. H. Freeman Co., 416 p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Derya Aslan
Doğum Yeri ve Tarihi : Diyarbakır
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Ömer Seyfettin Lisesi Gönen / Balıkesir
Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı / Geo.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Kültür Özel Öğretim Kursu

İletişim (e-posta) : derya.tahsin@hotmail.com

Yayınları : **Akpınar A., Aslan D., Boztemür B., Dayıoğlu A., Doğan İ., Gürel S., 2018** A Note on Projective Klingenberg Planes over Rings of Plural Numbers, International Journal of New Techonology and Research (IJNTR), ISSN :2454- 4116, Volume-4, Issue-2, February 2018, Pages 103-105.