T.C.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LOKAL HALKALAR İLE KOORDİNATLANAN DÜZLEM SINIFLARI ÜZERİNE

Abdurrahman DAYIOĞLU

Prof. Dr. Basri ÇELİK
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2018

TEZ ONAYI

Abdurrahman DAYIOĞLU tarafından hazırlanan "Bazı Lokâl Halkalar ile Koordinatlanan Düzlem Sınıfları Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Basri ÇELİK

Başkan: Prof. Dr. Süleyman Çiftçi
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Basri Çelik
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Özcan Gelişgen
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Orhan Gürler
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Fizik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Dr. Öğr. Üyesi İrem Küpeli Erken
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Ensititü Müdürü
26 / 09 / 2018

B. U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26 / 09 / 2018

İmza

Abdurrahman DAYIOĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI LOKAL HALKALAR İLE KOORDİNATLANAN DÜZLEM SINIFLARI ÜZERİNE

Abdurrahman DAYIOĞLU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Bu doktora tezinde, bir dual lokal halka sınıfı belirlenmiş ve bu sınıfa ait dual lokal halkalar yardımıyla inşa edilen projektif Klingenberg düzlemlerindeki bazı noktaların toplamı ve çarpımı hem geometrik hem cebirsel olarak verilen tanım, teorem ve sonuçlarla incelenmiştir. Ayrıca, toplama ve çarpma işlemleriyle özel olarak belirlenen kolinasyonlar arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Geometrik bir yapıya uygun olan cebirsel yapıyı bulmanın o geometrik konseptin "gerçek" doğasını açığa çıkarttığı söylenir. Bu tezde de genel manasıyla geometrik bir yapı ile bu yapının cebirsel temeli arasındaki karşılık gelmelerin anlamı ve güzelliği öne çıkartılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Dual Lokal Halka, Projektif Düzlem, Projektif Klingenberg Düzlem, Toplama, Çarpma, Kolinasyon
2018, vii + 175 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

ON PLANE CLASSES COORDINATED WITH SOME LOCAL RINGS

Abdurrahman DAYIOĞLU

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Basri ÇELİK

In this doctoral dissertation, a dual local ring class has been identified and the addition and the multiplication for some points of the projective Klingenberg planes that built by the dual local rings of that class are examined both geometrically and algebraically with given definitions, theorems and results. Also, the relation between the addition and multiplication operations and the specifically identified collineations are investigated.

It has been said that finding the right algebraic structure reveals the "true" nature of a geometric concept. This thesis also put forward, in a general manner, the meaning and the beauty of the correspondences between the geometric structures and their algebraic foundations.

Key Words: Dual Local Ring, Projective Plane, Projective Klingenberg Plane, Addition, Multiplication, Collineation
2018, vii + 175 pages.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşumundaki her aşamasında merhametle ve bolca sabırla yol gösteren, kader arkadaşım, sayın danışman hocam müşfik Basri Çelik ve moral, motivasyon kaynağı sevgili eşi Nisa Çelik hocama derin şükran ve saygılarımı sunuyorum.

Kendimi bildim bileli vizyonu ile istikamet veren sevgili babama, dualarını üzerimden hiç eksik etmeyen annem ve biricik kardeşime, desteğini ve itici kuvvetini her daim hissettiğim sevgili eşime, yaramazlıklarıyla son üç senedir beni sürekli çalışmaya sevk eden, canımdan çok sevdiğim biricik oğluma kalben teşekkür ediyorum.

Detaylı ve amaçsız da olsa her soruma verdiği içten cevaplar ile dostluğunu yakinen hissettiren sevgili hocam Atilla Akpınar'a, bu süreçte yol arkadaşlığı yaptığımız, çalışkanlığı ile örnek olan sevgili hocam Fatma Özen Erdoğan'a ve başlangıçtan bugüne kadar desteğini hissettiğim sevgili hocam Süleyman Çiftçi'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak bugüne kadar her aşamasını devlet kurumlarında aldığım eğitim içerisinde beni yetiştiren tüm hocalarıma ve devletime teşekkür ederim.

Abdurrahman DAYIOĞLU
26 / 09 / 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G_Γ	Γ Bağıntısının Grafiği
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	**A** Kartezyen Çarpım **B**
$\forall$	Her
$\exists$	En Az Bir
ϕ	Boş Küme
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathcal{A}$	Afin Düzlem
$\mathcal{P}$	Projektif Düzlem
ø	Üzerinde Değil
φ	Geometrik Yapı Epimorfizmi
$\nsim$	Komşu Değil
$\overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}}$	M Merkezli Perspektiflik
$O\overset{\triangle}{N}A$	ONA Üçgeni

Kısaltmalar	**Açıklama**
$\mathbb{A}_2F$	F Cismi ile Koordinatlanan Afin Düzlem
$\mathbb{P}_2\mathcal{B}$	$\mathcal{B}$ Bölümlü Halkası ile Koordinatlanan Projektif Düzlem
MK-Düzlem	Moufang Projektif Klingenberg Düzlemi
PK-Düzlem	Projektif Klingenberg Düzlemi
$PK_2(\mathbf{R})$	$\mathbf{R}$ Lokal Alterne Halkası ile Koordinatlanan Projektif Klingenberg Düzlem
$PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$	$\mathcal{B}(\varepsilon)$ Dual Lokal Halkası ile Koordinatlanan Projektif Klingenberg Düzlem

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Genel kanı olarak, matematikte uzmanlaşmak isteyen bir kişinin kendisine belirlediği alanın en azından bir konusunda derinlemesine çalışma yapması gerektiği bilinir. Cebir, grup teori ya da halka teori gibi projektif düzlem de bu tarz yoğunlaştırılmış bir çalışma için basit aksiyomatik temelleri sebebiyle uygun bir alandır. Aynı zamanda projektif düzlem, iki işlemli cebirsel yapılar olan cisimler ve bölümlü halkalar gibi yapılarla da kayda değer bir ilişki içerisindedir. Bu detaylı çalışmayı projektif düzlem üzerine yapan birinin kombinatoryal analiz, lineer cebir ve sayılar teorisi gibi matematiğin çeşitli dalları ile etkileşime girmesi doğaldır.

Geometri ve cebir matematiğin temel iki konusudur. Matematiğin soyut bir disiplin olarak büyümesindeki anahtar fikirler herhangi başka bir alandan ziyade en çok matematiğin geometri dalından çıkmıştır. M.Ö. 300'lü yıllarda yazılmış bir tez olarak İskenderiye'li Öklid'in on üç ciltlik "Elemanlar (Stoicheia)" adlı eseri bir bilgi alanını bütünüyle organize etmeye yönelik ilk deneme olarak görülmektedir (Stevenson, 1972). Geometri ve cebir arasındaki ilişki formal bilim tarihinin başlangıç noktası olarak da kabul edilen bu kitabın ortaya çıkışından bu yana incelenmiştir. Bu doktora tezinde de cebirsel bir yapıdan inşa edilen geometrik bir yapının elemanları için bazı geometrik ve cebirsel konular üzerinde durulmuş ve birtakım sonuçlar bulunmuştur.

Öklid'in beş aksiyomu düzlem geometri inşasına hizmet etti. Bu beş aksiyomdan en meşhuru belki de tarihte en çok karşıtlık oluşturan, matematikçiler tarafından kuşkuyla karşılanan sonuncu olandır. Playfair'in versiyonuyla "Bir doğruya dışındaki bir noktadan tam olarak bir tane paralel doğru çizilebilir." ifadesini yani Öklid'in beşinci aksiyomunu ilk dört aksiyomdan ispat etme deneyişleri uzun seneler süren sinir bozucu uğraşlardan sonra terk edilmiş yerine beşinci aksiyomu değiştirmek fikri kalmıştır.

H.S.M. Coxeter (1942) de Gauss'un ilk defa "gayri öklidyen" adını paralellik özellikleri bakımından Öklid'den farklılık gösteren geometrik sistemleri tarif etmek için kullandığından bahsediyor. Bu tip bir sistem yaklaşık olarak bundan 200 yıl kadar önce birbirlerinden bağımsız olarak Macar Bolyai ve Rus Lobachevsky tarafından geliştirildi. Öklid'inkinden radikal biçimde farklılık gösteren başka bir sistem daha sonraları Alman Riemann tarafından ortaya atıldı. 1871'de Klein genel olarak parçaları biraraya getirerek konuyu birleştirdi ve Öklid, Bolyai-Lobachevsky, Riemann sistemlerine sırasıyla parabolik, hiperbolik ve eliptik geometri isimlerini verdi.

Projektif geometri için F. Stevenson (1972) de "İki boyutlu ya da daha büyük boyutlu uzaylardaki projektif dönüşümlerin altında değişmez kalan özelliklerin genel olarak incelenmesidir." tanımını kullanmıştır. Bu konudaki ilk büyük sonuçlar 18. yüzyılın başlarında Fransız Poncelet, Brianchon, İsviçreli Steiner ve Alman von Staudt tarafından elde edilmiştir. Bugün projektif geometri matematiğin yerleşmiş hem kendi içinde büyük merak uyandıran hem de içinden çok farklı geometrilerin ortaya çıkarılabildiği genel bir sistem olarak matematiğe hizmet etmeye elverişli bir alandır.

Projektif geometride soyut yaklaşım diğer geometrilerde olduğundan daha fazla arzu edilmektedir. Çünkü Öklid, Descartes, Lobachevsky. . . vb. gibi isimlerle anılan geometrik di-siplinlerden projektif geometriyi elde etmektense projektif geometriden bu gibi disiplinleri elde etmek daha doğaldır ve dolayısıyla projektif geometrinin temelleri tüm geometrinin temelleri olarak kabul edilebilir (Veblen ve Young 1910). Benzer biçimde Arthur Cayley de metrik geometrinin projektif geometrinin bir parçası olduğunu ve projektif geometrinin "tüm geometri" olduğunu ifade etmektedir. Coxeter (1974) de projektif geometrinin, temelleri bakımından, Öklidyen geometriden daha basit olarak kurulabileceğini, çünkü Öklidyen geometride bir cetvel ve bir pergele ihtiyaç duyulurken projektif geometride sadece bir cetvele ihtiyaç duyulduğunu ifade etmektedir.

Projektif Klingenberg ve Projektif Hjelmslev düzlemleri (sırasıyla kısaca PK-düzlem ve PH-düzlem) sıradan projektif düzlemlerin bir tür genelleştirilmişleridir. En genel olarak bir PK-düzlem (PH-düzlem) nokta ve doğru kümeleri "komşu" sınıflarına parçalanmış geometrik yapılardır ki bu yapılarda aynı zamanda komşu olmayan noktalar (doğrular) tam olarak bir ortak doğruya (noktaya) sahiptirler ve komşuluk sınıflarının temsilcilerinin oluşturduğu yapı bir projektif düzlemdir. PK-düzlem, Klingenberg'in (1954), (1955) ve (1956) makalelerinde ilk defa takdim edilmiş ve o tarihten bu yana takdire şayan bir ilgi uyandırmıştır. 1954'ten sonraki ilk 20 yıllık periyotta Hjelmslev ve Klingenberg düzlemleri üzerine yapılmış 100 den fazla makale Artman ve ark. (1976) çalışmasında listelenmiştir. 1975 yılında ise Drake ve Lenz başlığında Klingenberg ifadesi ilk defa görülen "Sonlu Klingenberg Düzlemleri" isimli çalışmalarını yayınlamıştır. Bu makalede Hjelmslev düzlemleri üzerinde iyi bilinen bazı sonuçlar Klingenberg düzlemlerine taşınmış ve yine bu çalışmada özel olarak "Komşu noktaları birleştiren doğrular ve komşu doğruların arakesitleri ile ilgili bir aksiyom bulunmayan Hjelmslev düzlemlerine Klingenberg düzlemleri denir." tanımı verilmiştir.

Bundan sonraki ilk bölüm olan ikinci bölümde tezde yapılanları daha rahat anlayabilmek için gerekli temel sayılabilecek kavramlar cebirsel ve geometrik olarak iki başlık altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yani ileri düzey giriş ya da detaylı literatür taraması olarak adlandırılabilecek bölümde, toplamda dört alt başlık halinde projektif Klingenberg düzlemlerindeki birleşim, arakesit, komşuluk ve yakın olma kavramları tanıtılıp bunların $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasındaki cebirsel karşılıkları tanıtılmış, genelde bir PK-düzlemin nasıl koordinatlanabileceği ile $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasıyla nasıl koordinatlanabileceği üzerinde durulmuş ve son olarak inşa edilen bu PK-düzlemde geçerli bazı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk önce Öklid düzleminin özel bir doğrusu üzerindeki iki noktanın toplamı ve çarpımı ile genişletilmiş reel afin düzlemin, yani reel projektif düzlemin, özel bir doğrusu üzerindeki iki noktanın toplamı ve çarpımı ifade edilmiştir. Sonrasında $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki bazı noktaların toplamı ve çarpımı tanıtılıp orijinal sonuçlar bulunmuştur.

Beşinci bölümde $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi için özel dört kolinasyon tanıtılmış ve bunların $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki noktaların toplamı ve çarpımı ile ilişkisi kurulmuştur.

Tezin içerisinde yer alan bazı ispatların literatürde farklı bir uyarlaması verilmiş olmasına rağmen ya da literatürde çok kısa olarak değinilip geçildiği için okuyucunun kafasında soru işareti bırakmamak adına tez içinde bu ispatlar detaylıca ve titizce yapılmıştır. Bunun-la birlikte tezin gereksizce uzamasına sebebiyet verecek fakat basit ve uzun işlemlerle görülebilecek ispatların bazı kısımları okuyucunun kolayca yapabileceği düşünülerek kısa geçilmiştir.

19. ve 20. yüzyılda yazılmış rastgele seçilen geometri kitaplarının önsözleri arasında dolaşmak bu tezi yazarken yazara ayrı bir keyif verdi. Son olarak A. Cayley tarafından ifade edilen:

"Geri kalan her şeyde olduğu gibi matematiksel teoride de güzellik algılanabilir; ama açıklanamaz."

prensibine benzeyen bir düşünce ile tezin bu kısmı sonlandırılmaktadır:

"Aslında bilime katkı koyan herkes algıladıklarını açıklamaya ve uygulamaya çalışmaktadır."

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde yapılanların daha rahat anlaşılması için gerekli olan cebir ve geometri ile ilgili temel tanım ve kavramlar özet olarak verilecektir. Kaynak belirtilmeyen tanım, sonuç ve teoremler için Çelik (2015), Çiftçi (2015), Dembowski (1968), Fraleigh (2003), Hacısalihoğlu (2000), Jacobson (1980) kitapları baz alınmış fakat dil ve gösterim birliğinin sağlanması için bu kaynaklardan alınan bilgiler üzerinde, tezde kullanılan sembollerle ilgili bazı uyarlamalar yapılmıştır.

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1 **A** ve **B** kümeleri için $\mathbf{G}_\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ise $\Gamma = (\mathbf{G}_\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ üçlüsüne **A** kümesinden **B** kümesine bir *bağıntı* denir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.2 $\Gamma = (\mathbf{G}_\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ bir bağıntı olsun.

F1) $(\forall (x, u), (x, v))((x, u) \in \mathbf{G}_\mathbf{\Gamma} \wedge (x, v) \in \mathbf{G}_\mathbf{\Gamma} \Rightarrow u = v)$

F2) $(\forall x)(x \in \mathbf{A} \Rightarrow (x, u) \in \mathbf{G}_\mathbf{\Gamma})$

şartları sağlanıyorsa $\Gamma = (\mathbf{G}_\mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ ye **A** kümesinden **B** kümesi üzerine bir *fonksiyon* denir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.3 $f = (\mathbf{G}_f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ fonksiyonu için

$$(\forall\ (x, u), (y, u))[((x, u) \in \mathbf{G}_f \wedge (y, u) \in \mathbf{G}_f) \Rightarrow x = y] \tag{2.1.1}$$

şartı sağlanıyorsa $f = (\mathbf{G}_f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ ye **A** kümesinden **B** kümesine bir *birebir fonksiyondur* denir. (Çelik 2015)

(2.1.1) şartına *birebirlik şartı* adı verilir. $(x, y) \in \mathbf{G}_f$ olması $f(x) = y$ biçiminde gösterilir ve y elemanına "*x in f altındaki görüntüsü* " denir. Bu durumda (2.1.1) ile verilen birebirlik şartı

$$(\forall\ x, y \in \mathbf{A})((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)) \tag{2.1.2}$$

biçimine gelir. Karşıt ters özelliği dolayısıyla (2.1.2) ifadesi ile

$$(\forall\, x, y \in \mathbf{A})\big((x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))\big) \tag{2.1.3}$$

ifadesi denktir. Bu nedenle birebirlik şartı olarak (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) den herhangi biri kullanılabilir.

Tanım 2.1.4 $f = (\mathbf{G}_f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ fonksiyonu için

$$(\forall\, y)[y \in \mathbf{B} \Rightarrow (\exists\, x)(x \in \mathbf{A} \wedge (x, y) \in \mathbf{G}_f)] \tag{2.1.4}$$

şartı sağlanıyorsa $f = (\mathbf{G}_f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ ye **A** kümesinden **B** kümesine bir *örten fonksiyondur* denir. (Çelik 2015)

(2.1.4) şartına *örtenlik şartı* adı verilir. Fonksiyon altındaki görüntü tanımından faydalanarak örtenlik şartı

$$\forall\, y \in \mathbf{B}, \big(\exists\, x \in \mathbf{A}, y = f(x)\big)$$

biçimine gelir.

Tanım 2.1.5 $\Gamma = (\mathbf{G}_\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ bağıntısı için

D1) $(\forall x)(x \in \mathbf{A} \Rightarrow (x, x) \in \mathbf{G}_\Gamma))$

D2) $(\forall (x, y))((x, y) \in \mathbf{G}_\Gamma \Rightarrow (y, x) \in \mathbf{G}_\Gamma))$

D3) $(\forall (x, y), (y, z))[((x, y) \in \mathbf{G}_\Gamma \wedge (y, z) \in \mathbf{G}_\Gamma) \Rightarrow (x, z) \in \mathbf{G}_\Gamma]$

şartları sağlanıyorsa Γ ya **A** kümesi üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.6 $\Gamma = (\mathbf{G}_\Gamma, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ bir denklik bağıntısı ve $a \in \mathbf{A}$ keyfî bir eleman olsun. Bu durumda

$$[a] = \{x | (a, x) \in \mathbf{G}_\Gamma\}$$

kümesine *“a nın Γ bağıntısına göre denklik sınıfı”* veya kısaca *“a nın denklik sınıfı”* denir. $b \in [a]$ olacak biçimdeki her bir b elemanına $[a]$ denklik sınıfı için bir *temsilci* adı verilir. $(a, x) \in \mathbf{G_\Gamma}$ iken x elemanına a elamanının bir *görüntüsü* denildiğinden, $[a]$ denklik sınıfı a nın Γ altındaki tüm görüntülerinin kümesidir. (Çelik 2015)

Teorem 2.1.7 $\Gamma = (\mathbf{G_\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ denklik bağıntısına göre iki denklik sınıfı ya ayrıktır ya da özdeştir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.8 $\Gamma = (\mathbf{G_\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda

$$\mathbf{A}/\Gamma = \{[x] \mid x \in \mathbf{A}\}$$

kümesine **A** kümesinin Γ denklik bağıntısına göre *bölüm kümesi* denir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.9 $\Gamma = (\mathbf{G_\Gamma}, \mathbf{A}, \mathbf{A})$ bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Pi : \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{A}/\Gamma \\ x &\longrightarrow \Pi(x) = [x] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı Π dönüşümü bir fonksiyondur ve bu fonksiyona **A** için Γ denklik bağıntısı yardımıyla elde edilen *kanonik fonksiyon* denir.(Çelik 2015)

Sonuç 2.1.10 Kanonik fonksiyon örtendir. (Çelik 2015)

Tanım 2.1.11 **A** boş olmayan bir küme olsun. $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ nın her bir elemanına **A** nın tam olarak bir elemanını karşılık tutan bir $\top$ dönüşümüne **A** kümesi üzerinde bir *ikili işlem* ya da *iç işlem* denir. (Hacısalihoğlu 2000)

Tanımdan anlaşılacağı gibi $\top$ dönüşümünün **A** kümesi üzerinde bir iç (ikili) işlem olması için gerek ve yeter şart $\top$ dönüşümünün $\top : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ bir fonksiyon olmasıdır.

Tanım 2.1.12 **G** boş olmayan bir küme ve $\top : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ bir iç işlem olsun. Eğer

G1) $(\forall\, a,b,c)(a,b,c \in \mathbf{G} \Rightarrow (a\top(b\top c) = (a\top b)\top c))$

G2) $(\forall\, a)[a \in \mathbf{G} \Rightarrow (\exists\, e)(e \in \mathbf{G} \wedge (a\top e = e\top a = a))]$

G3) $(\forall\, a)[a \in \mathbf{G} \Rightarrow (\exists\, a^{-1})(a^{-1} \in \mathbf{G} \wedge (a^{-1}\top a = a\top a^{-1} = e))]$

şartları sağlanıyorsa $(\mathbf{G}, \top)$ ikilisine *grup* denir ve $(\mathbf{G}, \top)$ grubu eğer bir karışıklık olmayacaksa kısaca **G** ile gösterilir. (Hacısalihoğlu 2000)

Önerme 2.1.13 $(\mathbf{G}, \top)$ bir grup ve $a \in \mathbf{G}$ olsun. a elemanı kendisiyle n defa işleme konulduğunda elde edilen $\underbrace{a\top a\top a\top \ldots a}_{n\ adet}$ elemanına a nın $\top$ işlemine göre n. *kuvveti* denir ve a^n ile gösterilir.

G1) şartına $\top$ işlemi için *birleşme özelliği* (assosyatiflik), **G2)** şartını sağlayan e elemanına $\top$ işleminin *etkisiz elemanı* denir. **G3)** şartındaki a^{-1} elemanına a elemanının $\top$ işlemine göre *tersi* denir. Bir $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \top)$ grubunda $\top$ işlemi *değişme özelliği* (komütatiflik) adı verilen

$$(\forall\, a,b)(a,b \in \mathbf{G} \Rightarrow (a\top b = b\top a))$$

şartını sağlıyorsa **G** grubuna *değişmeli grup* ya da *abel grubu* adı verilir.

Tanım 2.1.14 Üzerinde en az bir işlem tanımlı ve bu işleme göre belirli özellikleri sağlayan kümelere *cebirsel yapı* denir.

Tanım 2.1.15 $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \top)$ bir grup ve $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}$ olsun. Eğer $\mathbf{S} = (\mathbf{S}, \top)$ bir grup oluyorsa **S** ye, **G** nin bir *alt grubu* denir.

Bazı cebirsel yapılarda ikinci bir işleme daha ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi iki işlemli cebirsel yapılardan bu tezde kullanılacak olanlar hakkında bazı temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1.16 **H** herhangi bir küme ve $\top$ ile $\perp$ bu küme üzerinde tanımlı herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer

H1) $(\mathbf{H}, \top)$ abel grubudur.

H2) $\perp$ işlemi birleşmelidir.

H3) $\forall a, b, c \in \mathbf{H}, \big(a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)\,\big)$
$\forall a, b, c \in \mathbf{H}, \big((a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)\big).$

şartları sağlanıyorsa $(\mathbf{H}, \top, \perp)$ sistemine bir *halka* denir ve $(\mathbf{H}, \top, \perp)$ halkası karışıklık olamayacaksa kısaca **H** ile gösterilir. (Hacısalihoğlu 2000)

Bir $(\mathbf{H}, \top, \perp)$ halkasında birinci işleme genellikle *toplama*, ikinci işleme de *çarpma* işlemi adı verilir. Bu nedenle genel olarak birinci işlemi $\top$ yerine toplama için alışılagelen $+$, ikinci işlemi de $\perp$ yerine $\cdot$ simgesi ile göstermek âdet olmuştur. Genellikle a, b elemanları için $a \cdot b$ yerine kısaca ab yazılır. **H3)** şartına çarpmanın toplama üzerine *dağılma kuralları* da denir. Toplama işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, çarpma işlemine göre etkisiz eleman, varsa, 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana *özdeşlik elemanı* adı verilir. Çarpma işlemine göre tersi var olan elemanlar için *birim* ifadesi de kullanılır. Eğer **H** halkasında özdeşlik elemanı varsa **H** ye *özdeşlikli halka*, çarpma işlemi değişmeli ise **H** ye *değişmeli (komütatif) halka* denir.

Tanım 2.1.17 $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ bir özdeşlikli halka ve $\mathbf{H} - \{0\}$ ın her elemanının çarpmaya göre tersi varsa $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ halkasına *bölümlü halka* veya *aykırı cisim* denir. Çarpma işlemi değişmeli olan bir bölümlü halkaya *cisim* adı verilir. (Hacısalihoğlu 2000)

Tanım 2.1.18 $\mathbf{H} = (\mathbf{H}, +, \cdot)$ bir halka ve $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}$ olsun. Eğer $\mathbf{S} = (\mathbf{S}, +, \cdot)$ bir halka oluyorsa **S** ye, **H** nin bir *alt halkası* denir. (Hacısalihoğlu 2000)

Teorem 2.1.19 $\mathbf{H} = (\mathbf{H}, +, \cdot)$ bir halka olsun. $\phi \neq \mathbf{S} \subseteq \mathbf{H}$ alt kümesi için

$$(\forall\, x, y)\big(x, y \in \mathbf{S} \Rightarrow (x - y \in \mathbf{S} \wedge x \cdot y \in \mathbf{S})\big)$$

önermesi doğru oluyor ise $\mathbf{S} = (\mathbf{S}, +, \cdot)$ üçlüsü $\mathbf{H} = (\mathbf{H}, +, \cdot)$ nın bir alt halkasıdır. (Bayraktar 1997)

Tanım 2.1.20 **H** kümesindeki her a, b elemanı için, *alterne kuralları* adı verilen

1) $a(ab) = a^2b$,

2) $(ba)a = ba^2$

şartları ile **H2)** hariç halka olma şartlarını sağlayan bir $\mathbf{H} = (\mathbf{H}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına *alternatif halka* ya da *alterne halka* denir.

Herhangi bir halkada **H2)** şartı (assosyatiflik) dolayısıyla alterne kuralların sağlanacağı aşikârdır. Bu nedenle her halka bir alterne halkadır. Fakat her alterne halka bir halka olmak zorunda değildir.

Her **H** alterne halkasında her $x, y, z \in \mathbf{H}$ için, *Moufang özdeşlikleri* olarak isimlendirilen

$$\begin{aligned} x(y(xz)) &= (xyx)z, \\ ((yx)z)x &= y(xzx), \\ (xy)(zx) &= x(yz)x \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. (Pickert 1955)

Tanım 2.1.21 **H** halkasının her a elemanı için

$$a\,\mathbf{I} = \{a \cdot x \,|x \in \mathbf{I}\} = \{ax \,|x \in \mathbf{I}\} \subseteq \mathbf{I}$$
$$\mathbf{I}\,a = \{x \cdot a \,|x \in \mathbf{I}\} = \{xa \,|x \in \mathbf{I}\} \subseteq \mathbf{I}$$

şartlarını sağlayan bir **I** alt halkasına **H** halkasının bir *ideali* denir. (Fraleigh 2003)

Tanım 2.1.22 Özdeşlikli bir **H** halkasında lokallik şartı olarak bilinen "Tersi olmayan elemanların kümesi bir ideal oluşturur." şartı sağlanıyorsa bu **H** halkasına *lokal halka* denir. Eğer özdeşlikli bir **H** alterne halkası lokallik şartını sağlıyorsa **H** ye *lokal alterne halka* denir. (Jacobson 1980)

Şimdi, 1873 yılında William Kingdon Clifford tarafından $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi yardımıyla oluşturulan dual sayı kavramı tanıtılacaktır ki bu sayıların cebirsel yapısı bu tezde önemli bir role sahip olacaktır.

Teorem 2.1.23 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ olmak üzere
$\mathbb{R}(\varepsilon) = \mathbb{R} + \mathbb{R}\varepsilon = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde $A = a_1 + a_2\varepsilon,\ B = b_1 + b_2\varepsilon$ elemanlarının eşitliği

$$A = B \Leftrightarrow a_1 + a_2\varepsilon = b_1 + b_2\varepsilon \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2),$$

toplamı

$$A + B = (a_1 + a_2\varepsilon) + (b_1 + b_2\varepsilon) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\varepsilon,$$

ve çarpımı

$$A \cdot B = (a_1 + a_2\varepsilon) \cdot (b_1 + b_2\varepsilon) = (a_1b_1) + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $(\mathbb{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ bir halkadır. (Hacısalihoğlu 2000)

Tanım 2.1.24 Teorem 2.1.23 de verilen $(\mathbb{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ halkasına $\mathbb{R}$ *üzerinde kurulan dual halka* denir ve bu halkanın elemanlarına da *reel dual sayılar* denir.

$\mathbb{R}(\varepsilon)$ da özel olarak

$$0 + 0\varepsilon = 0$$

ve

$$0\varepsilon = 0$$

ile gösterilir ve çarpma tanımı gereği

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \varepsilon \cdot \varepsilon \\
&= (0+\varepsilon)\cdot(0+\varepsilon) \\
&= 0+(0+0)\varepsilon \\
&= 0+0\varepsilon \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur.

Tersi olmayan sıfırdan farklı elemanlar mevcut olduğundan $(\mathbb{R}(\varepsilon),+,\cdot)$ bir cisim değildir. Örneğin $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0+k\varepsilon = k\varepsilon \in \mathbb{R}(\varepsilon)$ biçimindeki elemanların çarpma işlemine göre tersi yoktur. Eğer

$$(0+k\varepsilon)\cdot(a+b\varepsilon) = 1+0\varepsilon$$

olacak şekilde bir $a+b\varepsilon \in \mathbb{R}(\varepsilon)$ var olsaydı

$$0+ka\varepsilon = 1+0\varepsilon$$

sonucuna ulaşılırdı ki $0=1$ çelişkine varılırdı. Bu yüzden $0+k\varepsilon \in \mathbb{R}(\varepsilon)$ biçimindeki elemanların çarpmaya göre tersinin var olması mümkün değildir.

2.2 Geometrik Kavramlar

Buraya kadar olan kısımda bu tezde cebir ile ilgili kullanılacak olan kavramlar tanıtılıp temel bilgiler verildi. Bu kısımda ise tezde kullanılacak olan geometri ile ilgili kavramlar tanıtılacak ve temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1 Elemanları noktalar olarak isimlendirilecek bir $\mathcal{N}$ kümesi ve elemanları doğrular olarak isimlendirilecek $\mathcal{N}$ ile ayrık bir $\mathcal{D}$ kümesiyle birlikte, $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri arasında tanımlı $\circ$ üzerinde olma bağıntısı yardımıyla belirlenen $U = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir *üzerinde olma yapısı* ya da *geometrik yapı* denir. (Kaya 2005)

$U = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısında $\mathcal{N} \cup \mathcal{D}$ kümesi sonlu ise U ya *sonlu geometrik yapı* denir. Bir $N \in \mathcal{N}$ noktası ve bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu için $N \circ d$ gösterimi, "*N noktası d doğrusu üzerindedir*" ya da "*d doğrusu N noktasından geçer*" diye okunur. M ve N noktalarından geçen doğru bir tek ise bu doğru $M \vee N$ ya da MN biçiminde gösterilir. Benzer olarak c ve d doğrularının arakesit noktası bir tek ise bu nokta $c \wedge d$ ya da cd biçiminde gösterilir. Genel olarak doğrular üzerindeki noktaların bir kümesi olarak düşünülür. Bu gözle bakıldığında c ve d doğruları için $c = d$ ya da $c \cap d = \phi$ ise c ve d doğrularına *paralel doğrular* denir. c ve d doğruları paralel ise bu $c \parallel d$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.2 Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısına bir *afin düzlem* denir.

A1) Her $M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$, noktaları için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak biçimde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A2) Her $N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ için $N \not\circ d$ olmak üzere $N \circ c$ ve $c \parallel d$ olacak biçimde bir tek $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır. (Kaya 2005)

Şimdi afin düzlemlerle cebirsel yapıların ilişkisini kuracak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilecektir. İspat için Kaya (2005) incelenebilir.

Teorem 2.2.3 Verilen her **F** cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirlenen bir afin düzlem vardır ve **F** cismi yardımıyla tanımlanan bu afin düzlem, genel olarak, $\mathbb{A}_2\mathbf{F}$ ile gösterilir.

$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ için noktalar kümesi

$$\mathcal{N} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{F}\}$$

doğrular kümesi

$$\mathcal{D} = \{[m,p] \mid m,p \in \mathbf{F}\} \cup \{[a] \mid a \in \mathbf{F}\}$$

biçiminde ve üzerinde olma bağıntısı

$$\begin{aligned} (x,y) \circ [m,p] &\Leftrightarrow y = mx + p \\ (x,y) \circ [a] &\Leftrightarrow x = a \end{aligned}$$

biçiminde tanımladır. Bu yöntemle yapılan nokta ve doğru gösterimine *kartezyen koordinatlama* adı verilir.

Özel olarak **F** cismi olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi alındığında elde edilen $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzlemine *reel afin düzlem* denir ki bu *Öklid düzlemi* ya da *analitik düzlem* olarak da bilinen düzlemdir. $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ de $[0,0]$ doğrusu *x-ekseni*, $[0]$ doğrusu *y-ekseni*, $(0,0)$ noktası *orjin* olarak isimlendirilir. Kısalık olması bakımından bir karışıklık olmayacaksa x-ekseni üzerindeki $A = (a,0)$ noktaları a ile, y-ekseni üzerindeki $B = (0,b)$ noktaları b ile gösterilir.

İlk olarak Öklid tarafından kurulan reel afin düzlemde (analitik düzlemde) günümüze kadar pek çok tanımlar yapılmış, teoremler ispat edilmiştir. Reel afin düzlem için verilen eğim, diklik, izdüşüm, üçgen, çokgen, dörtgen, paralel, vektör, açı, benzerlik,... gibi temel kavramların, bu tezde bilindiği kabul edilecektir. Bu kavramlardan paralellik ve diklik sadece Öklid düzleminde değil tüm afin düzlemlerde benzer biçimde tanımlanır.

Tanım 2.2.4 Aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısına bir *projektif düzlem* denir.

P1) Her $M, N \in \mathcal{N}, M \neq N$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak biçimde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

P2) Her $c, d \in \mathcal{D}$ için $N \circ c$ ve $N \circ d$ olacak biçimde en az bir $N \in \mathcal{N}$ arakesit noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Herhangi bir projektif düzlemde farklı iki doğrunun arakesit noktası tek türlü olarak bellidir. (Kaya 2005)

$\mathcal{B}$ bir bölümlü halka iken $\mathcal{B}$ yardımıyla tanımlanan

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{B}, (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\lambda, \lambda \in \mathcal{B}, \lambda \neq 0\}$$

$$\mathcal{D} = \{[a_1, a_2, a_3] \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{B}, [a_1, a_2, a_3] \neq [0, 0, 0], [a_1, a_2, a_3] = \mu[a_1, a_2, a_3], \mu \in \mathcal{B}, \mu \neq 0\}$$

kümeleri ve

$$(x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0$$

üzerinde olma bağıntısı için $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ yapısının bir projektif düzlem olduğu Kaya (2005) te verilen aşağıdaki teoremin ispatında, gösterilmiştir. $\mathcal{B}$ bölümlü halkasından elde edilen projektif düzlem kısaca $\mathbb{P}_2\mathcal{B}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.5 Verilen her $\mathcal{B}$ bölümlü halkası için nokta ve doğruları bu bölümlü halkanın elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir projektif düzlem vardır. (Kaya 2005)

Her cisim bir bölümlü halka olduğundan $\mathcal{B}$ bölümlü halkası yerine **F** cismi alındığında elde edilen geometrik yapı yine bir projektif düzlem olacaktır ve bir cisim yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere *cisim düzlemleri* denir.

$\mathcal{B}$ olarak reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ alındığında oluşan projektif düzleme *reel projektif düzlem* denir.

Doğru ve noktalara karşılık tutulan böyle üçlülere, ilgili doğru ya da noktanın *homojen koordinatı* denir.

Afin düzlemler ile projektif düzlemler arasında yakın ilişkiler mevcuttur. Örneğin bir afin düzlemin noktalar kümesine bazı noktalar ve doğrular kümesine yeni bir doğru eklenerek afin düzlem projektif düzleme dönüştürülebilir ve tersine bir projektif düzlemden bir doğru ve bu doğru üzerindeki tüm noktalar atılarak bir afin düzlem elde edilebilir. Aşağıda bu ilişkilere ait bilinmesinde fayda olan bazı bilgiler verilecektir.

$\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir afin düzlem olsun. Bu düzlemde, birbirine paralel olan tüm doğruların kümesine bir *paralel doğru demeti* denir. Düzlemdeki her bir paralel doğru demeti için bu demetin tüm doğruları üzerine $\mathcal{N}$ noktalar kümesinde olmayan ve *ideal nokta* adı verilen yeni ve diğer noktalardan farklı bir ortak nokta eklensin. Böylece düzlemdeki her bir paralel doğru demeti için $\mathcal{N}$ kümesine yeni bir nokta eklenmiş olur. Bu yeni ilâve edilen ideal noktalar ile birlikte elde edilen yeni noktalar kümesi

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{x \mid x \text{ bir ideal nokta}\}$$

ile gösterilir. $\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ afin düzlemine ideal noktalar eklenirken $\mathcal{A}$ afin düzleminin her d doğrusu üzerine de o doğrunun ideal noktası adı verilen bir nokta ilâve edilmiştir. d doğrusu ve d doğrusuna paralel olan tüm doğrular üzerine eklenen ideal nokta aynı olduğundan bu ideal nokta d doğrusunu göstermekte kullanılan d harfine karşılık gelen büyük harf olan D yardımıyla D_∞ biçiminde gösterilsin. İlâve edilen tüm ideal noktaların kümesi d_∞ ile gösterilsin ve *ideal doğru* olarak isimlendirsin. Böylece elde edilen yeni doğrular kümesi

$$\mathcal{D}' = \{d' = d \cup \{D_\infty\} \mid d \in \mathcal{D}\} \cup \{d_\infty\}$$

biçimindedir. İlave edilen ideal noktalar ve d_∞ ideal doğrusu için üzerinde olma bağıntısının ne anlama geldiği yukarıdaki açıklamalardan bellidir. Bu nedenle genişletilmiş yeni nokta ve doğru kümeleri olan $\mathcal{N}'$ ve $\mathcal{D}'$ kümeleri için üzerinde olma bağıntısı da bu farklılıkları göz önünde tutmak kaydıyla yine $\circ$ ile gösterilebilir.

Reel afin düzlemde $(x,y) \circ [m,p] \Leftrightarrow y = mx + p$ olmasından ve $y = mx + p$ doğrusunun eğiminin m olmasından esinlenerek afin düzlemde alınan bir $d = [m,p]$ doğrusunun eğimi m dir denir ve üzerine eklenen D_∞ ideal noktası olarak (m) simgesi kullanılır. Bu durumda d ye paralel tüm doğruların eğimleri de m olduğundan d doğrusunun paralel demetinde yer alan tüm doğruların ideal noktası (m) olarak gösterilir. Eğimi tanımlı olmayan, y-ekseni ve y-ekseni ile paralel olan $[a]$ tipinden tüm doğruların üzerindeki ideal nokta ise $V = (\infty)$ ile temsil edilir ki bu da reel afin düzlemdeki $x = a$ tipinden doğruların eğimlerinin sonsuz olmasından esinlenerek yapılan bir karşılık tutmadır.

Bu yöntemle elde edilen $\mathcal{A}' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ)$ geometrik yapısına $\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ *afin düzleminin tamamlanmışı* denir. Afin ve projektif düzlemlerle ilgili en önemli özellikleri belirten Kaya (2005) te iki farklı teorem olarak verilen ifadelerin birleştirilip tek bir teorem olarak verilmiş hâli aşağıdadır.

Teorem 2.2.6 Her afin düzlemin tamamlanmışı bir projektif düzlemdir ve tersine bir projektif düzlemden bir doğru, üzerindeki tüm noktalarla birlikte atıldığında geriye kalan yapı bir afin düzlemdir.

Sonuç 2.2.7 $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzleminin tamamlanmışı $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzlemidir.

Sonuç 2.2.7 ile verilen $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzleminin tamamlanmışı olan $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ projektif düzleminin noktaları ve doğruları $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ afin düzleminde kullanılan kartezyen koordinatlardan yola çıkılarak, tamamlanmış reel afin düzlem ile reel projektif düzlem arasında tanımlanan bir dönüşüm yardımıyla da koordinatlanabilir. Böylece kartezyen koordinatlar ile 1827 tarihli “Der Barycentrische Calcül” isimli çalışmasında August Ferdinand Möbius tarafından ilk defa verilen, projektif geometride koordinatlama yöntemi olarak kullanılan homojen koordinatlar ya da projektif koordinatlar adıyla bilinen koordinatlama arasında ilişki kurulmuş olur.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathbb{P}_2\mathbb{R} \\ (x,y) & \to & (x,y,1) \\ (m) & \to & (1,m,0) \\ (\infty) & \to & (0,1,0) \\ [m,p] & \to & [m,-1,p] \\ [a] & \to & [-1,0,a] \\ d_\infty & \to & [0,0,1] \end{array}$$

Daha detaylı bilgi için konunun öncülerinden Marshall Hall Jr. (1943) çalışması incelenebilir. Homojen koordinatlardan kartezyen koordinatlara yapılan benzer bir dönüşüm için Bayraktar (2012) çalışması incelenebilir.

Teorem 2.2.8 Her sonlu $\mathcal{P}$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir n pozitif tamsayısı vardır. (Bu tamsayıya $\mathcal{P}$ projektif düzleminin *mertebesi* denir.)

- $\mathcal{P}$ nin her doğrusu üzerinde $n+1$ nokta vardır.
- $\mathcal{P}$ nin her noktasından $n+1$ doğru geçer.
- $\mathcal{P}$ deki tüm noktaların sayısı n^2+n+1 dir.
- $\mathcal{P}$ deki tüm doğruların sayısı n^2+n+1 dir. (Kaya 2005)

Tanım 2.2.9 S bir projektif düzleme ait herhangi bir ifade olsun. S de “nokta” sözcüğü yerine “doğru” ve “doğru” sözcüğü yerine “nokta” sözcüğü koyarak ve ifade nokta ile doğrular için anlamlı olacak biçimde değiştirildiğinde bulunan yeni ifadeye S nin *dual ifadesi* denir ve bu S* biçiminde gösterilir. (Kaya 2005)

Teorem 2.2.10 Bir projektif düzlemde S ifadesi bir teoremse S nin duali olan S^* ifadesi de teoremdir. (Kaya 2005)

Tanım 2.2.11 $U = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ ve $U' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ herhangi iki geometrik yapı olsun.

$$f : \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \to \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$$

fonksiyonu

1) $f(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}'$,

2) $f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}'$,

3) $\forall(N, d)((N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}, N \circ d) \Rightarrow f(N) \circ' f(d))$

koşullarını sağlıyorsa f ye $U = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ dan $U' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ ye bir *geometrik yapı homomorfizmi* (ya da anlam karışıklığı oluşmayacaksa kısaca *homomorfizm*) denir. U dan U' ye örten bir homorfizme *geometrik yapı epimorfizmi* (ya da anlam karışıklığı oluşmayacaksa kısaca *epimorfizm*) denir. U ve U' geometrik yapıları arasında birebir ve örten olan bir f homomorfizmi varsa U ve U' ye *izomorf geometrik yapılar* ve f dönüşümüne de bu yapılar arasında bir *geometrik yapı izomorfizmi* (ya da anlam karışıklığı oluşmayacaksa kısaca *izomorfizm*) denir. Bir geometrik yapıyı kendisine dönüştüren izomorfizme o geometrik yapı için *kolinasyon* (ya da *otomorfizm*) denir. Bu tanımda yer alan üçüncü şarta *üzerinde olmayı koruma şartı* ya da *lineerlik şartı* da denir.

Geometrik yapı dönüşümleri ile ilgili bu tezde kullanılacak daha detaylı bilgiler diğer bölümlerde verilecektir fakat bu konu ile ilgili temel bilgiler için Dembowski (1968) in ilk bölümlerine bakılabilir. Aşağıdaki sonuçlar daha başka birçok geometrik yapılar için de geçerlidir fakat bu tezde genel olarak projektif düzlemlerle ilgilenileceğinden sonuç projektif düzlemler için verilecektir.

Sonuç 2.2.12 $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ ve $\mathcal{P}' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ projektif düzlemleri arasındaki bir f izomorfizmi için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir. (Kaya 2005)

1) $\forall M, N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}, M \neq N$ için

$$M \vee N = d \Rightarrow f(M) \vee f(N) = f(d)$$

2) $\forall N \in \mathcal{N}, c, d \in \mathcal{D}, c \neq d$ için

$$c \wedge d = N \Rightarrow f(c) \wedge f(d) = f(N)$$

3) $\forall N \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D}$ için

$$N \text{ ø } d \Rightarrow f(N) \text{ ø}' f(d)$$

Tanım 2.2.13 Bir $\mathcal{P}$ projektif düzlemindeki herhangi iki doğru c ve d, M ø c ve M ø d özelliğindeki herhangi bir nokta da M olsun. c doğrusu üzerindeki her X noktası için

$$\alpha(X) = MX \wedge d$$

olacak biçimde belirlenen α dönüşümüne, c doğrusunu d doğrusuna dönüştüren M *merkezli bir perspektiflik* denir. Bu perspektiflik

$$\alpha : c \overset{M}{\overline{\overline{\wedge}}} d$$

ya da

$$\alpha_M(c, d)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.2.14 *f*, bir $\mathcal{P}$ projektif düzleminin bir kolinasyonu olsun. $\mathcal{P}$ nin bir M noktasından geçen her d doğrusu için $f(d) = d$ ise M ye *f* nin *merkezi* denir. Benzer olarak $\mathcal{P}$ nin bir *e* doğrusu üzerindeki her *N* noktası için $f(N) = N$ ise *e* ye *f* nin *ekseni* denir. Eğer *f* nin bir *M* merkezi ve bir *e* ekseni varsa *f* ye $\mathcal{P}$ nin *(M, e)-merkezsel kolinasyo-*

nu ya da *(M, e)-perspektifliği* denir. Ayrıca eğer $M \circ e$ ise f ye *öteleme* (elation ya da translation), $M \not\circ e$ ise f ye *homoloji* adı verilir.

Tanım 2.2.15 $\mathcal{P}$ bir projektif düzlem, *M* ve *e* de bu düzlemin sırasıyla belli bir noktası ve belli bir doğrusu olsun. $\mathcal{P}$ de aşağıdaki özelliklerde verilen herhangi *X* ve *Y* nokta çifti için $f(X) = Y$ olacak biçimde bir *f*, *(M,e)*-merkezsel kolinasyonu varsa $\mathcal{P}$ projektif düzlemi *(M,e)-geçişkendir* denir.

1) $X \neq M$ ve $Y \neq M$,

2) $X \not\circ e$ ve $Y \not\circ e$,

3) M, X, Y doğrudaş.

Literatürde birbirine denk olan alternatif tanımlar bulunmakla birlikte Moufang düzlemi için bu tezde aşağıdaki tanım dikkate alınacaktır.

Tanım 2.2.16 $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde $M \circ e$ olmak üzere her $M \in \mathcal{N}$ noktası ve her $e \in \mathcal{D}$ doğrusu için $\mathcal{P}$ projektif düzlemi (M, e)-geçişken oluyor ise $\mathcal{P}$ projektif düzlemi bir *Moufang düzlemidir*.

Şimdi projektif düzlemlerin genişletilmişi olarak görülebilecek ve bu tezde üzerinde en çok durulacak özel geometrik yapının tanımı verilecektir.

Tanım 2.2.17 $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir geometrik yapı ve $\sim$ bağıntısı $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ geometrik yapısına bir *Projektif Klingenberg düzlemi (PK-düzlemi)* denir. Eğer M ve N noktaları $\sim$ bağıntısına göre aynı denklik sınıfında ise bu $M \sim N$ biçiminde aynı komşulukta değil iseler $M \nsim N$ biçiminde gösterilir. $M \sim N$ ise M ve N ye *komşu noktalar* ya da *aynı komşuluktaki noktalar*, $M \nsim N$ ise M ve N ye *komşu olmayan noktalar* ya da *farklı komşuluktaki noktalar* denir. Benzer gösterimler ve isimlendirmeler doğrular için de kullanılır.

PK1) Farklı komşuluktaki herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

PK2) Farklı komşuluktaki herhangi iki doğrunun bir tek arakesit noktası vardır.

PK3) $\mathbf{\Pi}$ nin $\sim$ ya göre kanonik görüntüsü olan $\mathcal{P} = (\mathcal{N}',\ \mathcal{D}',\ \circ')$ geometrik yapısı projektif düzlem olacak biçimde $\mathbf{\Pi}$ den $\mathcal{P}$ ye tanımlı her $M, N \in \mathcal{N}$ ve her $c, d \in \mathcal{D}$ için,

$$M \sim N \Leftrightarrow \varphi(M) = \varphi(N)$$

ve

$$c \sim d \Leftrightarrow \varphi(c) = \varphi(d)$$

şartlarını sağlayan bir $\varphi : \mathbf{\Pi} \longrightarrow \mathcal{P}$ geometrik yapı epimorfizmi vardır.

Tanım 2.2.17 de yer alan φ fonksiyonuna " $\mathbf{\Pi}$ *ve* $\mathcal{P}$ *arasındaki yapı dönüşümü* " ya da bir karışıklık olmayacaksa kısaca " *yapı dönüşümü* " denir. Kanonik fonksiyonlar her bir elemanı denklik sınıfına eşlediklerinden φ nin örten olduğu aşikârdır.

Tanım 2.2.18 Tanım 2.2.17 de yer alan $\sim$ bağıntısının $\mathcal{N}$ ye kısıtlanmışına *noktalar için komşuluk bağıntısı* , $\mathcal{D}$ ye kısıtlanmışına *doğrular için komşuluk bağıntısı* adı verilir. Bu nedenle $\sim$ bağıntısına kısaca *komşuluk bağıntısı* denir. Bu sebeple bir noktanın (ya da doğrunun) $\sim$ bağıntısına göre denklik sınıfına o noktanın (ya da doğrunun) *komşuluğu* denir.

Tanım 2.2.17 içindeki gösterimler göz önüne alındığında **PK1)** ve **PK2)** şartlarının aşağıdaki gibi düzenlenebileceği görülür.

PK1) Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \nsim N$ noktaları için bir tek $M \vee N$ doğrusu vardır.

PK2) Her $c, d \in \mathcal{D}$, $c \nsim d$ doğruları için bir tek $c \wedge d$ arakesit noktası vardır.

PK-düzlemlerle ile ilgili gerekli bazı temel bilgiler aşağıda özet olarak verilecektir.

Sonuç 2.2.19 $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminde φ yapı dönüşümü örten olduğundan; herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktasının yapı dönüşümü altındaki görüntüsü, herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusunun yapı dönüşümü altındaki görüntüsünün üzerinde ise N noktasının komşuluğundaki en azından bir nokta, d doğrusunun komşuluğundaki en azından bir doğru üzerindedir. Yani

$$\varphi(N) \circ' \varphi(d) \Leftrightarrow (\exists N_i)[N_i \in [N] \wedge ((\exists d_j)(d_j \in [d] \wedge N_i \circ d_j))]$$

önermesi doğrudur. Burada "[ ]" ile komşuluk bağıntısına göre denklik sınıfları gösterilmiştir.

Bu sonuç $\mathbf{\Pi}$ nin $\sim$ altında kanonik görüntüsü olan $\mathcal{P} = (\mathcal{N}',\ \mathcal{D}',\ \circ')$ projektif düzlemi ile ilgili

$$\varphi(N) \circ' \varphi(d) \Leftrightarrow \varphi([N]) \circ' \varphi([d])$$

olacağını gösterir.

Tanım 2.2.20 Bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminde herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktası ve herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu için

$$(\exists N_i)[N_i \in [N] \wedge ((\exists d_j)(d_j \in [d] \wedge N_i \circ d_j))]$$

koşulu sağlanıyorsa N noktası d doğrusuna *yakındır* denir ve bu durum

$$N \sim d$$

olarak gösterilir. (Bacon 1979)

Teorem 2.2.21 Bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminde herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktası ve herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu için

$$N \sim d \Leftrightarrow \varphi(N) \circ' \varphi(d)$$

olur.

Bu bilgiler Sonuç 2.2.19 ile birleştirildiğinde, bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminde herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktası ve herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu için, N noktasının d doğrusuna yakın olması N noktasının komşuluğundaki en az bir noktanın, d doğrusunun komşuluğundaki en az bir doğrunun üzerinde olması demektir.

Teorem 2.2.22 Bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminde herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktası ve herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu için

$$(N \sim M \wedge N \sim d) \Leftrightarrow M \sim d$$

olur.

Tanım 2.2.23 $n \geq 3$ olmak üzere bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudaş olmayan n farklı noktaya *n-gen* denir.

Tanım 2.2.24 $n \geq 3$ olmak üzere bir PK-düzlemde herhangi ikisi aynı komşulukta olmayan n farklı noktadan herhangi biri diğer nokta ikililerinden geçen doğrulardan hiçbirine yakın olmuyorsa bu n noktanın oluşturduğu kümeye *n-gen* adı verilir.

Özel olarak $n = 3$ için $3 - gen$ yerine *üçgen*, $n = 4$ için $4 - gen$ yerine *dörtgen*...
isimlendirilmesi de kullanılır.
Yukarıda verilen Tanım 2.2.24 matematik simgeleriyle aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.
Bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ PK-düzleminde $\mathbf{A} = \{N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n\} \subseteq \mathcal{N}$ kümesi verilsin. $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ olmak üzere

1) $(\forall i, j)(i \neq j, i, j \in I \Rightarrow N_i \nsim N_j)$

2) $(\forall i,j,k)(i \neq j \neq k \neq i, i,j,k \in I \Rightarrow N_i \nsim N_j N_k)$

şartları sağlanıyorsa **A** kümesine **Π** PK-düzlemi için bir *n-gen* denir.

Teorem 2.2.25 $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ bir PK-düzlem ve **PK3)** şartında yer alan yapı dönüşümü $\varphi : \mathbf{\Pi} \longrightarrow \mathcal{P}$ olsun. Bu durumda **Π** de verilen bir n-genin φ altındaki görüntüsü de $\mathcal{P}$ de bir n-gendir.

İspat. **Π**, PK-düzleminde verilen bir n-gen $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ olsun.
$\forall\, i,j \in \{1,2,...,n\}$ ve $i \neq j$ olmak üzere, PK3 şartından

$$P_i \nsim P_j \Rightarrow \varphi(P_i) \neq \varphi(P_j)$$

olduğu bulunur. Bu nedenle $\{\varphi(P_1), \varphi(P_2), ..., \varphi(P_n)\}$ kümesi n farklı noktadan oluşur. Üstelik, $\forall\, i,j,k \in \{1,2,...,n\}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$ olmak üzere P_i, P_j, P_k noktaları için, PK-düzlemde verilen n-gen tanımı gereği

$$P_k \ \nsim\ P_i P_j$$

olduğu görülür. Teorem 2.2.21 gereği

$$\varphi(P_k)\ \text{ø}'\ \varphi(P_i P_j)$$

ve φ geometrik yapı epimorfizmi lineer olduğundan[1] (Tanım 2.2.11)

$$\varphi(P_k)\ \text{ø}'\ \varphi(P_i)\varphi(P_j)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $\varphi(P_i), \varphi(P_j), \varphi(P_k)$ noktalarının doğrudaş olmadığını gösterir.

[1] $\mathcal{P}$ projektif düzlemindeki iki nokta A ve B olmak üzere $A \circ AB \Rightarrow \varphi(A) \circ' \varphi(AB)$ ve benzer biçimde $B \circ AB \Rightarrow \varphi(B) \circ' \varphi(AB)$ olur. $\mathcal{P}$ bir projektif düzlem olduğundan $\varphi(A) \vee \varphi(B) = \varphi(A)\varphi(B) = \varphi(AB)$ bulunur.

Bu sonuçla birlikte $\{\varphi(P_1), \varphi(P_2), ..., \varphi(P_n)\}$ kümesindeki n farklı noktadan hangi üçü alınırsa alınsın aynı doğru üzerinde olmadığı yani bu kümenin $\mathcal{P}$ de bir n-gen olduğu görülür. ■

Sıradan bir geometrik yapıda komşuluk bağıntısı yer almadığından PK-düzlemler için kolinasyon tanımı Tanım 2.2.11 ten farklı olarak komşuluk bağıntısı ile ilgili küçük bir ilâve şartla aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.2.26 Herhangi bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzleminden kendisine tanımlı birebir, örten, üzerinde olmayı ve komşuluk bağıntısını koruyan bir dönüşüme $\mathbf{\Pi}$ nin bir *kolinasyonu* denir.

Tanım 2.2.27 Bir $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ PK-düzleminin yapı dönüşümü altındaki görüntüsü olan $\mathcal{P}$ projektif düzlemi bir Moufang düzlemiyse $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ PK-düzlemine bir *Moufang Projektif Klingenberg düzlemi* ya da kısaca *Moufang Klingenberg düzlemi* (*MK-düzlemi*) denir.

Sonuç 2.2.28 Her Moufang Klingenberg düzlemi aynı zamanda bir Projektif Klingenberg düzlemidir.

3. PK-DÜZLEM KOORDİNATLAMASI ve $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$

Tanımı gereği PK-düzlemleri projektif düzlemlerin noktalarına ve doğrularına komşuluk sınıfı adı verilen birer denklik sınıfı karşılık tutulmuş projektif düzlemler olarak düşünmek mümkündür. Bu nedenle PK-düzlemler projektif düzlemlerden daha geneldir. Projektif düzlemlerin günümüzde kullanılan koordinatlaması ile ilgili temel çalışmalar Marshall Hall Jr. (1943) tarafından yapılmış ve daha sonra Hughes ve Pipper (1973) bazı değişiklikler ile bu koordinatlama yönteminin benzerini tanıtmıştır. Özel olarak noktalarına ve doğrularına karşılık tutulan denklik sınıfları bir tek elemanlı olduğunda PK-düzlem projektif düzlem olur. Bu genelleme nedeniyle PK-düzlemlerin koordinatlanması çalışmalarında projektif düzlemleri koordinatlama yöntemlerinden esinlenilmiştir.

Verilen bir geometrik yapıdan cebirsel bir yapı elde edilmesi ve tersine verilen cebirsel bir yapı yardımıyla bir geometrik yapı bulma çalışmaları matematiğin geometri ve cebir alanlarını birleştiren cebirsel geometrinin temel çalışma konularından birisidir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi için Hall (1943), Stevenson (1972), Hughes ve Pipper (1973), Bacon (1979), Dugas (1979), Keppens (1988), Baker ve ark. (1991) ile Akpınar (2007) çalışmaları incelenebilir.

Bu bölümde bir dual lokal halka ile bir projektif Klingenberg düzlemin nasıl koordinatlanacağı ile ilgili gerekli temel bilgiler literatürden derlenecektir. Bu nedenle ilk olarak PK-düzlemi koordinatlamada kullanılacak $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halka sınıfı tanıtılacaktır.

3.1 $\mathcal{B}(\varepsilon)$ Dual Lokal Halka Sınıfı

Bu kısımda Teorem 2.1.23 ile verilen $\mathbb{R}(\varepsilon)$ dual halkasını oluşturma yönteminden esinlenilerek keyfî bir $\mathcal{B}$ bir bölümlü halkasından $\mathcal{B}(\varepsilon)$ ile gösterilen bir dual lokal halka elde etme yöntemi tanıtılacaktır.

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \mathcal{B} + \mathcal{B}\varepsilon = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathcal{B}\}$$

kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} (a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) &= (a + c) + (b + d)\varepsilon, \\ (a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) &= ac + (ad + bc)\varepsilon \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Farkı daima göz önünde bulundurarak $\mathcal{B}(\varepsilon)$ üzerindeki toplama işlemi ile $\mathcal{B}$ üzerindeki toplama işlemini aynı sembolle göstermekte bir mahsur bulunmamaktadır. Fakat bir karışıklık olması ihtimalinde $\mathcal{B}(\varepsilon)$ üzerindeki çarpma işlemi araya $\cdot$ konarak $\mathcal{B}$ üzerindeki çarpma işlemi ise yanyana yazma yöntemiyle gösterilecektir.

İlk bölümde reel dual sayılarda gösterilen $\varepsilon^2 = 0$ eşitliği benzer biçimde $\mathcal{B}(\varepsilon)$ üzerinde tanımlanan çarpma işlemi için de sağlanmaktadır.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \cdot \varepsilon = (0 + 1\varepsilon) \cdot (0 + 1\varepsilon) = (00) + (01 + 10)\varepsilon = 0 + 0\varepsilon = 0$$

Bu bilgiyle birlikte $\mathcal{B}(\varepsilon)$ üzerindeki çarpma işlemi, $\mathcal{B}$ üzerindeki çarpma işleminde dağılma kurallarının uygulanması gibi de düşünülebilir.

$\mathcal{B}$ bölümlü halkası değiştikçe $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası da değişeceğinden $\mathcal{B}(\varepsilon)$ halkalarına bir dual lokal halka sınıfı olarak bakılabilir.

Aşağıdaki teoremde bu işlemlerle birlikte $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesinin bir özdeşlikli halka olduğu, ayrıntılı işlemlerle gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1 $(\mathcal{B}(\varepsilon), +, \cdot)$ cebirsel yapısı özdeşlikli bir halkadır.

İspat. İlk önce $(\mathcal{B}(\varepsilon), +)$ yapısının bir abel grubu olduğu gösterilecektir.

i) $(\forall\, a + b\varepsilon, c + d\varepsilon, e + f\varepsilon)[a + b\varepsilon, c + d\varepsilon, e + f\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow (a + b\varepsilon) + ((c + d\varepsilon) + (e + f\varepsilon)) \\
&= (a + b\varepsilon) + ((c + e) + (d + f)\varepsilon) \\
&= (a + (c + e)) + (b + (d + f))\varepsilon && ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı} \\
&= ((a + c) + e) + ((b + d) + f))\varepsilon && ;+, \mathcal{B} \text{ üzerinde birleşmeli} \\
&= ((a + c) + (b + d)\varepsilon) + (e + f\varepsilon) && ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı} \\
&= ((a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon)) + (e + f\varepsilon) && ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı}]
\end{aligned}
$$

olduğundan $(\mathcal{B}(\varepsilon), +)$ birleşmelidir.

ii) $\mathcal{B}$ nin etkisiz elemanı 0 olmak üzere $0 + 0\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olduğu aşikârdır.

$$
\begin{aligned}
\forall\, (a + b\varepsilon)[a + b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon) \;\; &\Rightarrow \;\; (a + b\varepsilon) + (0 + 0\varepsilon) \\
&= \;\; (a + 0) + (b + 0)\varepsilon \quad ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı} \\
&= \;\; a + b\varepsilon \qquad\qquad\qquad ;0, \mathcal{B} \text{ de } + \text{ nın etkisiz elemanı}]
\end{aligned}
$$

olur. Benzer işlemlerle

$$(0 + 0\varepsilon) + (a + b\varepsilon) = a + b\varepsilon$$

olduğu görülür. Bu nedenle etkisiz eleman $0 = 0 + 0\varepsilon$ olarak tespit edilir.

iii) $(\forall\, x)(x \in \mathcal{B} \Rightarrow -x \in \mathcal{B})$ olmak üzere $a + b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon) \Rightarrow -a - b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olduğu aşikârdır.

$$\begin{aligned}(\forall\, a+b\varepsilon)[a+b\varepsilon\in\mathcal{B}(\varepsilon) \;\Rightarrow\;& (a+b\varepsilon)+(-a-b\varepsilon)\\ =\;& (a-a)+(b-b)\varepsilon \qquad ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı}\\ =\;& 0]\end{aligned}$$

olur. Benzer işlemlerle

$$(-a-b\varepsilon)+(a+b\varepsilon)=(-a+a)+(-b+b)\varepsilon=0$$

olduğu ve bu nedenle $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesindeki her elemanın $+$ işlemine göre tersinin var olduğu görülür.

iv) $(\forall\, a+b\varepsilon, c+d\varepsilon)[a+b\varepsilon, c+d\varepsilon\in\mathcal{B}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon) &= (a+c)+(b+d)\varepsilon && ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı}\\ &= (c+a)+(d+b)\varepsilon && ;+, \mathcal{B} \text{ üzerinde değişmeli}\\ &= (c+d\varepsilon)+(a+b\varepsilon) && ;\mathcal{B}(\varepsilon) \text{ da } + \text{ tanımı}]\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesi üzerinde $+$ işleminin değişme özelliğini sağladığı sonucuna ulaşılır.

Böylelikle $(\mathcal{B}(\varepsilon),+)$ cebirsel yapısının abel grubu olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesi üzerinde $\cdot$ işleminin birleşme ve dağılma özelliklerini sağladığı gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, a+b\varepsilon, c+d\varepsilon, e+f\varepsilon)[a+b\varepsilon, c+d\varepsilon, e+f\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)\\
&\Rightarrow (a+b\varepsilon)\cdot((c+d\varepsilon)\cdot(e+f\varepsilon)) = (a+b\varepsilon)\cdot(ce+(cf+de)\varepsilon)\\
&\qquad = (a(ce))+(a(cf+de)+b(ce))\varepsilon\\
&\qquad = (a(ce))+((a(cf)+a(de))+b(ce))\varepsilon\\
&\qquad = ((ac)e)+((ac)f+(ad)e+(bc)e)\varepsilon\\
&\qquad = ((ac)e)+(((ad+bc)e)+(ac)f)\varepsilon\\
&\qquad = ((ac)+(ad+bc)\varepsilon)\cdot(e+f\varepsilon)\\
&\qquad = ((a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon))\cdot(e+f\varepsilon)]
\end{aligned}
$$

olduğundan $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesi üzerinde $\cdot$ işleminin birleşme özelliğini sağladığı görülür.

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, a+b\varepsilon, c+d\varepsilon, e+f\varepsilon)[a+b\varepsilon, c+d\varepsilon, e+f\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)\\
&\Rightarrow (a+b\varepsilon)\cdot((c+d\varepsilon)+(e+f\varepsilon)) = (a+b\varepsilon)\cdot((c+e)+(d+f)\varepsilon)\\
&\qquad = a(c+e)+(a(d+f)+b(c+e))\varepsilon\\
&\qquad = (ac+ae)+(ad+af+bc+be)\varepsilon\\
&\qquad = (ac+(ad+bc)\varepsilon)+(ae+(af+be)\varepsilon)\\
&\qquad = ((a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon))+((a+b\varepsilon)\cdot(e+f\varepsilon))]
\end{aligned}
$$

olur ve benzer işlemlerle

$$((a+b\varepsilon)+(c+d\varepsilon))\cdot(e+f\varepsilon) = ((a+b\varepsilon)\cdot(e+f\varepsilon))+((c+d\varepsilon)\cdot(e+f\varepsilon))$$

olduğu görülür. Bu nedenle $\mathcal{B}(\varepsilon)$ kümesi üzerinde $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma kuralları geçerlidir.

$\mathcal{B}$ nin özdeşlik elemanı 1 olmak üzere $1+0\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olduğu aşikârdır. Üstelik

$$\begin{aligned}
&(\forall\, a+b\varepsilon)[a+b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon) \Rightarrow (a+b\varepsilon)\cdot(1+0\varepsilon)\\
&= a1 + (a0+b1)\varepsilon\\
&= a+b\varepsilon]
\end{aligned}$$

olur ve benzer işlemlerle

$$\begin{aligned}
&(\forall\, a+b\varepsilon)[a+b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon) \Rightarrow (1+0\varepsilon)\cdot(a+b\varepsilon)\\
&= 1a + (1b+0a)\varepsilon\\
&= a+b\varepsilon]
\end{aligned}$$

olduğundan $1+0\varepsilon$, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ un özdeşlik elemanıdır ve $1+0\varepsilon$ kısaca 1 ile gösterilir. ■

Teorem 3.1.2 $\mathcal{B}(\varepsilon)$ özdeşlikli halkasında tersi olmayan elemanlar $b \in \mathcal{B}$ için $b\varepsilon$ formundadır. $a \neq 0$ ise $a+b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ birim elemandır yani tersi vardır ve

$$(a+b\varepsilon)^{-1} = a^{-1} - (a^{-1}ba^{-1})\varepsilon$$

olur.

İspat. Verilen keyfî bir $a+b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ elemanı için,

$$\begin{aligned}
(a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon) &= 1\\
\Rightarrow ac + (ad+bc)\varepsilon &= 1
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}
ac &= 1\\
ad+bc &= 0
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

olduğu görülür. $a = 0$ iken $ac = 1$ eşitliği $0 = 1$ olmasını gerektirdiğinden bu durumda (3.1.1) denklem sisteminin bir çözümünün olmayacağı bellidir. Bu ise $b\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ türündeki elemanların tersinin olmadığını gösterir.

$\mathcal{B}$ bölümlü halka olduğundan $a \neq 0$ iken $a^{-1} \in \mathcal{B}$ olur. Bu durumda

$$ac = 1 \Rightarrow c = a^{-1}$$

olacağından (3.1.1) denklem sisteminden

$$ad + ba^{-1} = 0 \Rightarrow d = -a^{-1}ba^{-1}$$

olduğu görülür. Benzer işlemler $(c + d\varepsilon) \cdot (a + b\varepsilon) = 1$ için yapıldığında da yine $c = a^{-1}$ ve $d = -a^{-1}ba^{-1}$ olduğu görülür. Bu nedenle $a \neq 0$ iken

$$(a + b\varepsilon)^{-1} = a^{-1} - (a^{-1}ba^{-1})\varepsilon$$

eşitliği geçerlidir. ■

Teorem 3.1.3 $\mathcal{B}(\varepsilon)$ özdeşlikli halkasında tersi olmayan elemanların oluşturduğu

$$\mathbf{I} = \mathcal{B}\varepsilon = \{b\varepsilon \mid b \in \mathcal{B}\}$$

kümesi bir ideal olur.

İspat. $b = 0 \in \mathcal{B}$ için $0\varepsilon = 0 \in \mathbf{I}$ olduğu aşikârdır. Ayrıca $b\varepsilon, c\varepsilon \in \mathbf{I}$ için $b, c \in \mathcal{B}$ olup

$$b–c \in \mathcal{B}$$

olduğundan

$$b\varepsilon - c\varepsilon = (b–c)\varepsilon \in \mathbf{I}$$

olur. Üstelik

$$\begin{aligned} (b\varepsilon)\cdot(c\varepsilon) &= (0+b\varepsilon)\cdot(0+c\varepsilon) \\ &= 0+(0c+b0)\varepsilon \\ &= 0\in \mathbf{I} \end{aligned}$$

olduğundan **I**, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ un bir alt halkasıdır.

Her $x+y\varepsilon\in\mathcal{B}(\varepsilon)$ ve $a\varepsilon\in\mathbf{I}$ için

$$\begin{aligned} (x+y\varepsilon)\cdot(a\varepsilon) &= (x+y\varepsilon)\cdot(0+a\varepsilon) \\ &= x0+(xa+y0)\varepsilon \\ &= (xa)\varepsilon\in\mathbf{I} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (a\varepsilon)\cdot(x+y\varepsilon) &= (0+a\varepsilon)\cdot(x+y\varepsilon) \\ &= 0x+(0y+ax)\varepsilon \\ &= (ax)\varepsilon\in\mathbf{I} \end{aligned}$$

olduğundan **I**, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ un bir idealidir. ■

$(\mathcal{B}(\varepsilon),+,\cdot)$ özdeşlikli halkasında tersi olmayan elemanların oluşturduğu kümenin bir ideal olduğu gösterildiği için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 3.1.4 $(\mathcal{B}(\varepsilon),+,\cdot)$ bir lokal halkadır.

Tanım 3.1.5 $(\mathcal{B}(\varepsilon),+,\cdot)$ lokal halkasına $\mathcal{B}$ *bölümlü halkası üzerindeki dual lokal halka* denir ve bu dual lokal halka kısaca $\mathcal{B}(\varepsilon)$ ile gösterilir.

$\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasının tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu ideal bu tezde **I** ile gösterilecektir.

$\mathcal{B}$ bölümlü halkasında $1 \in \mathcal{B}$ elemanının tersi kendisi olup $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasında

$$1^{-1} = (1 + 0\varepsilon)^{-1} = 1$$

olduğu kolayca görülür.

Aşağıda, $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası ile koordinatlanacak olan PK-düzlemlerde, noktaların ve doğruların üzerinde olma bağıntısına göre incelenmesi sırasında karşılaşılan bazı cebirsel sonuçlar verilmiştir.

Sonuç 3.1.6 Her $q, n \in \mathbf{I} = \mathcal{B}\varepsilon$ için $qn = 0$ dır.

Sonuç 3.1.7 $z \in \mathbf{I}$ ve $w - z \in \mathbf{I}$ ise $w \in \mathbf{I}$ olur.

Aşağıdaki teoremde daha sonra PK-düzlemlerde bir komşuluk bağıntısı belirlemeye imkân verecek bir denklik bağıntısı verilmektedir.

Teorem 3.1.8 **I** kümesi bir $\mathcal{B}(\varepsilon)$ halkasının tersi olmayan elemanların oluşturduğu ideal olmak üzere

$$(\mathcal{B}(\varepsilon))^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{B}(\varepsilon)\}$$

kümesi üzerinde, $\mathbf{J} = \{1, 2, 3\}$ için

$$(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow (\forall i)(i \in \mathbf{J} \Rightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I})$$

biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı $(\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat. $\sim$ nın $(\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ üzerinde bir bağıntı olduğu aşikârdır. **D1)** yansıma, **D2)** simetri ve **D3)** geçişme özelliklerinin sağlandığı aşağıda gösterilmiştir.

D1) Her $A = (a_1, a_2, a_3) \in (\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ için

$$(\forall i \in \mathbf{J})(a_i - a_i = 0)$$

olduğundan

$$(a_1, a_2, a_3) \sim (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow A \sim A$$

bulunur.

D2) Her $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3) \in (\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ için

$$\begin{aligned} A \sim B &\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3) \\ &\Rightarrow (\forall i \in \mathbf{J})(a_i - b_i \in \mathbf{I}) \\ &\Rightarrow (\forall i \in \mathbf{J})(b_i - a_i \in \mathbf{I}) \\ &\Rightarrow (b_1, b_2, b_3) \sim (a_1, a_2, a_3) \\ &\Rightarrow B \sim A \end{aligned}$$

olur.

D3) Keyfî $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3), C = (c_1, c_2, c_3) \in (\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ olmak üzere $A \sim B$ ve $B \sim C$ ise ($\forall i \in \mathbf{J}$) için $a_i - b_i \in \mathbf{I}$ ve $b_i - c_i \in \mathbf{I}$ olup bu durumda

$$(a_i - b_i) + (b_i - c_i) = a_i - c_i \in \mathbf{I}$$

olduğundan $A \sim C$ dir. ■

3.2 Bir PK-Düzlemin Koordinatlanması

Bu kısımda bir PK-düzleminde seçilen bir dörtgen yardımıyla bu PK-düzlemin noktalarına ve doğrularına verilecek koordinatların nasıl belirleneceği hususunda bilgi verilecektir.

$\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ bir PK-düzlem ve $\{O, E, U, V\}$ bu PK-düzlemde bir dörtgen olsun. Bu PK-düzlemde

$$\begin{aligned} d_\infty &:= UV, \\ d &:= OE \\ W &:= d \wedge d_\infty, \\ \mathbf{I} &:= \{N \in \mathcal{N} \mid (N \circ d) \wedge (N \sim O)\}, \\ \mathbf{R} &:= \{N \in \mathcal{N} \mid (N \circ d) \wedge (N \nsim W)\} \end{aligned}$$

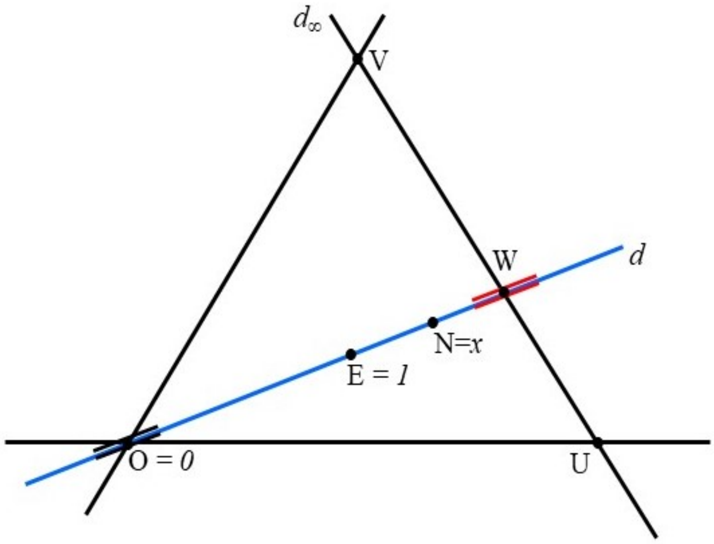
olarak isimlendirilsin. **R** kümesinin elemanları olan noktaların yeniden isimlendirilmesi suretiyle elde edilen

$$\mathbf{R} = \{0, 1, a, b, c, \ldots\}$$

kümesi göz önüne alınsın. Bu **R** kümesi yardımıyla verilen $\mathbf{\Pi}$ PK-düzleminin tüm noktaları ve doğruları koordinatlanabilir (Baker ve ark. 1991). **R** kümesinin elemanları olan O ve E noktalarına yeniden isimlendirme sırasında özel olarak sırasıyla 0 ve 1 in karşılık tutulması genellemeyi bozmaz ve bu nedenle $O := 0$ ve $E := 1$ olarak alınır.

Aşağıda verilecek yöntemle bir noktaya karşılık tutulan parantez içindeki sıralı üçlüye o noktanın *koordinatı* denir. (Daha sonra doğrulara da köşeli parantezler içinde üçlüler karşılık tutulacaktır ve bu üçlülere de ilgili doğrunun *koordinatı* adı verilecektir.)

PK-düzlemde alınan $\{O, E, U, V\}$ dörtgeni değiştikçe nokta ve doğrulara karşılık tutulan koordinatlar da değişecektir. Bu nedenle koordinatlama için seçilen $\{O, E, U, V\}$ dötgenine **Π** *PK-düzlemi için koordinatlama dörtgeni* denir.



Şekil 3.1. Koordinatlama Dörtgeni ve OE Doğrusu Üzerindeki Elemanlar

3.2.1 Noktaların Koordinatlanması

PK-düzlemin noktalarına $x, y \in \mathbf{R}$ ve $w, z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $(x, y, 1), (1, y, z), (w, 1, z)$ biçiminde sıralı üçlüler koordinat olarak karşılık tutulacaktır. Bu koordinatlamalarda 1 elemanının bulunduğu yer yardımıyla, ilgili koordinatın karşılık geldiği noktaya bir tip karşılık tutulur. $1 \in \mathbf{R}$ elemanı 3. bileşende ise bu noktaya *3. tip nokta*, 1. bileşende ise *1. tip nokta* ve son olarak 2. bileşende ise *2. tip nokta* adı verilir. Birden çok bileşende 1 varsa ilk önce 3. bileşende 1 olup olmadığına bakılır. Yoksa 1. bileşende 1 olup olmadığına bakılır ve buna göre karar verilir. Örneğin $(1, 1, 1)$ noktası 3. tip, $(1, 1, 0)$ noktası 1. tip bir noktadır.

N bu PK-düzlemde herhangi bir nokta olmak üzere:

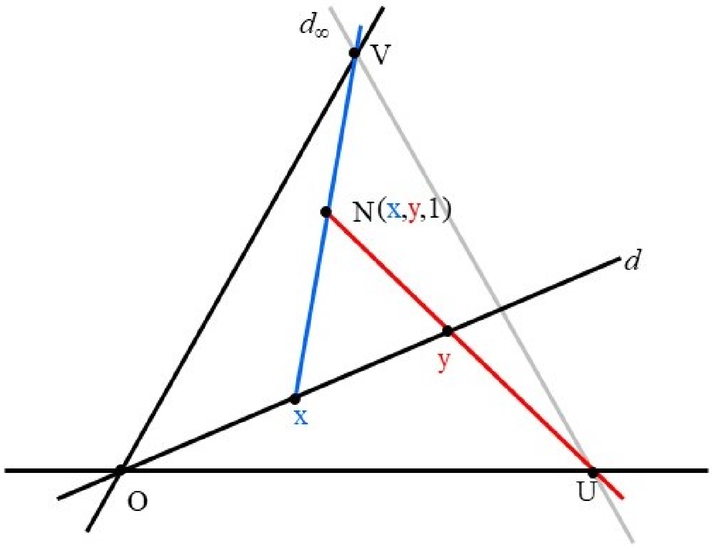
i) $N \nsim d_\infty$ ise

$$(NV) \wedge d = x$$

ve

$$(NU) \wedge d = y$$

olacak biçimdeki x, y elemanları yardımıyla N noktasına $(x, y, 1)$ koordinatı karşılık tutulur. Bu karşılık tutulma Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2. 3. Tip Noktaların Koordinatlanması

Özel olarak O noktasının koordinatı

$$OV \wedge d = O = 0$$

ve

$$OU \wedge d = O = 0$$

olduğundan

$$O = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. Benzer biçimde E noktasının koordinatı

$$EV \wedge d = E = 1$$

ve

$$EU \wedge d = E = 1$$

olduğundan

$$E = (1, 1, 1)$$

olarak bulunur. Böylece d üzerindeki W noktasına komşu olmayan tüm noktalar 3. tiptendir ve bu noktaya bir $k \in \mathbf{R}$ elemanı yardımıyla $(k, k, 1)$ koordinatı karşılık tutulmuş olur.

ii) $N \sim d_\infty$ ve $N \nsim V$ ise

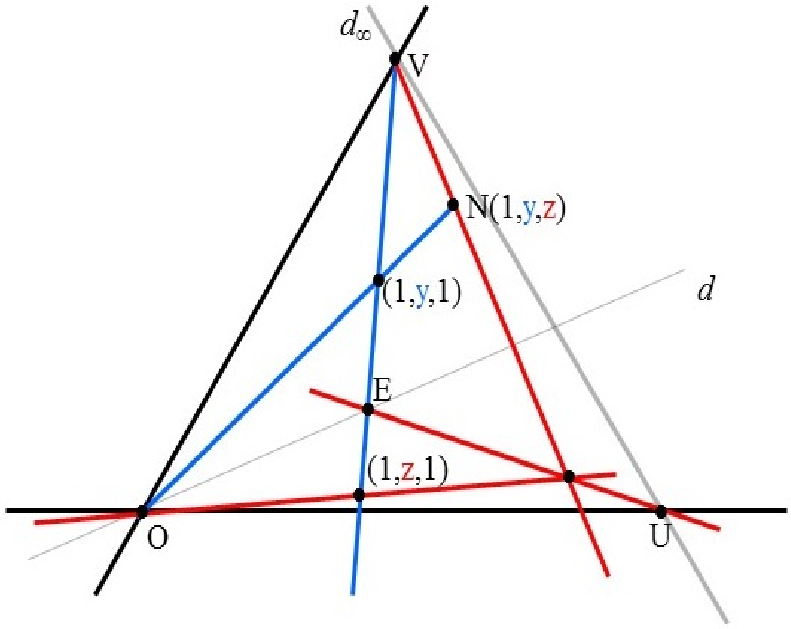
$$ON \wedge EV = (1, y, 1)$$

ve

$$((NV \wedge UE) \vee O) \wedge EV = (1, z, 1)$$

olacak biçimdeki y ve z elemanları yardımıyla N noktasına $(1, y, z)$ koordinatı karşılık tutulur. Bu karşılık tutulma Şekil 3.3 de verilmiştir.

$W \circ d$ ve $W \circ d_\infty$ olduğundan W noktası ve W nun komşuluğundaki noktalar da bu karşılık tutulma ile koordinatlanmış olup artık d üzerindeki tüm noktaların koordinatları belirlenmiş olur. W noktasının koordinatının, gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra, $(1, 1, 0)$ olduğu ve W nun komşuğundaki d nin noktalarının koordinatlarının ise $z \in \mathbf{I}$ olmak üzere $(1, 1, z)$ biçiminde olacağı görülür.



Şekil 3.3. 1. Tip Noktaların Koordinatlanması

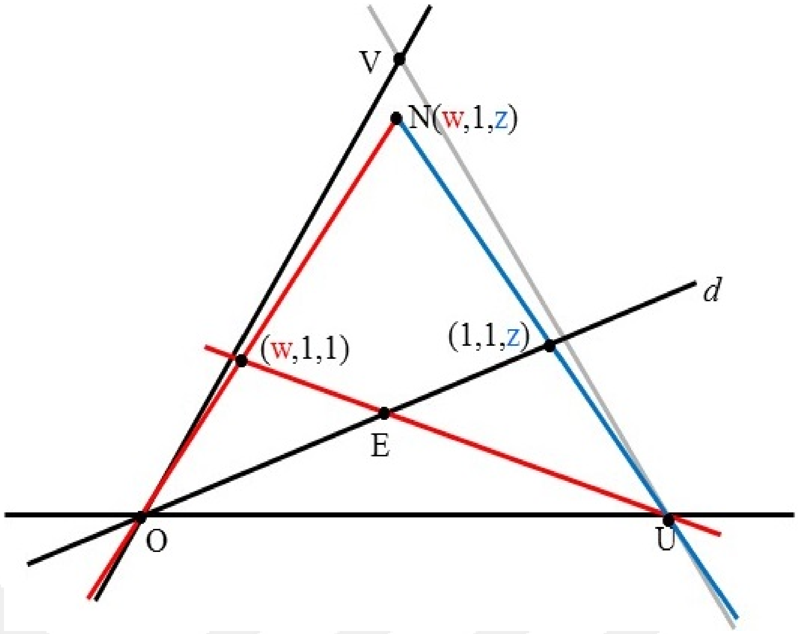
iii) $N \sim V$ ise

$$ON \wedge EU = (w, 1, 1)$$

ve

$$NU \wedge d = (1, 1, z)$$

olacak biçimdeki w, z elemanları yardımıyla N noktasına $(w, 1, z)$ koordinatı karşılık tutulur. Böylece V noktasının koordinatlarının $(0, 1, 0)$ olduğu görülür. Bu karşılık tutulma Şekil 3.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4. 2. Tip Noktaların Koordinatlanması

3.2.2 Doğruların Koordinatlanması

PK-düzlemin doğrularına $m, p \in$ **R** ve $q, n \in$ **I** olmak üzere $[m, 1, p], [1, n, p], [q, n, 1]$ biçiminde sıralı üçlüler koordinat olarak karşılık tutulacaktır. Bu koordinatlamalarda 1 elemanının bulunduğu yer yardımıyla, ilgili koordinatın karşılık geldiği doğruya bir tip karşılık tutulur. $1 \in$ **R** elemanı 2. bileşende ise bu doğruya *2. tip doğru*, 1. bileşende ise *1. tip doğru* ve son olarak 3. bileşende ise *3. tip doğru* adı verilir. Birden çok bileşende 1 varsa ilk önce 2. bileşende 1 olup olmadığına bakılır. Yoksa 1. bileşende 1 olup olmadığına bakılır ve buna göre karar verilir. Örneğin $[1, 1, 1]$ doğrusu 2. tip, $[1, 1, 0]$ doğrusu 1. tip bir doğrudur.

g bu PK-düzlemde herhangi bir doğru olsun:

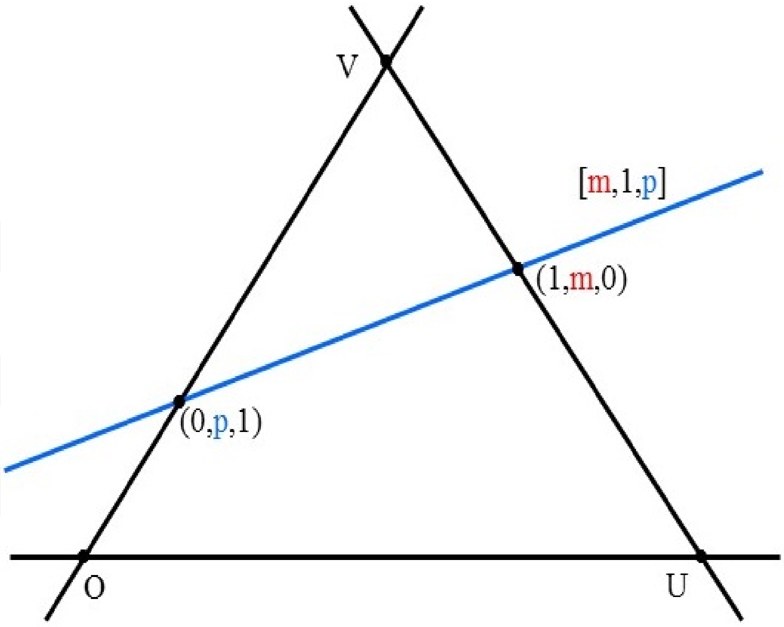
i) $g \nsim V$ ise

$$(g \wedge d_\infty) = (1, m, 0)$$

ve

$$g \wedge OV = (0, p, 1)$$

olacak biçimdeki m, p elemanları yardımıyla g doğrusuna $[m, 1, p]$ koordinatı karşılık tutulur. Bu karşılık tutulma Şekil 3.5 de verilmiştir.



Şekil 3.5. 2. Tip Doğruların Koordinatlanması

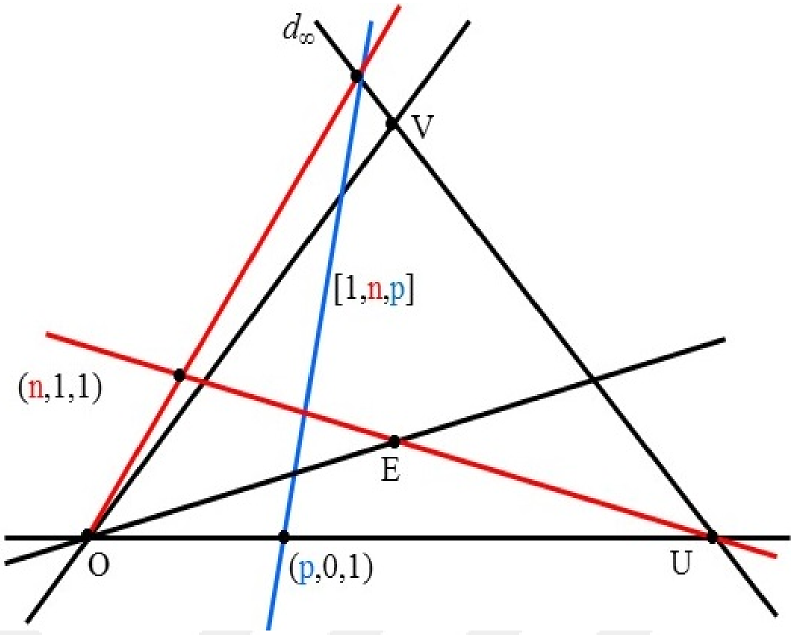
ii) $g \sim V$ ve $g \nsim d_\infty$ ise

$$((g \wedge d_\infty) \vee O) \wedge EU = (n, 1, 1)$$

ve

$$g \wedge OU = (p, 0, 1)$$

olacak biçimdeki n ve p elemanları yardımıyla g doğrusuna $[1, n, p]$ koordinatı karşılık tutulur. Bu karşılık tutulma Şekil 3.6 da verilmiştir.



Şekil 3.6. 1. Tip Doğruların Koordinatlanması

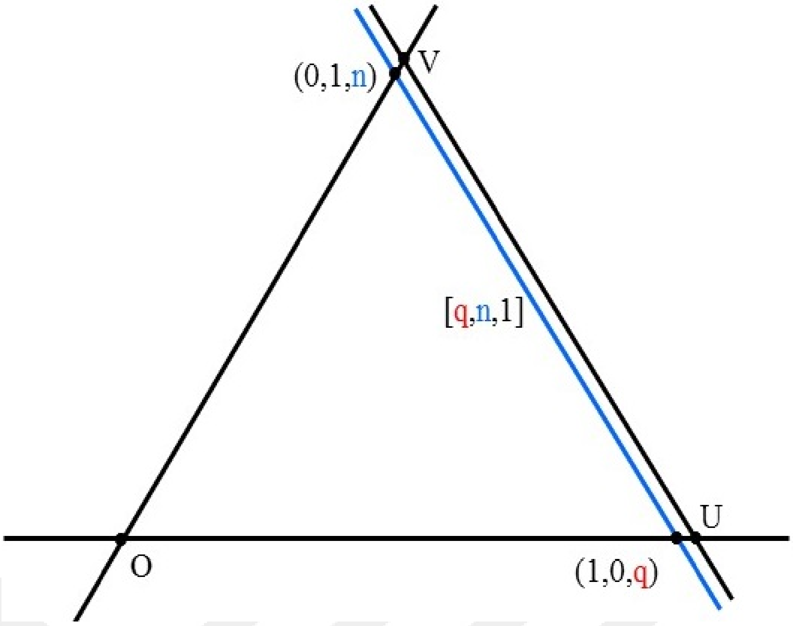
iii) $g \sim d_\infty$ ise

$$g \wedge OU = (1, 0, q)$$

ve

$$g \wedge OV = (0, 1, n)$$

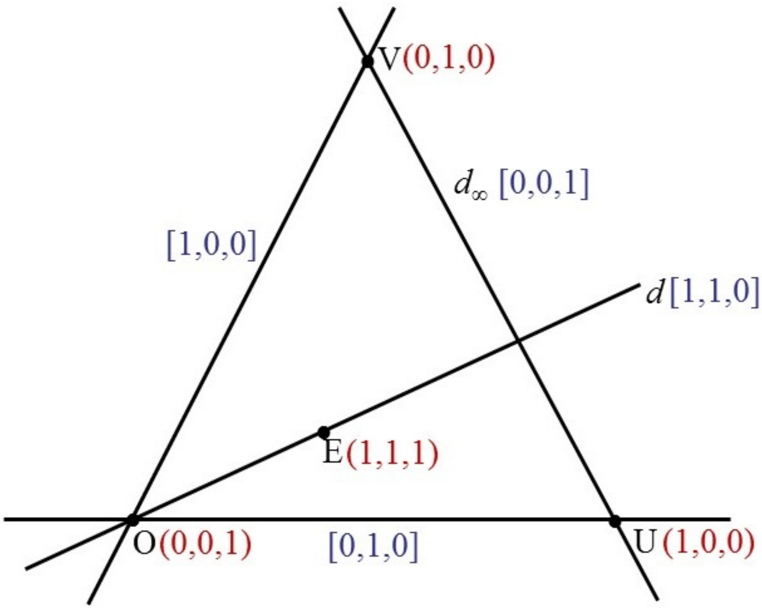
olacak biçimdeki n, q elemanları yardımıyla g doğrusuna $[q, n, 1]$ koordinatı karşılık tutulur. Bu karşılık tutulma Şekil 3.7 de verilmiştir.



Şekil 3.7. 3. Tip Doğruların Koordinatlanması

Yapılan bu koordinatlamanın bir sonucu olarak bazı özel noktaların ve doğruların koordinatlarının aşağıdaki gibi olduğu görülür ve bu nokta ve doğrular Şekil 3.8 de gösterilmiştir.

$$O = (0,0,1), \qquad E = (1,1,1), \qquad U = (1,0,0), \qquad V = (0,1,0),$$
$$OU = [0,1,0], \qquad OV = [1,0,0], \qquad UV = [0,0,1], \qquad d = OE = [1,1,0]$$



Şekil 3.8. Bazı Özel Noktaların ve Doğruların Koordinatları

Noktalar ve doğrular için komşuluk bağıntısı

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \quad \Leftrightarrow \quad x_i - y_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3$$
$$[a_1, a_2, a_3] \sim [b_1, b_2, b_3] \quad \Leftrightarrow \quad a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3$$

olarak tanımlanır ki bunun $(\mathcal{B}(\varepsilon))^3$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu, daha önce, Teorem 3.1.8 de gösterilmiştir.

3.3 Dual Lokal Halka Yardımıyla Projektif Klingenberg Düzlem İnşaası

Bu kısım iki altbaşlık altında tamamlanacaktır. Birinci altbaşlıkta lokal alterne halkalarla bir PK-düzlemin nasıl elde edileceği verilmiş ve ikinci altbaşlıkta bu verilen yöntemden hareketle $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası ile PK-düzlem inşa edilmiştir.

3.3.1 Bir Lokal Alterne Halka Yardımıyla İnşaa Edilen PK-Düzlem

Baker ve ark. (1991) çalışmalarında; 2.2 başlığı altında tanıtıldığı gibi koordinatlanan $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ PK-düzlemi için $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ cebirsel yapısının bir lokal alterne halka olduğunu ve tersine **R** lokal alterne halkası ile aşağıda gibi inşa edilen geometrik yapının bir MK-düzlem olduğunu yani PK-düzlem olduğunu ve **PK3)** şartında elde edilen projektif düzlemin Moufang düzlemi olduğunu göstermiştir. Aşağıda bir özeti verilecek olan cebirsel bir yapıdan PK-düzlem elde etme yöntemi, Dugas'ın (1979) ve Keppens'in (1988) çalışmalarından yola çıkarak Baker ve ark. (1991) tarafından geliştirilen metodun bir uyarlamasıdır.

Teorem 3.3.1 **R** bir lokal alterne halka ve **I**, **R** nin tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu ideal olsun. Bu durumda noktaların kümesi

$$\mathcal{N} = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \cup \{(1, y, z) \mid y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{I}\} \cup \{(w, 1, z) \mid w, z \in \mathbf{I}\},$$

doğruların kümesi

$$\mathcal{D} = \{[m,1,p] \mid m,p \in \mathbf{R}\} \cup \{[1,n,p] \mid n \in \mathbf{I},\ p \in \mathbf{R}\} \cup \{[q,n,1] \mid q,n \in \mathbf{I}\},$$

olmak üzere, üzerinde olma bağıntısı

- $(x,y,1) \circ [m,1,p] \Leftrightarrow y = xm + p,$
- $(x,y,1) \circ [1,n,p] \Leftrightarrow x = yn + p,$
- $(x,y,1) \not\circ [q,n,1],$
- $(1,y,z) \circ [m,1,p] \Leftrightarrow y = m + zp,$
- $(1,y,z) \circ [q,n,1] \Leftrightarrow z = q + yn,$
- $(1,y,z) \not\circ [1,n,p],$
- $(w,1,z) \circ [1,n,p] \Leftrightarrow w = n + zp,$
- $(w,1,z) \circ [q,n,1] \Leftrightarrow z = wq + n,$
- $(w,1,z) \not\circ [m,1,p],$

biçiminde ve komşuluk bağıntısı noktalar ve doğrular için

- $(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3,$
- $[a_1,a_2,a_3] \sim [b_1,b_2,b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3.$

olarak tanımlandığında $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ geometrik yapısı bir PK-düzlemdir.

Teorem 3.3.1 de verilen PK-düzleme $\mathbf{R}$ lokal alterne halkası yardımıyla koordinatlanan projektif Klingenberg düzlemi denir ve bu PK-düzlem kısaca $PK_2(\mathbf{R})$ ile gösterilir.

Blunck (1991) çalışmasında Baker ve ark. (1991) çalışmasında yapılanları özetleyen ve aşağıda bir uyarlaması verilen teoremi ifade etmiştir.

Teorem 3.3.2 $\Pi = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ 3.2 başlığı altındaki gibi koordinatlanan bir PK-düzlem olsun. Bu durumda $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ bir lokal alterne halkadır ve $\mathbf{I}$ bu lokal alterne halkanın birim olmayan elemanlarının oluşturduğu idealdir. Tersine, bir **R** lokal alterne halkası verildiğinde bu **R** üzerine $PK_2(\mathbf{R})$ projektif Klingenberg düzlemi inşa edilebilir.

Sonuç 3.3.3 Üzerinde olma bağıntısının tanımı gereği $PK_2(\mathbf{R})$ de aynı tipten bir nokta aynı tipten bir doğru üzerinde değildir.

Sonuç 3.3.4 $\mathbf{R}$ lokal alterne halkası ve $\mathbf{I}$ birim olmayan elemanların kümesi olsun. Bu takdirde $\forall t \in \mathbf{I}$ için $1 - t$ ve $1 + t$ elemanları birer birimdir.

İspat. $t \in \mathbf{I}$ iken $1 - t \in \mathbf{I}$ olduğu kabul edilsin. Lokallik şartı gereği $\mathbf{I}$ bir ideal olduğundan $\mathbf{R}$ lokal alterne halkasının bir alt halkasıdır. Bu sebeple

$$t + (1 - t) = 1 \in \mathbf{I}$$

olmalıdır. Fakat

$$1 \cdot 1 = 1$$

olduğundan bir çelişki elde edilir. Bu kabulün yanlış olduğunu gösterir. Yani

$$t \in \mathbf{I} \Rightarrow 1 - t \notin \mathbf{I}$$

sonucu bulunur. $1 + t \notin \mathbf{I}$ olduğu benzer biçimde görülür. ■

3.3.2 Bir Dual Lokal Halka Yardımıyla Elde Edilen PK-Düzlem

Her lokal halka aynı zamanda bir lokal alterne halka olduğundan Teorem 3.3.1 de verilen inşa etme metodu yardımıyla herhangi bir lokal halka kullanılarak bir PK-düzlem inşa edilebilir. Bu nedenle **R** lokal alterne halkası yerine $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası alındığında Teorem 3.3.1 geçerli olur. Bu durumda $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ bir PK-düzlemdir. Aşağıda verilen

Teorem 3.3.5 de bu ifade edilmiş ve ileriki bölümlerde $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi için yapılacak hesaplamalarda kolaylıklar sağlayacağı için ispatı detaylı işlemleri ile birlikte verilmiştir. Bu tezde özel olarak Teorem 3.3.1 deki **R** lokal alterne halkası yerine $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası alınarak elde edilen $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ üzerinde durulacaktır.

Teorem 3.3.5 $\mathcal{B}(\varepsilon)$ bir dual lokal halka ve **I** bu lokal halkanın tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu ideal olsun. Bu durumda noktalar kümesi

$$\mathcal{N} = \{(x, y, 1) \,|x, y \in \mathcal{B}(\varepsilon)\} \cup \{(1, y, z) \mid y \in \mathcal{B}(\varepsilon),\ z \in \mathbf{I}\} \cup \{(w, 1, z) \mid w,\ z \in \mathbf{I}\},$$

doğrular kümesi

$$\mathcal{D} = \{[m, 1, p] \mid m, p \in \mathcal{B}(\varepsilon)\} \cup \{[1, n, p] \mid n \in \mathbf{I}, p \in \mathcal{B}(\varepsilon)\} \cup \{[q, n, 1] \mid q, n \in \mathbf{I}\}.$$

olarak alınsın. Bu noktalar ve doğrular kümesi için $\circ$ üzerinde olma bağıntısı

- $(x, y, 1) \circ [m, 1, p] \Leftrightarrow y = xm + p,$
- $(x, y, 1) \circ [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p,$
- $(x, y, 1) \not\circ [q, n, 1]\,,$
- $(1, y, z) \circ [m, 1, p] \Leftrightarrow y = m + zp,$
- $(1, y, z) \circ [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn,$
- $(1, y, z) \not\circ [1, n, p]\,,$
- $(w, 1, z) \circ [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp,$
- $(w, 1, z) \circ [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n,$
- $(w, 1, z) \not\circ [m, 1, p]\,,$

biçiminde tanımlansın. Noktalar ve doğrular için komşuluk bağıntısı olarak daha önce Teorem 3.1.8 de denklik bağıntısı olduğu gösterilen ve

- $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3,$
- $[a_1, a_2, a_3] \sim [b_1, b_2, b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3.$

biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı alınsın. Bu durumda elde edilen $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) = (\mathcal{N}, \mathcal{D},$ $\circ, \sim)$ geometrik yapısı bir PK-düzlemdir.

İspat. $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_2,\ w_2 \in \mathcal{B}$ olacak biçimde

$$x = x_1 + x_2\varepsilon, y = y_1 + y_2\varepsilon, z = z_2\varepsilon, w = w_2\varepsilon$$

verilsin. Herhangi bir $N \in \mathcal{N}$ noktası; 3. tipten bir nokta ise

$$N = (x, y, 1) = (x_1 + x_2\varepsilon, y_1 + y_2\varepsilon, 1)$$

formunda, 1. tipten bir nokta ise

$$N = (1, y, z) = (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon)$$

formunda ve son olarak 2. tipten bir nokta ise

$$N = (w, 1, z) = (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon)$$

formundadır.

$m_1,\ m_2,\ p_1,\ p_2,\ n_2,\ q_2 \in \mathcal{B}$ olacak biçimde

$$m = m_1 + m_2\varepsilon, p = p_1 + p_2\varepsilon, n = n_2\varepsilon, q = q_2\varepsilon$$

verilsin. Herhangi bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu; 2. tipten bir doğru ise

$$d = [m, 1, p] = [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$$

formunda, 1. tipten bir doğru ise

$$d = [1, n, p] = [1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$$

formunda ve son olarak 3. tipten bir doğru ise

$$d = [q, n, 1] = [q_2\varepsilon, n_2\varepsilon, 1]$$

formundadır.

PK1) Keyfî $N, M \in \mathcal{N}$, $N \nsim M$ noktaları için beş farklı durum söz konusudur:

1. Durum $N = (x, y, 1), M = (u, v, 1)$

2. Durum $N = (x, y, 1), M = (1, v, t)$

3. Durum $N = (x, y, 1), M = (u, 1, t)$

4. Durum $N = (1, y, z), M = (1, v, t)$

5. Durum $N = (1, y, z), M = (u, 1, t)$

Şimdi bu durumların hepsi ayrı ayrı incelenecektir.

1. Durum: $N = (x, y, 1)$, $M = (u, v, 1)$ noktalarının ikisi de 3. tipten bir nokta olduğundan NM doğrusunun 3. tipten bir doğru olamayacağı Sonuç 3.3.3 gereği bellidir. Bu durumda NM doğrusu ya 1. tipten ya da 2. tipten bir doğrudur. $N \nsim M$ olduğundan komşuluk bağıntısının kuruluşu gereği

$$x - u \notin \mathbf{I} \vee (x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \notin \mathbf{I})$$

olacağı anlaşılır.

1.Hal: $x - u \notin \mathbf{I}$ olsun. Bu durumda araştırılan NM doğrusu 1. tipten olamaz. Aksi halde $NM = [1, n, p]$ olsaydı;

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow x = yn + p \tag{3.3.1}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, v, 1) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow u = vn + p \tag{3.3.2}$$

olacağından (3.3.1) ve (3.3.2) nolu eşitliklerden

$$x - u = (y - v)n \tag{3.3.3}$$

elde edilirdi. (3.3.3) eşitliğinde sağ taraf ($n \in \mathbf{I}$ olduğundan) $\mathbf{I}$ idealinin elemanı olmasına rağmen, sol taraf $x - u \notin \mathbf{I}$ olduğundan bu eşitlik geçerli değildir. Bu durum NM doğrusunun 1. tipten olması kabulü ile çelişir.

Şimdi NM doğrusunun 2. tipten olması durumu incelenecektir.

$NM = [m, 1, p]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow y = xm + p \tag{3.3.4}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, v, 1) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow v = um + p \tag{3.3.5}$$

olacağından (3.3.4) ve (3.3.5) nolu eşitliklerden

$$y - v = (x - u)m \tag{3.3.6}$$

sonucu elde edilir. $x - u \notin \mathbf{I}$ olduğundan birimdir yani $(x - u)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ vardır. Bu nedenle

$$m = (x - u)^{-1}(y - v)$$

olduğu görülür. Bulunan bu m değeri (3.3.4) eşitliğinde kullanılarak

$$p = y - x((x - u)^{-1}(y - v))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [(x - u)^{-1}(y - v), 1, y - x((x - u)^{-1}(y - v))]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

2. Hal: $x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \notin \mathbf{I}$ olsun. Bu durumda araştırılan NM doğrusu 2. tipten olamaz. Aksi halde $NM = [m, 1, p]$ olsaydı;

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow y = xm + p \tag{3.3.7}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, v, 1) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow v = um + p \tag{3.3.8}$$

olacağından (3.3.7) ve (3.3.8) nolu eşitliklerden

$$y - v = (x - u)m \tag{3.3.9}$$

elde edilirdi. (3.3.9) eşitliğinde sağ taraf ($x - u \in \mathbf{I}$ olduğundan) $\mathbf{I}$ idealinin elemanı olması rağmen, sol taraf $y - v \notin \mathbf{I}$ olduğundan bu eşitlik geçerli değildir. Bu durum NM doğrusunun 2. tipten olması kabulü ile çelişir.

Şimdi NM doğrusunun 1. tipten olması durumu incelenecektir.

$NM = [1, n, p]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow x = yn + p \tag{3.3.10}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, v, 1) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow u = vn + p \tag{3.3.11}$$

olacağından (3.3.10) ve (3.3.11) nolu eşitliklerden

$$x - u = (y - v)n \tag{3.3.12}$$

elde edilir. $y - v \notin \mathbf{I}$ olduğundan birimdir yani $(y-v)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ vardır. Bu nedenle

$$n = (y-v)^{-1}(x-u)$$

olduğu görülür. Bulunan bu n değeri (3.3.10) eşitliğinde kullanılarak

$$p = x - y((y-v)^{-1}(x-u))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [1, (y-v)^{-1}(x-u), x - y((y-v)^{-1}(x-u))]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

2. Durum: $N = (x, y, 1), M = (1, v, t)$ iken NM doğrusunun 3. tipten ve 1. tipten bir doğru olamayacağı Sonuç 3.3.3 gereği bellidir. Şimdi NM doğrusunun 2. tipten olması durumu araştırılacaktır.

$NM = [m, 1, p]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow y = xm + p \tag{3.3.13}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (1, v, t) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow v = m + tp \tag{3.3.14}$$

olur. (3.3.13) eşitliğinden elde edilen

$$y - xm = p \tag{3.3.15}$$

denklemi (3.3.14) nolu eşitlikte yerine yazılırsa

$$v = m + t(y - xm) \Rightarrow v = m + ty - t(xm) \tag{3.3.16}$$

elde edilir. Burada $t, x, m \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ ve $\mathcal{B}(\varepsilon)$ bir lokal halka olduğundan birleşme özelliği gereği $t(xm) = (tx)m$ eşitliği geçerlidir. [2] Bu nedenle (3.3.16) eşitliğinden

$$v - ty = m - (tx)m \Rightarrow v - ty = (1 - tx)m \tag{3.3.17}$$

olduğu görülür. Sonuç 3.3.4 gereği $tx \in \mathbf{I}$ iken $1 - tx \notin \mathbf{I}$ olduğundan $(1 - tx)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ vardır. (3.3.17) eşitliğinden

$$m = (1 - tx)^{-1}(v - ty)$$

olduğu görülür. Bulunan m değeri (3.3.15) eşitliğinde kullanılarak

$$p = y - x((1 - tx)^{-1}(v - ty))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [(1 - tx)^{-1}(v - ty), 1, y - x((1 - tx)^{-1}(v - ty))]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

[2] Burada her ne kadar bir lokal halka üzerinde koordinatlama yapıldığı için çarpma işleminin birleşme özelliği kullanılıyorsa da literatürde Baker ve ark. (1991) birleşme özelliğinin olmadığı lokal alterne halkalar ile koordinatlanan geometrik yapılarda da PK1) şartının sağlandığını uzun işlemler neticesinde göstermişlerdir.

3. Durum: $N = (x, y, 1), M = (u, 1, t)$ iken NM doğrusunun 3. tipten ve 2. tipten bir doğru olamayacağı Sonuç 3.3.3 gereği bellidir. Şimdi NM doğrusunun 1. tipten olması durumu incelenecektir.

$NM = [1, n, p]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow x = yn + p \tag{3.3.18}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, 1, t) \circ [1, n, p]$$

$$\Leftrightarrow u = n + tp \tag{3.3.19}$$

olur. (3.3.18) eşitliğinden elde edilen

$$x - yn = p \tag{3.3.20}$$

denklemi (3.3.19) nolu eşitlikte yerine yazılırsa

$$u = n + t(x - yn) \Rightarrow u = n + tx - t(yn) \tag{3.3.21}$$

elde edilir. Burada $t, y, n \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ ve $\mathcal{B}(\varepsilon)$ bir lokal halka olduğundan birleşme özelliği gereği $t(yn) = (ty)n$ eşitliği geçerlidir. Bu nedenle (3.3.21) eşitliğinden

$$u - tx = n - (ty)n \Rightarrow u - tx = (1 - ty)n \tag{3.3.22}$$

olduğu görülür. Sonuç 3.3.4 gereği $ty \in \mathbf{I}$ iken $1 - ty \notin \mathbf{I}$ olduğundan $(1 - ty)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$

vardır. (3.3.22) eşitliğinden

$$n = (1 - ty)^{-1}(u - tx)$$

olduğu görülür. Bulunan n değeri (3.3.20) eşitliğinde kullanılarak

$$p = x - y((1 - ty)^{-1}(u - tx))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [1, (1 - ty)^{-1}(u - tx), x - y((1 - ty)^{-1}(u - tx))]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

4. Durum: $N = (1, y, z), M = (1, v, t)$ noktalarının ikisi de 1. tipten bir nokta olduğundan NM doğrusunun 1. tipten bir doğru olamayacağı Sonuç 3.3.3 gereği bellidir. Yani NM doğrusu ya 2. tipten ya da 3. tipten bir doğrudur. $N \nsim M$ olduğundan komşuluk bağıntısının kuruluşu gereği

$$y - v \notin \mathbf{I} \wedge z - t \in \mathbf{I}$$

olacağı anlaşılır.

Bu durumda araştırılan NM doğrusu 2. tipten olamaz. Aksi halde $NM = [m, 1, p]$ olsaydı;

$$N \circ NM \Leftrightarrow (1, y, z) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow y = m + zp \tag{3.3.23}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (1, v, t) \circ [m, 1, p]$$

$$\Leftrightarrow v = m + tp \tag{3.3.24}$$

olacağından (3.3.23) ve (3.3.24) nolu eşitliklerden

$$y - v = (z - t)p \tag{3.3.25}$$

elde edilirdi. (3.3.25) eşitliğinde sağ taraf ($z, t \in \mathbf{I}$ olduğundan) $\mathbf{I}$ idealinin elemanı olmasına rağmen, sol taraf $y - v \notin \mathbf{I}$ olduğundan bu eşitlik geçerli değildir. Bu durum NM doğrusunun 2. tipten olması kabulü ile çelişir.

Son olarak NM doğrusunun 3. tipten olması durumu incelenecektir.

$NM = [q, n, 1]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (1, y, z) \circ [q, n, 1]$$

$$\Leftrightarrow z = q + yn \tag{3.3.26}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (1, v, t) \circ [q, n, 1]$$

$$\Leftrightarrow t = q + vn \tag{3.3.27}$$

olacağından (3.3.26) ve (3.3.27) nolu eşitliklerden

$$z - t = (y - v)n \tag{3.3.28}$$

elde edilir. $y - v \notin \mathbf{I}$ olduğundan birimdir yani $(y - v)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ vardır. Bu nedenle

$$n = (y - v)^{-1}(z - t)$$

olduğu görülür. Bulunan bu n değeri (3.3.26) eşitliğinde kullanılarak

$$q = z - y((y - v)^{-1}(z - t))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [z - y((y - v)^{-1}(z - t), (y - v)^{-1}(z - t), 1)]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

5. Durum: $N = (1, y, z), M = (u, 1, t)$ noktalarının birisi 1. tipten ve diğeri 2. tipten bir nokta olduğundan NM doğrusunun 1. tipten ve 2. tipten bir doğru olamayacağı Sonuç 3.3.3 gereği bellidir. Şimdi NM doğrusunun 3. tipten olması durumu incelenecektir.

$NM = [q, n, 1]$ için

$$N \circ NM \Leftrightarrow (1, y, z) \circ [q, n, 1]$$

$$\Leftrightarrow z = q + yn \tag{3.3.29}$$

ve

$$M \circ NM \Leftrightarrow (u, 1, t) \circ [q, n, 1]$$

$$\Leftrightarrow t = uq + n \tag{3.3.30}$$

olur. (3.3.30) eşitliğinden elde edilen

$$t - uq = n \tag{3.3.31}$$

denklemi (3.3.29) nolu eşitlikte yerine yazılırsa

$$z = q + y(t - uq) \Rightarrow z = q + yt - y(uq) \tag{3.3.32}$$

elde edilir. Burada $y, u, q \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ ve $\mathcal{B}(\varepsilon)$ bir lokal halka olduğundan birleşme özelliği gereği $y(uq) = (yu)q$ eşitliği geçerlidir. Bu nedenle (3.3.32) eşitliğinden

$$z - yt = q - (yu)q \Rightarrow z - yt = (1 - yu)q \tag{3.3.33}$$

olduğu görülür. Sonuç 3.3.4 gereği $yu \in \mathbf{I}$ iken $1 - yu \notin \mathbf{I}$ olduğundan $(1 - yu)^{-1} \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ vardır. (3.3.33) eşitliğinden

$$q = (1 - yu)^{-1}(z - yt)$$

olduğu görülür. Bulunan q değeri (3.3.30) eşitliğinde kullanılarak

$$n = t - u((1 - yu)^{-1}(z - yt))$$

sonucu bulunur. Böylece

$$NM = [(1 - yu)^{-1}(z - yt), t - u((1 - yu)^{-1}(z - yt)), 1]$$

doğrusunun tek olarak (N ve M noktalarının koordinatları yardımıyla) belli olduğu görülür.

PK2) Bu şartın doğru olduğunu göstermek için, noktalar için **PK1)** de yapılan işlemlerin benzerleri kolayca yapılabilmektedir. İşlemler ve düşünceler tamamıyla **PK1)** dekilerin benzeri olduğundan tezde yer kaplamaması bakımından **PK2)** nin ispatı verilmeyecektir.

PK3) Teorem 3.1.8 ile $\sim$ bağıntısının $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu gösterilmişti. Böylece $\sim$ denklik bağıntısına karşılık gelen kanonik dönüşüm

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathcal{N}' = \mathcal{N}/\sim \\ \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{D}' = \mathcal{D}/\sim \end{aligned}$$

tanımlıdır. Her $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ ve her $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için

$$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow \varphi(N_1) = \varphi(N_2)$$

ve

$$d_1 \sim d_2 \Leftrightarrow \varphi(d_1) = \varphi(d_2)$$

olur. Üzerinde olma bağıntısı $N \in \mathcal{N}$ ve $d \in \mathcal{D}$ için

$$\varphi(N) \circ' \varphi(d) \Leftrightarrow (\exists N_1)[(N_1 \in [N] \wedge ((\exists d_1)(d_1 \in [d] \wedge N_1 \circ d_1)))]$$

biçiminde tanımlandığında elde edilen $\mathcal{P} = (\mathcal{N}',\ \mathcal{D}',\ \circ')$ geometrik yapısının bir projektif düzlem olduğu gösterilmelidir.

P1) $\mathcal{N}'$ kümesindeki noktalar, $\mathcal{N}/\sim$ bölüm grubunun elemanları olduğundan, PK-düzlemdeki $\mathcal{N}$ noktalar kümesi üzerinde $\sim$ komşuluk bağıntısına göre bir denklik sınıfıdır. Yani keyfî $N_i, N_j \in \mathcal{N}$ için

$$N_i \sim N_j \Rightarrow N_j \in [N_i] = N$$

olur. Bu kısımda PK-düzlemlerdeki aynı komşuluktaki noktaların herbiri indislerle gösterilirken bunların denklik sınıfı yani φ yapı dönüşümü altındaki görüntüleri sadece karşılık gelen büyük harfle gösterilecektir. Benzer biçimde $\mathcal{D}'$ kümesindeki doğrular, $\mathcal{D}/\sim$ bölüm grubunun elemanları olduğundan, PK-düzlemdeki $\mathcal{D}$ doğrular kümesi üzerinde $\sim$ komşuluk bağıntısına göre bir denklik sınıfıdır. Yani keyfî $d_i, d_j \in \mathcal{D}$ için

$$d_i \sim d_j \Rightarrow d_j \in [d_i] = d$$

olur. Bu kısımda noktalara benzer biçimde PK-düzlemlerdeki aynı komşuluktaki doğruların herbiri indislerle gösterilirken bunların denklik sınıfı yani φ yapı dönüşümü altındaki görüntüleri sadece karşılık gelen küçük harfle gösterilecektir. Yani

$M, N \in \mathcal{N}'$ ve $c, d \in \mathcal{D}'$ için

$$M = \{M_1, M_2, ...\}, N = \{N_1, N_2, \ldots\}, c = \{c_1, c_2, \ldots\}, d = \{d_1, d_2, \ldots\}$$

biçiminde gösterilecektir. M, N, c ve d nin eleman sayılarıyla ilgili daha detaylı bilgiler Drake ve Lenz 'in (1975) sonlu Klingenberg düzlemleri üzerine yaptıkları çalışmalarında bulunabilir.

$M, N \in \mathcal{N}'$ farklı keyfî iki nokta olsun. $M_1 \in M, N_1 \in N$ için $M_1 \nsim N_1$ olduğundan **PK1)** gereği $M_1N_1 = d_1 \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Aynı zamanda $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ olduğundan $\varphi(d_1) = d \in \mathcal{D}'$ dür. Burada $\mathcal{P}$ geometrik yapısındaki üzerinde olma bağıntısı olan $\circ'$ tanımından dolayı

$$\begin{aligned} M_1 \circ d_1 &\Rightarrow \varphi(M_1) \circ' \varphi(d_1) \\ N_1 \circ d_1 &\Rightarrow \varphi(N_1) \circ' \varphi(d_1) \end{aligned}$$

olur ve

$$\varphi(M_1) = M, \varphi(N_1) = N, \varphi(d_1) = d$$

olduğundan

$$\varphi(M_1)\varphi(N_1) = \varphi(d_1) \Rightarrow MN = d$$

sonucu bulunur.

Böylece $\mathcal{N}'$ de alınan farklı keyfî noktalar için $\mathcal{D}'$ de bunları birleştiren bir tek doğrunun var olduğu gösterilir.

P2) Bu şartın doğru olduğunu göstermek için, noktalar için **P1)** de yapılan işlemlerin benzerleri kolayca yapılabilir.

P3) $0, 1 \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olduğu için

$$N_1 = (0, 0, 1), N_2 = (1, 0, 0), N_3 = (0, 1, 0), N_4 = (1, 1, 1)$$

noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ geometrik yapısındadır. $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \mathcal{N}$ noktalarından herhangi ikisinin aynı komşulukta olmadığı gösterildikten sonra bu noktaların yapı dönüşümü altındaki görüntülerinden herhangi üçünün doğrudaş olmadığı gösterilecektir.

$$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow (0,0,1) \sim (1,0,0) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$
$$N_1 \sim N_3 \Leftrightarrow (0,0,1) \sim (0,1,0) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$
$$N_1 \sim N_4 \Leftrightarrow (0,0,1) \sim (1,1,1) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$
$$N_2 \sim N_3 \Leftrightarrow (1,0,0) \sim (0,1,0) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$
$$N_2 \sim N_4 \Leftrightarrow (1,0,0) \sim (1,1,1) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$
$$N_3 \sim N_4 \Leftrightarrow (0,1,0) \sim (1,1,1) \Leftrightarrow 1 \in \mathbf{I}$$

$1 \notin \mathbf{I}$ olduğundan N_1, N_2, N_3, N_4 noktaları ikişer ikişer farklı komşuluktadırlar.

$$N_2N_3 = [0,0,1]$$

olduğu basit hesaplamalarla bulunur. Şimdi N_2N_3 doğrusunun üzerindeki noktalardan herhangi birinin N_1 noktasına komşu olup olmadığı kontrol edilecektir. Önce N_2N_3 doğrusunun üzerindeki noktalar incelenecektir. Üzerinde olma bağıntısından

$$(x,y,z) \circ [0,0,1] \Leftrightarrow z = 0$$

bulunur. Komşuluk bağıntısı gereği

$$(0,0,1) \sim (x,y,0) \Leftrightarrow 1 - 0 = 1 \in \mathbf{I}$$

elde edilir. Burada $1 \notin \mathbf{I}$ olduğundan bu önerme yanlıştır. Yani N_1 noktası N_2N_3 doğrusu üzerindeki $(x,y,0)$ noktalarından hiçbirine komşu değildir. Bu durumda

$$N_1 \nsim N_2N_3$$

olur. Bundan dolayı Teorem 2.2.21 gereği

$$\varphi(N_1) \not o' \varphi(N_2N_3)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $\varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_3)$ noktalarının doğrudaş olmadığını gösterir.

$$N_2N_4 = [0, 1, 1]$$

olduğu basit hesaplamalarla görülür. Şimdi N_2N_4 doğrusunun üzerindeki noktalardan herhangi birinin N_1 noktasına komşu olup olmadığı kontrol edilecektir. Önce N_2N_4 doğrusunun üzerindeki noktalar incelenecektir. Üzerinde olma bağıntısından

$$(x, y, z) \circ [0, 1, 1] \Leftrightarrow y = z$$

bulunur. Komşuluk bağıntısı gereği

$$(x, a, a) \sim (0, 0, 1) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{I} \wedge a \in \mathbf{I} \wedge a - 1 \in \mathbf{I})$$

elde edilir. Burada Sonuç 3.3.4 gereği $a \in \mathbf{I} \wedge a - 1 \in \mathbf{I}$ önermesi yanlıştır. Yani N_1 noktası N_2N_4 doğrusunun üzerindeki (x, a, a) noktalarından hiçbirine komşu değildir. Bu durumda

$$N_1 \nsim N_2N_4$$

olur. Bundan dolayı Teorem 2.2.21 gereği

$$\varphi(N_1) \not o' \varphi(N_2N_4)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $\varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_4)$ noktalarının doğrudaş olmadığını gösterir.

$$N_3N_4 = [1,0,1]$$

olduğu basit hesaplamalarla görülür. Şimdi N_3N_4 doğrusunun üzerindeki noktalardan herhangi birinin N_1 noktasına komşu olup olmadığı kontrol edilecektir. Önce N_3N_4 doğrusunun üzerindeki noktalar incelenecektir. Üzerinde olma bağıntısından

$$(x,y,z) \circ [1,0,1] \Leftrightarrow x = z$$

bulunur. Komşuluk bağıntısı gereği

$$(a,y,a) \sim (0,0,1) \Leftrightarrow (a \in \mathbf{I} \wedge y \in \mathbf{I} \wedge a-1 \in \mathbf{I})$$

elde edilir. Burada Sonuç 3.3.4 gereği $a \in \mathbf{I} \wedge a-1 \in \mathbf{I}$ önermesi yanlıştır. Yani N_1 noktası N_3N_4 doğrusunun üzerindeki (a,y,a) noktalarından hiçbirine komşu değildir. Bu durumda

$$N_1 \nsim N_3N_4$$

olur. Bundan dolayı Teorem 2.2.21 gereği

$$\varphi(N_1) \not{o}' \varphi(N_3N_4)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $\varphi(N_1), \varphi(N_3), \varphi(N_4)$ noktalarının doğrudaş olmadığını gösterir.

$$N_3N_4 = [1,0,1]$$

olduğu basit hesaplamalar ile görülür. Şimdi N_3N_4 doğrusunun üzerindeki noktalardan herhangi birinin N_2 noktasına komşu olup olmadığı kontrol edilecektir. N_3N_4 doğrusunun üzerindeki noktaların (a, y, a) tipinde olduğu gösterildi. Komşuluk bağıntısı gereği

$$(a, y, a) \sim (1, 0, 0) \Leftrightarrow (a - 1 \in \mathbf{I} \wedge y \in \mathbf{I} \wedge a \in \mathbf{I})$$

elde edilir. Burada Sonuç 3.3.4 gereği $a - 1 \in \mathbf{I} \wedge a \in \mathbf{I}$ önermesi yanlıştır. Yani N_2 noktası N_3N_4 doğrusunun üzerindeki (a, y, a) noktalarından hiçbirine komşu değildir. Bu durumda

$$N_2 \nsim N_3N_4$$

olur. Bundan dolayı Teorem 2.2.21 gereği

$$\varphi(N_2) \not{o}' \varphi(N_3N_4)$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç, $\varphi(N_2), \varphi(N_3), \varphi(N_4)$ noktalarının doğrudaş olmadığını gösterir.

Böylelikle $\varphi(N_1), \varphi(N_2), \varphi(N_3), \varphi(N_4) \in \mathcal{N}'$ noktalarından herhangi üçünün doğrudaş olmadığı anlaşılır.

P1), **P2)** ve **P3)** şartları sağlandığından $\mathcal{P} = (\mathcal{N}',\ \mathcal{D}',\ \circ')$ geometrik yapısı bir projektif düzlemdir. ■

3.4 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde Bazı Sonuçlar

$\mathcal{B}$ bölümlü halkasından elde edilen $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası kullanılarak inşa edilen PK-düzlemlerde üzerinde olma bağıntısının ve komşuluk bağıntısının incelenmesi neticesinde aşağıdaki sonuçlar ve teoremler ortaya çıkmıştır.

Sonuç 3.3.4 den elde edilen komşuluk bağıntısı ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilecektir.

Sonuç 3.4.1 Verilen bir $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasıyla koordinatlanan $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ, \sim)$ PK-düzlemi için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

- $(x, y, 1) \nsim (1, y, z)$,
- $(x, y, 1) \nsim (w, 1, z)$,
- $(1, y, z) \nsim (w, 1, z)$,
- $(x, y, 1) \sim (u, v, 1) \Leftrightarrow (x - u \in \mathbf{I}, y - v \in \mathbf{I})$,
- $(1, y, z) \sim (1, v, t) \Leftrightarrow y - v \in \mathbf{I}$,
- $(w, 1, z) \sim (u, 1, t)$,
- $[m, 1, p] \nsim [1, n, p]$,
- $[m, 1, p] \nsim [q, n, 1]$,
- $[1, n, p] \nsim [q, n, 1]$,
- $[m, 1, p] \sim [u, 1, t] \Leftrightarrow (m - u \in \mathbf{I}, p - t \in \mathbf{I})$,
- $[1, n, p] \sim [1, v, t] \Leftrightarrow p - t \in \mathbf{I}$,
- $[q, n, 1] \sim [u, v, 1]$.

Sonuç 3.4.2 Aşağıdaki önermelerin birbirlerine denk oldukları $t \in \mathbf{I}$ iken $1 - t \notin \mathbf{I}$ özelliğinden kolayca görülebilir

1) Farklı tipten noktalar ve doğrular birbirleriyle komşu değildir.

2) Aynı komşuluktaki iki nokta ya da doğru aynı tiptedir.

Dayıoğlu ve Çelik (2011) çalışmasında $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkası yerine daha özel bir örnek olarak $Q(\varepsilon)$ dual kuaterniyonlar halkası alınarak koordinatlanan $PK_2(Q(\varepsilon))$ düzleminde bulunan bir teorem uyarlama olarak aşağıda verilecektir.

Teorem 3.4.3 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $(x_1 + x_2\varepsilon, y_1 + y_2\varepsilon, 1) \circ [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$

$\Leftrightarrow y_1 = x_1 m_1 + p_1,\ y_2 = x_2 m_1 + x_1 m_2 + p_2$

2) $(x_1 + x_2\varepsilon, y_1 + y_2\varepsilon, 1) \circ [1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon] \Leftrightarrow x_1 = p_1,\ x_2 = y_1 n_2 + p_2$

3) $(1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \circ [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon] \Leftrightarrow y_1 = m_1,\ y_2 = m_2 + z_2 p_1$

4) $(1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \circ [q_2\varepsilon, n_2\varepsilon, 1] \Leftrightarrow z_2 = q_2 + y_1 n_2$

5) $(w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \circ [1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon] \Leftrightarrow w_2 = n_2 + z_2 p_1$

6) $(w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \circ [q_2\varepsilon, n_2\varepsilon, 1] \Leftrightarrow z_2 = n_2$

7) $(a_1 + a_2\varepsilon, b_1 + b_2\varepsilon, 1) \sim (c_1 + c_2\varepsilon, d_1 + d_2\varepsilon, 1) \Leftrightarrow c_1 = a_1 \wedge d_1 = b_1$

8) $(1, a_1 + a_2\varepsilon, b_2\varepsilon) \sim (1, c_1 + c_2\varepsilon, d_2\varepsilon) \Leftrightarrow c_1 = a_1$

9) Her $a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2 \in \mathcal{B}$ için $(a_2\varepsilon, 1, b_2\varepsilon) \sim (c_2\varepsilon, 1, d_2\varepsilon)$.

Buraya kadar verilen bilgiler ışığında kolayca gösterilebilen ama literatürde ispatına rastlayamadığımız bir sonuç aşağıda teorem olarak verilecektir.

Teorem 3.4.4 $\mathbf{\Pi} = (\mathcal{N},\ \mathcal{D},\ \circ,\ \sim)$ PK-düzleminde $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1 &\sim c_2 \\ d_1 &\sim d_2 \end{aligned}$$

ve

$$(\forall\, i, j)(i, j \in \{1, 2\} \Rightarrow c_i \nsim d_j)$$

olarak seçilen doğru çiftlerinin karşılıklı arakesit noktaları aynı komşuluktadır.

İspat. c_1, c_2 ve d_1, d_2 doğru çiftleri için **PK2)** şartı gereği var olduğu bilinen arakesit noktaları

$$c_1 \wedge d_1 = N_1, c_2 \wedge d_1 = N_2, c_2 \wedge d_2 = N_3, c_1 \wedge d_2 = N_4$$

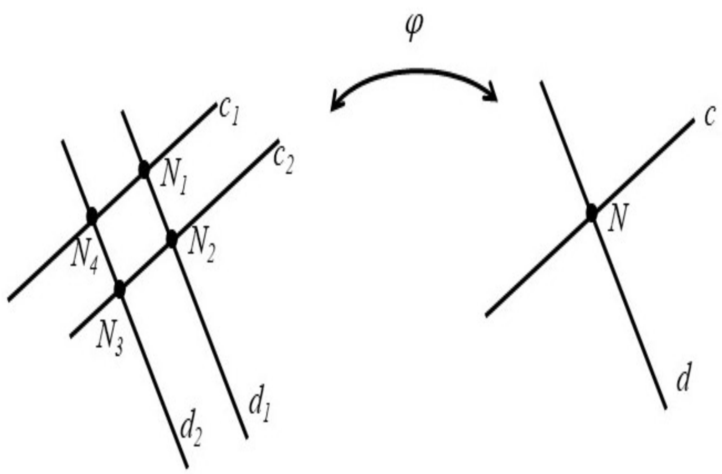
olsun. **PK3)** şartı gereği

$$\varphi(c_1) = \varphi(c_2) = c$$

ve

$$\varphi(d_1) = \varphi(d_2) = d$$

olacak biçimde $c, d \in \mathcal{D}'$ doğruları $\mathcal{P} = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ')$ projektif düzleminde vardır ve $c \wedge d = N$ noktası tek türlü olarak bellidir.



Şekil 3.9. Aynı Komşuluktaki Doğru Çiftlerinin Arakesitlerinin Görüntüsü

$N_1 \circ c_1$ ve $N_1 \circ d_1$ için φ dönüşümü geometrik yapı epimorfizmi olduğundan ve lineerlik şartını sağladığından

$$\varphi(N_1) \circ \varphi(c_1)$$

ve

$$\varphi(N_1) \circ \varphi(d_1)$$

dir. Bundan dolayı

$$\varphi(N_1) = \varphi(c_1) \wedge \varphi(d_1)$$

olur. $\varphi(c_1) = c$ ve $\varphi(d_1) = d$ olduğundan

$$\varphi(N_1) = c \wedge d \tag{3.4.1}$$

olduğu görülür.

Benzer işlemler ile $2 \leq i \leq 4$ için $\varphi(N_i) = c \wedge d$ olduğu görülür. Bu durumda N_1, N_2, N_3 ve N_4 noktalarının φ yapı dönüşümü altındaki görüntüleri eşit olduğundan aynı komşulukta oldukları sonucuna ulaşılır. ■

4. TOPLAMA ve ÇARPMA İŞLEMLERİNİN DÜZLEM GEOMETRİDEKİ KARŞILIKLARI

Bu bölümde cebirsel işlemler olan toplama ve çarpma işlemlerinin farklı düzlemlerdeki geometrik yorumlarına değinilecektir.

4.1 Reel Afin Düzlemde Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Geometrik Yorumu

M.Ö. 300'lü yıllar civarında yaşamış olan İskenderiyeli Öklid, Elemanlar adlı eserinde, bugün kısaca "düzlem" dediğimizde akla gelen "Öklid düzlemi", "Reel (afin) düzlem" ya da "analitik düzlem" adlarıyla bilinen, düzlem tanımını ilk defa yapmak için tanımsız bazı kavramlardan ve beş adet aksiyomdan faydalanmıştır. Bu aksiyomlardan üzerine en çok tartışılanı ve en meşhur olanı "paralellik aksiyomu" adıyla bilinen beşinci aksiyomdur. Bu aksiyomda Öklid "Eğer bir düz doğru iki düz doğruyu kesiyor ve bu kesişimde aynı taraftaki iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük kalıyorsa, bu iki doğru sonsuz uzatıldığında açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler." ifadesini kullansa da daha kolay anlaşılması için İskoç bilim adamı John Playfair tarafından bu ifadeye denk oladuğu gösterilen "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel (doğru) çizilebilir." ifadesi daha çok kullanılmıştır. Beşinci aksiyom üzerinde bilim adamlarınca yapılan uzun tartışmalar ve farklı yaklaşımlar neticesinde 1800'lü yıllarda Bolyai, Lobachevsky ve Riemann gibi öncülerin liderliğinde bu tezin de ana konusu olan gayri Öklidyen geometriler geliştirilmiştir.

Öklid ve diğer bazı matematikçiler doğru parçalarının uzunluklarını birbirlerine ekleyerek ve çarparak cebirsel geometrinin tarihteki ilk dayanak noktalarını oluşturmuşlardır. Öklid düzleminin daha sonraları çeşitli gelişmelerle günümüzde analitik düzlem adıyla bilinen halini almasıyla cebirsel geometri daha rahat anlaşılmış ve geliştirilmiştir. Özel olarak x-eksenindeki ve y-eksenindeki noktalar $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ile birebir eşlenmiş olduklarından Öklid düzleminde noktalar geometrik olarak da toplanabilir ve çarpılabilir.

Bu başlık altında önce aslında Öklid düzlemi olan reel afin düzlemde toplama ve çarpma işlemlerinin geometrik yorumları üzerinde durulacaktır. Toplama işlemi, paralelkenarlar yardımıyla uzunlukların yer değiştirmesiyle yapılmakla beraber çarpma işlemi, orantılı doğru parçaları ve üçgenlerin benzerlikleri kullanılarak geometrik anlam kazanmaktadır.

4.1.1 Reel Afin Düzlemde Toplama

Reel afin düzlemde x-ekseni üzerindeki $A = (a, 0)$ ve $B = (b, 0)$ noktaları verilsin. A noktasından geçip x-eksenine dik olan $[a]$ doğrusu ile $O = (0, 0)$ orjinden geçen y-ekseninden yani $[0]$ doğrusundan farklı ve eğimi keyfî bir m sayısı olan $[m, 0]$ doğrusunun arakesit noktası K olsun. Gerekli hesaplamalar yapıldığında K noktasının koordinatlarının (a, ma) olduğu görülür.

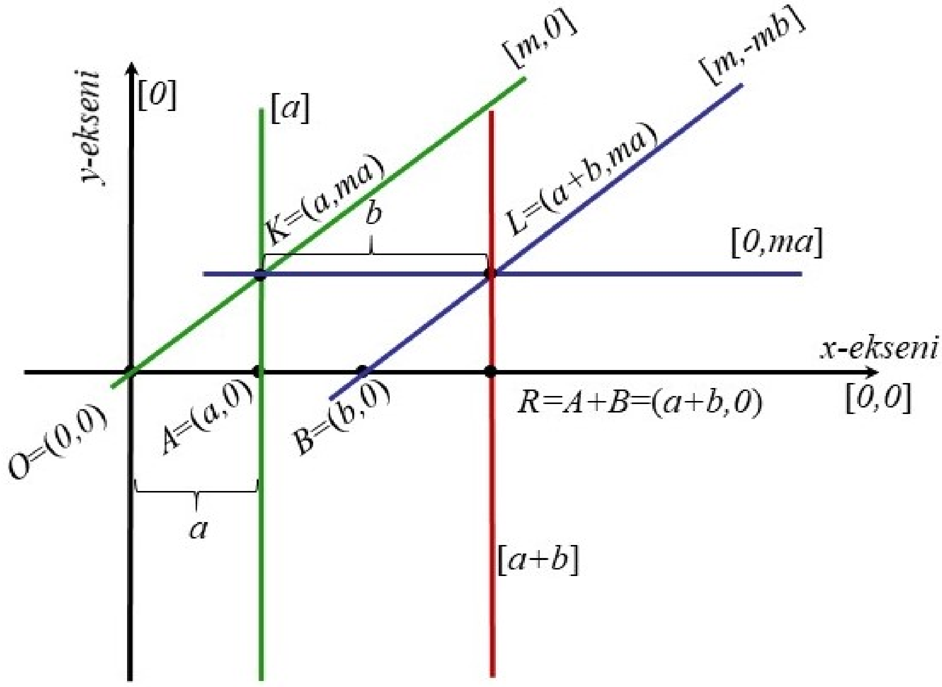
$K = (a, ma)$ noktasından geçip y-eksenine dik olan $[0, ma]$ doğrusu ile $B = (b, 0)$ noktasından geçen ve eğimi daha önce $[m, 0]$ doğrusunun eğimi için kullanılan m sayısı olan $[m, -mb]$ doğrusunun arakesit noktasına L adı verilsin. L noktasının koordinatları da gerekli hesaplamalar yapıldığında $(a + b, ma)$ olarak bulunur.

$L = (a + b, ma)$ noktasının x-ekseni üzerine dik izdüşümü alınacak olursa x-ekseni üzerindeki $[a + b] \wedge [0, 0]$ noktası elde edilir ki bu noktanın koordinatları $(a + b, 0)$ olduğundan, bu nokta $A + B$ toplamının koordinatları olarak tanımlanır.

Yani

$$\begin{aligned} A + B &= (a, 0) + (b, 0) \\ &= (a + b, 0) \end{aligned}$$

olur.



Şekil 4.1. Reel Afin Düzlemde Toplama

Şekil 4.1 de yer alan $OKLB$ paralelkenarı özel oluşturulmuş bir paralelkenardır. Burada OB ve KL kenarlarının uzunluğu x-ekseni üzerindeki AR doğru parçasının uzunluğu ile aynı olduğundan Şekil 3.1 de uzunluğu $a+b$ olan $A+B$ noktasını bulmak için, uzunluğu a olan OA doğru parçasının ucuna yine x-ekseni üzerinde olan ve uzunluğu OB doğru parçasınınki ile aynı yani b olan AR doğru parçası eklenmiş ve böylece koordinatları $(a+b, 0)$ olan R noktası tespit edilmiş olur.

4.1.2 Reel Afin Düzlemde Çarpma

Reel afin düzlemde x-ekseni üzerindeki noktaların çarpımının geometrik yorumu toplama için yapılan geometrik yorumdan oldukça farklıdır.

Şimdi reel afin düzlemde verilen $A = (a, 0)$ ve $B = (b, 0)$ noktaları için çarpma işleminin geometrik yorumu özet olarak verilecektir.

$B = (b, 0)$ noktasından geçip x-eksenine dik olan $[b]$ doğrusu ile $1 = (1, 0)$ noktasından geçip x-eksenine dik olmayan yani $[1]$ den farklı, eğimi keyfî bir m reel sayısı olan $[m, -m]$ doğrusunun arakesit noktasına M adı verilsin. M noktasının koordinatları gerekli hesaplamalar yapıldığında $(b, mb - m)$ olarak bulunur.

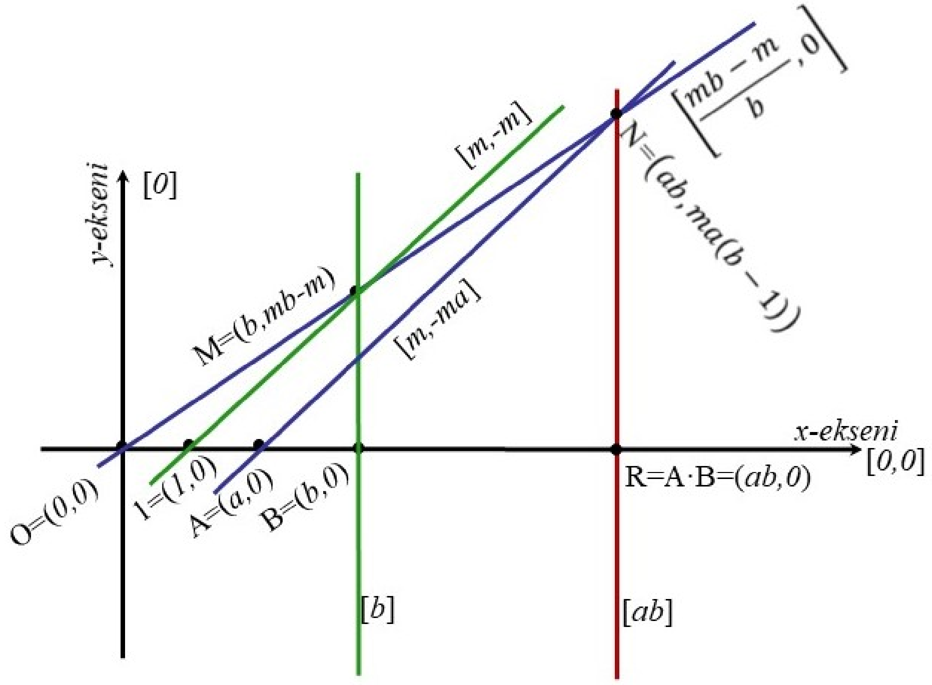
$M = (b, mb - m)$ noktası ile $O = (0, 0)$ noktasından geçen $[\frac{mb - m}{b}, -ma]$ doğrusu ile $A = (a, 0)$ noktasından geçen x-eksenine dik olmayan ve eğimi m olan $[m, -ma]$ doğrusunun arakesit noktasına N adı verilsin. N noktasının koordinatları da gerekli hesaplamalar yapıldığında $(ab, ma(b - 1))$ olarak bulunur.

$N = (ab, ma(b - 1))$ noktasının x-ekseni üzerine dik izdüşümü alınacak olursa x-ekseni üzerindeki $[ab] \wedge [0, 0]$ noktası elde edilir ki bu noktanın koordinatları $(ab, 0)$ olduğundan, bu nokta $A \cdot B$ çarpımının koordinatları olarak tanımlanır.

Yani

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a, 0) \cdot (b, 0) \\ &= (ab, 0) \end{aligned}$$

olur.



Şekil 4.2. Reel Afin Düzlemde Çarpma

Şekil 4.2 de yer alan $\overset{\triangle}{OM1}$ ve $\overset{\triangle}{ONA}$ benzer üçgenleri ile $\overset{\triangle}{OMB}$ ve $\overset{\triangle}{ONR}$ benzer üçgenleri özel olarak oluşturulmuş üçgenlerdir. $\overset{\triangle}{OM1}$ ve $\overset{\triangle}{ONA}$ üçgenleri arasındaki benzerlik oranı

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|O1|}{|OA|} = \frac{1}{a}$$

dır. Benzer biçimde $\overset{\triangle}{OMB}$ ve $\overset{\triangle}{ONR}$ üçgenleri arasındaki benzerlik oranı

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|OB|}{|OR|} = \frac{b}{r}$$

dir. Bundan dolayı

$$\left(\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{1}{a} \wedge \frac{|OM|}{|ON|} = \frac{b}{r}\right) \Rightarrow r = ab$$

olarak bulunur. Böylece koordinatları $(ab, 0)$ olan R noktası tespit edilmiş olur.

Bu konuda daha detaylı bilgi için Bennett (1995) çalışması ve Bayraktar (2012) tezi incelenebilir.

4.2 Reel Projektif Düzlemde Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Geometrik Yorumu

Veblen ve Young (1910) ile Coxeter (1949) eserlerinde toplama ve çarpma cebirsel işlemlerinin projektif geometri ile ilişkilerinden bahsedilirken, bu konudaki ilk çalışma örneklerinin Von Staudt (1847) tarafından verildiği ve Hessenberg (1905) çalışmasında Von Staudt' un yaptığı çalışmayı daha basitleştirdiği, gene aynı konuda O'hara ve Ward (1937) gibi çalışmaların olduğu anlaşılmaktadır.

Bu başlık altında bir projektif düzlem örneği olarak ilk bölümde tanıtılan reel projektif düzlemde toplama ve çarpma işlemlerinin geometrik yorumu üzerinde durulacaktır.

4.2.1 Reel Projektif Düzlemde Toplama

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ de, x-eksenine karşılık gelen, $[0,1,0]$ doğrusu üzerinde $A=(a,0,1)$ ve $B=(b,0,1)$ noktaları verilsin.

A noktası ile $V=(\infty)=(0,1,0)$ ideal noktası yardımıyla $AV=[1,0,-a]$ doğrusu ve $O=(0,0,1)$ orjin noktası ile $S=(1,1,0)$ ideal noktası yardımıyla $OS=[-1,1,0]$ doğrusu oluşturulsun. $AV\wedge OS=K$ noktası hesaplanırsa $K=(a,a,1)$ olduğu görülür.

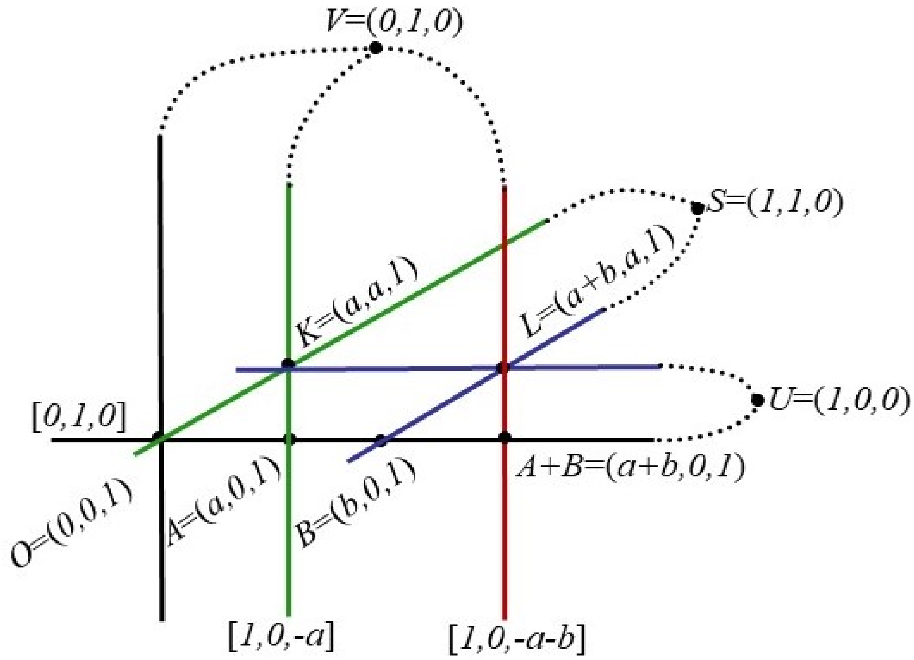
$B=(b,0,1)$ noktası ile $S=(1,1,0)$ ideal noktası yardımıyla $BS=[-1,1,b]$ doğrusu ve $K=(a,a,1)$ noktası ile x-eksenine paralel tüm doğruların üzerindeki ideal nokta olan $U=(1,0,0)$ noktası yardımıyla $KU=[0,1,-a]$ doğrusu oluşturulsun. $BS\wedge KU=L$ noktası hesaplanırsa $L=(a+b,a,1)$ olduğu görülür.

$L=(a+b,a,1)$ noktası ile $V=(0,1,0)$ noktası yardımıyla $LV=[1,0,-a-b]$ doğrusu ve x-eksenine karşılık gelen $OU=[0,1,0]$ doğrusunun arakesiti bulunarak $A+B=(a+b,0,1)$ noktası tespit edilir.

Yani

$$
\begin{aligned}
A+B &= (a,0,1)+(b,0,1)\\
&= (a+b,0,1)
\end{aligned}
$$

dir.



Şekil 4.3. $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ de Toplama

4.2.2 Reel Projektif Düzlemde Çarpma

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ reel projektif düzleminde x-eksenine karşılık gelen $[0,1,0]$ doğrusu üzerinde verilen $A=(a,0,1)$ ve $B=(b,0,1)$ noktaları için çarpma işleminin geometrik yorumu özet olarak verilecektir.

$\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ de $[0,1,0]$ doğrusu üzerinde bulunan $A=(a,0,1)$ ve $b\neq 0$ olmak üzere $B=(b,0,1)$ noktaları verilsin.[3] $1=(1,0,1)$ noktası ile $S=(1,1,0)$ ideal noktasından geçen

[3] $b=0$ olması durumunda herhangi bir tanımsızlık söz konusu olmamakla birlikte konunun çok fazla dağılmaması için buraya bu durum dahil edilmemiştir.

$1S = [-1, 1, 1]$ doğrusu ile $B = (b, 0, 1)$ noktası ile $V = (0, 1, 0)$ ideal noktasından geçen $BV = [1, 0, -b]$ doğrusu oluşturulsun. $1S \wedge BV = M$ noktası hesaplanırsa $M = (b, b-1, 1)$ olduğu görülür.

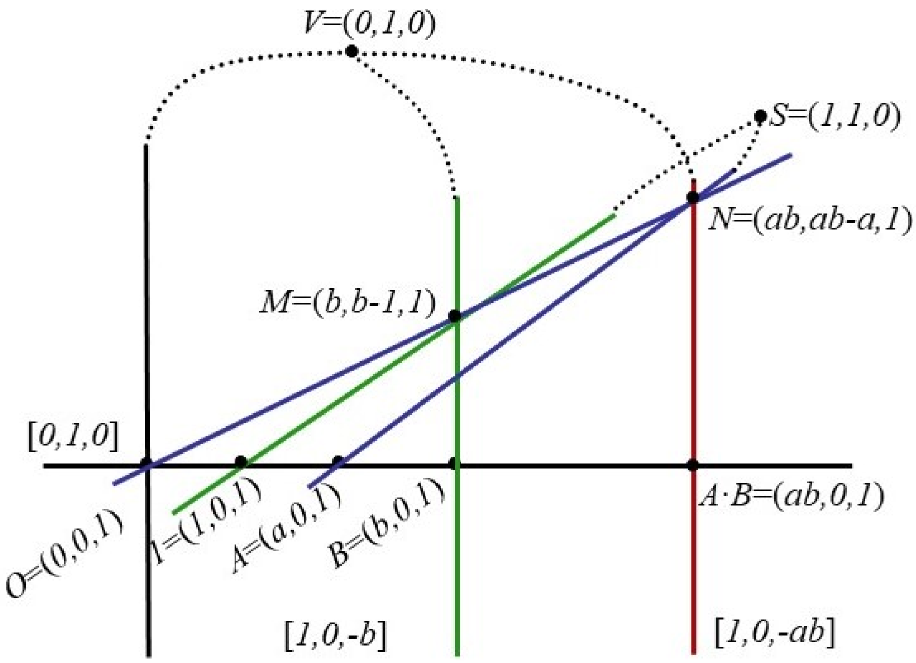
$O = (0, 0, 1)$ noktası ile $M = (b, b-1, 1)$ noktasından geçen $OM = [\frac{1-b}{b}, 1, 0]$ doğrusu ve $A = (a, 0, 1)$ noktası ile $S = (1, 1, 0)$ ideal noktasından geçen $AS = [-1, 1, a]$ doğrusu oluşturulsun. $OM \wedge AS = N$ noktası hesaplanırsa $N = (ab, ab - a, 1)$ olduğu görülür.

$N = (ab, ab - a, 1)$ noktası ile $V = (0, 1, 0)$ noktasını birleştiren $NV = [1, 0, -ab]$ doğrusu ve x-eksenine karşılık gelen $OU = [0, 1, 0]$ doğrusunun arakesiti bulunarak $A \cdot B = (ab, 0, 1)$ noktası tespit edilir.

Yani

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a, 0, 1) \cdot (b, 0, 1) \\ &= (ab, 0, 1) \end{aligned}$$

dir.



Şekil 4.4. $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ de Çarpma

4.3 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde Toplama İşlemi

Bu kısımda verilen bir $\mathcal{B}$ bölümlü halkası yardımıyla koordinatlanan $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Projektif Klingenberg düzleminde toplama işleminin geometrik yorumu üzerinde durulacaktır. $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ve $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemlerinde x-ekseni üzerindeki noktaların toplamı için yapılan tanımlama gibi $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde x-ekseni görevi üstlenen OU doğrusu üzerindeki noktaların toplamı takdim edilecektir. Bu kısmın ikinci ve üçüncü alt başlıklarında toplama işlemi $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki $[m,1,p]$ ve $[1,n,p]$ tipinden doğruların üzerindeki noktalara genişletilecektir ve bu kısmın son bölümünde çarpma işlemi üzerinde durulacaktır.

4.3.1 OU Doğrusu Üzerindeki Noktaların Toplama İşlemi

Bu kısımda özel olarak seçilen OU doğrusu üzerindeki noktaların toplamı için verilen algoritmik tanım bir kaç adımda tamamlanacaktır.

Tanım 4.3.1 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde ikisi birden U ya komşu olmayan iki nokta olsun. UV doğrusu üzerindeki $S = (1,1,0)$ noktası yardımıyla

$$K = AV \wedge OS$$

noktası ve K noktası yardımıyla belirlenen

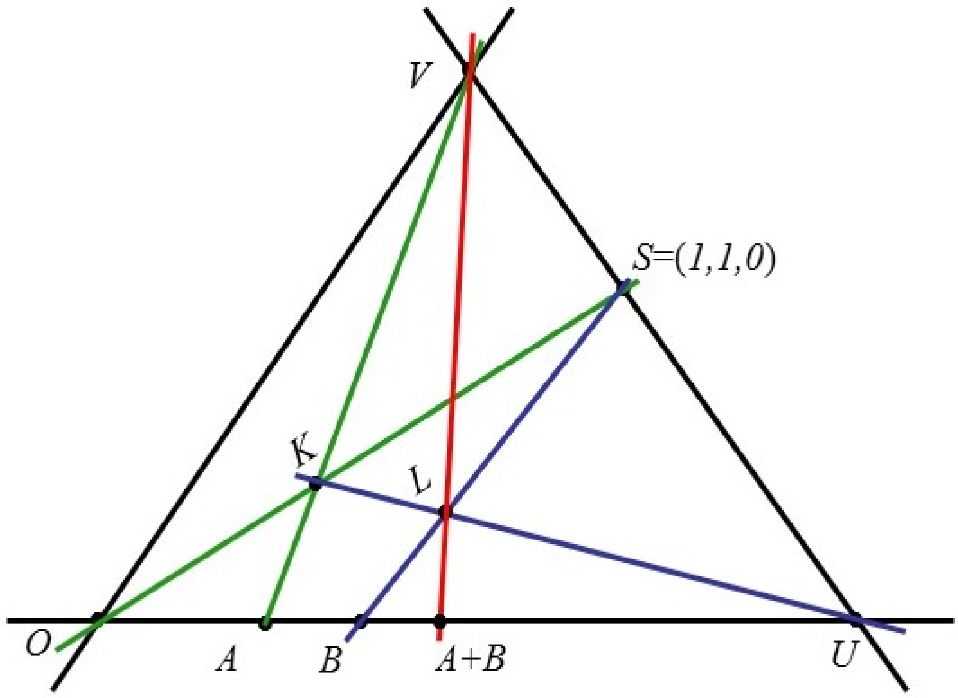
$$L = KU \wedge BS$$

noktasını kullanarak $A + B$ noktası

$$A + B = LV \wedge OU$$

olarak tanımlanır.

Bu işlem Şekil 4.5 ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.5. $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU Doğrusu Üzerindeki Noktaların Toplamı

Bu tanım Çelik ve Erdoğan (2013) ve Çelik ve Dayıoğlu (2013) çalışmalarında, OU doğrusu üzerinde birbirlerine komşu olmayan iki nokta için verilmişti. Bu doktora tezinin yazarının ve danışmanının, tez yazım tarihine kadar olan süre içindeki yaptıkları çalışmalarında, toplanılacak noktaların ikisinin birden U noktasına komşu olması durumu dışında, verilen tanımın OU doğrusu üzerindeki birbirlerine komşu olan tüm nokta ikilileri için de anlamlı olduğu görülmüş ve tanım tezdeki hâlini almıştır.

OU doğrusu üzerinde toplanılacak olan noktaların ikisinin birden U noktasına komşu olması durumunda tanımda verilen algoritmaya göre elde edilen KU ve BS doğruları birbirlerine komşu olmaktadır ve bu iki doğrunun kesişim noktası olan L noktasının belirlenmesinde sorunlar ortaya çıkmaktadır.

Aşağıdaki teoremde, daha önce geometrik olarak tanımlanan toplama işleminin, üzerinde çalışılan geometrik yapıyı koordinatlamada kullanılan cebirsel yapıdaki karşılıkları incelenmiştir. Bu teoremde A ve B noktalarının 3. tip nokta, Z noktasının da 1. tip (yani U noktasına komşu) bir nokta olduğunu gözden kaçırmamak gerekir.

Teorem 4.3.2 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki OU doğrusu üzerinde verilen

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

ve

$$Z = (1, 0, z_2\varepsilon)$$

noktaları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $A + B = ((a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\varepsilon, 0, 1) = B + A,$

ii) $A + Z = (1, 0, z_2\varepsilon) = Z = Z + A$

İspat. İspatta $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU üzerindeki noktalar için verilen toplama tanımındaki işlemlere ait hesaplamalar yapılacaktır.

Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} AV &= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon], \\ OS &= [1, 1, 0] \end{aligned}$$

olduğu ve bu doğruların arakesiti olan K noktasının koordinatlarının

$$K = AV \wedge OS = (a_1 + a_2\varepsilon, a_1 + a_2\varepsilon, 1)$$

olduğu görülür.

Benzer işlemlerle

$$\begin{aligned} KU &= [0, 1, a_1 + a_2\varepsilon], \\ BS &= [1, 1, -b_1 - b_2\varepsilon] \end{aligned}$$

doğrularının arakesiti olan L noktasının koordinatları

$$L = KU \wedge BS = (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, a_1 + a_2\varepsilon, 1)$$

olarak bulunur. L noktası yardımıyla bulunan

$$LV = [1, 0, a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon]$$

doğrusu ile

$$OU = [0, 1, 0]$$

doğrusunun kesişim noktası $A + B$ olarak tanımlandığından $A + B$ noktasının koordinatları

$$
\begin{aligned}
A+B &= (a_1+a_2\varepsilon,0,1)+(b_1+b_2\varepsilon,0,1)\\
&= LV\wedge OU\\
&= [1,0,a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon]\wedge[0,1,0]\\
&= (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon,0,1)
\end{aligned}
$$

olur.

Benzer hesaplamalar A ve B noktalarının rolleri karşılıklı değiştirilerek yapıldığında

$$
\begin{aligned}
BV &= [1,0,b_1+b_2\varepsilon],\\
OS &= [1,1,0]\\
K &= BV\wedge OS=(b_1+b_2\varepsilon,b_1+b_2\varepsilon,1)\\
KU &= [0,1,b_1+b_2\varepsilon],\\
AS &= [1,1,-a_1-a_2\varepsilon]\\
L &= KU\wedge AS=(b_1+a_1+(b_2+a_2)\varepsilon,b_1+b_2\varepsilon,1)\\
LV &= [1,0,b_1+a_1+(b_2+a_2)\varepsilon],\\
OU &= [0,1,0]
\end{aligned}
$$

olduğu ve bu nedenle B ve A noktalarının toplamı olan $B+A$ noktasının koordinatlarının

$$
\begin{aligned}
B+A &= (b_1+b_2\varepsilon,0,1)+(a_1+a_2\varepsilon,0,1)\\
&= LV\wedge OU\\
&= [1,0,b_1+a_1+(b_2+a_2)\varepsilon]\wedge[0,1,0]\\
&= (b_1+a_1+(b_2+a_2)\varepsilon,0,1)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Burada $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathcal{B}$ bölümlü halkasının elemanı olduklarından $+$

işleminin değişme özeliği göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} B+A &= (b_1+a_1+(b_2+a_2)\varepsilon) \\ &= (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon) \\ &= A+B \end{aligned}$$

eşitliği kolayca görülür ki bu ***i)*** nin doğru olduğunu gösterir.

ii) nin doğru olduğunu göstermek için de yine Tanım 4.3.1 de verilen işlemler yapılacaktır. Tanımda verilen işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} AV &= [1,0,a_1+a_2\varepsilon], \\ OS &= [1,1,0] \\ K &= AV\wedge OS=(a_1+a_2\varepsilon,a_1+a_2\varepsilon,1) \\ KU &= [0,1,a_1+a_2\varepsilon], \\ ZS &= [z_2\varepsilon,-z_2\varepsilon,1] \\ L &= KU\wedge ZS=(1,(a_1z_2)\varepsilon,z_2\varepsilon) \\ LV &= [z_2\varepsilon,0,1], \\ OU &= [0,1,0] \end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan

$$\begin{aligned} A+Z &= (a_1+a_2\varepsilon,0,1)+(1,0,z_2\varepsilon) \\ &= LV\wedge OU \\ &= [z_2\varepsilon,0,1]\wedge[0,1,0] \\ &= (1,0,z_2\varepsilon) \\ &= Z \end{aligned}$$

sonucu bulunur. $Z + A$ toplamı için ise tanımda belirtilen

$$\begin{aligned}
ZV &= [z_2\varepsilon, 0, 1],\\
OS &= [1, 1, 0]\\
K &= ZV \wedge OS = (1, 1, z_2\varepsilon)\\
KU &= [0, z_2\varepsilon, 1],\\
AS &= [1, 1, -a_1 - a_2\varepsilon]\\
L &= KU \wedge AS = (1, 1 - (z_2a_1)\varepsilon, z_2\varepsilon)\\
LV &= [z_2\varepsilon, 0, 1],\\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}$$

hesaplamaları yapılarak

$$\begin{aligned}
Z + A &= (1, 0, z_2\varepsilon) + (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1)\\
&= LV \wedge OU\\
&= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [0, 1, 0]\\
&= (1, 0, z_2\varepsilon)\\
&= Z
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. ■

Sonuç 4.3.3 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerindeki

$$A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1),$$

noktası ve OU doğrusu üzerinde U noktasına komşu olan bir

$$Z = (1, 0, z_2\varepsilon)$$

noktası ile $O' \sim O,\ O' \circ OU$ özelliğindeki

$$O' = (x_2\varepsilon, 0, 1)$$

noktası için aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $A + O = A$

ii) $O + Z = Z$

iii) $A + O' \sim A.$

İspat.

i) Teorem 4.3.2- ***i)***den

$$\begin{aligned} A + O &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) + (0, 0, 1) \\ &= ((a_1 + a_2\varepsilon) + (0 + 0\varepsilon), 0, 1) \\ &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= A \end{aligned}$$

olduğu bellidir.

ii) $O = (0, 0, 1)$ noktası 3. tip nokta ve $Z = (1, 0, z_2\varepsilon)$ noktası 1. tip nokta olduğu için Teorem 4.3.2 -***ii)*** kullanılarak

$$\begin{aligned} O + Z &= (0, 0, 1) + (1, 0, z_2\varepsilon) \\ &= (1, 0, z_2\varepsilon) \\ &= Z \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

iii) Teorem 4.3.2- ***i)*** den

$$\begin{aligned} A + O' &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) + (x_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (a_1 + (a_2 + x_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $A + O' = (a_1 + (a_2 + x_2)\varepsilon, 0, 1)$ ve $A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1)$ noktaları için komşuluk bağıntısı gereği

$$a_1 + (a_2 + x_2)\varepsilon - (a_1 + a_2\varepsilon) = x_2\varepsilon \in \mathcal{B}\varepsilon$$

olduğundan

$$A + O' \sim A$$

sonucu bulunur. ■

$(x_1 + x_2\varepsilon, 0, 1)$, $(y_1 + y_2\varepsilon, 0, 1)$ biçimindeki noktaların aynı komşulukta olabilmesi için gerek ve yeter şartın $x_1 = y_1$ olacağı komşuluk bağıntısı tanımından kolayca görülebilir. Bu nedenle OU doğrusu üzerinde aynı komşulukta olan 3. tip noktalar için Teorem 4.3.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.4 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde birbirlerine komşu olan

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), \\ B &= (a_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

noktaları için

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) + (a_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (2a_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.3.1 de, OU doğrusu üzerindeki 3. tipten noktaların toplamı, $S = (1, 1, 0)$ noktası yardımıyla belirlenmiştir. Aşağıdaki teoremde bu toplamı bulmak için S yerine $d_\infty = UV$ doğrusu üzerindeki başka bazı noktaların da alınabileceği gösterilecektir.

Teorem 4.3.5 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde ikisi birden U ya komşu olmayan iki nokta olsun. UV doğrusu üzerindeki herhangi bir $S' = (1, y_1 + y_2\varepsilon, 0)$ noktası yardımıyla bulunan $K = AV \wedge OS'$ ve $L = KU \wedge BS'$ noktaları kullanılarak elde edilen $LV \wedge OU$ noktası $A + B$ noktasına eşittir.

İspat. $A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1)$ ve $B = (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1)$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} AV &= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon], \\ OS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, 0] \end{aligned}$$

olduğu ve bu doğruların arakesitinin

$$K = AV \wedge OS' = (a_1 + a_2\varepsilon, a_1y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon, 1),$$

olduğu görülür.

Benzer biçimde

$$\begin{aligned} KU &= [0, 1, a_1y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon], \\ BS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -(b_1y_1 + (b_1y_2 + b_2y_1)\varepsilon)] \end{aligned}$$

doğrularının arakesiti ise

$$L = KU \wedge BS'$$

$$= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon - (b_1y_1 + (b_1y_2 + b_2y_1)\varepsilon), 1)$$

olarak bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} LV &= [1, 0, a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon], \\ OU &= [0, 1, 0] \end{aligned}$$

doğruları tespit edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} LV \wedge OU &= [1, 0, a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon] \wedge [0, 1, 0] \\ &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.3.2 yardımıyla hesaplanan $A + B$ noktasına eşittir.

$A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1)$ ve $B = (1, 0, z_2\varepsilon)$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
AV &= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon], \\
OS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, 0] \\
K &= AV \wedge OS' = (a_1 + a_2\varepsilon, a_1y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon, 1), \\
KU &= [0, 1, a_1y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon], \\
BS' &= [z_2\varepsilon, -y_1^{-1}z_2\varepsilon, 1] \\
L &= KU \wedge BS' = (1, (z_2a_1y_1)\varepsilon, z_2\varepsilon) \\
LV &= [z_2\varepsilon, 0, 1], \\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned}
LV \wedge OU &= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (1, 0, z_2\varepsilon) \\
&= B
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ki bu Teorem 4.3.2 yardımıyla hesaplanan $A + B$ noktasına eşittir.

$B + A$ toplamı için de gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
BV &= [z_2\varepsilon, 0, 1], \\
OS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, 0] \\
K &= BV \wedge OS' = (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \\
KU &= [0, y_1^{-1}z_2\varepsilon, 1], \\
AS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -(a_1y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon)] \\
L &= KU \wedge AS' = (1, y_1 + (y_2 - z_2a_1y_1)\varepsilon, z_2\varepsilon) \\
LV &= [z_2\varepsilon, 0, 1], \\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda sonuç olarak

$$\begin{aligned}
LV \wedge OU &= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (1, 0, z_2\varepsilon) \\
&= B
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu Teorem 4.3.2 yardımıyla hesaplanan $A + B$ noktasına eşittir. ■

Bu son teoremden aşağıdaki sonucun elde edileceği aşikârdır.

Sonuç 4.3.6 Tanım 4.3.1 de kullanılan $S = (1, 1, 0)$ yerine d_∞ üzerinde U ve V noktalarına komşu olmayan herhangi bir nokta alındığında toplama işlemi değişmez.

4.3.2 $[m, 1, p]$ Tipinden Doğrular Üzerindeki Noktalar İçin Toplama İşlemi

Şimdi OU doğrusu üzerindeki noktaların toplamından faydalanılarak $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ projektif Klingenberg düzleminde herhangi bir $[m, 1, p]$ tipinden doğru üzerindeki iki noktanın toplamı geometrik ve cebirsel olarak incelenecektir.

Tanım 4.3.7 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde $[m, 1, p]$ tipinden bir doğru üzerinde, en azından biri $d_\infty = UV$ doğrusuna yakın olmayan iki nokta olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A' &= AV \wedge OU, \\ B' &= BV \wedge OU, \end{aligned}$$

olmak üzere Tanım 4.3.1 yardımıyla bulunan

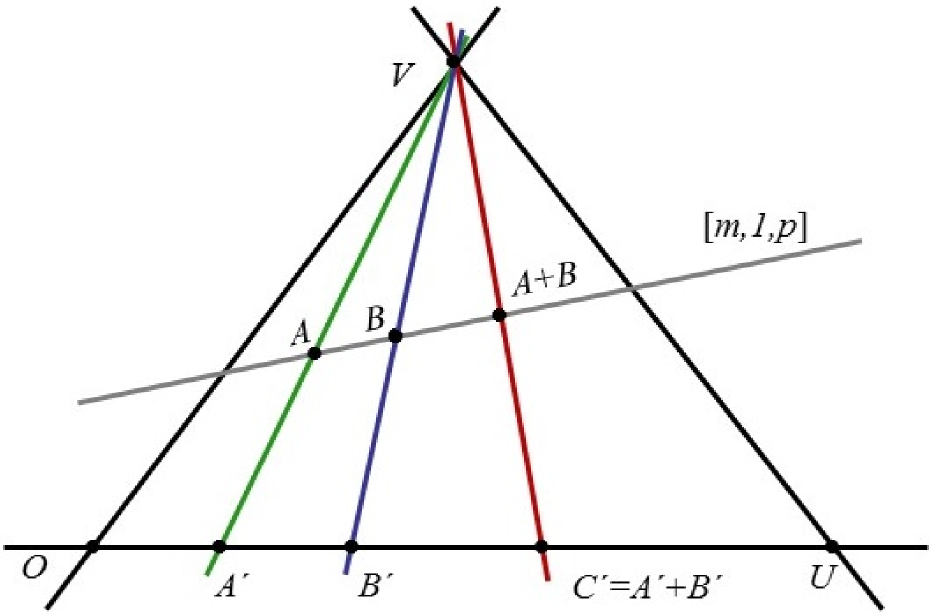
$$C' = A' + B'$$

noktası kullanılarak

$$A + B = C'V \wedge [m, 1, p]$$

olarak tanımlanır.

Bu işlem Şekil 4.6 ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.6. $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde $[m, 1, p]$ Tipinden Doğrular Üzerindeki Noktaların Toplamı

Teorem 4.3.8 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde keyfî bir $[m_1{+}m_2\varepsilon, 1, p_1{+}p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerindeki

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1), \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, b_3 + b_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

noktaları ve yine bu doğru üzerinde d_∞ doğrusuna yakın olan

$$Z = (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon)$$

noktası için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1) \\ &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon)(m_1 + m_2\varepsilon) + p_1 + p_2\varepsilon, 1). \end{aligned}$

ii) $A + Z = (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) = Z.$

İspat. Tanım 4.3.7 de belirtilen hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} A' &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ B' &= (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Teorem 4.3.2 - ***i)*** gereği

$$\begin{aligned} C' &= A' + B' \\ &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) + (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Tanım 4.3.7 gereği

$$\begin{aligned}
A+B &= C'V \wedge [m_1+m_2\varepsilon, 1, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= [1,0,a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon] \wedge [m_1+m_2\varepsilon, 1, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon, (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon)(m_1+m_2\varepsilon)+p_1+p_2\varepsilon, 1) \\
&= (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon, a_3+b_3+(a_4+b_4)\varepsilon-(p_1+p_2\varepsilon), 1)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu ***i)*** nin doğru olduğunu gösterir.

ii) nin ispatı için Tanım 4.3.7 de belirtilen işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
A' &= (a_1+a_2\varepsilon, 0, 1) \\
Z' &= (1, 0, z_2\varepsilon)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Teorem 4.3.2-***ii)*** gereği

$$C' = A' + Z' = Z'$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A+Z &= C'V \wedge [m_1+m_2\varepsilon, 1, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [m_1+m_2\varepsilon, 1, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= (1, m_1+m_2\varepsilon+(z_2\varepsilon)(p_1+p_2\varepsilon), z_2\varepsilon) \\
&= (1, y_1+y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \\
&= Z
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.3.9 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde keyfî bir $[m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerinde

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1), \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, b_3 + b_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

noktaları ile aynı doğru üzerindeki, d_∞ doğrusuna yakın olan bir

$$Z = (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon)$$

noktası verilsin. Bu durumda $[m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$ ile OV doğrusunun arakesiti olan

$$O_p = (0, p_1 + p_2\varepsilon, 1)$$

noktasına komşu ve $[m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerinde olan bir

$$Y = (w_2\varepsilon, p_1 + (w_2m_1 + p_2)\varepsilon, 1)$$

noktası için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i) $A + B = B + A$

ii) $A + Z = Z + A$

iii) $A + O_p = A$

iv) $O_p + Z = Z$

v) $A + Y \sim A.$

İspat. ***i)*** A ve B noktaları için Teorem 4.3.8 den

$$A + B = (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1)$$

ve

$$B + A = (b_1 + a_1 + (b_2 + a_2)\varepsilon, b_3 + a_3 + (b_4 + a_4)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1)$$

olduğu görülür. $(1 \leq i \leq 4)$ için $a_i, b_i \in \mathcal{B}$ olup $\mathcal{B}$ de toplama işlemi değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon, a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1) \\ &= (b_1 + a_1 + (b_2 + a_2)\varepsilon, b_3 + a_3 + (b_4 + a_4)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1) \\ &= B + A \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

ii) $[m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$ üzerindeki A ve Z noktaları için $A + Z = Z$ olduğu Teorem 4.3.8 de verildi. $Z + A$ toplamını bulmak için Tanım 4.3.7 de verilen yöntem takip edilerek

$$\begin{aligned} Z' &= ZV \wedge OU \\ &= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [0, 1, 0] \\ &= (1, 0, z_2\varepsilon) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
A' &= AV \wedge OU \\
&= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1)
\end{aligned}
$$

bulunur ve Teorem 4.3.2 ***i)*** gereği

$$
\begin{aligned}
C' &= Z' + A' \\
&= (1, 0, z_2\varepsilon) + (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\
&= (1, 0, z_2\varepsilon) \\
&= Z'
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
Z + A &= C'V \wedge [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon] \\
&= [z_2\varepsilon, 0, 1] \wedge [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon] \\
&= (1, m_1 + m_2\varepsilon + (z_2\varepsilon)(p_1 + p_2\varepsilon), z_2\varepsilon) \\
&= (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \\
&= Z
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $A + Z = Z = Z + A$ olduğu görülür.

iii) Teorem 4.3.8- ***i)*** den

$$
\begin{aligned}
A + O_p &= (a_1 + a_2\varepsilon, (a_3 + a_4\varepsilon) + (p_1 + p_2\varepsilon) - (p_1 + p_2\varepsilon), 1) \\
&= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1) \\
&= A
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

iv) Teorem 4.3.8- ***ii)*** den

$$\begin{aligned} O_p + Z &= (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \\ &= Z \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

v) Teorem 4.3.8- ***i)*** den yararlanılarak $A + Y$ toplamı

$$\begin{aligned} A + Y &= (a_1 + (a_2 + w_2)\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon + (w_2 m_1)\varepsilon + p_1 + p_2\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), 1) \\ &= (a_1 + (a_2 + w_2)\varepsilon, a_3 + (a_4 + w_2 m_1)\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + w_2)\varepsilon - (a_1 + a_2\varepsilon) &= w_2\varepsilon \in \mathbf{I} \\ a_3 + (a_4 + w_2 m_1)\varepsilon - (a_3 + a_4\varepsilon) &= (w_2 m_1)\varepsilon \in \mathbf{I} \end{aligned}$$

olduğundan komşuluk bağıntısı gereği

$$A + Y \sim A$$

olduğu görülür. ■

4.3.3 $[1, n, p]$ Tipinden Doğrular Üzerindeki Noktalar İçin Toplama İşlemi

Şimdi OU doğrusunun ve $[m, 1, p]$ tipinden doğruların üzerindeki noktaların toplamından faydalanılarak $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Projektif Klingenberg düzleminde herhangi bir $[1, n, p]$ tipinden doğru üzerindeki iki noktanın toplamı geometrik ve cebirsel olarak incelenecektir.

Tanım 4.3.10 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde $[1, n, p]$ tipinden bir doğru üzerinde, en azından biri V noktasına komşu olmayan iki nokta olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A'' &= AU \wedge OE, \\ B'' &= BU \wedge OE, \end{aligned}$$

olmak üzere Tanım 4.3.7 yardımıyla bulunan

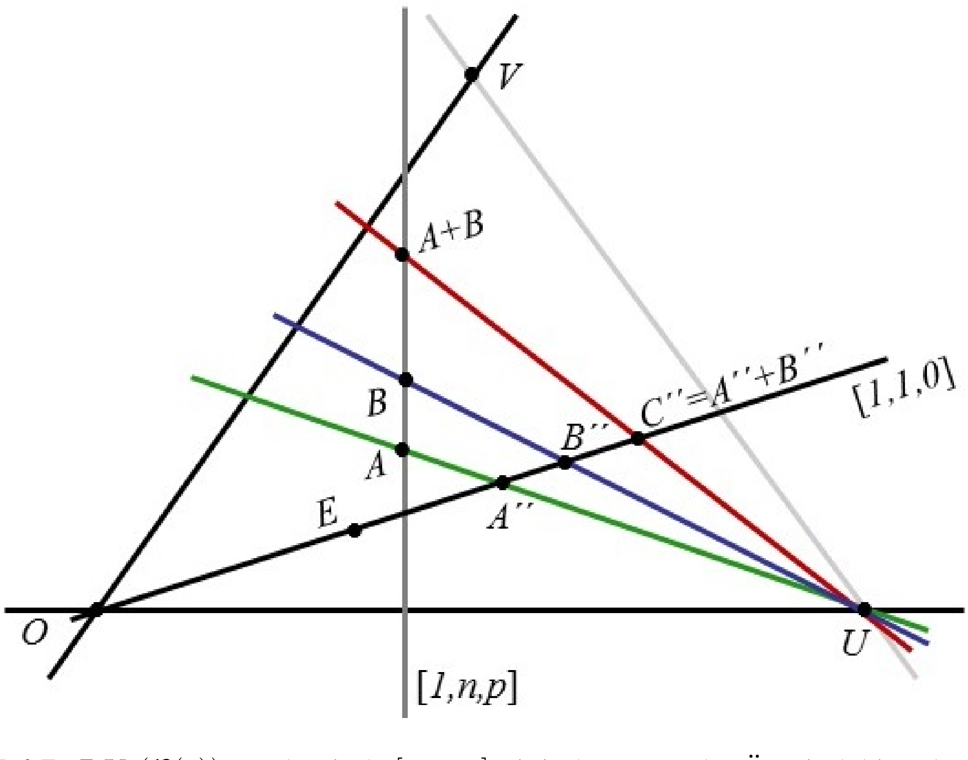
$$C'' = A'' + B''$$

noktası kullanılarak

$$A + B = C''U \wedge [1, n, p]$$

olarak tanımlanır.

Bu işlem Şekil 4.7 ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.7. $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde $[1, n, p]$ Tipinden Doğrular Üzerindeki Noktaların

Teorem 4.3.11 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde keyfî bir $[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerindeki

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1), \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, b_3 + b_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

noktaları ve yine bu doğru üzerinde V noktasına komşu olan

$$Z = (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon)$$

noktası için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $A + B = ((a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon, 1)$

$$= ((a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon)(n_2\varepsilon) + p_1 + p_2\varepsilon, a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon, 1),$$

ii) $A + Z = (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) = Z.$

İspat. Tanım 4.3.10 da belirtilen hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} A'' &= (a_3 + a_4\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1) \\ B'' &= (b_3 + b_4\varepsilon, b_3 + b_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

olduğu, Teorem 4.3.8- ***i)*** gereği [4]

$$\begin{aligned} C'' &= A'' + B'' \\ &= (a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon, a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon - 0, 1) \end{aligned}$$

[4] A'' ve B'' noktaları 2. tip bir doğru olan $OE = [1, 1, 0]$ doğrusu üzerinde olduklarından, $p_1 + p_2\varepsilon = 0$ olur.

olduğu elde edilir. Tanım 4.3.10 gereği

$$\begin{aligned}
A+B &= C''U \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= [0, 1, a_3+b_3+(a_4+b_4)\varepsilon] \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= ((a_3+b_3+(a_4+b_4)\varepsilon)(n_2\varepsilon)+p_1+p_2\varepsilon, a_3+b_3+(a_4+b_4)\varepsilon, 1) \\
&= (a_1+b_1+(a_2+b_2)\varepsilon-(p_1+p_2\varepsilon), a_3+b_3+(a_4+b_4)\varepsilon, 1)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki bu ***i)*** nin doğru olduğunu gösterir.

ii) İlgili hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
A'' &= (a_3+a_4\varepsilon, a_3+a_4\varepsilon, 1) \\
Z'' &= (1, 1, z_2\varepsilon)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Teorem 4.3.8- ***ii)*** gereği

$$\begin{aligned}
C'' &= A''+Z'' \\
&= Z''
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A+Z &= C''U \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= [0, z_2\varepsilon, 1] \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1+p_2\varepsilon] \\
&= (n_2\varepsilon+(z_2p_1)\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \\
&= (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \\
&= Z
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 4.3.12 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde keyfî bir $[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerinde

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1), \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, b_3 + b_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

noktaları ile aynı doğru üzerindeki, V noktasına komşu olan bir

$$Z = (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon)$$

noktası verilsin. Bu durumda $[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$ ile OU doğrusunun arakesiti olan

$$O_{p'} = (p_1 + p_2\varepsilon, 0, 1)$$

noktasına komşu ve $[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$ doğrusu üzerinde olan bir

$$Y' = (p_1 + p_2\varepsilon, w_2\varepsilon, 1)$$

noktası için aşağıdakiler doğrudur.

i) $A + B = B + A$

ii) $A + Z = Z + A$

iii) $A + O_{p'} = A$

iv) $O_{p'} + Z = Z$

v) $A + Y' \sim A.$

İspat. ***i)*** A ve B noktaları için Teorem 4.3.11 den

$$A + B = (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon, 1)$$

ve

$$B + A = (b_1 + a_1 + (b_2 + a_2)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), b_3 + a_3 + (b_4 + a_4)\varepsilon, 1)$$

olduğu görülür. $(1 \leq i \leq 4)$ için $a_i, b_i \in \mathcal{B}$ olup $\mathcal{B}$ de toplama işlemi değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), a_3 + b_3 + (a_4 + b_4)\varepsilon, 1) \\ &= (b_1 + a_1 + (b_2 + a_2)\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), b_3 + a_3 + (b_4 + a_4)\varepsilon, 1) \\ &= B + A \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

ii) $[1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon]$ üzerindeki Z ve A noktaları için $A + Z = Z$ olduğu Teorem 4.3.11 de verildi. $Z + A$ toplamını bulmak için Tanım 4.3.10 de verilen yöntem takip edilerek

$$\begin{aligned} Z'' &= ZU \wedge OE \\ &= (1, 1, z_2\varepsilon) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A'' &= AU \wedge OE \\ &= (a_3 + a_4\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

olup Sonuç 4.3.9 gereği

$$\begin{aligned} C'' &= Z'' + A'' \\ &= (1, 1, z_2\varepsilon) \\ &= Z'' \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned} Z + A &= C''U \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon] \\ &= [0, z_2\varepsilon, 1] \wedge [1, n_2\varepsilon, p_1 + p_2\varepsilon] \\ &= (n_2\varepsilon + (z_2p_1)\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \\ &= (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \\ &= Z \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $A + Z = Z = Z + A$ olduğu görülür.

iii) Teorem 4.3.11-***i)*** den

$$\begin{aligned} A + O_{p'} &= ((a_1 + a_2\varepsilon) + (p_1 + p_2\varepsilon) - (p_1 + p_2\varepsilon), a_3 + a_4\varepsilon, 1) \\ &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon, 1) \\ &= A \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

iv) Teorem 4.3.11- ***ii)*** den

$$\begin{aligned} O_{p'} + Z &= (w_2\varepsilon, 1, z_2\varepsilon) \\ &= Z \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

v) Teorem 4.3.11- ***i)*** den yararlanılarak $A + Y'$ toplamı

$$\begin{aligned} A + Y' &= (a_1 + a_2\varepsilon + p_1 + p_2\varepsilon - (p_1 + p_2\varepsilon), a_3 + a_4\varepsilon + w_2\varepsilon, 1) \\ &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_3 + a_4\varepsilon + w_2\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} a_1 + a_2\varepsilon - (a_1 + a_2\varepsilon) &= 0 \in \mathbf{I} \\ a_3 + a_4\varepsilon + w_2\varepsilon - (a_3 + a_4\varepsilon) &= w_2\varepsilon \in \mathbf{I} \end{aligned}$$

olduğundan komşuluk bağıntısı gereği

$$A + Y' \sim A$$

olduğu görülür. ■

4.4 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde Çarpma İşlemi

Bu kısımda $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Projektif Klingenberg düzleminde çarpma işleminin geometrik yorumu üzerinde durulacaktır. $\mathbb{A}_2\mathbb{R}$ ve $\mathbb{P}_2\mathbb{R}$ düzlemlerinde yapılanlara benzer biçimde $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde sadece $OU = [0, 1, 0]$ doğrusu üzerindeki noktaların çarpımı incelenecektir.

Tanım 4.4.1 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde, biri O noktasına komşu olduğunda diğeri U noktasına komşu olmayan, keyfî iki nokta olsun. OU doğrusu üzerindeki $1 = (1, 0, 1)$ noktası ve UV doğrusu üzerindeki $S = (1, 1, 0)$ noktası yardımıyla

$$M = BV \wedge 1S$$

noktası ve M noktası yardımıyla belirlenen

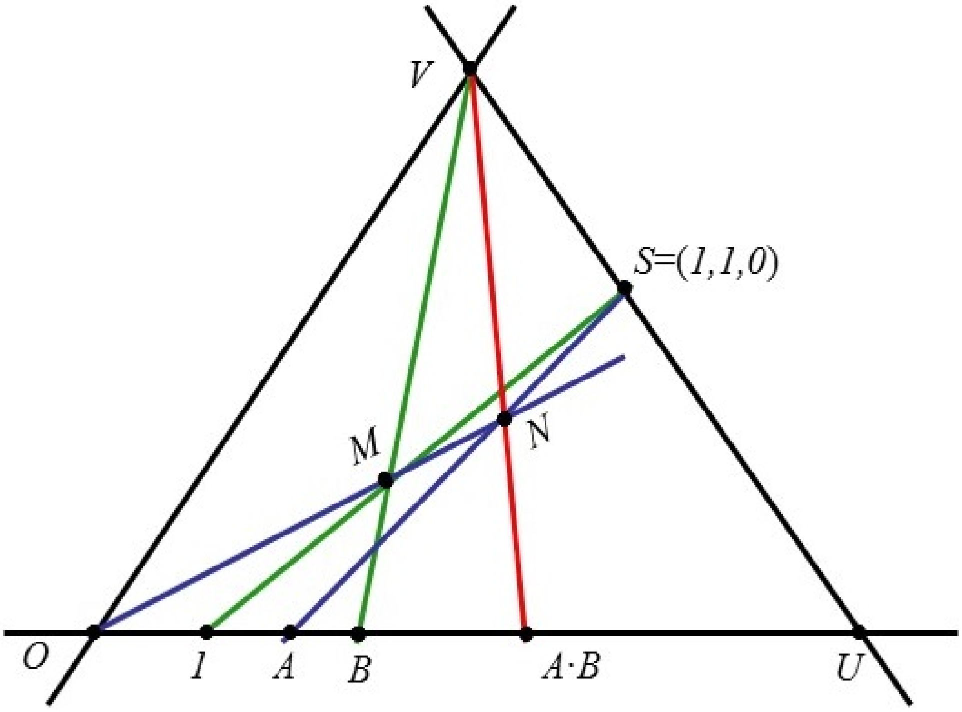
$$N = AS \wedge OM$$

noktasını kullanarak $A \cdot B$ noktası

$$A \cdot B = NV \wedge OU$$

olarak tanımlanır.

Bu işlem Şekil 4.8 ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.8. $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde OU Doğrusu Üzerindeki Noktaların Çarpımı

Bu tanım Çelik ve Erdoğan (2013) ve Çelik ve Dayıoğlu (2013) çalışmalarında, OU doğrusu üzerinde birbirlerine komşu olmayan iki nokta için verilmişti. Fakat bu tezde verilen tanım, çarpılacak noktaların birinin O ve diğerinin U noktasına komşu olması durumu dışında, OU doğrusu üzerindeki birbirlerine komşu olan tüm nokta ikililerine genişletilmiştir.

OU doğrusu üzerinde çarpılacak olan noktaların birinin O diğerinin U noktasına komşu olması durumunda tanımda verilen algoritmaya göre elde edilen AS ve OM doğruları birbirlerine komşu olmaktadır. Bu sebeple bu iki doğrunun kesişim noktası olan N noktasının durumu belirlenememektedir.

Aşağıdaki teoremde, daha önce geometrik olarak tanımlanan çarpma işleminin, üzerinde çalışılan geometrik yapıyı koordinatlamada kullanılan cebirsel yapıdaki karşılıkları incelenmiştir. Bu teoremde A ve B noktalarının 3. tip nokta, Z ve W noktalarının da 1. tip nokta olarak alındığını gözden kaçırmamak gerekir.

Teorem 4.4.2 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde verilen

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), \\ B &= (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \\ Z &= (1, 0, z_2\varepsilon) \\ W &= (1, 0, w_2\varepsilon) \end{aligned}$$

noktaları için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) $A \cdot B = (a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon, 0, 1)$.

ii) $A \nsim O$ olmak üzere $A \cdot Z = (1, 0, (z_2a_1^{-1})\varepsilon)$.

iii) $A \nsim O$ olmak üzere $Z \cdot A = (1, 0, (a_1^{-1}z_2)\varepsilon)$.

iv) $Z \cdot W = W \cdot Z = U$.

İspat. Tanım 4.4.1 ile belirlenen işlemler yapılacaktır. Bu nedenle tanımda geçen $S = (1,1,0)$ noktası da işlemler sırasında kullanılacaktır.

i) Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} BV &= [1,0,b_1+b_2\varepsilon], \\ 1S &= [1,1,-1] \end{aligned}$$

olduğu ve bu doğruların arakesitinin

$$M = BV \wedge 1S = (b_1+b_2\varepsilon, b_1-1+b_2\varepsilon, 1)$$

olduğu görülür. A ve S noktaları belli olduğundan

$$AS = [1,1,-a_1-a_2\varepsilon]$$

olur. Tanım 4.4.1 de belirtilen işlemlere devam edebilmek için OM doğrusunu belirlemek gerekir. OM doğrusu O noktasının B noktasına komşu olup olmamasına göre iki durumda bulunur .

1. Durum: $O \nsim B$ olsun. Bu durumda

$$(0,0,1) \nsim (b_1+b_2\varepsilon, 0, 1)$$

olduğundan

$$b_1+b_2\varepsilon - 0 \notin \mathbf{I} \Rightarrow b_1 \in \mathcal{B} - \mathbf{I}$$

sonucuna ulaşılır. Yani b_1 birimdir. Bu durumda OM doğrusu

$$
\begin{aligned}
OM &= (0,0,1) \vee (b_1 + b_2\varepsilon, b_1 - 1 + b_2\varepsilon, 1) \\
&= [1 - b_1^{-1} + (b_1^{-1} b_2 b_1^{-1})\varepsilon, 1, 0],
\end{aligned}
$$

olur ve OM doğrusu yardımıyla bulunan

$$
\begin{aligned}
N = AS \wedge OM &= [1, 1, -a_1 - a_2\varepsilon] \wedge [1 - b_1^{-1} + (b_1^{-1} b_2 b_1^{-1})\varepsilon, 1, 0] \\
&= (a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon, a_1 b_1 - a_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2)\varepsilon, 1)
\end{aligned}
$$

N noktası kullanılarak

$$
\begin{aligned}
NV &= [1, 0, a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon], \\
OU &= [0, 1, 0],
\end{aligned}
$$

doğruları elde edilir ve bu doğruların arakesiti olarak tanımlanan $A \cdot B$ noktası

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \\
&= NV \wedge OU \\
&= [1, 0, a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon, 0, 1)
\end{aligned}
$$

olarak belirlenir.

2. Durum: $O \sim B$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(0,0,1) \sim (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) &\Rightarrow b_1 + b_2\varepsilon - 0 \in \mathbf{I} \\
&\Rightarrow b_1 = 0
\end{aligned}
$$

olur ki buradan

$$\begin{aligned} OM &= (0,0,1) \vee (b_2\varepsilon, -1 + b_2\varepsilon, 1) \\ &= [1, -b_2\varepsilon, 0] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} N = AS \wedge OM &= [1, 1, -a_1 - a_2\varepsilon] \wedge [1, -b_2\varepsilon, 0] \\ &= (a_1 b_2\varepsilon, -a_1 + (a_1 b_2 - a_2)\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} NV &= [1, 0, a_1 b_2\varepsilon], \\ OU &= [0, 1, 0] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (b_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= NV \wedge OU \\ &= (a_1 b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

ii) Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} M = ZV \wedge 1S &= (1, 1 - z_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \\ AS &= [1, 1, -a_1 - a_2\varepsilon] \\ OM &= (0,0,1) \vee (1, 1 - z_2\varepsilon, z_2\varepsilon) = [1 - z_2\varepsilon, 1, 0] \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$A \nsim O$ şartı gereği

$$(a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \nsim (0, 0, 1) \Rightarrow a_1 \in \mathcal{B} - \mathbf{I}$$

olduğu bulunur. Yani a_1 in tersi vardır. Buradan

$$AS \nsim OM$$

sonucu elde edilir ki bu nedenle

$$\begin{aligned} N = AS \wedge OM &= [1, 1, -a_1 - a_2\varepsilon] \wedge [1 - z_2\varepsilon, 1, 0] \\ &= (1, 1 - z_2\varepsilon, (z_2 a_1^{-1})\varepsilon) \end{aligned}$$

noktası tek olarak bellidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} NV &= [(z_2 a_1^{-1})\varepsilon, 0, 1], \\ OU &= [0, 1, 0] \end{aligned}$$

doğrularının arakesiti olarak tanımlanan $A \cdot Z$ noktası,

$$\begin{aligned} A \cdot Z &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (1, 0, z_2\varepsilon) \\ &= NV \wedge OU \\ &= [1, 0, (z_2 a_1^{-1})\varepsilon] \wedge [0, 1, 0] \\ &= (1, 0, (z_2 a_1^{-1})\varepsilon) \end{aligned}$$

olur.

iii) Verilenler yardımıyla

$$\begin{aligned} AV &= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon], \\ 1S &= [1, 1, -1] \\ M = AV \wedge 1S &= (a_1 + a_2\varepsilon, a_1 - 1 + a_2\varepsilon, 1) \\ ZS &= [z_2\varepsilon, -z_2\varepsilon, 1] \end{aligned}$$

doğrusu görülür. Bu durum için $A \not\sim O$ olduğundan

$$(a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \not\sim (0, 0, 1) \Rightarrow a_1 \in \mathcal{B} - \mathbf{I}$$

sonucuna ulaşılır. Yani a_1 birimdir ve bu nedenle

$$\begin{aligned} OM &= (0, 0, 1) \vee (a_1 + a_2\varepsilon, a_1 - 1 + a_2\varepsilon, 1) \\ &= [1 - a_1^{-1} + (a_1^{-1} a_2 a_1^{-1})\varepsilon, 1, 0] \end{aligned}$$

olup

$$N = ZS \wedge OM = (1, 1 - a_1^{-1} + (a_1^{-1} a_2 a_1^{-1})\varepsilon, (a_1^{-1} z_2)\varepsilon)$$

sonucu bulunur. Bu durumda

$$NV = [(a_1^{-1} z_2)\varepsilon, 0, 1]$$

olup

$$\begin{aligned}
Z \cdot A &= (1, 0, z_2\varepsilon) \cdot (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\
&= NV \wedge OU \\
&= [(a_1^{-1} z_2)\varepsilon, 0, 1] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (1, 0, (a_1^{-1} z_2)\varepsilon)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

iv) $Z \cdot W$ çarpımı Tanım 4.4.1 de belirtilen hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
WV &= [w_2\varepsilon, 0, 1], \\
1S &= [1, 1, -1] \\
M = WV \wedge 1S &= (1, 1 - w_2\varepsilon, w_2\varepsilon) \\
ZS &= [z_2\varepsilon, -z_2\varepsilon, 1], \\
OM &= [1 - w_2\varepsilon, 1, 0]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$N = ZS \wedge OM = (1, 1 - w_2\varepsilon, 0)$$

ve

$$NV = [0, 0, 1]$$

olup

$$
\begin{aligned}
Z \cdot W &= (1, 0, z_2\varepsilon) \cdot (1, 0, w_2\varepsilon) \\
&= NV \wedge OU \\
&= [0, 0, 1] \wedge [0, 1, 0] \\
&= (1, 0, 0) \\
&= U
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Basit harf değişiklikleri yapılıp benzer işlemler sonucunda

$$W \cdot Z = U$$

olduğu da kolayca görülür. ■

Sonuç 4.4.3 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerindeki

$$
\begin{aligned}
A &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), \\
B &= (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1)
\end{aligned}
$$

noktaları ve OU doğrusu üzerinde U noktasına komşu olan bir

$$Z = (1, 0, z_2\varepsilon)$$

noktası ile $O' \sim O,\ O' \circ OU$ özelliğindeki

$$O' = (x_2\varepsilon, 0, 1)$$

noktası için aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $A \cdot B \neq B \cdot A$

ii) $A \cdot O = O = O \cdot A$

iii) $1 \cdot A = A = A \cdot 1$

iv) $1 \cdot Z = Z = Z \cdot 1$

v) $A \cdot O' \sim O'$

vi) $O' \cdot A \sim O'$

İspat.

i) Teorem 4.4.2-***i*** den

$$A \cdot B = (a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon, 0, 1)$$

ve

$$B \cdot A = (b_1 a_1 + (b_1 a_2 + b_2 a_1)\varepsilon, 0, 1)$$

olduğu görülür. Burada $a_1, b_1 \in \mathcal{B}$ olduğu için ve $\mathcal{B}$ bölümlü halkasında değişme özelliği sağlanmak zorunda olmadığından

$$a_1 b_1 \neq b_1 a_1$$

ve dolayısıyla

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

sonucu bulunur.

ii) Teorem 4.4.2 ***-i)*** de B yerine $O = (0, 0, 1)$ alındığında

$$\begin{aligned} A \cdot O &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) \\ &= ((a_1 + a_2\varepsilon)(0 + 0\varepsilon), 0, 1) \\ &= (0, 0, 1) \\ &= O \end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer nedenlerle

$$\begin{aligned} O \cdot A &= (0, 0, 1) \cdot (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (0, 0, 1) \\ &= O \end{aligned}$$

olur.

iii) $1 = (1, 0, 1)$ olduğu göz önüne alınarak Teorem 4.4.2-***i)*** den

$$\begin{aligned} A \cdot 1 &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) \\ &= ((a_1 + a_2\varepsilon)(1 + 0\varepsilon), 0, 1) \\ &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= A \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
1 \cdot A &= (1,0,1) \cdot (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\
&= ((1+0\varepsilon), 0, 1)(a_1 + a_2\varepsilon) \\
&= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\
&= A
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

iv) Teorem 4.4.2-***ii)*** den

$$
\begin{aligned}
1 \cdot Z &= (1,0,1) \cdot (1,0,z_2\varepsilon) \\
&= (1,0,((z_2)(1^{-1}))\varepsilon) \\
&= (1,0,(z_2 1)\varepsilon) \\
&= (1,0,z_2\varepsilon) \\
&= Z
\end{aligned}
$$

ve Teorem 4.4.2-***iii)*** den

$$
\begin{aligned}
Z \cdot 1 &= (1,0,z_2\varepsilon) \cdot (1,0,1) \\
&= (1,0,((1^{-1})(z_2))\varepsilon) \\
&= (1,0,(1z_2)\varepsilon) \\
&= (1,0,z_2\varepsilon) \\
&= Z
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

v) $A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), O' = (x_2\varepsilon, 0, 1)$ olduğu Teorem 4.4.2-***i)*** de kullanılarak

$$\begin{aligned} A \cdot O' &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (x_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= ((a_1 + a_2\varepsilon)(x_2\varepsilon), 0, 1) \\ &= (a_1 x_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve

$$a_1 x_2\varepsilon - x_2\varepsilon = (a_1 - 1)x_2\varepsilon \in \mathbf{I}$$

olduğundan

$$A \cdot O' \sim O'$$

olduğu aşikârdır.

vi) v) deki işlemlerin benzerleri yapılarak

$$O' \cdot A = (x_2 a_1\varepsilon, 0, 1)$$

olduğu ve

$$O' \cdot A \sim O'$$

olduğu kolayca görülür. ■

Sonuç 4.4.4 Özel olarak $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU üzerindeki birbirlerine komşu olan

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), \\ B &= (a_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

noktaları için Teorem 4.4.2-***i*** den

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (a_1 + b_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (a_1^2 + (a_2a_1 + a_1b_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu sonucu bulunur.

Tanım 4.4.1 de, OU doğrusu üzerindeki noktaların çarpımı, $S = (1, 1, 0)$ noktası yardımıyla belirlenmiştir. Aşağıdaki teoremde bu çarpımı bulmak için S yerine $d_\infty = UV$ doğrusu üzerinde başka bazı noktaların da alınabileceği gösterilecektir.

Teorem 4.4.5 A ve B noktaları $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde OU doğrusu üzerinde biri O noktasına komşu olduğunda diğeri U noktasına komşu olmayan, keyfî iki nokta olsun. UV doğrusu üzerindeki herhangi bir $S' = (1, y_1 + y_2\varepsilon, 0)$ noktası yardımıyla bulunan $M = BV \wedge 1S'$ ve $N = AS' \wedge OM$ noktaları kullanılarak elde edilen $NV \wedge OU$ noktası $A \cdot B$ noktasına eşittir.

İspat. $A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), B = (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1)$ ve $S' = (1, y_1 + y_2\varepsilon, 0)$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} BV &= [1, 0, b_1 + b_2\varepsilon], \\ 1S' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -y_1 - y_2\varepsilon] \\ M &= BV \wedge 1S' = (b_1 + b_2\varepsilon, b_1y_1 - y_1 + (b_1y_2 + b_2y_1 - y_2)\varepsilon, 1) \\ AS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -a_1y_1 - (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon] \end{aligned}$$

olduğu görülür. OM doğrusu için B noktasının OU üzerindeki konumuna bağlı olarak iki durum söz konusudur.

1. Durum: $O \nsim B$ olsun. Bu durumda

$$(0,0,1) \nsim (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1)$$

olduğundan $b_1 \notin \mathbf{I}$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} OM &= (0,0,1) \vee (b_1 + b_2\varepsilon, b_1y_1 - y_1 + (b_1y_2 + b_2y_1 - y_2)\varepsilon, 1) \\ &= [y_1 - b_1^{-1}y_1 + (y_2 - b_1^{-1}y_2 - b_1^{-1}b_2b_1^{-1}y_1)\varepsilon, 1, 0] \end{aligned}$$

olarak bulunur. AS' ve OM doğrularının arakesit noktası olarak belirlenen

$$N = AS' \wedge OM$$

$$= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -a_1y_1 - (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon] \wedge [y_1 - b_1^{-1}y_1 + (y_2 - b_1^{-1}y_2 - b_1^{-1}b_2b_1^{-1}y_1)\varepsilon, 1, 0]$$

$$= (a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon, a_1b_1y_1 - a_1y_1 + (a_1b_1y_2 + a_1b_2y_1 + a_2b_1y_1 - a_1y_2 - a_2y_1)\varepsilon, 1)$$

noktası yardımıyla

$$NV = [1, 0, a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon]$$

doğrusu bulunur. Bu hesaplamalar sonucunda

$$\begin{aligned} NV \wedge OU &= [1, 0, a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon] \wedge [0, 1, 0] \\ &= (a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.4.2 yardımıyla hesaplanan $A \cdot B$ noktasına eşittir.

2. Durum: $O \sim B$ olsun. Bu durumda

$$(0,0,1) \sim (b_1 + b_2\varepsilon, 0, 1)$$

olduğundan $b_1 = 0$ olduğu görülür.

OM doğrusunun

$$\begin{aligned} OM &= (0,0,1) \vee (b_2\varepsilon, -y_1 + (b_2y_1 - y_2)\varepsilon, 1) \\ &= [1, -(y_1^{-1}b_2)\varepsilon, 0] \end{aligned}$$

olacağı elde edilir.[5] AS' ve OM doğrularının arakesiti olarak

$$\begin{aligned} N = AS' \wedge OM &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -a_1y_1 - (a_1y_2 + a_2y_1)\varepsilon] \wedge [1, -(y_1^{-1}b_2)\varepsilon, 0] \\ &= (a_1b_2\varepsilon, -a_1y_1 + (a_1b_2y_1 - a_1y_2 - a_2y_1)\varepsilon, 1) \end{aligned}$$

noktası bulunur. Bu koordinatlar kullanılarak

$$\begin{aligned} NV \wedge OU &= [1, 0, a_1b_2\varepsilon] \wedge [0,1,0] \\ &= (a_1b_2\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.4.2 yardımıyla hesaplanan $A \cdot B$ noktasına eşittir.

$A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), A \nsim O$ ve $B = (1, 0, z_2\varepsilon)$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

[5] $S' \nsim U$ olduğundan $y_1 \notin \mathbf{I}$ dır.

$$
\begin{aligned}
BV &= [z_2\varepsilon, 0, 1], \\
1S' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -(y_1 + y_2\varepsilon)] \\
M &= BV \wedge 1S' = (1, y_1 + y_2\varepsilon - z_2 y_1\varepsilon, z_2\varepsilon), \\
AS' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, a_1 y_1 - (a_1 y_2 + a_2 y_1)\varepsilon] \\
OM &= [y_1 + y_2\varepsilon - z_2 y_1\varepsilon, 1, 0], \\
N &= AS' \wedge OM = (1, y_1 + y_2\varepsilon - z_2 y_1\varepsilon, z_2 a_1^{-1}\varepsilon) \\
NV &= [z_2 a_1^{-1}\varepsilon, 0, 1], \\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda sonuç olarak

$$NV \wedge OU = (1, 0, (z_2 a_1^{-1})\varepsilon)$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.4.2 yardımıyla hesaplanan $A \cdot B$ noktasına eşittir.

$B = (1, 0, z_2\varepsilon)$ ve $A = (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1), A \nsim O$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
\begin{aligned}
AV &= [1, 0, a_1 + a_2\varepsilon], \\
1S' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -(y_1 + y_2\varepsilon)] \\
M &= AV \wedge 1S' = (a_1 + a_2\varepsilon, a_1y_1 - y_1 + (a_1y_2 + a_2y_1 - y_2)\varepsilon, 1) \\
BS' &= [z_2\varepsilon, -(y_1^{-1}z_2)\varepsilon, 1] \\
OM &= [y_1 - a_1^{-1}y_1 + (y_2 - a_1^{-1}y_2 - a_1^{-1}a_2a_1^{-1}y_1)\varepsilon, 1, 0], \\
N &= BS' \wedge OM = (1, y_1 - a_1^{-1}y_1 + (y_2 - a_1^{-1}y_2 - a_1^{-1}a_2a_1^{-1}y_1)\varepsilon, (a_1^{-1}z_2)\varepsilon) \\
NV &= [(a_1^{-1}z_2)\varepsilon, 0, 1], \\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda sonuç olarak

$$NV \wedge OU = (1, 0, (a_1^{-1}z_2)\varepsilon)$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.4.2 yardımıyla hesaplanan $A \cdot B$ noktasına eşittir.

$A = (1, 0, z_2\varepsilon)$ ve $B = (1, 0, w_2\varepsilon)$ noktaları için gerekli hesaplamalar yapılarak

$$
\begin{aligned}
BV &= [w_2\varepsilon, 0, 1], \\
1S' &= [y_1 + y_2\varepsilon, 1, -(y_1 + y_2\varepsilon)] \\
M &= BV \wedge 1S' = (1, y_1 + y_2\varepsilon - w_2 y_1\varepsilon, w_2\varepsilon) \\
AS' &= [z_2\varepsilon, -(y_1^{-1} z_2)\varepsilon, 1] \\
OM &= [y_1 + y_2\varepsilon - w_2 y_1\varepsilon, 1, 0], \\
N &= AS' \wedge OM = (1, y_1 + y_2\varepsilon - w_2 y_1\varepsilon, 0) \\
NV &= [0, 0, 1], \\
OU &= [0, 1, 0]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda sonuç olarak

$$NV \wedge OU = (1, 0, 0) = U$$

olduğu görülür ki bu Teorem 4.4.2 yardımıyla hesaplanan $A \cdot B$ noktasına eşittir. ■

Bu son teoremden aşağıdaki sonucun elde edileceği aşikârdır.

Sonuç 4.4.6 Tanım 4.4.1 de kullanılan $S = (1, 1, 0)$ yerine d_∞ üzerinde U ve V noktalarına komşu olmayan herhangi bir nokta alındığında çarpma işlemi değişmez.

5. $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ DÜZLEMİNDE NOKTALAR İÇİN VERİLEN TOPLAMA ve ÇARPMA İŞLEMLERİNİN KOLİNASYONLAR ile İLİŞKİSİ

Kaya (2005) in ilk kısmında ünlü Alman matematikçisi Felix Klein'a ait geometri tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 5.0.1 **S** bir küme ve **S** yi kendine dönüştüren dönüşümlerin oluşturduğu bir grup **G** olmak üzere, **S** kümesinin **G** altında değişmez kalan özelliklerinin incelenmesine *geometri* denir.

Bu tanım nedeniyle $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminin elemanlarını kendisine dönüştüren kolinasyonların incelenmesi geometri açısından önemlidir.

Bu kısımda toplamayı ve çarpmayı sabit bırakan kolinasyon örnekleri ile toplama ve çarpma gibi davranan kolinasyon örnekleri verilecektir.

Önce $OU = [0, 1, 0]$ doğrusu üzerindeki noktaların toplamı ve kolinasyonlar arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Daha sonra sırasıyla $[m, 1, p]$ ve $[1, n, p]$ tipinden doğrular üzerindeki noktaların toplamının kolinasyonlar altında değişmez kalması ve yine $OU = [0, 1, 0]$ doğrusu üzerindeki noktaların çarpımı ile kolinasyonlar arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır.

5.1 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde OU Doğrusu Üzerinde Bulunan Noktaların Toplamı ile Kolinasyonlar Arasındaki İlişki

Bu başlık altında önce $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasındaki herhangi bir $a = a_1 + a_2\varepsilon$ elemanı için aşağıdaki gibi tanımlanan S_a dönüşümünün $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi için bir kolinasyon olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
S_a : PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) &\longrightarrow PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) \\
\\
(x, y, 1) &\longrightarrow (x + a, y, 1)\,, \\
(1, y, z) &\longrightarrow (1, y - zay, z)\,, \\
(w, 1, z) &\longrightarrow (w + za, 1, z)\,, \\
\\
[m, 1, p] &\longrightarrow [m, 1, p - am]\,, \\
[1, n, p] &\longrightarrow [1, n, p + a]\,, \\
[q, n, 1] &\longrightarrow [q, n, 1]
\end{aligned}
$$

Teorem 5.1.1 S_a dönüşümü $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi üzerinde bir kolinasyondur.

İspat. S_a dönüşümünün birebir ve örten olduğu, ayrıca üzerinde olmayı ve komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmelidir. Bu dönüşümün birebir olduğu basit işlemlerle gösterilebilmektedir.

Aynı zamanda

$(x - a, y, 1) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a(x - a, y, 1) = (x, y, 1),$$

$(1, y + zay, z) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a(1, y + zay, z) = (1, y, z),$$

$(w-za,1,z) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a(w-za,1,z)=(w,1,z),$$

olur ki bu S_a dönüşümünün noktalar kümesi üzerinde örten olduğunu gösterir. Ayrıca

$[m,1,p+am] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a[m,1,p+am]=[m,1,p],$$

$[1,n,p-a] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a[1,n,p-a]=[1,n,p],$$

$[q,n,1] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$S_a[q,n,1]=[q,n,1]$$

olduğundan S_a dönüşümü doğrular kümesi üzerinde örtendir. Bu nedenle S_a dönüşümü örten bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned} S_a(x,y,1) \circ S_a[m,1,p] &\Leftrightarrow (x+a,y,1) \circ [m,1,p-am] \\ &\Leftrightarrow y=(x+a)m+p-am \\ &\Leftrightarrow y=xm+p \\ &\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [m,1,p] \end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 2. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
S_a(x,y,1) \circ S_a[1,n,p] &\Leftrightarrow (x+a,y,1) \circ [1,n,p+a] \\
&\Leftrightarrow x+a = yn+p+a \\
&\Leftrightarrow x = yn+p \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [1,n,p]
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 1. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$S_a(x,y,1) \not\circ S_a[q,n,1] \Leftrightarrow (x+a,y,1) \not\circ [q,n,1] \tag{5.1.1}$$

olup 3. tipten bir nokta 3. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.1.1) önermesi ile

$$(x,y,1) \not\circ [q,n,1]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 3. tipten bir noktanın 3. tipten doğru üzerinde olmaması S_a dönüşümü altında korunur.

İspatın daha rahat anlaşılması için bazı kısımlarda $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasının elemanları açık biçimde yazılarak işlem yapılmıştır.

$S_a(1, y, z) \circ S_a[m, 1, p]$

$\Leftrightarrow S_a(1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \circ S_a[m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$

$\Leftrightarrow (1, y_1 + (y_2 - z_2a_1y_1)\varepsilon, z_2\varepsilon) \circ [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 - a_1m_1 + (p_2 - a_1m_2 - a_2m_1)\varepsilon]$

$\Leftrightarrow y_1 + (y_2 - z_2a_1y_1)\varepsilon = m_1 + m_2\varepsilon + (z_2\varepsilon)(p_1 - a_1m_1 + (p_2 - a_1m_2 - a_2m_1)\varepsilon)$

$\Leftrightarrow y_1 = m_1 \wedge y_2 = m_2 + z_2p_1$

$\Leftrightarrow (1, y_1 + y_2\varepsilon, z_2\varepsilon) \circ [m_1 + m_2\varepsilon, 1, p_1 + p_2\varepsilon]$

$\Leftrightarrow (1, y, z) \circ [m, 1, p]$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 2. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} S_a(1, y, z) \circ S_a[q, n, 1] &\Leftrightarrow (1, y - zay, z) \circ [q, n, 1] \\ &\Leftrightarrow z = q + (y - zay)n \\ &\Leftrightarrow z = q + yn \\ &\Leftrightarrow (1, y, z) \circ [q, n, 1] \end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 3. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$S_a(1, y, z) \not\circ S_a[1, n, p] \Leftrightarrow (1, y - zay, z) \not\circ [1, n, p + a] \tag{5.1.2}$$

olup 1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.1.2) önermesi ile

$$(1, y, z) \not\circ [1, n, p]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 1. tipten bir noktanın 1. tipten doğru üzerinde olmaması S_a

dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} S_a(w,1,z) \circ S_a[1,n,p] &\Leftrightarrow (w+za,1,z) \circ [1,n,p+a] \\ &\Leftrightarrow w+za = n+z(p+a) \\ &\Leftrightarrow w = n+zp \\ &\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [1,n,p] \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 1. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} S_a(w,1,z) \circ S_a[q,n,1] &\Leftrightarrow (w+za,1,z) \circ [q,n,1] \\ &\Leftrightarrow z = (w+za)q+n \\ &\Leftrightarrow z = n \\ &\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [q,n,1] \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 3. tipten doğru üzerinde olması S_a dönüşümü altında korunur.

$$S_a(w,1,z) \not\circ S_a[m,1,p] \Leftrightarrow (w+za,1,z) \not\circ [m,1,p-am] \tag{5.1.3}$$

olup 1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.1.3) önermesi ile

$$(w,1,z) \not\circ [m,1,p]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 2. tipten bir noktanın 2. tipten doğru üzerinde olmaması S_a dönüşümü altında korunur.

Böylece S_a dönüşümünün üzerinde olmayı koruduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned} S_a(x,y,1) \sim S_a(u,v,1) &\Leftrightarrow (x+a,y,1) \sim (u+a,v,1) \\ &\Leftrightarrow x-u \in \mathbf{I} \wedge y-v \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (x,y,1) \sim (u,v,1) \end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten noktaların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} S_a(1,y,z) \sim S_a(1,v,t) &\Leftrightarrow (1,y-zay,z) \sim (1,v-tav,t) \\ &\Leftrightarrow y-v \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (1,y,z) \sim (1,v,t) \end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten noktaların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} S_a(w,1,z) \sim S_a(u,1,t) &\Leftrightarrow (w+za,1,z) \sim (u+ta,1,t) \\ &\Leftrightarrow w+za-u-ta \in \mathbf{I} \wedge z-t \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (w,1,z) \sim (u,1,t) \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten noktaların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
& S_a[m,1,p] \sim S_a[u,1,t] \\
& \Leftrightarrow S_a[m_1+m_2\varepsilon,1,p_1+p_2\varepsilon] \sim S_a[u_1+u_2\varepsilon,1,t_1+t_2\varepsilon] \\
& \Leftrightarrow [m_1+m_2\varepsilon,1,p_1-a_1m_1+(p_2-a_1m_2-a_2m_1)\varepsilon] \\
& \sim [u_1+u_2\varepsilon,1,t_1-a_1u_1+(t_2-a_1u_2-a_2u_1)\varepsilon] \\
& \Leftrightarrow m_1-u_1=0 \wedge p_1-a_1m_1-t_1+a_1u_1=0 \\
& \Leftrightarrow m_1-u_1=0 \wedge p_1-t_1=0 \\
& \Leftrightarrow [m_1+m_2\varepsilon,1,p_1+p_2\varepsilon] \sim [u_1+u_2\varepsilon,1,t_1+t_2\varepsilon] \\
& \Leftrightarrow [m,1,p] \sim [u,1,t]
\end{aligned}
$$

olduğundan 2. tipten doğruların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
S_a[1,n,p] \sim S_a[1,v,t] \quad & \Leftrightarrow \quad [1,n,p+a] \sim [1,v,t+a] \\
& \Leftrightarrow \quad p-t \in \mathbf{I} \\
& \Leftrightarrow \quad [1,n,p] \sim [1,v,t]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten doğruların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

$$
S_a[q,n,1] \sim S_a[u,v,1] \quad \Leftrightarrow \quad [q,n,1] \sim [u,v,1]
$$

olduğundan 3. tipten doğruların komşuluğu S_a dönüşümü altında korunur.

Böylece S_a dönüşümünün komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmiş olur. ■

Aşağıdaki teoremde $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki OU doğrusu üzerinde bulunan noktalar için toplama işlemi gibi davranan bir kolinasyonun varlığı gösterilecektir.

Teorem 5.1.2 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde $OU = [0,1,0]$ doğrusu üzerinde $a = a_1 + a_2\varepsilon$ olmak üzere, keyfî olarak alınan bir $A = (a,0,1)$ noktası ve herhangi X noktası ile Teorem 5.1.1 de verilen S_a kolinasyonu için

$$S_a(X) = X + A$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İspat X noktasının U noktasına komşu olup olmamasına göre iki durumda yapılacaktır.

1. Durum: X noktası OU doğrusu üzerinde U noktasına komşu olmayan bir nokta ise

$$X = (x,0,1) = (x_1 + x_2\varepsilon, 0, 1)$$

olacak biçimde $x = x_1 + x_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ elemanı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} S_a(X) &= (x + a, 0, 1) \\ &= (x_1 + a_1 + (x_2 + a_2)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu S_a kolinasyonunun tanımından bellidir. Diğer taraftan Teorem 4.3.2 gereği

$$X + A = (x_1 + a_1 + (x_2 + a_2)\varepsilon, 0, 1)$$

olduğundan

$$S_a(X) = X + A$$

eşitliğinin sağlandığı aşikârdır.

2. Durum: X noktası OU doğrusu üzerinde U noktasına komşu olan bir nokta ise

$$X = (1, 0, x) = (1, 0, x_2\varepsilon)$$

olacak biçimde $x = x_2\varepsilon \in \mathbf{I}$ elemanı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} S_a(X) &= (1, 0 - (xa0), x) \\ &= (1, 0, x) \\ &= (1, 0, x_2\varepsilon) \\ &= X \end{aligned}$$

olduğu S_a kolinasyonunun tanımından bellidir. Diğer taraftan Teorem 4.3.2 gereği

$$\begin{aligned} X + A &= (1, 0, x_2\varepsilon) + (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (1, 0, x_2\varepsilon) \\ &= X \end{aligned}$$

olur ki bu

$$S_a(X) = X + A$$

olduğunu gösterir. ■

5.2 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde $[m, 1, p]$ Tipinden Bir Doğru Üzerinde Bulunan Noktaların Toplamının Kolinasyonlar Altında Korunması

Bu başlık altında önce $m = m_1 + m_2\varepsilon, p = p_1 + p_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olmak üzere $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi üzerinde bir $H_{m,1,p}$ dönüşümü tanıtılacak ve bu dönüşümün bir kolinasyon olduğu gösterilecektir. $H_{m,1,p}$ dönüşümü $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminin noktaları ve doğruları üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$H_{m,1,p} : PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) \longrightarrow PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$$

$$\begin{aligned}
(x, y, 1) &\longrightarrow (x, y - xm - p, 1) \\
(1, y, z) &\longrightarrow (1, y - m - zp, z) \\
(w, 1, z) &\longrightarrow (w, 1, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[m', 1, p'] &\longrightarrow [m' - m, 1, p' - p] \\
[1, n, p'] &\longrightarrow [1, n, p' + (p'm + p)n] \\
[q, n, 1] &\longrightarrow [q + mn, n, 1]
\end{aligned}$$

Teorem 5.2.1 $H_{m,1,p}$ dönüşümü $PK_2\mathcal{B}(\varepsilon)$ düzlemi üzerinde bir kolinasyondur.

İspat. $H_{m,1,p}$ dönüşümünün birebir ve örten olduğu uzun ama basit işlemlerle kolayca gösterilebilmektedir. Bu nedenle burada, $H_{m,1,p}$ dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını ve komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilerek ispat tamamlanacaktır.

$$\begin{aligned}
H_{m,1,p}(x, y, 1) \circ H_{m,1,p}[m', 1, p'] &\Leftrightarrow (x, y - xm - p, 1) \circ [m' - m, 1, p' - p] \\
&\Leftrightarrow y - xm - p = x(m' - m) + p' - p \\
&\Leftrightarrow y = xm' + p' \\
&\Leftrightarrow (x, y, 1) \circ [m', 1, p']
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(x,y,1) \circ H_{m,1,p}[1,n,p'] &\Leftrightarrow (x, y-xm-p, 1) \circ [1, n, p' + (p'm+p)n] \\
&\Leftrightarrow x = (y-xm-p)n + p' + (p'm+p)n \\
&\Leftrightarrow x = yn + p' - xmn + p'mn \\
&\Leftrightarrow x(1+mn) = yn + p'(mn+1) \\
&\Leftrightarrow x = yn(1+mn)^{-1} + p' \\
&\Leftrightarrow x = yn(1-mn) + p' \\
&\Leftrightarrow x = yn - (yn)(mn) + p' \\
&\Leftrightarrow x = yn + p' \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [1,n,p']
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
H_{m,1,p}(x,y,1) \not\circ H_{m,1,p}[q,n,1] \Leftrightarrow (x, y-xm-p, 1) \not\circ [q+mn, n, 1] \tag{5.2.1}
$$

olup, 3. tipten bir nokta 3. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.2.1) önermesi ile

$$
(x,y,1) \not\circ [q,n,1]
$$

önermesi denktir. Bu nedenle 3. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(1,y,z) \circ H_{m,1,p}[m',1,p'] &\Leftrightarrow (1, y-m-zp, z) \circ [m'-m, 1, p'-p] \\
&\Leftrightarrow y-m-zp = m'-m+z(p'-p) \\
&\Leftrightarrow y = m'+zp' \\
&\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [m',1,p']
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(1,y,z) \circ H_{m,1,p}[q,n,1] &\Leftrightarrow (1, y-m-zp, z) \circ [q+mn, n, 1] \\
&\Leftrightarrow z = q+mn+(y-m-zp)n \\
&\Leftrightarrow z = q+yn-(zp)n \\
&\Leftrightarrow z = q+yn \\
&\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [q,n,1]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
H_{m,1,p}(1,y,z) \not\circ H_{m,1,p}[1,n,p'] \Leftrightarrow (1, y-m-zp, z) \not\circ [1, n, p'+(p'm+p)n] \quad (5.2.2)
$$

1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.2.2) önermesi ile

$$
(1,y,z) \not\circ [1,n,p]
$$

önermesi denktir. Bu nedenle 1. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(w,1,z) \circ H_{m,1,p}[1,n,p'] &\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [1,n,p'+(p'm+p)n] \\
&\Leftrightarrow w = n + z(p'+(p'm+p)n) \\
&\Leftrightarrow w = n + zp' + z(p'm+p)n \\
&\Leftrightarrow w = n + zp' \\
&\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [1,n,p']
\end{aligned}
$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(w,1,z) \circ H_{m,1,p}[q,n,1] &\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [q+mn,n,1] \\
&\Leftrightarrow z = w(q+mn) + n \\
&\Leftrightarrow z = wq + n + w(mn) \\
&\Leftrightarrow z = wq + n \\
&\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [q,n,1]
\end{aligned}
$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$H_{m,1,p}(w,1,z) \not\circ H_{m,1,p}[m',1,p'] \Leftrightarrow (w,1,z) \not\circ [m'-m,1,p'-p] \tag{5.2.3}$$

olup 2. tipten bir nokta 2. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.2.3) önermesi ile

$$(w,1,z) \not\circ [m',1,p']$$

önermesi denktir. Bu nedenle 2. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

Böylece $H_{m,1,p}$ dönüşümünün üzerinde olmayı koruduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}
H_{m,1,p}(x,y,1) \sim H_{m,1,p}(u,v,1) &\Leftrightarrow (x, y-xm-p, 1) \sim (u, v-um-p, 1)\\
&\Leftrightarrow x-u \in \mathbf{I} \wedge y-xm-p-v+um+p \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow x-u \in \mathbf{I} \wedge y-v-(x-u)m \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow x-u \in \mathbf{I} \wedge y-v \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \sim (u,v,1)
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten noktaların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned}
H_{m,1,p}(1,y,z) \sim H_{m,1,p}(1,v,t) &\Leftrightarrow (1, y-m-zp, z) \sim (1, v-m-tp, t)\\
&\Leftrightarrow y-m-zp-v+m+tp \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y-v \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow (1,y,z) \sim (1,v,t)
\end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten noktaların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$H_{m,1,p}(w,1,z) \sim H_{m,1,p}(u,1,t) \Leftrightarrow (w,1,z) \sim (u,1,t)$$

olduğundan 2. tipten noktaların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned}
H_{m,1,p}[m',1,p'] \sim H_{m,1,p}[u,1,t] &\Leftrightarrow [m'-m, 1, p'-p] \sim [u-m, 1, t-p]\\
&\Leftrightarrow m'-m-u+m \in \mathbf{I} \wedge p'-p-t+p \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow m'-u \in \mathbf{I} \wedge p'-t \in \mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow [m',1,p'] \sim [u,1,t]
\end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten doğruların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}[1,n,p'] \sim H_{m,1,p}[1,v,t] \quad &\Leftrightarrow \quad [1,n,p'+(p'm+p)n] \sim [1,v,t+(tm+p)v] \\
&\Leftrightarrow \quad p'+(p'm+p)n-t-(tm+p)v \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \quad p'-t \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \quad [1,n,p'] \sim [1,v,t]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten doğruların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}[q,n,1] \sim H_{m,1,p}[u,v,1] \quad &\Leftrightarrow \quad [q+mn,n,1] \sim [u+mv,v,1] \\
&\Leftrightarrow \quad q+mn-u-mv \in \mathbf{I} \wedge n-v \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \quad q-u \in \mathbf{I} \wedge n-v \in \mathbf{I} \qquad ; mn \in \mathbf{I}, mv \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow \quad [q,n,1] \sim [u,v,1].
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten doğruların komşuluğu $H_{m,1,p}$ dönüşümü altında korunur.

Böylece $H_{m,1,p}$ dönüşümünün komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmiş olur. ■

Şimdi de $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki $[m,1,p]$ tipinden herhangi bir doğru üzerinde bulunan noktaların birbirleriyle toplanması işleminin $H_{m,1,p}$ kolinasyonu altında değişmez kaldığına dair bir teorem verilecektir.

Teorem 5.2.2 $PK_2\mathcal{B}(\varepsilon)$ düzleminde $[m,1,p]$ doğrusu üzerinde verilen A ve B noktalarından en azından biri d_∞ doğrusuna yakın olmasın. Bu durumda

$$H_{m,1,p}(A) + H_{m,1,p}(B) = H_{m,1,p}(A+B)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $[m,1,p]$ doğrusu üzerinde alınan A ve B noktalarından en azından biri d_∞ doğrusuna yakın olmadığından incelenmesi gereken sadece iki durum vardır; ya A ve B nin ikisi de 3. tiptendir ya da A ve B den biri 1. tipten ise diğeri 3. tiptendir.

1. Durum: A ve B nin ikisi de 3. tipten olmak üzere

$$A = (a_1, a_2, 1), B = (b_1, b_2, 1)$$

olsun.

$$\begin{aligned} A \circ [m, 1, p] &\Leftrightarrow (a_1, a_2, 1) \circ [m, 1, p] \\ &\Leftrightarrow a_2 = a_1 m + p \\ B \circ [m, 1, p] &\Leftrightarrow (b_1, b_2, 1) \circ [m, 1, p] \\ &\Leftrightarrow b_2 = b_1 m + p \end{aligned}$$

ve $[m, 1, p]$ tipinden bir doğru üzerindeki iki noktanın toplamı ile ilgili verilen Teorem 4.3.8 den

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1, a_2, 1) + (b_1, b_2, 1) \\ &= (a_1 + b_1, (a_1 + b_1)m + p, 1) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned} H_{m,1,p}(A) + H_{m,1,p}(B) &= (a_1, a_2 - a_1 m - p, 1) + (b_1, b_2 - b_1 m - p, 1) \\ &= (a_1, 0, 1) + (b_1, 0, 1) \\ &= (a_1 + b_1, 0, 1) \qquad (5.2.4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{m,1,p}(A+B) &= H_{m,1,p}(a_1+b_1,(a_1+b_1)m+p,1) \\
&= (a_1+b_1,(a_1+b_1)m+p-(a_1+b_1)m-p,1) \\
&= (a_1+b_1,0,1) \qquad (5.2.5)
\end{aligned}
$$

olup (5.2.4) ve (5.2.5) den

$$H_{m,1,p}(A)+H_{m,1,p}(B)=H_{m,1,p}(A+B)$$

sonucu elde edilir.

2. Durum: A ve B den biri 1. tipten, diğeri 3. tipten olsun. Birinci tipten olanı B olarak belirlemek yani

$$A=(a_1,a_2,1), B=(1,y,z)$$

almak genelliği bozmaz.

$$
\begin{aligned}
A\circ[m,1,p] &\Leftrightarrow (a_1,a_2,1)\circ[m,1,p] \\
&\Leftrightarrow a_2=a_1m+p, \\
B\circ[m,1,p] &\Leftrightarrow (1,y,z)\circ[m,1,p] \\
&\Leftrightarrow y=m+zp
\end{aligned}
$$

ve $[m,1,p]$ tipinden bir doğru üzerindeki iki noktanın toplamı ile ilgili verilen Teorem 4.3.8 den

$$
\begin{aligned}
A+B &= (a_1,a_2,1)+(1,y,z) \\
&= (1,y,z) \\
&= B
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned} H_{m,1,p}(A) + H_{m,1,p}(B) &= (a_1, a_2 - a_1 m - p, 1) + (1, y - m - zp, z) \\ &= (a_1, 0, 1) + (1, 0, z) \\ &= (1, 0, z) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} H_{m,1,p}(A + B) &= H_{m,1,p}(1, y, z) \\ &= (1, y - m - zp) \\ &= (1, 0, z) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

olup (5.2.6) ve (5.2.7) den

$$H_{m,1,p}(A) + H_{m,1,p}(B) = H_{m,1,p}(A + B)$$

sonucu elde edilir. ■

5.3 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde $[1, n, p]$ Tipinden Bir Doğru Üzerinde Bulunan Noktaların Toplamının Kolinasyonlar Altında Korunması

Bu başlık altında $n = n_2\varepsilon, p = p_1 + p_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ olmak üzere $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi üzerinde bir $H_{1,n,p}$ dönüşümü tanıtılacak ve bu dönüşümün bir kolinasyon olduğu gösterilecektir. $H_{1,n,p}$ dönüşümü $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminin noktaları ve doğruları üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$H_{1,n,p} : PK_2\left(\mathcal{B}(\varepsilon)\right) \longrightarrow PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$$

$$\begin{array}{lrcl} & (x,y,1) & \longrightarrow & (y, x-yn-p, 1) \\ y \in \mathbf{I} \text{ için} & (1,y,z) & \longrightarrow & (y,1,z) \\ y \notin \mathbf{I} \text{ için} & (1,y,z) & \longrightarrow & (1, y^{-1}-n-(y^{-1}z)p, y^{-1}z) \\ & (w,1,z) & \longrightarrow & (1, w-n-zp, z) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} m \in \mathbf{I} \text{ için} & [m,1,p'] & \longrightarrow & [1, m, p'+(p'n+p)m] \\ m \notin \mathbf{I} \text{ için} & [m,1,p'] & \longrightarrow & \left[m^{-1}-n, 1, -p'm^{-1}-p\right] \\ & [1,n',p'] & \longrightarrow & [n'-n, 1, p'-p] \\ & [q,n',1] & \longrightarrow & [n', q, 1] \end{array}$$

Teorem 5.3.1 $H_{1,n,p}$ dönüşümü $PK_2\mathcal{B}(\varepsilon)$ düzlemi üzerinde bir kolinasyondur.

İspat. $H_{1,n,p}$ dönüşümünün birebir ve örten olduğu basit ama uzun işlemlerle kolayca gösterilebilir. Bu nedenle $H_{1,n,p}$ dönüşümünün üzerinde olma bağıntısını ve komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilerek ispat tamamlanacaktır.

2. tipten $[m,1,p']$ biçimindeki bir doğrunun $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü, m nin $\mathbf{I}$ kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından, 3. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olmasının korunması iki farklı durumda incelenecektir.

1. Durum $m \in \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(x,y,1) \circ H_{1,n,p}[m,1,p'] &\Leftrightarrow (y, x-yn-p, 1) \circ [1, m, p' + (p'n+p)m] \\
&\Leftrightarrow y = (x-yn-p)m + p' + p'nm + pm \\
&\Leftrightarrow y = xm - ynm - pm + p' + p'nm + pm \\
&\Leftrightarrow y = xm + p' - ynm + p'nm \\
&\Leftrightarrow y = xm + p' + (p'-y)nm \\
&\Leftrightarrow y = xm + p' \qquad\qquad ; m \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [m,1,p']
\end{aligned}$$

2. Durum $m \notin \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(x,y,1) \circ H_{1,n,p}[m,1,p'] &\Leftrightarrow (y, x-yn-p, 1) \circ [m^{-1} - n, 1, -p'm^{-1} - p] \\
&\Leftrightarrow x - yn - p = y(m^{-1} - n) - p'm^{-1} - p \\
&\Leftrightarrow x = ym^{-1} - p'm^{-1} \\
&\Leftrightarrow xm = y - p' \\
&\Leftrightarrow y = xm + p' \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [m,1,p']
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(x,y,1) \circ H_{1,n,p}[1,n',p'] &\Leftrightarrow (y, x-yn-p, 1) \circ [n'-n, 1, p'-p] \\
&\Leftrightarrow x - yn - p = yn' - yn + p' - p \\
&\Leftrightarrow x = yn' + p' \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [1,n',p']
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$H_{1,n,p}(x,y,1) \not\circ H_{1,n,p}[q,n',1] \Leftrightarrow (y, x-yn-p, 1) \not\circ [n',q,1] \qquad (5.3.1)$$

3. tipten bir nokta 3. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.3.1) önermesi ile

$$(x,y,1) \not\circ [q,n',1]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 3. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

1. tipten $(1,y,z)$ biçimindeki bir noktanın $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü y nin **I** kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından ve 2. tipten $[m,1,p']$ biçimindeki bir doğrunun $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü m nin **I** kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından, 1. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olmasının korunması, dört farklı durumda incelenecektir.

1. Durum: $y \in \mathbf{I}$, $m \in \mathbf{I}$ iken,

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(1,y,z) \circ H_{1,n,p}[m,1,p'] &\Leftrightarrow (y,1,z) \circ [1, m, p\prime + (p\prime n + p)m] \\ &\Leftrightarrow y = m + z(p\prime + (p\prime n + p)m) \\ &\Leftrightarrow y = m + zp\prime + z(p\prime n + p)m \\ &\Leftrightarrow y = m + zp\prime \qquad ; z(p\prime n + p) \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [m,1,p'] \end{aligned}$$

2. Durum $y \in \mathbf{I}$, $m \notin \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.3 gereği aynı tipten noktalar aynı tipten doğrular üzerinde olamayacağı için

$$H_{1,n,p}(1, y, z) \not\circ H_{1,n,p}[m, 1, p']$$

bulunur.

3. Durum $y \notin \mathbf{I}$ ve $m \in \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.3 gereği aynı tipten noktalar aynı tipten doğrular üzerinde olamayacağı için

$$H_{1,n,p}(1, y, z) \not\circ H_{1,n,p}[m, 1, p']$$

bulunur.

4. Durum $y \notin \mathbf{I}$ ve $m \notin \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(1, y, z) \circ H_{1,n,p}[m, 1, p'] &\Leftrightarrow (1, y^{-1} - n - (y^{-1}z)p, y^{-1}z) \circ [m^{-1} - n, 1, -p'm^{-1} - p] \\
&\Leftrightarrow y^{-1} - n - (y^{-1}z)p = m^{-1} - n + (y^{-1}z)(-p'm^{-1} - p) \\
&\Leftrightarrow y^{-1} - (y^{-1}z)p = m^{-1} - (y^{-1}z)(p'm^{-1}) - (y^{-1}z)p \\
&\Leftrightarrow y^{-1} = m^{-1} - (y^{-1}z)(p'm^{-1}) \\
&\Leftrightarrow 1 = ym^{-1} - zp'm^{-1} \\
&\Leftrightarrow m = y - zp' \\
&\Leftrightarrow y = m + zp' \\
&\Leftrightarrow (1, y, z) \circ [m, 1, p']
\end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

1. tipten $(1, y, z)$ biçimindeki bir noktanın $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü y nin

$\mathbf{I}$ kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından, 1. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olmasının korunması, iki farklı durumda incelenecektir.

1. Durum $y \in \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(1,y,z) \circ H_{1,n,p}[q,n',1] &\Leftrightarrow (y,1,z) \circ [n',q,1] \\ &\Leftrightarrow z = yn' + q \\ &\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [q,n',1] \end{aligned}$$

2. Durum $y \notin \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(1,y,z) \circ H_{1,n,p}[q,n',1] &\Leftrightarrow (1, y^{-1} - n - (y^{-1}z)p, y^{-1}z) \circ [n',q,1] \\ &\Leftrightarrow y^{-1}z = n' + (y^{-1} - n - (y^{-1}z)p)q \\ &\Leftrightarrow y^{-1}z = n' + y^{-1}q \\ &\Leftrightarrow z = yn' + q \\ &\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [q,n',1] \end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

1. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olmamasının $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunup korunmadığının araştırılması için incelenmesi gereken iki farklı durum vardır.

1. Durum: $y \in \mathbf{I}$ için

$$\begin{aligned} &H_{1,n,p}(1,y,z) \not\circ H_{1,n,p}[1,n',p'] \\ &\Leftrightarrow (y,1,z) \not\circ [n'-n, 1, p'-p] \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

2. tipten bir nokta 2. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.3.2) önermesi ile 1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından

$$(1, y, z) \not o [1, n', p']$$

önermesi denktir.

2. Durum: $y \notin \mathbf{I}$ için

$$\begin{aligned}
&H_{1,n,p}(1, y, z) \not o H_{1,n,p}[1, n', p'] \\
&\Leftrightarrow (1, y^{-1} - n - (y^{-1}z)p, y^{-1}z) \not o [n' - n, 1, p' - p] \\
&\Leftrightarrow y^{-1} - n - (y^{-1}z)p \neq n' - n + (y^{-1}z)(p' - p) \\
&\Leftrightarrow y^{-1} - y^{-1}zp \neq n' + y^{-1}zp' - y^{-1}zp) \\
&\Leftrightarrow y^{-1} \neq n' + y^{-1}zp' \qquad (5.3.3)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.3.3) eşitsizliğinde sol taraf **I** idealinin elemanı olmamasına rağmen sağ taraf **I** idealinin elemanıdır. Bu sebeple (5.3.3) ifadesi bir uyuşmadır. Bu uyuşma ile

$$(1, y, z) \not o [1, n', p']$$

uyuşması birbirlerine denktir. Bu sebeple 1. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(w, 1, z) \circ H_{1,n,p}[1, n', p'] \quad &\Leftrightarrow \quad (1, w - n - zp, z) \circ [n' - n, 1, p' - p] \\
&\Leftrightarrow \quad w - n - zp = n' - n + z(p' - p) \\
&\Leftrightarrow \quad w - zp = n' + zp' - zp \\
&\Leftrightarrow \quad w = n' + zp' \\
&\Leftrightarrow \quad (w, 1, z) \circ [1, n', p']
\end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(w,1,z) \circ H_{1,n,p}[q,n',1] &\Leftrightarrow (1, w-n-zp, z) \circ [n',q,1] \\ &\Leftrightarrow z = n' + (w-n-zp)q \\ &\Leftrightarrow z = n' \\ &\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [q,n',1] \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

2. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olmamasının $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunup korunmadığının araştırılması için incelenmesi gereken iki farklı durum vardır.

1. Durum: $m \in \mathbf{I}$ için

$$H_{1,n,p}(w,1,z) \not\circ H_{1,n,p}[m,1,p'] \Leftrightarrow (1, w-n-zp, z) \not\circ [1, m, p\prime + (p\prime n + p)m] \quad (5.3.4)$$

1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.3.2) önermesi ile 2. tipten bir nokta 2. tipten bir doğru üzerinde olmadığından

$$(w,1,z) \not\circ [m,1,p']$$

önermesi denktir.

2. Durum: $m \notin \mathbf{I}$ için

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(w,1,z) \not o H_{1,n,p}[m,1,p'] &\Leftrightarrow (1, w-n-zp, z) \not o [m^{-1}-n, 1, -p'm^{-1}-p] \\
&\Leftrightarrow w-n-zp \neq m^{-1}-n+z(-p'm^{-1}-p) \\
&\Leftrightarrow w-zp \neq m^{-1}-zp'm^{-1}-zp \\
&\Leftrightarrow w \neq m^{-1}-zp'm^{-1} \qquad (5.3.5)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.3.5) eşitsizliğinde sol taraf **I** idealinin elemanı olmasına rağmen sağ taraf **I** idealinin elemanı değildir. Bu sebeple (5.3.5) ifadesi bir uyuşmadır. Bu uyuşma ile

$$(w,1,z) \not o [m,1,p']$$

uyuşması birbirlerine denktir. Bu sebeple 2. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olmaması $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.
Böylece $H_{1,n,p}$ dönüşümünün üzerinde olmayı koruduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}
H_{1,n,p}(x,y,1) \sim H_{1,n,p}(u,v,1) &\Leftrightarrow (y, x-yn-p, 1) \sim (v, u-vn-p, 1) \\
&\Leftrightarrow y-v \in \mathbf{I} \wedge x-yn-p-u+vn+p \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow y-v \in \mathbf{I} \wedge x-u-(x+v)n \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow y-v \in \mathbf{I} \wedge x-u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \sim (u,v,1)
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten noktaların komşuluğu $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

1. tipten $(1,y,z)$ biçimindeki bir noktanın $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü y nin **I** kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından, 1. tipten noktaların birbirleriyle komşu olması dört farklı durumda incelenecektir.

1. Durum $y \in \mathbf{I}$, $v \in \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(1,y,z) \sim H_{1,n,p}(1,v,t) \quad &\Leftrightarrow \quad (y,1,z) \sim (v,1,t) \\ &\Leftrightarrow \quad y - v \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow \quad (1,y,z) \sim (1,v,t) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

2. Durum $y \in \mathbf{I}$, $v \notin \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.4 gereği $y \in \mathbf{I}$ iken $y - 1 \notin \mathbf{I}$ olduğu için

$$H_{1,n,p}(1,y,z) \nsim H_{1,n,p}(1,v,t)$$

bulunur.

3. Durum $y \notin \mathbf{I}$, $v \in \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.4 gereği $v \in \mathbf{I}$ iken $1 - v \notin \mathbf{I}$ olduğu için

$$H_{1,n,p}(1,y,z) \nsim H_{1,n,p}(1,v,t)$$

bulunur.

4. Durum $y \notin \mathbf{I}$, $v \notin \mathbf{I}$ iken

$$y = y_1 + y_2\varepsilon,\ v = v_1 + v_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$$

için

$$
\begin{aligned}
y^{-1}-v^{-1}\in\mathbf{I} &\Leftrightarrow (y_1^{-1}-(y_1^{-1}y_2y_1^{-1})\varepsilon)-(v_1^{-1}-(v_1^{-1}v_2v_1^{-1})\varepsilon)\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y_1^{-1}-v_1^{-1}=0\\
&\Leftrightarrow y_1^{-1}=v_1^{-1}\\
&\Leftrightarrow y_1=v_1\\
&\Leftrightarrow (y_1+y_2\varepsilon)-(v_1+v_2\varepsilon)\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y-v\in\mathbf{I}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&H_{1,n,p}(1,y,z)\sim H_{1,n,p}(1,v,t)\\
&\Leftrightarrow (1,y^{-1}-n-(y^{-1}z)p,y^{-1}z)\sim(1,v^{-1}-n-(v^{-1}t)p,v^{-1}t)\\
&\Leftrightarrow y^{-1}-n-y^{-1}zp-v^{-1}+n+v^{-1}tp\in\mathbf{I}\wedge y^{-1}z-v^{-1}t\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y^{-1}-v^{-1}+(v^{-1}t-y^{-1}z)p\in\mathbf{I}\wedge y^{-1}z-v^{-1}t\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y^{-1}-v^{-1}\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow y-v\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow (1,y,z)\sim(1,v,t)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir ki bu 1. tipten noktaların komşuluğunun $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunduğunu gösterir.

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}(w,1,z)\sim H_{1,n,p}(u,1,t) &\Leftrightarrow (1,w-n-zp,z)\sim(1,u-n-tp,t)\\
&\Leftrightarrow w-n-zp-u+n+tp\in\mathbf{I}\\
&\Leftrightarrow (w,1,z)\sim(u,1,t)
\end{aligned}
$$

olduğundan 2. tipten noktaların komşuluğu $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

2. tipten $[m,1,p']$ biçimindeki bir doğrunun $H_{1,n,p}$ dönüşümü altındaki görüntüsü m nin

$\mathbf{I}$ kümesinde olup olmamasına bağlı olarak iki farklı biçimde tanımlandığından, 2. tipten doğruların birbirleriyle komşu olması dört farklı durumda incelenecektir.

1. Durum $m \in \mathbf{I}$, $u \in \mathbf{I}$ iken

$$\begin{aligned}
&H_{1,n,p}[m, 1, p'] \sim H_{1,n,p}[u, 1, t] \\
&\Leftrightarrow [1, m, p' + (p'n + p)m] \sim [1, u, t + (tn + p)u] \\
&\Leftrightarrow m - u \in \mathbf{I} \wedge p' + (p'n + p)m - t - (tn + p)u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow m - u \in \mathbf{I} \wedge p' - t + (p'n + p)m - (tn + p)u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow m - u \in \mathbf{I} \wedge p' - t \in \mathbf{I} \qquad ; (p'n + p)m \in \mathbf{I} \wedge (tn + p)u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [m, 1, p'] \sim [u, 1, t]
\end{aligned}$$

olduğu bulunur.

2. Durum $m \in \mathbf{I}$, $u \notin \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.4 gereği $m \in \mathbf{I}$ iken $m - 1 \notin \mathbf{I}$ olduğu için

$$H_{1,n,p}[m, 1, p'] \nsim H_{1,n,p}[u, 1, t]$$

bulunur.

3. Durum $m \notin \mathbf{I}$, $u \in \mathbf{I}$ iken Sonuç 3.3.4 gereği $u \in \mathbf{I}$ iken $1 - u \notin \mathbf{I}$ olduğu için

$$H_{1,n,p}[m, 1, p'] \nsim H_{1,n,p}[u, 1, t]$$

bulunur.

4. Durum $m \notin \mathbf{I}$, $u \notin \mathbf{I}$ iken

$$m = m_1 + m_2\varepsilon, u = u_1 + u_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} m^{-1} - u^{-1} \in \mathbf{I} &\Leftrightarrow (m_1^{-1} - (m_1^{-1}m_2m_1^{-1})\varepsilon) - (u_1^{-1} - (u_1^{-1}u_2u_1^{-1})\varepsilon) \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow m_1^{-1} - u_1^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow m_1^{-1} = u_1^{-1} \\ &\Leftrightarrow m_1 = u_1 \\ &\Leftrightarrow (m_1 + m_2\varepsilon) - (u_1 + u_2\varepsilon) \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow m - u \in \mathbf{I} \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

sonucu elde edilir.

Benzer biçimde $p' = p'_1 + p'_2\varepsilon, t = t_1 + t_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ iken (5.3.6) eşitliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} & -p'm^{-1} + tu^{-1} \in \mathbf{I} \\ \Leftrightarrow\ & -(p'_1 + p'_2\varepsilon)(m_1^{-1} - (m_1^{-1}m_2m_1^{-1})\varepsilon) + (t_1 + t_2\varepsilon)(u_1^{-1} - (u_1^{-1}u_2u_1^{-1})\varepsilon) \in \mathbf{I} \\ \Leftrightarrow\ & -p'_1m_1^{-1} + t_1u_1^{-1} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p'_1m_1^{-1} = t_1u_1^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & p'_1m_1^{-1} = t_1m_1^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & p'_1 = t_1 \\ \Leftrightarrow\ & (p'_1 + p'_2\varepsilon) - (t_1 + t_2\varepsilon) \in \mathbf{I} \\ \Leftrightarrow\ & p' - t \in \mathbf{I} \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Elde edilen bu bilgiler kullanılarak

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}[m,1,p'] \sim H_{1,n,p}[u,1,t] &\Leftrightarrow [m^{-1}-n,1,-p'm^{-1}-p] \sim [u^{-1}-n,1,-tu^{-1}-p] \\
&\Leftrightarrow m^{-1}-n-u^{-1}+n \in \mathbf{I} \wedge -p'm^{-1}-p+tu^{-1}+p \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow m^{-1}-u^{-1} \in \mathbf{I} \wedge -p'm^{-1}+tu^{-1} \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow m-u \in \mathbf{I} \wedge p'-t \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [m,1,p'] \sim [u,1,t]
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir ki bu 2. tipten doğruların komşuluğunun $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunduğunu gösterir.

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}[1,n',p'] \sim H_{1,n,p}[1,v,t] &\Leftrightarrow [n'-n,1,p'-p] \sim [v-n,1,t-p] \\
&\Leftrightarrow n'-n-v+n \in \mathbf{I} \wedge p'-p-t+p \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow n'-v \in \mathbf{I} \wedge p'-t \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [1,n',p'] \sim [1,v,t]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten doğruların komşuluğu $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}[q,n',1] \sim H_{1,n,p}[u,v,1] &\Leftrightarrow [n',q,1] \sim [v,u,1] \\
&\Leftrightarrow n'-v \in \mathbf{I} \wedge q-u \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [q,n',1] \sim [u,v,1].
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten doğruların komşuluğu $H_{1,n,p}$ dönüşümü altında korunur.

Böylece $H_{1,n,p}$ dönüşümünün komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmiş olur. ■

Şimdi de $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki $[1,n,p]$ tipinden herhangi bir doğru üzerinde bulunan noktaların birbirleriyle toplanması işleminin $H_{1,n,p}$ kolinasyonu altında değişmez kaldığına dair bir teorem verilecektir.

Teorem 5.3.2 $PK_2\mathcal{B}(\varepsilon)$ düzleminde $[1,n,p]$ doğrusu üzerinde verilen A ve B noktalarından en azından biri V noktasına komşu olmasın. Bu durumda

$$H_{1,n,p}(A)+H_{1,n,p}(B)=H_{1,n,p}(A+B)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. A ve B noktalarından en azından biri V noktasına komşu olmadığından incelenmesi gereken sadece iki durum vardır: Ya A ve B nin ikisi de 3. tiptendir ya da biri 3. tipten diğeri 2. tiptendir. A ve B noktaları $[1,n,p]$ üzerinde olduğundan 1. tipten olamazlar.

1. Durum: A ve B nin ikisi de 3. tipten ise

$$A=(a_1,a_2,1), B=(b_1,b_2,1)$$

biçimindedir.

$$\begin{aligned} A\circ[1,n,p] &\Leftrightarrow (a_1,a_2,1)\circ[1,n,p] \\ &\Leftrightarrow a_1=a_2n+p \\ B\circ[1,n,p] &\Leftrightarrow (b_1,b_2,1)\circ[1,n,p] \\ &\Leftrightarrow b_1=b_2n+p \end{aligned}$$

olup Teorem 4.3.11 den

$$A+B=((a_2+b_2)n+p,a_2+b_2,1)$$

sonucu elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}(A) + H_{1,n,p}(B) &= (a_2, a_1 - a_2 n - p, 1) + (b_2, b_1 - b_2 n - p, 1) \\
&= (a_2, 0, 1) + (b_2, 0, 1) \\
&= (a_2 + b_2, 0, 1) \qquad (5.3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{1,n,p}(A + B) &= H_{1,n,p}((a_2 + b_2)n + p, a_2 + b_2, 1) \\
&= (a_2 + b_2, (a_2 + b_2)n + p - (a_2 + b_2)n - p, 1) \\
&= (a_2 + b_2, 0, 1) \qquad (5.3.8)
\end{aligned}
$$

olup (5.3.7) ve (5.3.8) den

$$H_{1,n,p}(A) + H_{1,n,p}(B) = H_{1,n,p}(A + B)$$

sonucu bulunur.

2. Durum: A ve B den biri 3. tipten diğeri 2. tipten ise

$$A = (a_1, a_2, 1), B = (w, 1, z)$$

almak genelliği bozmaz. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
A \circ [1, n, p] &\Leftrightarrow (a_1, a_2, 1) \circ [1, n, p] \\
&\Leftrightarrow a_1 = a_2 n + p \\
B \circ [1, n, p] &\Leftrightarrow (w, 1, z) \circ [1, n, p] \\
&\Leftrightarrow w = n + zp
\end{aligned}
$$

olur ve Teorem 4.3.11 den

$$\begin{aligned} A+B &= (a_1,a_2,1)+(w,1,z) \\ &= (w,1,z) \\ &= B \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(A)+H_{1,n,p}(B) &= (a_2,a_1-a_2n-p,1)+(1,w-n-zp,z) \\ &= (a_2,0,1)+(1,0,z) \\ &= (1,0,z) \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

$$\begin{aligned} H_{1,n,p}(A+B) &= H_{1,n,p}(w,1,z) \\ &= (1,w-n-zp,z) \\ &= (1,0,z) \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

olup (5.3.9) ve (5.3.10) dan

$$H_{1,n,p}(A)+H_{1,n,p}(B)=H_{1,n,p}(A+B)$$

olduğu görülür. ■

5.4 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ Düzleminde OU Doğrusu Üzerinde Bulunan Noktaların Çarpımı ile Kolinasyonlar Arasındaki İlişki

Bu başlık altında önce $\mathcal{B}(\varepsilon)$ dual lokal halkasından $a_1 \neq 0$ özelliğinde alınan herhangi bir $a = a_1 + a_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon) - \mathbf{I}$ elemanı için aşağıdaki gibi tanımlanan L_a dönüşümünün $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemi için bir kolinasyon olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
L_a : PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) &\longrightarrow PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon)) \\
\\
(x,y,1) &\longrightarrow (ax, aya, 1) \\
(1,y,z) &\longrightarrow \left(1, ya, za^{-1}\right), \\
(w,1,z) &\longrightarrow (a^{-1}w, 1, a^{-1}za^{-1}), \\
\\
[m,1,p] &\longrightarrow [ma, 1, apa], \\
[1,n,p] &\longrightarrow \left[1, a^{-1}n, ap\right], \\
[q,n,1] &\longrightarrow \left[qa^{-1}, a^{-1}na^{-1}, 1\right]
\end{aligned}
$$

Teorem 5.4.1 L_a dönüşümü $PK_2\mathcal{B}(\varepsilon)$ düzlemi üzerinde bir kolinasyondur.

İspat. L_a dönüşümünün birebir ve örten olduğu ayrıca üzerinde olmayı ve komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmelidir. Bu dönüşümün birebir olduğu basit fakat uzun işlemlerle gösterilebilmektedir.

L_a nın tanımı gereği $a \notin \mathbf{I}$ olup,

$(a^{-1}x, a^{-1}ya^{-1}, 1) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a(a^{-1}x, a^{-1}ya^{-1}, 1) = (x, y, 1),$$

$(1, ya^{-1}, za) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a(1, ya^{-1}, za) = (1, y, z),$$

$(aw, 1, aza) \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a\,(aw, 1, aza) = (w, 1, z)\,,$$

eşitlikleri bulunur ki bu L_a dönüşümünün noktalar kümesi üzerinde örten olduğunu gösterir. $[ma^{-1}, 1, a^{-1}pa^{-1}] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a\left[ma^{-1}, 1, a^{-1}pa^{-1}\right] = [m, 1, p]\,,$$

$[1, an, a^{-1}p] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a\left[1, an, a^{-1}p\right] = [1, n, p]\,,$$

$[qa, ana, 1] \in PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ için

$$L_a\,[qa, ana, 1] = [q, n, 1]$$

olduğundan L_a dönüşümünün doğrular kümesi üzerinde de örten olduğu görülür.Yani L_a örten bir dönüşümdür.

$$\begin{aligned}
L_a\,(x, y, 1) \circ L_a\,[m, 1, p] \quad &\Leftrightarrow \quad (ax, aya, 1) \circ [ma, 1, apa] \\
&\Leftrightarrow \quad aya = (ax)(ma) + apa \\
&\Leftrightarrow \quad aya = a(xm + p)a \\
&\Leftrightarrow \quad y = mx + p \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y, 1) \circ [m, 1, p]
\end{aligned}$$

olduğundan 3. tipten noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,(x,y,1) \circ L_a\,[1,n,p] &\Leftrightarrow (ax,aya,1) \circ \left[1,a^{-1}n,ap\right] \\
&\Leftrightarrow ax=(aya)(a^{-1}n)+ap \\
&\Leftrightarrow ax=ayn+ap \\
&\Leftrightarrow x=yn+p \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \circ [1,n,p]
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten bir noktanın 1. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$
L_a(x,y,1) \not\circ L_a[q,n,1] \Leftrightarrow (ax,aya,1) \not\circ [qa^{-1},a^{-1}na^{-1},1] \tag{5.4.1}
$$

3. tipten bir nokta 3. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.4.1) önermesi ile

$$
(x,y,1) \not\circ [q,n,1]
$$

önermesi denktir. Bu nedenle 3. tipten bir noktanın 3. tipten doğru üzerinde olmaması L_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,(1,y,z) \circ L_a\,[m,1,p] &\Leftrightarrow \left(1,ya,za^{-1}\right) \circ [ma,1,apa] \\
&\Leftrightarrow ya=ma+(za^{-1})(apa) \\
&\Leftrightarrow ya=ma+zpa \\
&\Leftrightarrow y=m+zp \\
&\Leftrightarrow (1,y,z) \circ [m,1,p]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 2. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} L_a\left(1,y,z\right)\circ L_a\left[q,n,1\right] &\Leftrightarrow \left(1,ya,za^{-1}\right)\circ\left[qa^{-1},a^{-1}na^{-1},1\right] \\ &\Leftrightarrow za^{-1}=qa^{-1}+(ya)(a^{-1}na^{-1}) \\ &\Leftrightarrow za^{-1}=qa^{-1}+yna^{-1} \\ &\Leftrightarrow z=q+yn \\ &\Leftrightarrow (1,y,z)\circ[q,n,1] \end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$L_a(1,y,z)\not\circ L_a[1,n,p]\Leftrightarrow(1,ya,za^{-1})\not\circ[1,a^{-1}n,ap] \tag{5.4.2}$$

1. tipten bir nokta 1. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.4.2) önermesi ile

$$(1,y,z)\not\circ[1,n,p]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 1. tipten bir noktanın 1. tipten doğru üzerinde olmaması L_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} L_a\left(w,1,z\right)\circ L_a\left[1,n,p\right] &\Leftrightarrow (a^{-1}w,1,a^{-1}za^{-1})\circ\left[1,a^{-1}n,ap\right] \\ &\Leftrightarrow a^{-1}w=a^{-1}n+(a^{-1}za^{-1})(ap) \\ &\Leftrightarrow a^{-1}w=a^{-1}n+a^{-1}zp \\ &\Leftrightarrow w=n+zp \\ &\Leftrightarrow (w,1,z)\circ[1,n,p] \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten bir noktaların 1. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,(w,1,z) \circ L_a\,[q,n,1] &\Leftrightarrow (a^{-1}w,1,a^{-1}za^{-1}) \circ \left[qa^{-1},a^{-1}na^{-1},1\right] \\
&\Leftrightarrow a^{-1}za^{-1} = (a^{-1}w)(qa^{-1}) + a^{-1}na^{-1} \\
&\Leftrightarrow a^{-1}za^{-1} = a^{-1}na^{-1} \\
&\Leftrightarrow z = n \\
&\Leftrightarrow (w,1,z) \circ [q,n,1]
\end{aligned}
$$

olduğundan 2. tipten bir noktanın 3. tipten bir doğru üzerinde olması L_a dönüşümü altında korunur.

$$L_a(w,1,z) \not{o}\, L_a[m,1,p] \Leftrightarrow (a^{-1}w,1,a^{-1}za^{-1}) \not{o}\, [ma,1,apa] \tag{5.4.3}$$

2. tipten bir nokta 2. tipten bir doğru üzerinde olmadığından (5.4.3) önermesi ile

$$(w,1,z) \not{o}\, [m,1,p]$$

önermesi denktir. Bu nedenle 2. tipten bir noktanın 2. tipten doğru üzerinde olmaması L_a dönüşümü altında korunur.

Böylece L_a dönüşümünün üzerinde olmayı koruduğu gösterilmiş olur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,(x,y,1) \sim L_a(u,v,1) &\Leftrightarrow (ax,aya,1) \sim (au,ava,1) \\
&\Leftrightarrow ax - au \in \mathbf{I} \wedge aya - ava \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow a(x-u) \in \mathbf{I} \wedge a(y-v)a \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow x - u \in \mathbf{I} \wedge y - v \in \mathbf{I} \qquad ; a \in \mathcal{B}(\varepsilon) - \mathbf{I} \Rightarrow a \notin \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow (x,y,1) \sim (u,v,1)
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten noktaların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} L_a\,(1,y,z) \sim L_a(1,v,t) &\Leftrightarrow \left(1, ya, za^{-1}\right) \sim \left(1, va, ta^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow ya - va \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (y-v)a \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow y - v \in \mathbf{I} \qquad ; a \in \mathcal{B}(\varepsilon) - \mathbf{I} \Rightarrow a \notin \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (1,y,z) \sim (1,v,t) \end{aligned}$$

olduğundan 1. tipten noktaların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} L_a\,(w,1,z) \sim L_a(u,1,t) &\Leftrightarrow (a^{-1}w, 1, a^{-1}za^{-1}) \sim (a^{-1}u, 1, a^{-1}ta^{-1}) \\ &\Leftrightarrow a^{-1}w - a^{-1}u \in \mathbf{I} \wedge a^{-1}za^{-1} - a^{-1}ta^{-1} \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow a^{-1}(w-u) \in \mathbf{I} \wedge a^{-1}(z-t)a^{-1} \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (w-u) \in \mathbf{I} \wedge (z-t) \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (w,1,z) \sim (u,1,t) \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten noktaların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

$$\begin{aligned} L_a\,[m,1,p] \sim L_a\,[u,1,t] &\Leftrightarrow [ma, 1, apa] \sim [ua, 1, ata] \\ &\Leftrightarrow ma - ua \in \mathbf{I} \wedge apa - ata \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow (m-u)a \in \mathbf{I} \wedge a(p-t)a \in \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow m - u \in \mathbf{I} \wedge p - t \in \mathbf{I} \qquad ; a \in \mathcal{B}(\varepsilon) - \mathbf{I} \Rightarrow a \notin \mathbf{I} \\ &\Leftrightarrow [m,1,p] \sim [u,1,t] \end{aligned}$$

olduğundan 2. tipten doğruların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,[1,n,p] \sim L_a\,[1,v,t] &\Leftrightarrow \left[1,a^{-1}n,ap\right] \sim \left[1,a^{-1}v,at\right] \\
&\Leftrightarrow ap-at \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow a(p-t) \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow p-t \in \mathbf{I} \qquad\qquad ; a \in \mathcal{B}(\varepsilon)-\mathbf{I} \Rightarrow a \notin \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [1,n,p] \sim [1,v,t]
\end{aligned}
$$

olduğundan 1. tipten doğruların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

$$
\begin{aligned}
L_a\,[q,n,1] \sim L_a\,[u,v,1] &\Leftrightarrow \left[qa^{-1},a^{-1}na^{-1},1\right] \sim \left[ua^{-1},a^{-1}va^{-1},1\right] \\
&\Leftrightarrow qa^{-1}-ua^{-1} \in \mathbf{I} \wedge a^{-1}na^{-1}-a^{-1}va^{-1} \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow (q-u)a^{-1} \in \mathbf{I} \wedge a^{-1}(n-v)a^{-1} \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow (q-u) \in \mathbf{I} \wedge (n-v) \in \mathbf{I} \\
&\Leftrightarrow [q,n,1] \sim [u,v,1]
\end{aligned}
$$

olduğundan 3. tipten doğruların komşuluğu L_a dönüşümü altında korunur.

Böylece L_a dönüşümünün komşuluk bağıntısını koruduğu gösterilmiş olur. ■

Aşağıdaki teoremde $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzlemindeki OU doğrusu üzerinde bulunan noktalar için çarpma işlemi gibi davranan bir kolinasyonun varlığı gösterilecektir.

Teorem 5.4.2 $PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde $OU=[0,1,0]$ doğrusu üzerinde $a_1 \neq 0$, $a=a_1+a_2\varepsilon$ olmak üzere keyfî olarak alınan bir $A=(a_1+a_2\varepsilon,0,1)$ noktası ve herhangi X noktası ile Teorem 5.4.1 de verilen L_a kolinasyonu için

$$L_a(X)=A\cdot X$$

eşitliği sağlanır.

İspat. OU doğrusu üzerinde alınan X noktasının U noktasına komşu olup olmamasına göre iki durum söz konusudur.

1. Durum: $X \nsim U$ ise

$$X = (x, 0, 1) = (x_1 + x_2\varepsilon, 0, 1)$$

olacak biçimde $x = x_1 + x_2\varepsilon \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ elemanı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_a(X) &= (ax, a0a, 1) \\ &= (ax, 0, 1) \\ &= (a_1x_1 + (a_1x_2 + a_2x_1)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğu L_a kolinasyonu tanımından bellidir. Diğer taraftan Teorem 4.4.2 gereği

$$\begin{aligned} A \cdot X &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (x_1 + x_2\varepsilon, 0, 1) \\ &= (a_1x_1 + (a_1x_2 + a_2x_1)\varepsilon, 0, 1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L_a(X) &= (a_1x_1 + (a_1x_2 + a_2x_1)\varepsilon, 0, 1) \\ &= A \cdot X \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

2. Durum: $X \sim U$ ise

$$X = (1, 0, x) = (1, 0, x_2\varepsilon)$$

olacak biçimde $x = x_2\varepsilon \in \mathbf{I}$ elemanı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} L_a(X) &= (1, 0a, xa^{-1}) \\ &= (1, 0, (x_2 a_1^{-1})\varepsilon) \end{aligned}$$

olduğu L_a kolinasyonu tanımından bellidir. Teorem 4.4.2 gereği

$$\begin{aligned} A \cdot X &= (a_1 + a_2\varepsilon, 0, 1) \cdot (1, 0, x_2\varepsilon) \\ &= (1, 0, (x_2 a_1^{-1})\varepsilon) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L_a(X) &= (1, 0, (x_2 a_1^{-1})\varepsilon) \\ &= A \cdot X \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. ■

6. SONUÇ

Bu tezde konuya genel yaklaşımlarda Alman matematikçi David Hilbert'ın "Geometrinin Temelleri" adlı kitabında bahsettiği "Bir geometri, bir aksiyom sisteminden takip edilen teoremlerin bir koleksiyonudur." prensibi temel alınmıştır. Her ne kadar bu yaklaşım bir geometrici için hayatın gerçeklerinden uzaklaşarak aksiyomatik düşünme ve soyut kalma tehlikesi getirse de fiziki dünyadan bağımsız olmasını yani özgürlük ve hareket alanının sonsuz büyüklükte olmasını sağlamaktadır.

17. yüzyılda Rönesans zamanında Girard Desargues (1591-1661) tarafından temelleri atılan projektif geometride gerçek anlamda sistematik çalışmalar ancak sonsuzdaki nokta (ideal nokta) kavramının diğer sıradan noktalar ile aynı özelliklere sahip olup farklı bir yerde bulunmadığına dair yapılan çalışmalar K. G. C. von Staudt tarafından tamamlanmasından ve Felix Klein'ın, Möbiüs tarafından tanıtılan homojen koordinatlar kavramını, projektif geometri için cebirsel olarak temellendirmesinden sonra yapılmaya başlanıldı (Coxeter 1974). Bu sebeple geometrik algılayışın cebirsel kavrayıştan daha önde gittiği yapılan hiçbir çalışmanın uygulama alanı bulmadan kalmayacağı söylenebilir. Ünlü Rus matematikçi Nikolai Ivanovich Lobachevsky'nin de dediği gibi:

"Matematiğin hiç bir dalı yoktur ki, ne kadar soyut olursa olsun, bir gün gerçek dünyada uygulama alanı bulmasın."

Bu tezde üzerinde çalışılan cebirsel yapının, yani dual lokal halkaların, özel bir sınıfı olarak dual kuaterniyonlar halkasının robotik, kinematik ve görüntü analizi gibi mühendislik ve bilgisayar bilimleri alanlarındaki kullanım alanları ile bu cebirsel yapı ile koordinatlanan geometrik yapının, yani projektif düzlemlerin bir genellemesi olarak görülen PK-düzlemlerin, gayri Öklidyen geometriler arasındaki konumu ve kodlama teorisi ile kriptografi konularıyla ilişkileri düşünüldüğünde bulunan sonuçların önemi zaman içerisinde daha iyi anlaşılabilir.

$PK_2(\mathcal{B}(\varepsilon))$ düzleminde sadece OU doğrusu üzerindeki noktalar için verilen çarpma işleminin bu düzlemdeki diğer noktalar için nasıl genişletilebileceği ya da hangi şartlar altında bu tip noktalar için çarpma işleminin tanımlanabileceği hususunda çalışmalar sürmektedir. İleriki senelerde bu konularda yapılacak makalelerin ve çalışmaların planı şimdiden yapılmaktadır.

KAYNAKLAR

Artmann, B., Dorn G., Drake D. A. ve Torner G. 1976. Hjelmslevsche Inzidenzgeometrie und V. G. *Journal of Geometry* 7(2): 175-191, DOI: 10.1007/BF019189-89.

Akpinar, A. 2007. Geometrik Yapılarda Çifte Oran. *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Bacon, P. Y. 1979. An Introduction to Klingenberg Planes, Vol.3. P.Y. Bacon, Florida.

Baker, C.A., Lane N.D., Lorimer, J.W. 1991. A coordinatization for Moufang-Klingenberg planes. *Simon Stevin*, 65: 3-22.

Batten, L.M. 1986. Combinatorics of Finite Geometries. Cambridge Press, U.K.

Bayraktar, M. 1997. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. ISBN: 975-442-006-8, Bursa.

Bayraktar, A. 2012. Cebirsel Yapılar Üzerine Projektif Geometri. *Yüksek Lisans Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Bennett, M.K. 1995. Affine and Projective Geometry. John Wiley and Sons, Inc., New York, 173 pp.

Beutelspacher, A., Rosenbaum, U. 1998. Projective Geometry. Cambridge University Press, U.K., 258 pp.

Clifford, W.K. 1873. Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4(64, 65): 381–395.

Coxeter, H.S.M. 1942. Non-Euclidean Geometry. University of Toronto Press, Scholarly Publishing Division, Toronto, 336 pp.

Coxeter, H.S.M. 1949. The Real Projective Plane. Mc-graw-Hill Book Comp. Inc., Toronto, 196 pp.

Coxeter, H.S.M. 1969. Introduction to Geometry. John Wiley&Sons, Inc., 469 pp.

Coxeter, H.S.M. 1974. Projective Geometry. Springer-Verlag, New York, 163 pp.

Çelik, B. 2015. Soyut Matematik. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa, 491 s.

Çelik, B., Dayıoğlu, A. 2013. The collineations which act as addition and multiplication on points in a certain class of projective Klingenberg planes. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013: 193.

Çelik, B., Erdoğan, F.Ö. 2013. On The Addition and Multiplication of the Points in a Certain Class of Projective Klingenberg Plane. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013: 230.

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa, 430 s.

Dayıoğlu, A., Çelik, B. 2011. Projective Klingenberg Planes Constructed with Dual Local Rings. *Num. An. and App. Math. ICNAAM 2011 American Institute of Physics Conf. Proc.*, 1389: 308-311.

Dembowski, P. 1968. Finite Geometries. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 375 pp.
Drake, D.A., Lenz H. 1975. Finite Klingenberg planes. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 44: 70 - 83.
Dugas, M. 1979. Verallgemeinerte André-ebenen mit epimorphismen auf Hjelmslev-Ebenen. *Geometriae Dedicata*, 8: 105-123.
Fraleigh, J.B. 2003. A First Course In Abstract Algebra. Addision-Wesley Publishing Company, 520 pp.
Hacısalihoğlu, H.H. 2000. Lineer Cebir I. Hacısalihoğlu Yayınları, İstanbul, 480 s.
Hall, M. 1943 Projective planes. *Transactions of the American Mathematical Society* 54(2): 229–277 doi:10.2307/1990331
Hessenberg, G. 1905. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Mathematische Annalen, Berlin / Heidelberg: Springer,* 61 (2): 161–172, doi:10.1007/BF01457558.
Hirschfeld, J.W.P. 1998. Projective Geometries over Finite Fields. Oxford Science Publications, New York, 555 pp.
Hughes, D.R., Piper, F.C. 1973. Projective Planes. Springer, New York, 291 pp.
Jacobson, N. 1975. Lectures in Abstract Algebra Vol.3. Springer-Verlag, New York, 3rd Edition, 217 pp.
Kaya, R. 2005. Projektif Geometri. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 392 s.
Keppens, D. 1988. Coordinatization of Projective Klingenberg Planes. *Simon Stevin*, 62: 63-90.
Klingenberg, W. l954. Proiektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. *Math. Z.*, (60): 384-406.
Klingenberg, W. 1955. Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. *Abh. Math. Sem. Univ.*, Hamburg, (20): 97–111
Klingenberg, W. 1956. Projektive Geometrien mit Homomorphismus. *Math. Ann*, (132): 180–200.
Möbius, A.F. 1827. Der barycentrische Calcul. J.A. Barth, 454 pp.
O'Hara, C.W., Ward, D.R. 1937. An Introduction To Projective Geometry. Oxford At The Clarendon Press, 298 pp.
Pickert, G. 1955. Projektive Ebenen. Springer Berlin Heidelberg, 350 pp.
Stevenson, F.W. 1972. Projective Planes, W. H. Freeman, 411 pp.
Veblen O., Young, J.W. 1910. Projective Geometry Volume 1. Ginn and Company, Boston, 358 pp.
Von Staudt, K.G.C. 1847. Geometrie der Lage. Nürnberg F. Korn, 236 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	ABDURRAHMAN DAYIOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	:	BURSA 1987
Yabancı Dil	:	İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	:	
Lise	:	ULUBATLI HASAN ANADOLU LİSESİ
Lisans	:	ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
Birleştirilmiş Doktora	:	BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	:	1) İlk Tan Dershanesi 2008-2012
		2) Uludağ Üniversitesi 2012-
İletişim(e-posta)	:	abdurrahmandayioglu@gmail.com

Yayınlar

Dayıoğlu, A., Çelik, B. 2011. Projective Klingenberg planes constructed with dual local rings. *American Institute of Physics Conf. Proc.*, 1389: 308-311.

Çelik, B., Dayıoğlu, A. 2013. The collineations which act as addition and multiplication on points in a certain class of projective Klingenberg planes. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013: 193.

Dayıoğlu, A., Çelik, B. 2017. On the relation between addition of collinear points and collineations in $PK_2(Q(\varepsilon))$. *American Institute of Physics Conf. Proc.*, 1863: 300024, doi: 10.1063/1.4992473

Akpinar, A., Dayıoğlu, A., Doğan, İ., Boztemür, B., Aslan, D., Gürel, Z.S. 2018. A Note on Projective Klingenberg Planes over Rings of Plural Numbers. *International Journal of New Technology and Research*, Volume-4, Issue-2: 103-105.

Dayıoğlu, A., Çelik, B. 2018. Addition for Points in $PK_2(Q(\varepsilon))$, *Afrika Matematika*, Under Review.