SÜPERCEBİRLER

Zeynep Sena GÜREL

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERCEBİRLER

Zeynep Sena GÜREL

Doç. Dr. Atilla AKPINAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2018

TEZ ONAYI

Zeynep Sena GÜREL tarafından hazırlanan "SÜPERCEBİRLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç Dr. Atilla AKPINAR

Başkan : Prof.Dr.Süleyman ÇİFTÇİ.......................... İmza
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr.Öğr.Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN................ İmza
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç.Dr. Atilla AKPINAR............................ İmza
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
2 /01/2018

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/09/2018

Zeynep Sena GÜREL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜPERCEBİRLER

Zeynep Sena GÜREL

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atilla AKPINAR

Bu çalışmada öncelikle G-dereceli halka, G-dereceli modül, G-dereceli vektör uzayı, G-dereceli cebirler ve ardından da süpercebir, Lie süpercebiri, Jordan süpercebiri, Poisson braket ile ilgili bazı temel bilgiler ve örnekler çeşitli kaynaklardan derlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: G-dereceli halka, G-dereceli modül, G-dereceli vektör uzayı, G-dereceli cebir, Süpercebir, Lie Süpercebiri, Jordan Süpercebiri, Poisson Braket.
2018, v+27 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

SUPERALGEBRAS

Zeynep Sena GÜREL

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Atilla AKPINAR

In this study, firstly some basic information and examples related to G-graded ring, G-graded module, G-graded vector space, G-graded algebras and next superalgebra, Lie superalgebra, Jordan superalgebra, Poisson braket were complied from various references.

Key words: G-graded ring, G-graded module, G-graded vector space, G-graded algebras, superalgebra, Lie superalgebra, Jordan superalgebra, Poisson braket
2018, v+27 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasında, araştırılmasında, gerçekleştirilmesinde ve her aşamasında büyük bir sabırla değerli bilgilerini, zamanını ve tecrübelerini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Atilla AKPINAR'a ve yüksek lisans eğitimim boyunca ders aldığım tüm saygıdeğer hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, doğduğum günden beri türlü fedakârlıklarla beni büyüten, bugünlere getiren ve maddi manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve ikinci ailem olan eşime sabrından, sonsuz desteğinden ve beni her halimle hoş görüşünden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep Sena GÜREL
26/09/2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\bigoplus_{g \in G} R_g$	R nin g. dereceden homojen elemanlarının toplamı
$(\mathrm{G},+)$	+ işlemine göre bir G grubu
$(\mathrm{R},+,\cdot)$	+ ve $\cdot$ işlemlerine göre bir halka
$x=\sum_{g \in G} X_g$	x in $g.$ dereceden homojen bileşenleri toplamı
$R[x]$	1 değişkenli derecesi n olan polinom cebiri
$M_n(A)$	Matris halkası
$gl(V)$	V nin endomorfizmlerinin kümesi

1. GİRİŞ

Bu tez, süpercebirler üzerine yapılan bazı temel çalışmaları bir araya getiren Türkçe bir kaynak olarak derlenmiştir.

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, birinci bölümde tez ile ilgili genel bilgilerin yer aldığı giriş kısmı bulunmaktadır.

İkinci bölüm olan kuramsal temeller bölümünde tezin esasını teşkil eden süpercebirlerin incelenmesinde ihtiyaç duyulan temel tanımları içerir.

Üçüncü bölümde G-dereceli halka, modül, vektör uzayı ve cebirler oluşturularak genel süpercebir yapısı, Lie süpercebirleri, Jordan süpercebirleri ve Poisson braket tanıtılmış ve bunlara çeşitli örnekler verilmiştir.

Dördüncü ve son bölümde tez ile ilgili kısa bir değerlendirmenin yapıldığı sonuç kısmı bulunmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, tezde kullanılan temel tanımları ihtiva eder. Bu tanımlar genel bir cebir kitabında bulunabilecek bilgiler olmasına rağmen bu bölümde kaynakça olarak (Godement 1968, Hungerford 1974, McDonald 1976, Fraleigh 1989, Çiftçi 2015) kitaplarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.1. S bir küme ve $*: S \times S \to S$ bir iç işlem olsun. Eğer,

1) Her $u, v, w \in S$ için $u*(v*w) = (u*v)*w$ dir.

2) Her $u \in S$ için $u*e = u = e*u$ olacak biçimde en az bir $e \in S$ vardır.

3) Her $u \in S$ için $u^{-1}*u = e = u*u^{-1}$ olacak biçimde en az bir $u^{-1} \in S$ vardır.

şartları sağlanıyorsa $(S,*)$ sistemine bir *grup* denir ve kısaca S ile gösterilir.

Tanım 2.2. $(S,*)$ grubu için

$$\forall u, v \in S \text{ için } u*v = v*u$$

şartı sağlanıyorsa S ye *değişmeli grup* ya da *Abel grubu* denir.

Tanım 2.3. $(S,*)$ bir grup ve S', S nin bir alt kümesi olsun. Eğer S', S nin işlemine göre bir grup ise o zaman S' ye S nin bir *alt grubu* denir.

Tanım 2.4. H herhangi bir küme ve $+$ ile $\cdot$ bu küme üzerinde tanımlı herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer

1) $(H,+)$ değişmeli gruptur.

2) "$\cdot$" işlemi birleşmelidir.

3) Her $\gamma, \beta, \alpha \in H$ için $\gamma \cdot (\beta + \alpha) = \gamma \cdot \beta + \gamma \cdot \alpha$ ve $(\gamma + \beta) \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha + \beta \cdot \alpha$ dir.

şartları gerçekleniyorsa $(H,+,\cdot)$ sistemine bir *halka* denir ve kısaca H ile gösterilir.

Bir $(H,+,\cdot)$ halkasında ilk işleme yani "+" işlemine göre etkisiz eleman 0 ile, ikinci işlemine göre yani "$\cdot$" işlemine göre (varsa) etkisiz eleman 1 ile gösterilir. İkinci işlemin etkisiz elemana *özdeşlik* elemanı adı verilir.

Tanım 2.5. Bir halkada çarpma "$\cdot$" işlemine göre tersi var olan bir elemana bir *birim eleman* denir.

Tanım 2.6. H nin her u elemanı için $u\mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}$ ve $\mathrm{I}u \subseteq \mathrm{I}$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına H halkasının bir *ideali* denir.

Tanım 2.7. Bir H halkasında birim olmayan elemanların oluşturduğu I kümesi bir maksimal ideal oluşturuyorsa H halkasına *lokal halka* denir.

Tanım 2.8: H bir halka olsun. ι, H üzerinde birim dönüşümü olmak üzere mertebesi 2 olan bir f otomorfizmine H nin bir *involusyonu* denir.

Tanım 2.9. Eğer bir $(H,+,\cdot)$ halkasında "$\cdot$" işlemi "+" işlemi üzerine dağılıyorsa ve (H - $\{0\}$, $\cdot$) sistemi bir değişmeli grup ise bu halkaya bir *cisim* adı verilir.

Tanım 2.10. $(K,+,\cdot)$ bir cisim ve $(V,\boldsymbol{+})$ bir abel grubu olsun. Eğer $\bullet : K \times V \to V$ dış işlemi her $u,v \in V$ ve her $c_1, c_2 \in K$ için;

1) $c_1 \bullet (v \boldsymbol{+} u) = (c_1 \bullet v) \boldsymbol{+} (c_1 \bullet u)$ dir,

2) $(c_1 + c_2) \bullet v = (c_1 \bullet v) \boldsymbol{+} (c_2 \bullet v)$ dir,

3) $(c_1 \cdot c_2) \bullet v = c_1 \bullet (c_2 \bullet v)$ dir,

4) Özdeşlik elemanı $1 \in K$ olmak üzere $1 \bullet u = u$ dir,

şartları sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir ve kısaca V ile gösterilir.

Eğer V nin bir V' altkümesi için V vektör uzayından indirgenen işlemler altında V' de bir vektör uzayı oluyorsa, V' ye V nin *altvektör uzayı* ya da kısaca *altuzayı* denir.

Tanım 2.11. K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ ve $\forall\ d_i \in K$ için $\sum_{j=1}^{n} d_j u_j = 0 \Rightarrow \forall d_j = 0$ ise $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektörleri *lineer bağımsızdır*, aksi halde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 2.12. Bir V vektör uzayının

1) S lineer bağımsızdır.

2) $V = Sp\{S\}$ dir.

şartlarını sağlayan bir S alt kümesine V nin bir *bazı* denir.

2) aksiyomuna germe aksiyomu da denir ki bu $\forall x \in V$ elemanının S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer birleşimi olduğunu ifade eder.

Tanım 2.13. Bir V vektör uzayının bir bazındaki eleman sayısına V nin *boyutu* denir.

Tanım 2.14. V bir vektör uzayı, U_1 ile U_2 de V nin herhangi iki alt uzayı olsun. Eğer

1) $V = U_1 + U_2$

2) $U_1 \cap U_2 = 0$

şartları sağlanıyorsa V ye U_1 ile U_2 *nin direkt toplamı* denir ve bu durum $V = U_1 \oplus U_2$ ile gösterilir.

İki alt uzay için verilen direkt toplam tanımı aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir:

Tanım 2.15. V bir vektör uzayı, $U_1, U_2, \ldots, U_k$ de V nin herhangi alt uzayları olsunlar. Eğer

1) $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ dir.

2) $1 \leq i \leq k-1$ özelliğindeki her i için $U_1 + U_2 + \cdots + U_i \cap U_{i+1} = 0$ dır.

şartları sağlanıyorsa, V uzayı $U_1, U_2, \ldots, U_k$ *alt uzaylarının direkt toplamıdır* denir ve bu durum $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ biçiminde belirtilir.

Tanım 2.16. H, $1 \neq 0$ özdeşlikli bir halka ve M toplamsal değişmeli bir grup olsun. $\forall c \in H$ ve $\forall u \in M$ için $(c,u) \to cu$ olacak şekilde tanımlı $H \times M \to M$ dış işlemi tüm $c_1, c_2 \in H$ ve tüm $u, v \in M$ elemanları için aşağıdaki şartları sağlıyorsa M kümesine H halkası üzerinde bir birimli (sol) *modül* denir:

1) $c_1(v+u) = c_1v + c_1u$

2) $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$

3) $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$

4) $1u = u$ dir.

Sağ modül tanımı benzer biçimde verilebilir.

Tanım 2.17. M, H halkası üzerinde hem bir sol modül hem de bir sağ modül iken her $h, h' \in H$ ve her $m \in M$ için $(hm)h' = h(mh')$ şartı da sağlanırsa M ye H üzerinde bir $HH-$*bimodül* ya da kısaca *bimodül* denir.
Benzer biçimde; M, H halkası üzerinde bir sol modül ve G halkası üzerinde ise sağ modül iken $HG-$bimodül tanımı verilebilir.

Tanım 2.18: M_1, M_2 ve M bir H halkası üzerinde tanımlı üç modül olsun. Her $z_1, z_2, z \in M_1$, her $k_1, k_2, k \in M_2$ ve her $\gamma \in H$ için

L1) $h(z_1 + z_2, k) = h(z_1, k) + h(z_2, k)$ ve $h(z, k_1 + k_2) = h(z, k_1) + h(z, k_2)$ dir.

L2) $h(\gamma z, k) = \gamma h(z, k)$ ve $h(z, \gamma k) = \gamma h(z, k)$ dir.

şartları sağlayan bir $h: M_1 \times M_2 \to M$ biçimindeki bir dönüşümüne bir 2-*lineer (bilineer) dönüşüm* denir.

Tanım 2.19. V, $(K, +, \cdot)$ cismi üzerinde iç ve dış işlemleri sırasıyla, $\boldsymbol{+}$ ve $\bullet$ olan bir vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlanan ikinci bir iç işlem olan $\otimes$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde bir *cebir* denir. Her $c \in K$ ve her $v, w, s \in V$ için

1) $(c \bullet v) \otimes w = v \otimes (c \bullet w) = c \bullet (v \otimes w)$ dir.

2) $(v \boldsymbol{+} w) \otimes s = (v \otimes s) \boldsymbol{+} (w \otimes s)$ dir.

3) $v \otimes (w \boldsymbol{+} s) = (v \otimes w) \boldsymbol{+} (v \otimes s)$ dir.

Tanım 2.20. V K cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer V nin boştan farklı bir V' alt kümesi, V nin cebir olmasını sağlayan işlemlerin V' ye indirgenmişleri altında bir cebir oluşturuyorsa V' ye V nin bir *alt cebiri* denir.
Eğer bir V cebirinde $\forall\ v, w, s \in V$ için

$$(v \otimes w) \otimes s = v \otimes (w \otimes s)$$

eşitliği geçerli ise V ye K cismi üzerinde *birleşmeli cebir* denir.

Son olarak, bir birleşmeli cebirden bir Lie cebiri ya da bir Jordan cebirinin nasıl elde edileceğinden bahsedeceğiz:

V bir birleşmeli cebir olsun. V üzerinde her $v, w, s \in V$ için

$$v \odot w = vw - wv$$

biçiminde *Lie çarpımı* adı verilen yeni bir çarpma işlemi tanımlansın. Bu çarpma işlemi anti-değişmelidir ve de *Jakobi Özdeşliği* olarak isimlendirilen

$$(v \odot w) \odot s + (w \odot s) \odot v + (s \odot v) \odot w = 0$$

özdeşlik sağlanır. Lie çarpımı ile V den bu şekilde elde edilen cebire bir *Lie cebiri* denir ve bu cebir V^{-} ile gösterilir.

V üzerinde her $u, v \in V$ için

$$v \bullet w = \frac{1}{2}(vw + wv)$$

biçiminde *Jordan çarpımı* adı verilen yeni bir çarpma işlemi tanımlansın. Bu çarpma işlemi değişmelidir ve de *Jordan Özdeşliği* olarak isimlendirilen

$$(v \bullet w) \bullet (v^{\cdot 2}) = v \bullet \left[w \bullet (v^{\cdot 2}) \right]$$

özdeşlik sağlanır. Jordan çarpımı ile V den bu şekilde elde edilen cebire bir *Jordan cebiri* denir ve bu cebir V^{+} ile gösterilir.

3. SÜPERCEBİRLER

Bu bölümde, teorik fizikteki süpersimetri teorisinden dolayı fizikçiler tarafından "süper" ön eki kullanılarak ifade edilen bir cebirden, süpercebirlerden bahsedeceğiz. Aksi belirtilmedikçe, bu çalışmada geçen tüm halkaların birleşmeli ve özdeşlikli olduğu kabul edilecektir. Ayrıca, bir R halkasının özdeşlik elemanı 1_R biçiminde gösterilecektir.

3.1. $G-$Dereceli Halka, Modül, Vektör Uzayı ve Cebir

Bu kısımda, $G-$Dereceli Halka, Modül, Vektör Uzayı ve Cebirler hakkında temel bilgiler ve bunlara bazı örnekler verilecektir. Burada verilen temel bilgiler (Eldeque ve Kochetov 2013, Eyre 1998, Hazrat 2016, Nastasescu ve Oystaeyen 1982, Oystaeyen ve Nastasescu 1979, Nastasescu ve Oystaeyen 2004, Tignol ve Wadsworth 2015) kitaplarından derlenmiştir.

Tanım 3.1.1. $(R,+,\cdot)$ bir halka, $(G,*)$ etkisiz elemanı e olan bir grup ve $\forall g \in G$ için R_g $(R,+)$ nın bir alt grubu olsun. Eğer, R halkası için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise R ye $G-$dereceli halka denir:

1) $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ dir.
2) $\forall j,k \in G$ için $R_j R_k \subset R_{j*k}$ dir.

Özel olarak $\forall j,k \in G$ için $R_j R_k = R_{j*k}$ şartını sağlayan bir $G-$dereceli halkaya strongly $G-$dereceli halka adı verilir.

NOT: Yukarıdaki tanımda G yerine özel olarak $(\mathbb{Z}_2,+)$ Abel grubu alınırsa R bir $\mathbb{Z}_2-$dereceli halka olur. Bu durumda, $R = R_0 + R_1$ olup R_0 ın elemanlarına R nin çift elemanları, R_1 in elemanlarına ise R nin tek elemanları denir. Üstelik, $R_0R_0 \subset R_0$, $R_0R_1 \subset R_1$ $R_1R_0 \subset R_1$ ve $R_1R_1 \subset R_0$ olacağı açıktır.

Benzer biçimde, G yerine özel olarak $(\mathbb{Z},+)$ Abel grubu alınarak $\mathbb{Z}-$dereceli halka tanımı da elde edilir.

R_g nin elemanlarına R nin g-dereceli homojen elemanları denir. $x \in R_g$ ve $x \neq 0$ için x in derecesi der $x = g$ ya da $|x| = g$ olarak ifade edilir. R nin bir r elemanı $\forall \sigma \in G$ için $r_\sigma \in R_\sigma$ olmak üzere $r = \sum_{\sigma \in G} r_\sigma$ biçiminde tek türlü yazılıma sahiptir (Nastasescu ve Oystaeyen 2004). Ancak, bu toplam sonlu bir toplamdır yani hemen hemen tüm r_σ elemanların sıfır olarak seçilebileceği sonlu bir toplamdır. Bu toplamdaki bir r_σ ya r nin (σ dereceli) homojen bileşeni denir.

Herhangi bir R halkası için $R_e = R$ ve $g \neq e$ özelliğindeki her $g \in G$ için $R_g = \{0\}$ alınırsa R bir $G-$dereceli halka olur.

Aşağıda verilecek önermenin ispatı (Nastasescu ve Oystaeyen 2004) de bulunabilir.

Önerme 3.1.2. $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ bir $G-$dereceli halka olsun. Bu takdirde;

1) $1_R \in R_e$ dir. Yani, 1_R R nin e. dereceden homojen bir elemandır.
2) R_e, R nin bir alt halkasıdır.
3) $\forall g \in G$ için R_g bir R_e-bimodüldür.
4) $a \in R_\lambda$ bir birim ise $a^{-1} \in R_{\lambda^{-1}}$ dir.
5) R nin strongly $G-$dereceli halka olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\sigma \in G$ için $1_R \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ olmasıdır.

İspat. 1) 1_R nin $\forall \sigma \in G$ için $r_\sigma \in R_\sigma$ olmak üzere $1_R = \sum_{\sigma \in G} r_\sigma$ biçiminde yazıldığı kabul edilsin. Bu takdirde herhangi bir $s_\lambda \in R_\lambda$ ($\lambda \in G$) için $s_\lambda r_\sigma \in R_{\lambda * \sigma}$ olmak üzere $s_\lambda = s_\lambda 1_R = s_\lambda \left(\sum_{\sigma \in G} r_\sigma \right) = \sum_{\sigma \in G} s_\lambda r_\sigma$ yazabilir. Buradan, $\sigma \neq e$ özelliğindeki herhangi bir σ için $s_\lambda r_\sigma = 0$ sonucu elde edilir. Böylece, herhangi bir $s \in R$ için $s r_\sigma = 0$ olur. Özel olarak $s = 1$ için $r_\sigma = 0$ olup $1_R = r_e \in R_e$ bulunur.

2) R_e R nin bir toplamsal alt grubu olup $R_e R_e \subseteq R_e$ ve 1) den $1_R \in R_e$ olduğundan ispat açıktır.

3) $\forall g \in G$ için $R_e R_g = R_g R_e \subset R_g$ olduğundan her bir R_g bir R_e-bimodüldür.

4) $a \in R_\lambda$ bir birim olsun. Şayet, $\left(a^{-1}\right)_\sigma \in R_\sigma$ olmak üzere $a^{-1} = \sum_{\sigma \in G} \left(a^{-1}\right)_\sigma$ biçiminde ise bu takdirde $1_R = aa^{-1} = a\left(\sum_{\sigma \in G} \left(a^{-1}\right)_\sigma\right) = \sum_{\sigma \in G} a\left(a^{-1}\right)_\sigma$ yazılabilir. $1_R \in R_e$ ve $a\left(a^{-1}\right)_\sigma \in R_{\lambda * \sigma}$ olduğundan $\sigma \neq \lambda^{-1}$ özelliğindeki herhangi bir σ için $a\left(a^{-1}\right)_\sigma = 0$ elde edilir. a birim olduğundan $\sigma \neq \lambda^{-1}$ için $\left(a^{-1}\right)_\sigma \neq 0$ olup $a^{-1} = \left(a^{-1}\right)_{\lambda^{-1}} \in R_{\lambda^{-1}}$ sonucuna ulaşılır.

5) Herhangi bir $\sigma \in G$ için $1_R \in R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde; $\sigma, \tau \in G$ için $R_{\sigma*\tau} = R_e R_{\sigma*\tau} = \left(R_\sigma R_{\sigma^{-1}}\right) R_{\sigma*\tau} = R_\sigma \left(R_{\sigma^{-1}} R_{\sigma*\tau}\right) \subseteq R_\sigma R_\tau$ eşitliklerinden $R_{\sigma*\tau} = R_\sigma R_\tau$ yani R strongly $G-$dereceli halkadır. Tersine, R strongly $G-$dereceli halka olsun. Bu takdirde 1) yardımıyla $1_R \in R_e = R_{\sigma*\sigma^{-1}} = R_\sigma R_{\sigma^{-1}}$ elde edilir.

Tanım 3.1.3. $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ bir $G-$dereceli halka olsun. Eğer bir M (sol) R-modülü için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M ye bir (sol) $G-$dereceli R-modül denir.

1) M_x, M nin toplamsal alt gruplarının bir üyesi olmak üzere $M = \bigoplus_{x \in G} M_x$ dir.

2) $\forall g, x \in G$ için $R_g M_x \subseteq M_{g*x}$ dir.

Tanımdaki (2) şartından, $R_e M_x \subseteq M_{e*x} = M_x$ olacağından her M_x, M nin bir (sol) R_e-alt modülü olur.

Tanım 3.1.4. V bir vektör uzayı, G bir Abel grubu ve $\forall g \in G$ için V_g, V nin alt uzaylarının bir üyesi olsun. V vektör uzayı için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye $G-$dereceli vektör uzayı ya da kısaca dereceli vektör uzayı denir.

1) $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$ dir.

2) $\forall j, k \in G$ için $V_j V_k \subseteq V_{j+k}$ dır.

V nin her bir x elemanı, $g \in G$ ve $X_g \in V_g$ için $x = \sum_{g \in G} X_g$ olacak biçimde tek türlü yazılır. Bu durumda X_g ye x in g. dereceden homojen bileşeni denir.

Bir A *cebirinin* $G-$*dereceli* olması, A nın altında yatan vektör uzayının $G-$dereceli olması olarak tanımlanır. Yani, $\forall g \in G$ için A_g bir alt uzay olmak üzere; $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ ve $\forall j,k \in G$ için $A_j A_k \subseteq A_{j+k}$ şartları sağlanır. Bu durumda; $G-$dereceli cebirler için Önerme 3.1.2 nin 5. şıkkı tanımdan geçerli olup ilk 4 şıkkın benzerlerinin ispatları kolayca görülebilir ve bunlar aşağıdaki önermede ifade edilecektir.

Önerme 3.1.5. $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ bir $G-$dereceli cebir olsun. Bu takdirde;

1) $1_A \in A_0$ dır.

2) A_0, A nın bir alt cebiridir.

3) $\forall g \in G$ için A_g bir (sol) A_0-modüldür.

4) $a \in A_g$ bir birim ise $a^{-1} \in A_{-g}$ dir.

Örnek 3.1.6. $A = R[x_1,...,x_k]$ derecesi n olan polinom cebiri olsun. Bu durumda, bu cebir $A_n = \left\{ \sum r_{(d_1,d_2,...,d_k)} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_k^{d_k} \,\middle|\, d_1 + d_2 + \cdots + d_k = n \right\}$ biçiminde ifade edilir. Özel olarak,

$n = 0$ için $A_0 = \left\{ r_{(0,0,...,0)} 1 \,\middle|\, d_1 + d_2 + \cdots + d_k = 0 \right\} = R$,

$n = 1$ için

$$A_1 = \left\{ r_{(1,0,...,0)} x_1 + r_{(0,1,...,0)} x_2 + ... + r_{(0,...,0,1)} x_k \,\middle|\, d_1 + d_2 + \cdots + d_k = 1 \right\} = Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus \cdots \oplus Rx_k,$$

$n = 2$ için $A_2 = \left\{ r_{(2,0,...,0)} x_1^2 + r_{(0,2,...,0)} x_2^2 + \cdots + r_{(0,...,0,2)} x_k^2 \right.$

$$+ r_{(1,1,0,...,0)} x_1 x_2 + r_{(1,0,1,...,0)} x_1 x_3 + r_{(1,0,0,1,...,0)} x_1 x_4 + \cdots + r_{(1,0,...,0,1)} x_1 x_k$$

$$+ r_{(0,1,1,...,o)} x_2 x_3 + r_{(0,1,0,1,0,0,...,0)} x_2 x_4 + \cdots + r_{(0,1,0,0,...,0,1)} x_2 x_k$$

$$+ r_{(0,0,1,1,0,0,...,0)} x_3 x_4 + \cdots + r_{(0,0,1,0,0,...,0,1)} x_3 x_k$$

$\vdots$

$$+r_{(0,0,\dots,0,1,1)}x_{k-1}x_k \;\Big|\; d_1+d_2+\cdots+d_k=2\Big\},$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A=R[x_1,\dots,x_k] &= \cdots\oplus\{0\}\oplus A_0\oplus A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n\oplus\{0\}\oplus\cdots \\ &= \cdots\oplus\{0\}\oplus R\oplus(Rx_1\oplus Rx_2\oplus\cdots\oplus Rx_k)\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n\oplus\{0\}\oplus\cdots \end{aligned}$$

olacağına dikkat ediniz. Bu durumda, bu cebir $\mathbb{Z}-$ dereceli cebir olarak ele alınabilir. Üstelik, $A=R[x_1,x_2,\dots,x_k]$ cebiri $A_{\bar{0}}:=A_0$ ve $A_{\bar{1}}:=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} A_n$ olmak üzere $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ biçiminde yazılabilir ki bu durumda bu cebir $\mathbb{Z}_2-$ dereceli cebir olarak da ele alınabilir. Şayet, $\mathbb{Z}-$ dereceli cebir iken $k=1$ olarak seçilirse $A=R[x_1]=R[x]$ (1-değişkenli) derecesi n olan polinom cebiri olup

$$A_0=r_0 1,\ A_1=r_1x,\ A_2=r_2x^2,\dots,A_n=r_nx^n$$

ve böylece

$$R[x]=\cdots\oplus\{0\}\oplus R\oplus Rx\oplus Rx^2\oplus\cdots\oplus Rx^n\oplus\{0\}\oplus\cdots$$

biçimine gelir. $\mathbb{Z}-$ dereceli cebir iken $k=2$ olarak seçilseydi $A=R[x_1,x_2]$ (2-değişkenli) derecesi n olan polinom cebiri olup

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{r_{(0,0)}x_1^0x_2^0 \,\middle|\, d_1+d_2=0\right\}=\left\{r_{(0,0)}1 \,\middle|\, d_1+d_2=0\right\}, \\ A_1 &= \left\{r_{(1,0)}x_1^1x_2^0\oplus r_{(0,1)}x_1^0x_2^1 \,\middle|\, d_1+d_2=1\right\}=\left\{r_{(1,0)}x_1+r_{(0,1)}x_2 \,\middle|\, d_1+d_2=1\right\}, \\ A_2 &= \left\{r_{(2,0)}x_1^2+r_{(1,1)}x_1x_2+r_{(0,2)}x_2^2 \,\middle|\, d_1+d_2=2\right\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \left\{\sum r_{(d_1,d_2)}x_1^{d_1}x_2^{d_2} \mid d_1+d_2=n\right\} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$R[x_1,x_2]=\cdots\oplus\{0\}\oplus R\oplus(Rx_1\oplus Rx_2)\oplus\left(Rx_1^2\oplus Rx_1x_2\oplus Rx_2^2\right)\oplus A_3\oplus\cdots\oplus A_n\oplus\{0\}\oplus\cdots$$

olarak elde edilirdi.

Şimdi, (Nastasescu ve Oystaeyen 2004) den aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.7. K özdeşlikli bir halka olmak üzere $R = M_3(K)$ bir strongly $\mathbb{Z}_2$ − dereceli halkadır.

$R_0 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}$ ve $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{13} \\ 0 & 0 & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & 0 \end{pmatrix}$ olarak tanımlanırsa $R = R_0 \oplus R_1$ olacağı açıktır. Ayrıca, $R_0R_0 = R_{0+0} = R_0, R_0R_1 = R_{0+1} = R_1, R_1R_0 = R_{1+0} = R_1$ ve $R_1R_1 = R_{1+1} = R_0$ olduğundan $R = M_3(K)$ bir strongly $\mathbb{Z}_2$ − dereceli halka olur.

(Nastasescu ve Oystaeyen 2004) den aşağıda bir örnek daha verelim.

Örnek 3.1.8. A bir halka ve $R = M_n(A)$ matris halkası olsun. $M_n(A)$ matris halkasının standart bazı e_{ij} lerden oluşsun. Bu durumda, $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ yani $j = k$ ise $e_{ij}e_{kl} = e_{il}$ ve $j \neq k$ ise $e_{ij}e_{kl} = 0$ dır. Şimdi, $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$R_t = \begin{cases} \sum\limits_{i=-t+1}^{n} R_{e_{i(i+t)}} & ; \quad -n < t < 0 \text{ ise} \\ \sum\limits_{i=1}^{n-t} R_{e_{i(i+t)}} & ; \quad 0 \leq t < n \quad \text{ise} \\ 0 & ; \quad |t| \geq n \quad \text{ise} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu R_t yardımıyla $M_n(A)$ matris halkasının bir parçalanışı elde edilecektir ve böylece bu matris halkasının $\mathbb{Z}-$ dereceli halka olduğu elde edilecektir. Bu parçalanışın daha iyi anlaşılması için aşağıda $n = 3$ durumu incelenecektir. Bu durumda,

$$R_t = \begin{cases} \sum\limits_{i=-t+1}^{3} R_{e_{i(i+t)}} & ; \quad -3 < t < 0 \Rightarrow R_{-2}, R_{-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{3-t} R_{e_{i(i+t)}} & ; \quad 0 \leq t < 3 \quad \Rightarrow R_0, R_1, R_2 \\ 0 & ; \quad |t| \geq 3 \quad \Rightarrow t \in \mathbb{Z} - \{-2,-1,0,1,2\} \text{ için } \forall R_t = 0 \end{cases}$$

olup buradan

$$R_{-2}=\sum_{i=3}^{3}R_{e_{i(i-2)}}=R_{e_{31}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\r_{31}&0&0\end{pmatrix},$$

$$R_{-1}=\sum_{i=2}^{3}R_{e_{i(i-1)}}=R_{e_{21}}+R_{e_{32}}=\begin{pmatrix}0&0&0\\r_{21}&0&0\\0&r_{32}&0\end{pmatrix},$$

$$R_{0}=\sum_{i=1}^{3}R_{e_{i(i)}}=R_{e_{11}}+R_{e_{22}}+R_{e_{33}}=\begin{pmatrix}r_{11}&0&0\\0&r_{22}&0\\0&0&r_{33}\end{pmatrix},$$

$$R_{1}=\sum_{i=1}^{2}R_{e_{i(i+1)}}=R_{e_{12}}+R_{e_{23}}=\begin{pmatrix}0&r_{12}&0\\0&0&r_{23}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R_{2}=\sum_{i=1}^{1}R_{e_{i(i+2)}}=R_{e_{13}}=\begin{pmatrix}0&0&r_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece, $R=M_3(A)=\cdots\oplus[0]\oplus R_{-2}\oplus R_{-1}\oplus R_0\oplus R_1\oplus R_2\oplus[0]+\cdots$ elde edilir. Şimdi, bu durum genele taşınırsa,

$$\begin{array}{ll}
R_{-(n-1)}=R_{e_{n1}} & (1\,\text{terimli})\\
R_{-(n-2)}=R_{e_{(n-1)1}}+R_{e_{n2}} & (2\,\text{terimli})\\
\vdots & \\
R_{-1}=R_{e_{21}}+R_{e_{32}}+\cdots+R_{e_{n(n-1)}} & (n-1\ \text{terimli})\\
R_{0}=R_{e_{11}}+R_{e_{22}}+\cdots+R_{e_{(n-1)(n-1)}}+R_{e_{nn}} & (n\ \text{terimli})\\
R_{1}=R_{e_{12}}+R_{e_{23}}+\cdots+R_{e_{(n-1)n}} & (n-1\,\text{terimli})\\
\vdots & \\
R_{n-2}=R_{e_{1(n-1)}}+R_{e_{2n}} & (2\,\text{terimli})\\
R_{n-1}=R_{e_{1n}} & (1\,\text{terimli})
\end{array}$$

eşitliklerinden

$$R = M_n(A) = \cdots \oplus [0] \oplus R_{-(n-1)} \oplus R_{-(n-2)} \oplus \cdots \oplus R_{-1} \oplus R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_{n-2} \oplus R_{n-1} \oplus [0] + \cdots$$

olarak yazılabilir. Bu parçalanışta, $[0]$ dan farklı R_i lerin sayısının $2n-1$ olduğuna dikkat ediniz. Bu $R = M_n(A)$ özel matris halkası bir $\mathbb{Z}-$ dereceli halka olarak düşünülebilir. Örnek olarak,

$n=4$ iken; $R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ biçiminde olacağından

$R_3R_2 = e_{14}[e_{13} + e_{24}] = [0] = R_5$ olur, yani $R_3R_2 \subset R_5$ şartı geçerlidir. Benzer biçimde,

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } R_1 = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ için } R_2R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_{13}r_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_3$$

olur. Yani, $R_2R_1 \subset R_3$ elde edilir.

Örnek 3.1.9. K bir cisim olsun. $K(n) = K \times K^{n-1}$ üzerinde "+" toplama ve "$\cdot$" çarpma ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\forall a_0, b_0 \in K$ ve $\forall \vec{v} = (a_1, a_2 ..., a_{n-1}),\ \vec{w} = (b_1, b_2, ..., b_{n-1}) \in K^{n-1}$ için

$$+ : K(n) \times K(n) \to K(n)$$
$$((a_0, \vec{v}), (b_0 \vec{w})) \to (a_0 + b_0, \vec{v} + \vec{w}) = \left(a_0 + b_0, (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_{n-1} + b_{n-1})\right)$$

ve

$$\cdot : K(n) \times K(n) \to K(n)$$
$$\begin{aligned} ((a_0, \vec{v}), (b_0, \vec{w})) \to (a_0, \vec{v})(b_0, \vec{w}) &= (a_0b_0, a_0\vec{w} + \vec{v}b_0) \\ &= (a_0b_0, a_0(b_1, b_2, ..., b_{n-1}) + (a_1, a_2 ..., a_{n-1})b_0) \\ &= (a_0b_0, (a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_2b_0, ..., a_0b_{n-1} + a_{n-1}b_0)). \end{aligned}$$

Bu takdirde, $(K(n), +, \cdot)$ bir halkadır. Hatta bir lokal halka yapısına sahiptir. Çarpmaya göre tersi olmayan elemanların oluşturduğu küme I ile gösterilirse $I = \{0\} \times K^{n-1}$ kümesi $K(n)$ de bir maksimal ideal oluşturur. $\forall (a_0, \vec{v}) \in K(n)$ için

$(1,\vec{0})(a_0,\vec{v})=(a_0,1\vec{v}+\vec{0}a_0)=(a_0,\vec{v})$ ve $(a_0,\vec{v})(1,\vec{0})=(a_0,a_0\vec{0}+\vec{v}1)=(a_0,\vec{v})$ olduğundan $1_{F(\mathrm{n})}=(1,\vec{0})\in K(n)$ dir. Şayet

$$\begin{aligned} K(n) &= K\times K^{n-1} \\ &= (K\times\{\vec{0}\})\oplus(\{0\}\times K^{n-1}) \\ &= R_0\oplus R_1 \end{aligned}$$

biçiminde ele alınırsa

$$\begin{aligned} &(a,\vec{0})(b,\vec{0})=(ab,a\vec{0}+\vec{0}b)=(ab,\vec{0})\in R_0 \Rightarrow R_0R_0\subset R_0 \\ &(a,\vec{0})(0,\vec{v})=(0,a\vec{v})\in R_1 \Rightarrow R_0R_1\subset R_1 \\ &(0,\vec{v})(0,\vec{\mathrm{w}})=(0,0\,\vec{\mathrm{w}}+\vec{v}0)=(0,\vec{0})\in R_1 \Rightarrow R_1R_1\subset R_1 \end{aligned}$$

olduğundan $K(n)$ bir $\mathbb{Z}_2-$dereceli halka olur.

Şimdi, (Nastasescu ve Oystaeyen 2004) den son örneği verelim.

Örnek 3.1.10. F karakteristiği 2 den farklı olan herhangi bir cisim olmak üzere $R=M_n(F)$ matrislerinin halkasını ele alalım.

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

olmak üzere; $\forall x\in M_n\left(F\right)$ için $g(x)=QxQ^{-1}$ şeklinde tanımlanan

$$g: M_n(F)\to M_n(F)$$

dönüşümü R nin bir otomorfizmidir. Herhangi bir $\begin{pmatrix} A_m & B_{m\times(n-m)} \\ C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix}\in M_n(F)$ matrisi için,

$$g\begin{pmatrix} A_m & B_{m\times(n-m)} \\ C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_m & B_{m\times(n-m)} \\ C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -A_m & -B_{m\times(n-m)} \\ C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_m & -B_{m\times(n-m)} \\ -C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix}$$

ve

$$g\begin{pmatrix} A_m & -B_{m\times(n-m)} \\ -C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m & B_{m\times(n-m)} \\ C_{(n-m)\times m} & D_{(n-m)} \end{pmatrix}$$

olur. Yani, $g^2(x) = x = I(x)$ olup $g^2 = I$ $(g^2 = 1)$ elde edilir. Dolayısıyla $G =< g >= \{1, g\}$ biçiminde 2. mertebeden bir G grubu elde edilir.

R halkasının g altında değişmez (invaryant) kalan elemanlarının oluşturduğu küme R_1 ile gösterilirse

$$R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}_{n\times n} : A \in M_m(F) \text{ ve } D \in M_{n-m}(F) \right\}$$

olarak bulunur. Bu durumda; $R_g = \{ r \in R \mid g(r) = -r \}$ olarak seçilirse

$$R_g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{m\times(n-m)}(F) \text{ ve } C \in M_{(n-m)\times m}(F) \right\}$$

elde edilir. Böylece;

$$R = R_1 \oplus R_g$$

yazılır ki bu R nin $G-dereceli$ bir halka olduğunu gösterir. Burada,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AG & 0 \\ 0 & DF \end{pmatrix} \in R_1 \Rightarrow R_1R_1 \subset R_1$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AB \\ DC & 0 \end{pmatrix} \in R_{1.g} = R_g \Rightarrow R_1R_g \subset R_g$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & BD \\ CA & 0 \end{pmatrix} \in R_{g.1} = R_g \Rightarrow R_gR_1 \subset R_g$$

sonucuna varılır.

Örnek 3.1.11. R ve V iki halka, T bir $RV-$bimodül olsun ve $A=\left\{\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & v \end{pmatrix} : r\in R,\ t\in T,\ v\in V\right\}$ kümesi üzerinde bildiğimiz matris toplamı ve çarpımı işlemleri tanımlansın. Bu durumda $A_0=\left\{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} : r\in R,\ v\in V\right\}$ ve $A_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :\ t\in T\right\}$ olarak tanımlanırsa $A=A_0\oplus A_1$ olarak yazılabilir. Üstelik,

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & 0 \\ 0 & v' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} rr' & 0 \\ 0 & vv' \end{pmatrix}\in A_0 \Rightarrow A_0A_0\subset A_0$$

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & rt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in A_1 \Rightarrow A_0A_1\subset A_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & tv \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in A_1 \Rightarrow A_1A_0\subset A_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in A_2=A_0 \Rightarrow A_1A_1\subset A_0$$

olduğundan A bir $\mathbb{Z}_2-$dereceli halka/cebir olur.

Örnek 3.1.12. Birimli ve değişmeli bir K halkası veriliyor. $A=\left\{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \alpha_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \gamma_2 & \alpha_0 \end{bmatrix} : \alpha_0,\beta_1,\gamma_2\in K\right\}$ kümesi üzerinde bilinen matris toplamı ve çarpımı ikili işlemleri tanımlanırsa A bir halka yapısına sahip olur. A nın herhangi bir $X=\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \alpha_0 & \beta_1 \\ \beta_1 & \gamma_2 & \alpha_0 \end{bmatrix}$ elemanı $X=\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}$ biçiminde tek türlü yazılır. Bu durumda, $A_0=\left\{\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} : \alpha_0\in K\right\}$,

$A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \beta_1 \in K \right\}$ ve $A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} : \gamma_2 \in K \right\}$ olmak üzere $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ biçiminde ifade edilmiş olur. Dolayısıyla, A bir $\mathbb{Z}_3 -$dereceli halkadır. Burada,

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0\beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0\beta_0 \end{bmatrix} \in A_0 \Rightarrow A_0A_0 \subset A_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_2 \\ \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2\gamma_2 \\ \beta_2\gamma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_{2+2} = A_4 = A_1 \Rightarrow A_2A_2 \subset A_1$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_0\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_0\beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_1 \Rightarrow A_0A_1 \subset A_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1\alpha_0 \\ \beta_1\alpha_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in A_1 \Rightarrow A_1A_0 \subset A_1$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_0\gamma_2 \\ \alpha_0\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0\gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \in A_2 \Rightarrow A_0A_2 \subset A_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2\alpha_0 \\ \gamma_2\alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2\alpha_0 & 0 \end{bmatrix} \in A_2 \Rightarrow A_2A_0 \subset A_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ \beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1\beta_2 \\ \beta_1\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1\beta_2 & 0 \end{bmatrix} \in A_2 \Rightarrow A_1A_1 \subset A_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1\gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1\gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1\gamma_2 \end{bmatrix} \in A_{1+2} = A_3 = A_0 \Rightarrow A_1A_2 \subset A_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_2\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2\beta_1 \end{bmatrix} \in A_{2+1} = A_3 = A_0 \Rightarrow A_2A_1 \subset A_0$$

dır.

Bu örnekte verilen halka yapısını genele taşıyıp $\mathbb{Z}_n -$dereceli bir R halkası elde edilebilir.

Örnek 3.1.13. Birimli ve değişmeli bir K halkası üzerinde verilen;

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & x_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix}$$ tipinden matrislerin oluşturduğu R halkası için;

$$X = \underbrace{x_0 I_n}_{\in A_0} + x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in A_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in A_2} + \cdots +$$

$$x_{n-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\in A_n}$$

olarak yazılabildiği ve $A_iA_j \subset A_{i+j}$ olduğundan bu R halkası bir $\mathbb{Z}_n -$dereceli halka örneğidir.

Şimdi, süpercebir tanımını vermek için hazırız:

3.2. Süpercebirler

Süpercebirler hakkında literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bunlar için (Kac 1977(a), Kac 1977(b), Kac 1998, Kaplansky (preprint), Kaplansky 1980, Martinez ve Zelmanov 2001, Martinez ve ark. 2001, Martinez ve ark. 2010) çalışmalarına bakılabilir. Ancak, bu kısımda bazı özel süpercebirler ve bunlarla ilgili bazı örnekler vermekle yetinilecektir. Buradaki temel bilgiler ve örnekler (Martinez 2003, Sthanumoorthy ve Priyadharsini 2012, Ayadi ve Benayadi 2012) makalelerinden derlenmiştir.

Tanım 3.2.1. Bir $\mathbb{Z}_2 -$dereceli A cebiri bir süpercebir olarak adlandırılır. Bu durumda, $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ dir ve her $i, j \in \mathbb{Z}_2$ için $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ olduğunu hatırlayınız. Bu durumda A_0 ın elemanlarına A nın çift kısmı, A_1 in elemanlarına ise A nın tek kısmı denir.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ süpercebirine bir Lie süpercebiri denir: $i = 0,1$ ve $a \in L_i$ için $|a| = i$, $\forall a,b,c \in L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ ve $\forall (a,b) \in L \times L$ için $[,] : L \times L \to L$ biçiminde bir bilineer dönüşüm olmak üzere

LS1) $[a,b] = \text{-(-1)}^{|a|.|b|}[b,a]$ dır (süper antikomütatiflik şartı),

LS2) $[[a,b],c] + (-1)^{|a|(|b|+|c|)}[[b,c],a] + (-1)^{|c|(|a|+|b|)}[[c,a],b] = 0$ dır (süper Jacobi özdeşliği).

Lie süpercebirleri hakkında daha detaylı bilgi için (Musson 2012, Sthanumoorthy 2016, Kac 1977(a), 1977(b), Kac 1998) çalışmalarına bakılabilir.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir $J = J_{\bar{0}} \oplus J_{\bar{1}}$ süpercebirine bir Jordan süpercebiri denir:

JS1) $a \cdot b = (-1)^{|a|.|b|} b \cdot a$ dır (süper komütatiflik şartı), JS2) $(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)+(-1)^{|b||c|}(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)+(-1)^{|b||d|+|c||d|}(a\cdot d)\cdot(b\cdot c)$

$=((a\cdot b)\cdot c)\cdot d+(-1)^{|c||d|+|b||c|}((a\cdot d)\cdot c)\cdot b+(-1)^{|a||b|+|a||c|+|a||d|+|c||d|}((b\cdot d)\cdot c)\cdot a$ (süper Jordan özdeşliği).

NOT: $A_{\bar{1}}=\{0\}$ olması durumu dışında bir $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ Lie (ya da Jordan) süpercebiri bir Lie (yada Jordan) cebiri olamaz. A bir Lie (ya da Jordan) süpercebiri iken A nın çift kısmı $A_{\bar{0}}$ bir Lie (ya da Jordan) cebiridir ve $A_{\bar{1}}$ bir $A_{\bar{0}}-$bimodüldür.

F bir cisim olmak üzere aşağıda birleşmeli süpercebirler ile ilgili iki örnek verilmiştir:

(I) $A=M_{m+n}(F)$ matris cebiri, $A_{\bar{0}}=\left\{\begin{pmatrix} A_m & 0\\ 0 & D_n\end{pmatrix}\right\}$ ve $A_{\bar{1}}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & B_{m\times n}\\ C_{n\times m} & 0\end{pmatrix}\right\}$ olmak üzere $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ biçiminde yazılır.

(II) $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}: a,b\in M_n(F)\right\}$ matris cebiri, $A_{\bar{0}}=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}: a\in M_n(F)\right\}$ ve $A_{\bar{1}}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}: b\in M_n(F)\right\}$ olmak üzere $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$ biçiminde yazılır.

Şimdi (Wall 1964) den aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.2. Cebirsel olarak kapalı bir F cismi üzerinde tanımlı olan birleşmeli basit sonlu boyutlu her süpercebir (I) ya da (II) den birisine yapısal olarak benzerdir.

Örnek 3.2.3. F bir cisim olsun. Bu takdirde,

$$sl(m,n)=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}: \alpha\in M_{m\times m}(F),\beta\in M_{m\times n}(F),iz(\alpha)=iz(\delta),\gamma\in M_{n\times m}(F),\delta\in M_{n\times n}(F)\right\}$$

cebiri bir Lie süpercebiri örneğidir. $sl(m,n)=\begin{pmatrix} \alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \beta\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$ biçiminde yazılırsa sonuç aşikardır.

Örnek 3.2.4. F bir cisim olmak üzere

$P(n)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a^T\end{pmatrix}: a,b,c\in M_{n+1,n+1}(F),iz(a)=0,b=b^T,c=-c^T\right\}$ cebiri, $n\geq 2$ için

$sl(n+1,n+1)$ cebirinin bir alt süpercebiridir. $Q(n)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : iz(b)=0\right\}$ cebiri, $sl(n+1,n+1)$ cebirinin bir alt süpercebiridir.

Örnek 3.2.5. (I) ve (II) süpercebirlerinden elde edilen A^{+} süpercebirleri birer Jordan süpercebiri örneği olur.

Örnek 3.2.6. F bir cisim olsun. $M_{m+2n}(F)$ cebiri üzerinde,

$S_{2n}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & . \\ -1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & -1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $Q=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{pmatrix}$ matrisi ile $a \in M_m(F)$ ve $d \in M_{2n}(F)$ olmak üzere

$$\bigstar : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to Q^{-1}\begin{pmatrix} a^T & -c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -S_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^T & -c^T \\ b^T & d^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & S_{2n} \end{pmatrix}$$

biçiminde bir dönüşüm tanımlanıyor. Bu dönüşüm bir involusyondur. Hermityen elemanların bu kümesi $H(A,\bigstar)=\mathrm{osp}_{m,2n}(F)$ ile gösterilen ortosympletic süpercebirleri tanımlar.

Örnek 3.2.7. F bir cisim olsun. $A=M_{n+n}(F)$ ve A üzerinde

$$\bigstar : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d^T & -b^T \\ c^T & a^T \end{pmatrix}$$

involusyonu tanımlansın. Bu takdirde

$$H(A,\bigstar)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a^T \end{pmatrix} : a,b,c \in M_n(F), b^T=-b, c^T=c\right\}$$

bir Jordan süpercebiridir.

Jordan süpercebirleri hakkında daha fazla bilgi için (Kac 1977(a), Martinez ve Zelmanov 2001, Martinez ve ark. 2001, Martinez 2003) çalışmaları incelenebilir.

(Ray 2006) dan aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.8. $V = V_{\bar{0}} + V_{\bar{1}}$, $\mathbb{Z}_2 -$ dereceli vektör uzayı ve V nin endomorfizmlerinin kümesi $gl(V)$ olsun. Bu durumda, $gl(V)_{\bar{0}} = \{ f \in gl(V) : \bar{n} \in \mathbb{Z}_2,\ f(V_{\bar{n}}) \subseteq V_{\bar{n}} \}$ ve $gl(V)_{\bar{1}} = \{ f \in gl(V) : \bar{n} \in \mathbb{Z}_2, f(V_{\bar{n}}) \subseteq V_{\overline{n+1}} \}$ kümeleri üzerinde Lie braketi aşağıdaki biçimde tanımlanıyor:

$$[x,y] = \begin{cases} xy - yx; & x \text{ veya } y \in gl(V)_0 \text{ ise} \\ xy + yx; & x, y \in gl(V)_1 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu takdirde, V bir Lie süpercebir örneğidir.

Tanım 3.2.9. $\Gamma = \Gamma_{\bar{0}} + \Gamma_{\bar{1}}$ birleşmeli ve değişmeli bir süpercebir olsun. $\{\Gamma_{\bar{i}}, \Gamma_{\bar{j}}\} \subseteq \Gamma_{\overline{i+j}}$ ve aşağıdaki iki şartı sağlayan $\{\cdot,\cdot\} : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ biçiminde tanımlı bir 2-lineer dönüşüm bir Poisson braket olarak isimlendirilir:

PB1) $(\Gamma, \{\cdot,\cdot\})$ bir Lie süpercebiridir.

PB2) $\{ab, c\} = a\{b,c\} + (-1)^{|b||c|}\{a,c\}b$ dir (Leibniz özdeşliği).

$J = \Gamma + \Gamma x$, Γ nın iki kopyasının toplamı olsun ve J de aşağıdaki çarpma işlemleri tanımlansın:

$a(bx) = (ab)x$, $(bx)a = (-1)^{|a|}(ba)x$, $(ax)(bx) = (-1)^{|b|}\{a,b\}$. Bu takdirde, $J_{\bar{0}} = \Gamma_{\bar{0}} + \Gamma_{\bar{1}}x$ ve $J_{\bar{1}} = \Gamma_{\bar{1}} + \Gamma_{\bar{0}}x$ olmak üzere $J = J_{\bar{0}} + J_{\bar{1}}$ bir süper cebirdir.

Teorem 3.2.10. $\{\cdot,\cdot\}$, birleşmeli ve değişmeli bir Γ süpercebiri üzerinde bir Poisson braket ise bu takdirde $J = \Gamma + \Gamma x$ bir Jordan süpercebiridir.

4. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde G-dereceli halka, G-dereceli modül, G-dereceli vektör uzayı, G-dereceli cebir, süpercebir, Lie süpercebiri, Jordan süpercebiri, Poisson braket ile ilgili en temel tanım ve örnekler verilmiştir. Bu çalışma, bu konularda çalışmak isteyenler için bir başlangıç çalışması olarak ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Ayadi, I., Benayadi, S. 2012. Associative Superalgebras with Homogeneous Symmetric Structures, Communications in Algebra, 40(4): 1234-1259, DOI: 10.1080/00927872.2010.549160

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir, Dora Yayınevi, Bursa, 430 s.

Eldugue, A., Kochetov, M. 2013. Gradings on Simple Lie Algebras, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 336 pp.

Eyre, T.M.W. 1998. Quantum Stochastic Calculus and Representations of Lie Superalgebras, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 138 pp.

Fraleigh, J. B. 1989. A First Course in Abstract Algebra. Addison Wesley P.C., USA, 518 pp.

Godement, R. 1968. Algebra. Herman, Paris, 638 pp.

Hazrat, R. 2016. Graded Rings and Graded Grothendieck Groups, Cambridge Univ. Press, United Kingdom, 235 pp.

Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Halt, Rinehart and Winston Inc., New York, 502 pp.

Kac, V.G. 1977(a). Classification of simple z-graded lie superalgebras and simple jordan superalgebras, Communications in Algebra, 5(13): 1375-1400, DOI: 10.1080/00927877708822224

Kac, V.G. 1977(b). Lie superalgebras, Advances in Mathematics, 26(1): 8-96, DOI: 10.1016/0001-8708(77)90017-2

Kac, V.G. 1998. Classification of Infinite-Dimensional Simple Linearly Compact Lie Superalgebras, Advances in Mathematics, 139(1): 1-55, DOI: 10.1006/aima.1998.1756

Kaplansky, I. Graded Jordan Algebras I, preprint-http://www1.osu.cz/~zusmanovich/links/files/kaplansky/gja.pdf (Erişim Tarihi: 15.09.2018).

Kaplansky, I. 1980. Superalgebras, Pacific J. Math., 86(1): 93-98.

Martínez C., Zelmanov, E. 2001. Simple Finite-Dimensional Jordan Superalgebras of Prime Characteristic, Journal of Algebra, 236(2): 575-629, DOI: 10.1006/jabr.2000.8456

Martínez, C., Shestakov, I., Zelmanov, E. 2001. Jordan Superalgebras Defined by Brackets, Journal of the London Mathematical Society, 64: 357-368, DOI: 10.1112/S0024610701002290

Martínez, C. 2003. Simplicity of Jordan Superalgebras and Relations with Lie Structures, Irish Math. Soc. Bulletin 50: 97-116.

Martínez C., Shestakov, I., Zelmanov, E. 2010. Jordan bimodules over the superalgebras p(n) and Q(n), Trans. Amer. Math. Soc., 362: 2037-2051, DOI: 10.1090/S0002-9947-09-04997-6

McDonald, B. R. 1976. Geometric Algebra Over Local Rings. Marcel Dekker Inc., New York, 421 pp.

Musson, I. M. 2012. Lie Superalgebras and Enveloping Algebras, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 488 pp.

Nastasescu C., Oystaeyen F. 1982. Graded Ring Theory, North-Holland Publ. Comp., The Netherland, 340 pp.

Oystaeyen, F., Nastasescu, C. 1979. Lecture Notes in Mathematics: Graded and Filtered Rings and Modules 758, Springer, Berlin, 148 pp.

Nastasescu C., Oystaeyen F. 2004. Methods of Graded Rings, Springer, Berlin, Heidelberg, 304 pp.

Ray, U. 2006. Automorphic Forms and Lie Superalgebras, Springer, The Netherlands, 285 pp.

Sthanumoorthy, N., Priyadharsini, K. 2013. Complete Classification of BKM Lie Superalgebras Possessing Special Imaginary Roots. Communications in Algebra, 41(1): 367-400, DOI: 10.1080/00927872.2011.631163

Sthanumoorthy, N., 2016. Introduction to Finite and Infinite Dimensional Lie (Super)algebras, Academic Press, Elsevier, London, 489 pp.

Tignol, J.P., Wadsworth, A.R. 2015. Value Functions on Simple Algebras, and Associated Graded Rings, Springer, Switzerland, 643 pp.

Wall, C.T.C. 1964. Graded Brauer groups, J. Reine Angew Math. 213: 187–199, DOI: 10.1515/crll.1964.213.187

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep Sena GÜREL
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul / 1990
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Bursa Osmangazi Gazi Anadolu Lisesi
Lisans : Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, F.E.F., Matematik Bölümü
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurum/Kurumlar :

İletişim (e-posta) : zynpsena@gmail.com

Yayınları :

Akpınar, A., Aslan, D., Boztemür, B., Dayıoğlu, A., Doğan, İ., Gürel, S. 2018. A Note on Projective Klingenberg Planes over Rings of Plural Numbers, International Journal of New Techonology and Research (IJNTR) 4(2), 103-105.