T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENDİSİ VE TERSİ YALINKAT FONKSİYONLARIN KATSAYI PROBLEMLERİ

Şahsene ALTINKAYA
0000-0002-7950-8450

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2019

TEZ ONAYI

Şahsene ALTINKAYA tarafından hazırlanan Kendisi ve Tersi Yalınkat Fonksiyonların Katsayı Problemleri adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
0000-0002-0243-8263
B.U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL
0000-0002-0700-5774
B.U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İlker KÜÇÜK
0000-0002-5751-7057
B.U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Öznur ÖZKAN KILIÇ
0000-0003-4209-9320
Başkent Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Teknoloji ve Bilgi Yönetimi Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI
0000-0002-6114-0037
Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
25/12/2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

_ _/_ _/2019

İmza

Şahsene ALTINKAYA

ÖZET

Doktora Tezi

KENDİSİ VE TERSİ YALINKAT FONKSİYONLARIN KATSAYI PROBLEMLERİ

Şahsene ALTINKAYA

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde; karmaşık analizin temelini oluşturan, çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılacak olan bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni alt sınıfları tanımlanmış ve çalışılmıştır. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı tahminleri, Fekete-Szegö eşitsizlikleri ve Hankel determinant sınırları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde; elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Faber polinomları, Hankel determinantı, katsayı eşitsizlikleri, kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonlar, yalınkat fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar.

2019, vi+101 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

COEFFICIENT PROBLEMS OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS

Şahsene ALTINKAYA

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is the introduction section.

In the second chapter; some of the definitions and theorems that will be used in the later sections of the thesis, which form the basis of complex analysis, are given.

In the third chapter; new subclasses of bi-univalent functions have been introduced and studied. Coefficient estimates, Fekete-Szegö inequalities and Hankel determinant boundaries are obtained for functions belonging to these classes.

In the fourth chapter; all obtained results are discussed.

Key Words: Bi-univalent functions, coefficient inequalities, Faber polynomials, Hankel determinant, starlike and convex functions, univalent functions.

2019, vi+101 pages.

TEŞEKKÜR

2012 yılından bu yana danışmanlığımı yürüten, çalışmanın büyük bir azim ve sabır gerektirdiğini öğreten, her türlü yardım ve desteğini esirgemeyen, ayrıca insani ve ahlaki değerleri ile de kendime örnek edindiğim, her zaman örnek bir bilim insanının nasıl olması gerektiğini gösteren danışman hocam Sayın

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e

lisansüstü eğitimim boyunca birçok desteğinden faydalandığım bilimin ve bilim insanının destekçisi

TÜBİTAK'a

kendisiyle çalışma fırsatını yakaladığım, Polonya'nın değerli matematikçilerinden Sayın

Prof. Dr. Stanislawa KANAS'a

sonsuz sabrı ve hoşgörüsü ile eğitimime destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şahsene ALTINKAYA

_ _/_ _/2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
A	U birim diskinde tanımlı analitik ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\overline{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk
$\partial D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık diskin sınırı
$D^p f(z)$	f fonksiyonun p. mertebeden S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean türevi
Σ	U birim diskinde tanımlı kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların sınıfı
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$f(U)$	U diskinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f \prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
$H_\Sigma(\beta)$	U birim diskinde analitik, yalınkat ve β mertebeli bi-konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
K	U birim diskinde analitik, yalınkat ve konveks fonksiyonların sınıfı
$K(\beta)$	U birim diskinde analitik, yalınkat ve β mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$\kappa(z)$	Koebe fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S	U birim diskinde tanımlı analitik, yalınkat ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
S^*	U birim diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S^*(\beta)$	U birim diskinde analitik, yalınkat ve β mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S^*_\Sigma(\beta)$	U birim diskinde analitik, yalınkat ve β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı
U	$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$, Açık birim disk

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, 1851 yılında Riemann'ın kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini birim diske konform olarak resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını ispat eden; "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır (Riemann 1851). Bu yüzden keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonlarla çalışmak yerine

$$U = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1\}$$

birim diskinde tanımlanan analitik yalınkat fonksiyonlarla çalışmak kolaylık sağlar. Yani; analitik yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar U da analitik, yalınkat ve normalizasyonu

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0$$

sağlayan fonksiyonların oluşturduğu S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1916 da Bieberbach tarafından ileri sürülen, S sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu için

$$|a_n| \leq n \qquad (n \geq 2)$$

olduğu uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. Bu tahmine ait temel çalışmalar

$$n = 2 \quad \text{için} \quad |a_2| \leq 2 \quad \text{Bieberbach (1916)}$$

$$n = 3 \quad \text{için} \quad |a_3| \leq 3 \quad \text{Löwner (1923)}$$

$$n = 4 \quad \text{için} \quad |a_4| \leq 4 \quad \text{Garabedian ve Schiffer (1955)}$$

$n = 5$ için $|a_5| \leq 5$ Pederson ve Schiffer (1972)

$n = 6$ için $|a_6| \leq 6$ Pederson (1968) ve Ozawa (1969)

$n = 2, 3, \ldots$ için $|a_n| \leq n$ Branges (1985)

olarak sıralanabilir. 1985 yılında Fransız matematikçi Louis de Branges tarafından genel ispatın yapılması, bu alandaki çalışmaların sonlanması anlamına gelmemiş aksine beraberinde birçok problemin ortaya çıkmasını sağlamıştır. S sınıfı için yeni alt sınıflar tanımlama, katsayı tahminleri, Fekete-Szegö problemleri, Hankel determinant sınırları, büyüme ve genişleme teoremleri, yarıçap problemleri, komşuluklar, integral ve türev operatörleri, konvolusyon, sabordinasyon problemleri bunlardan başlıcalarıdır.

1967 yılında Lewin, tersi de yalınkat olan fonksiyonları bi-univalent (kendisi ve tersi yalınkat) fonksiyonlar olarak adlandırmış ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Σ ile göstermiştir. Σ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı sınırları elde etme çalışmaları yapmıştır ve

$$|a_2| \leq 1,51$$

sınırını elde etmiştir (Lewin 1967). Brannan ve Clunie (1980), her $f \in \Sigma$ için

$$|a_2| \leq \sqrt{2}$$

tahminini elde etmiştir. Daha sonra, Netanyahu (1969)

$$maks\,|a_2| = \frac{4}{3}$$

olduğunu göstermiştir. En iyi tahmin ise Tan (1984) tarafından

$$|a_2| \leq 1,485$$

olarak elde edilmiştir. 1986 yılında, Brannan ve Taha Σ sınıfına ait fonksiyonların Taylor-Maclaurin serilerinin ilk iki katsayısı olan a_2 ve a_3 ün modüllerinin üst sınırlarını bulma ile ilgili çalışmalar yapmıştır (Brannan ve Taha 1986). Son yıllarda Srivastava ve ark. (2010) tarafından yapılan çalışmalarla bu problem tekrar çalışılmaya başlanmış; birçok matematikçi tarafından yeni alt sınıflar tanımlanmış ve katsayı tahminleri elde edilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2014a,b, Altınkaya ve Yalçın 2015a,c, Altınkaya ve Yalçın 2017a, Altınkaya ve Yalçın 2018a, Kumar ve ark. 2013, Mazi ve Altınkaya 2019, Srivastava ve ark. 2014, Srivastava ve Bansal 2015, Xu ve ark. 2012).

Bütün bu çalışmalar tanımlanan yeni alt sınıflar için "a_n genel katsayısının modülü için de üst sınır elde edilebilir mi?" sorusunu beraberinde getirmiştir. Yapılan çalışmalara bakıldığında ancak Faber polinomları yardımıyla temel sınıflara ait fonksiyonlar için $|a_n|$ katsayı tahminleri yapılabilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2015b,e, Altınkaya ve Yalçın 2016b, Hamidi ve Jahangiri 2016, Jahangiri ve Hamidi 2013, Jahangiri ve ark. 2014, Zireh ve ark. 2016). Bu yüzden $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ $(\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\})$ için $|a_n|$ katsayı tahmini hâlâ açık bir problemdir.

Yalınkat fonksiyonlar için Fekete-Szegö problemi $a_3 - a_2^2$ nin modülü için üst sınır elde etmek olarak bilinir. Fekete-Szegö problemi ilk olarak Bieberbach tarafından çalışılmıştır ve

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \leq 1$$

olduğu ispatlanmıştır (Bieberbach 1916). $0 \leq \eta < 1$ iç in Fekete-Szegö problemi

$$\left|a_3 - \eta a_2^2\right| \leq 1$$

olarak genelleştirilmiştir (Fekete ve Szegö 1933). Daha sonra yalınkat fonksiyonların alt sınıfları için Fekete-Szegö problemi çözme çalışmaları başlamış ve bu problem hâlâ önemini kaybetmemiştir (Altınkaya ve Yalçın 2014c,d, Altınkaya ve Yalçın 2017b, Kanas ve Darwish 2010, Kwon ve Cho 2003, Orhan ve ark. 2010, Zaprawa 2014).

Yalınkat fonksiyonların katsayıları arasında ilişki kurmak için çalışılan diğer bir problem ikinci Hankel determinantıdır. 1976 yılında Noonan ve Thomas, $n \geq 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere (2.1) formundaki f fonksiyonu için q^{th} Hankel determinantını

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix} \qquad (a_1 = 1)$$

olarak tanımlamıştır (Noonan ve Thomas 1976).

Burada $n = 1$ ve $q = 2$ için

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - a_2^2$$

elde edilir. $H_2(1) = a_3 - a_2^2$ eşitliğiyle tanımlı $H_2(1)$ Hankel determinantı Fekete-Szegö fonksiyonu olarak bilinmektedir.

$n = 2$, $q = 2$ için

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2$$

eşitliği elde edilir. $H_2(2)$ Hankel determinantı ise ikinci Hankel determinantı olarak bilinmektedir. Yalınkat fonksiyonlar için ikinci Hankel determinantı hesaplama çalışmaları da hâlâ popülerliğini korumaktadır (Altınkaya ve Yalçın 2016a,c, Altınkaya ve Yalçın 2018b, Elhosh 1986, Hayman 1968, Güney ve ark. 2019, Janteng ve ark. 2007, Murugusundaramoorthy ve Magesh 2009, Srivastava ve ark. 2018a).

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde, mevcut çalışmalar tarihi bir seyir içerisinde sunulmuştur.

İkinci bölümde, temel topolojik kavramlar ve kompleks düzlemde diferansiyellenebilme, analitik fonksiyonların temel özellikleri, reel kısmı pozitif fonksiyonlar, sabordinasyon prensibi ve uygulamaları, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar, α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonlar ve temel sonuçları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak, $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ ve $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ yeni alt sınıfları tanımlanmış, bu sınıflara ait fonksiyonların başlangıç katsayıları $|a_2|$, $|a_3|$ için üst sınırlar elde edilmiştir. Buna ilave olarak $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfıyla $S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ sınıfı ve $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ sınıfıyla $H_{\Sigma}(\beta)$ arasındaki ilgi ifade edilmiştir. Daha sonra S$\widetilde{al}\widetilde{a}$gean türev operatörü yardımıyla kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların iki yeni alt sınıfı $B_{\Sigma}(p,\lambda,\varphi)$ ve $Q(p,\lambda,\beta)$ tanımlanmıştır. Bu sınıflara ait fonksiyonlar için $|a_2|$, $|a_3|$ başlangıç katsayı tahminleri ve Faber polinomları yardımıyla $|a_n|$ için üst sınır elde edilmiştir. Bu sınıflara ilave olarak sabordinasyon ilkesinden faydalanarak tanımlanan $B_{\Sigma}(\mu,\lambda,\varphi)$ yeni alt sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n|$ katsayı sınırı elde edilmiştir ve bu sınıfa ait fonksiyonlar için Fekete-Szegö problemi ele alınarak $|a_3 - \eta a_2^2|$ için üst sınır hesaplanmıştır.

Son olarak Prema ve Keerthi (2013), Jahangiri ve Hamidi (2015) tarafından çalışılan $P_\Sigma(\alpha, \beta)$ sınıfına, Jahangiri ve ark. (2014) tarafından çalışılan $H_\Sigma(\lambda, \beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için başlangıç katsayı tahminleri verilmiş ve bunlara ilave olarak $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ Hankel determinantının modülü için üst sınır hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde ise elde edilen sonuçlara ait değerlendirmeler yer almaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak genel topolojik kavramlara yer verilecektir. Bu kavramlar Goodman (1983) ve Palka (1991) dan derlenmiştir.

Tanım 2.1.1. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ olmak üzere $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 *merkezli* r *yarıçaplı açık disk* (z_0 noktasının r komşuluğu*)* denir.

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\},$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 *merkezli* r *yarıçaplı kapalı disk* ve *çember* denir.

Tanım 2.1.2. $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olmak üzere $D(z_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı mevcutsa, z_0 noktasına A kümesinin bir *iç nokta*sı denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin *içi* denir. Eğer A kümesinin bütün noktaları iç nokta ise, A kümesine *açık küme* denir.

Tanım 2.1.3. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, V ve W, $\mathbb{C}$ de iki ayrık açık küme olsun. Eğer $A \cap V \neq \varnothing, A \cap W \neq \varnothing$ ve $A \subset V \cup W$ ise A kümesine *bağlantısız küme* denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılı küme* denir.

Tanım 2.1.4. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* denir.

$\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğundan bir bölgedir.

Tanım 2.1.5. Bir $[c, d]$ kapalı aralığının $z = \nu(\xi)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $\xi \in [c, d]$ için $\nu'(\xi)$ mevcut ve $\nu'(\xi) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri* denir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri*, uç noktaları bitişik olan eğriye *kapalı eğri*, sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* (Jordan eğrisi) denir.

Tanım 2.1.6. $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğrinin sınırladığı küme sadece A kümesinin noktalarından oluşmuş ise bu bölgeye *basit bağlantılı bölge* denir.

Tanım 2.1.7. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı mevcutsa f fonksiyonu z_0 noktasında *sürekli*dir denir.

2.2. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve S Sınıfı

Bu kısımda analitik yalınkat fonksiyon kavramı ve analitik yalınkat fonksiyonlar için bazı önemli teoremler yer almaktadır.

Tanım 2.2.1. f fonksiyonu bir D bölgesinde kompleks değişkenli kompleks değerli bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir*dir (türevlenebilir) denir. Limit değerine fonksiyonun z_0 noktasındaki *türevi* denir. Bu türev $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir.

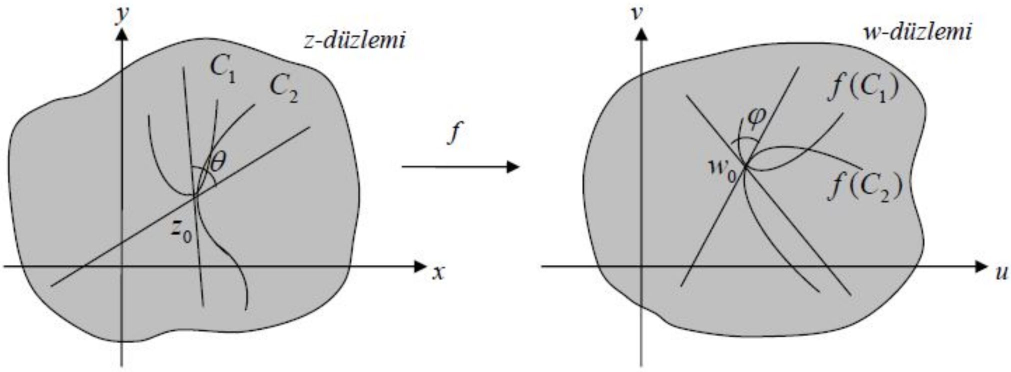
Tanım 2.2.2. D kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir ise f fonksiyonuna *yalınkat fonksiyon* denir. Başka bir deyişle $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde *yalınkat fonksiyon* denir.

Geometrik olarak, düzlemde görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması şeklinde yorumlanır.

Örneğin; $f(z) = z$, U da yalınkat bir fonksiyon iken $f(z) = (1 + z)^3$, U da yalınkat olmayan bir fonksiyondur.

D de yalınkat bir fonksiyon, D bölgesinin bütün alt kümelerinde de yalınkattır. Bundan böyle yalınkat fonksiyon denildiğinde analitik yalınkat fonksiyon anlaşılacaktır.

Tanım 2.2.3. Kompleks düzlemde $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Ayrıca bir $z_0 \in D$ noktasından geçen, aralarında θ açısı bulunan C_1 ve C_2 düzgün eğrileri göz önüne alınsın. Bu eğrilerin $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından θ açısı teşkil ediyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında *konform dönüşüm* denir. f fonksiyonu her z_0 noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.



Şekil 2.1. f konform dönüşümü

Tanım 2.2.4. D bölgesinde analitik f fonksiyonu verilsin. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$f'(z_0) \neq 0$$

ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur denir (Duren 1983).

Teorem 2.2.5. $D \subset \mathbb{C}$ ve $f : D \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonunun D bölgesinde konform olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun D de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991).

Teorem 2.2.6 (Riemann Dönüşüm Teoremi). D kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesi ve $z_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Bu takdirde

$$f(z_0) = 0$$

ve

$$f'(z_0) > 0$$

özelliklerini sağlayan, D bölgesini U üzerine birebir olarak resmeden bir tek analitik

f fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

Tanım 2.2.7. U birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlayan f fonksiyonuna *normalize edilmiş analitik fonksiyon* denir.

U da analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.1}$$

formundaki fonksiyonların sınıfı A ile gösterilir.

U birim diskinde normalize edilmiş yalınkat fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

S sınıfına ait en önemli fonksiyon; $z \in U$ için

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklindeki Koebe fonksiyonudur.

Koebe fonksiyonunun rotasyonları

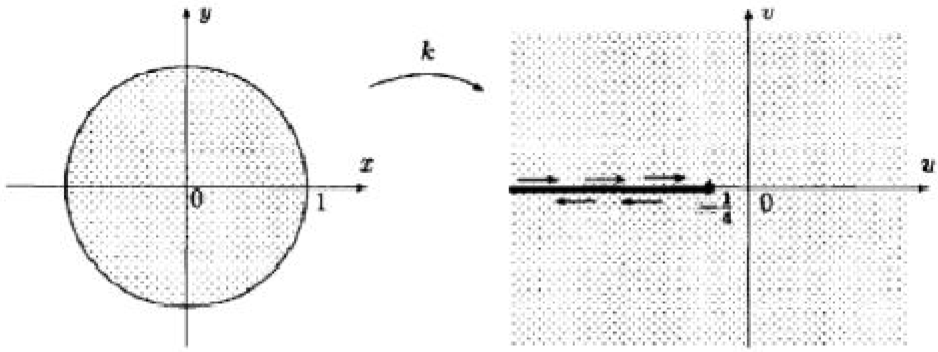
$$\kappa_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

olarak ifade edilmektedir.

Koebe fonksiyonu birim diski

$$\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$$

bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür.



Şekil 2.2. Görüntü bölgesi

S sınıfına ait diğer fonksiyon örnekleri; U birim diskini U birim diskine resmeden

$$w = f(z) = z$$

fonksiyonu, U birim diskini $\Re(w) > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine konform olarak resmeden

$$w = f(z) = \frac{z}{1-z}$$

fonksiyonu ve U birim diskini kompleks düzlemden $\frac{1}{2} \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq -\frac{1}{2}$ yarı doğrularının çıkarılmasıyla elde edilen bölge üzerine resmeden

$$w = f(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonu olarak verilebilir.

S sınıfı bazı elemanter dönüşümler altında değişmez kalır: $f \in S$ için

- $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \cdots$ eşlenik dönüşümü,

- $\theta \in \mathbb{R}$ için $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ rotasyonu,
- $0 < r < 1$ için $g(z) = r^{-1} f(rz)$ genişlemesi,
- $n \in \mathbb{Z}^+$ için $g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)}$ kök dönüşümü,
- $|\tau| < 1$ için $g(z) = \dfrac{f\left(\frac{z+\tau}{1+\bar{\tau}z}\right) - f(\tau)}{(1-|\tau|^2) f'(\tau)}$ disk otomorfizmi,
- χ, f fonksiyonunun değer kümesi üzerinde analitik yalınkat bir fonksiyon olmak üzere $g(z) = (\chi \circ f)(z)$ bileşke dönüşümü

şeklinde tanımlı g fonksiyonları da S sınıfına aittir.

Teorem 2.2.8 (Koebe Dört Çeyrek Teoremi). $f \in S$ ve f fonksiyonu γ değerini almasın; yani $f(z) = \gamma$ denkleminin U da çözümü olmasın. Bu durumda $\gamma \geq \frac{1}{4}$ dür (Koebe 1907).

Koebe Dört Çeyrek Teoremi, S sınıfına ait her f fonksiyonunun $f(U)$ görüntü bölgesinin orijin merkezli $\frac{1}{4}$ yarıçaplı açık diski kapsadığını gösterir.

Teorem 2.2.9 (Bieberbach Teoremi). S sınıfındaki her f fonksiyonu için

$$|a_2| \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach 1916).

Teorem 2.2.10 (Bieberbach Tahmini). S sınıfına ait her f fonksiyonu

$$|a_n| \leq n \qquad (n \geq 2)$$

eşitsizliğini sağlar. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Bieberbach 1916).

Teorem 2.2.11 (Fekete-Szegö Problemi). $0 \leq \eta < 1$ olmak üzere S sınıfına ait her f fonksiyona Löwner metodu uygulanarak

$$\left|a_3 - \eta a_2^2\right| \leq 1 + 2\exp\left(-\frac{2\eta}{1-\eta}\right)$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Eşitlik her η değeri için kesindir (Fekete ve Szegö 1933).

2.3. Reel Kısmı Pozitif Fonksiyonlar ve P Sınıfı

U birim diskinde analitik, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı Carathéodory tarafından inşa edilmiştir. Carathéodory sınıfı yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 2.3.1. U da analitik, $\varphi(0) = 1$ ve $z \in U$ için $\Re\varphi(z) > 0$ şartını sağlayan

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n z^n$$

biçiminde seri açılımına sahip fonksiyonlara *reel kısmı pozitif analitik fonksiyon* denir. U da reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

P sınıfına ait en önemli fonksiyon

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olup U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmeder. Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı temel rolü, φ fonksiyonu P de oynar.

P sınıfına ait bir fonksiyonun yalınkat olması gerekli değildir. Örneğin; $n \geq 2$ için $f(z) = 1 + z^n$, P sınıfına ait bir fonksiyon olmasına rağmen yalınkat değildir.

Lemma 2.3.2 (Carathéodory Lemma). Eğer $\varphi \in P$ ise

$$|\varphi_n| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

dir (Pommerenke 1975).

Lemma 2.3.3. $|x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ eşitsizliklerini sağlayan bazı x, z sayıları için $\varphi \in P$ ise

$$2\varphi_2 = \varphi_1^2 + x(4 - \varphi_1^2)$$

$$4\varphi_3 = \varphi_1^3 + 2(4 - \varphi_1^2)\varphi_1 x - \varphi_1(4 - \varphi_1^2)x^2 + 2(4 - \varphi_1^2)(1 - |x|^2)z$$

eşitlikleri gerçeklenir (Grenander ve Szegö 1958).

2.4. Sabordinasyon İlkesi

Sabordinasyon ilkesi kompleks analizde önemli bir rol oynamaktadır. Bu kavram ilk olarak Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmıştır, fakat temel çalışmalar Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından yapılmıştır.

Lemma 2.4.1 (Schwarz Lemması). $w(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu U birim diskinde tanımlı ve analitik olsun. Ayrıca $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$|w(z)| < |z| \text{ ve } |w'(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik durumu ancak ve ancak $w(z) = \varsigma z, \ |\varsigma| = 1$ fonksiyonu için geçerlidir.

Tanım 2.4.2. Schwarz Lemmasının koşullarını gerçekleyen bir fonksiyona *Schwarz fonksiyonu* denir. Bu fonksiyonların kümesi Ω ile gösterilir (Graham ve Kohr 2003).

Teorem 2.4.3 (Sabordinasyon İlkesi). U birim diskinde analitik olan f ve g fonksiyonları için

$$f(z) = g(w(z))$$

şartını sağlayan bir w Schwarz fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna *sabordine*dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

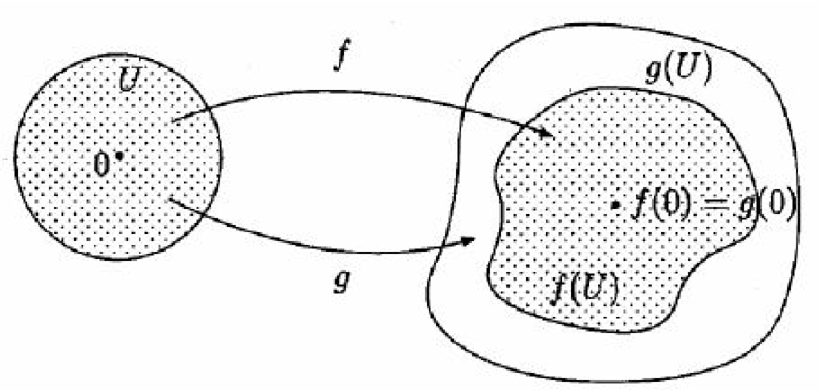
Teorem 2.4.4. f, g U da tanımlı analitik iki fonksiyon ve g fonksiyonu da U da yalınkat olsun. Bu takdirde $f \prec g$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(0) = g(0)$$

ve

$$f(U) \subset g(U)$$

olmasıdır.



Şekil 2.3. $f \prec g$

P ve Ω sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ve teorem ile ifade edilebilir.

Lemma 2.4.5. $\varphi \in P$ ise

$$\varphi(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$$

dir.

Teorem 2.4.6. φ fonksiyonunun P sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $w(z) \in \Omega$ olmak üzere

$$\varphi(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

şeklinde yazılabilmesidir.

Tanım 2.4.7 ($P_m(\beta)$ Sınıfı). U da analitik, $\Phi(0) = 1$ ve $z = re^{i\theta}$ olmak üzere $m \geq 2$, $0 \leq \beta < 1$ için

$$\int_0^{2\pi} \left| \Re \frac{\Phi(z) - \beta}{1 - \beta} \right| d\theta \leq m\pi$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı $P_m(\beta)$ ile tanımlanır (Padmanabhan ve Parvatham 1975).

Ayrıca Λ sınırlı varyasyonlu reel değerli,

$$\int_0^{2\pi} d\Lambda(t) = 2\pi$$

ve

$$\int_0^{2\pi} |d\Lambda(t)| \leq m \quad (m \geq 2)$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $\beta = 0$ için $P_m := P_m(0)$ sınıfı elde edilir. P_m sınıfı U da analitik, $\Phi(0) = 1$ şartını sağlayan

$$\Phi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - ze^{it}}{1 + ze^{it}} d\Lambda(t)$$

formundaki fonksiyonların sınıfını temsil eder; $m = 2$ olması durumunda Carathéodory fonksiyonlarının sınıfı $P := P_2$ elde edilir.

Lemma 2.4.8. $z \in U$ olmak üzere

$$\Phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n z^n$$

forumdaki Φ fonksiyonları için $\Phi \in P_m(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$|\Phi_n| \leq m(1 - \beta) \quad (n \geq 1)$$

dir (Alkahtani ve ark. 2016).

2.5. Hadamard Çarpımı

Bu alt başlık altında Hadamard Çarpımı kavramı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.5.1 (Hadamard Çarpımı). f fonksiyonu (2.1) formunda ve $h \in A$ fonksiyonu

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n \tag{2.2}$$

biçiminde verilmiş olsun.

$$(f * h)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n h_n z^n$$

ifadesine f ve h fonksiyonlarının *Hadamard Çarpımı* (konvolusyon) denir.

Hadamard Çarpımı için bazı özellikler; $g \in A$ ve

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n$$

olmak üzere

- $f * h = h * f$,
- $f * (g * h) = (f * g) * h$,
- $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$,
- $a \in \mathbb{R}$ için $a(f * h) = (af) * h = f * (ah)$,
- $\frac{d}{dz}(f * h) = \frac{df}{dz} * h = f * \frac{dh}{dz}$

olarak verilebilir.

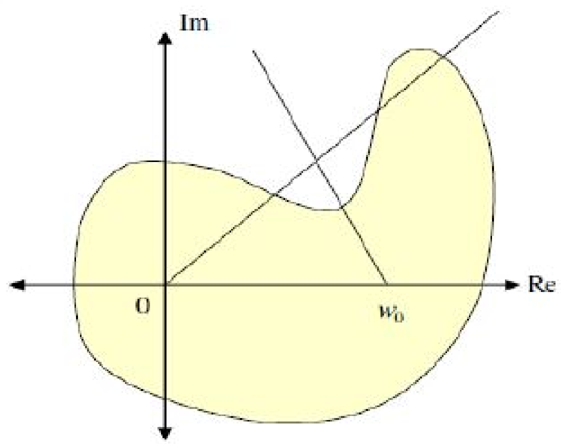
2.6. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda, S sınıfının en önemli alt sınıflarından olan yıldızıl ve konveks fonksiyon sınıfları tanıtılacak ve bazı temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.6.1. $D \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in D$ noktasını, her bir $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası D içinde kalıyorsa, yani her $\rho \in [0, 1]$ için

$$(1 - \rho)w_0 + \rho w \in D$$

ise D kümesine w_0 noktasına göre *yıldızıl küme* denir. Özel olarak $w_0 = 0$ için D bölgesi orijine göre yıldızıldır denir.



Şekil 2.4. w_0 noktasına göre yıldızıl bölge

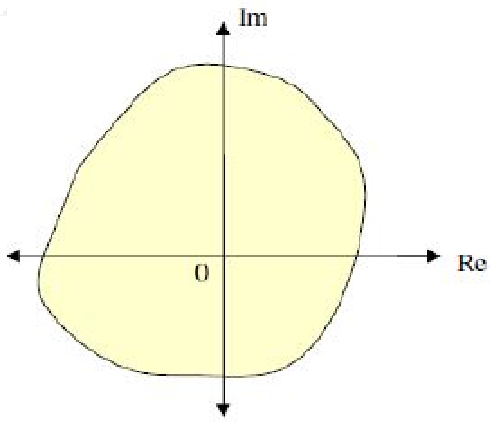
Tanım 2.6.2. f, U da yalınkat bir fonksiyon olsun. Her $z \in U$ için $f(z)$, U bölgesini $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl olan bir bölgeye resmediyorsa, $f(z)$ fonksiyonu w_0 noktasına göre yıldızıldır denir.

$w_0 = 0$ olarak seçilirse $f(z)$ fonksiyonu *yıldızıl fonksiyon* olarak adlandırılır. Yıldızıl fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir.

Koebe fonksiyonu, $w_0 > -\frac{1}{4}$ olmak üzere w_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyondur.

Tanım 2.6.3. B karmaşık düzlemde bir bölge olsun. Her $w_1, w_2 \in B$ noktaları ve $0 \leq \tau \leq 1$ için $\tau w_1 + (1-\tau)w_2$ doğru parçası B bölgesinde kalıyorsa B bölgesine *konveks bölge* denir.

Herhangi bir dairesel disk veya bir düzlem konveks bir kümedir.



Şekil 2.5. Konveks bölge

Konveks bir B kümesi, B nin içindeki her bir noktaya göre yıldızıldır. Tersine B kümesi her bir iç noktasına göre yıldızıl ise B konveks kümedir.

Tanım 2.6.4. U da analitik f fonksiyonunun $f(U)$ görüntü kümesi konveks bir bölge ise f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. S sınıfına ait konveks fonksiyonların kümesi K ile gösterilir.

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

bir konveks fonksiyon örneğidir.

Konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları için

$$K \subset S^* \subset S$$

kapsaması yazılır.

Tanım 2.6.5. $f : U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in U$ için

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.6.6. $f : U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in U$ için

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır.

Teorem 2.6.7. Tanım 2.6.5 ve Tanım 2.6.6 den konveks ve yıldızıl fonksiyonlar arasındaki ilgi

$$f \in K \Leftrightarrow zf' \in S^*$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.6.8. $f \in S$ olsun. U birim diskinde

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta \qquad (0 \leq \beta < 1)$$

ise f fonksiyonuna β *mertebeli yıldızıl fonksiyon* denir.

Tanım 2.6.9. $f \in S$ olsun. U birim diskinde

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta \qquad (0 \leq \beta < 1)$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa f fonksiyonuna β *mertebeli konveks fonksiyon* denir.

U birim diskinde (2.1) formundaki normalize edilmiş β mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı sırasıyla $S^*(\beta)$ ve $K(\beta)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.10. Tanım 2.6.8 ve Tanım 2.6.9 dan

$$f \in K(\beta) \Leftrightarrow zf' \in S^*(\beta)$$

ve

$$K(\beta) \subset S^*(\beta) \subset S$$

sonucuna ulaşılır.

Sabordinasyonu kullanarak $S^{*}(\beta)$ ve $K(\beta)$ sınıfları

$$S^{*}(\beta)=\left\{f\in A:\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z},\quad 0\leq\beta<1\right\}$$

ve

$$K(\beta)=\left\{f\in A:\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z},\quad 0\leq\beta<1\right\}$$

şeklinde ifade edilir.

2.7. Analitik Fonksiyonların Bazı Türev Operatörleri

Bu bölümde türev operatörleri içinde temel teşkil eden S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean türev operatörünün tanımı verilmiştir.

Tanım 2.7.1 (S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean Türev Operatörü). $f\in A$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&D^{0}f\left(z\right)=f\left(z\right)\\
&D^{1}f\left(z\right)=Df\left(z\right)=zf'(z)\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&D^{p}f\left(z\right)=D^{1}\left(D^{p-1}f(z)\right)\qquad(p\in\mathbb{N})
\end{aligned}$$

ile verilen $D^{p}:A\rightarrow A$ operatörüne S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean türev operatörü denir (S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean 1983). Buradan (2.1) forumdaki f fonksiyonu için

$$D^{p}f\left(z\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}n^{p}a_{n}z^{n}$$

elde edilir.

2.8. Kendisi ve Tersi Yalınkat Fonksiyonlar

Bu bölümde birim diskte tersi de yalınkat olan analitik fonksiyonların Σ sınıfı üzerinde durulacak ve Σ sınıfının bazı önemli alt sınıflarının tanımı verilecektir.

Tanım 2.8.1. Koebe Dört Çeyrek Teoremine göre S sınıfına ait (2.1) formundaki her f fonksiyonu için

$$f^{-1}\left(f\left(z\right)\right) = z \quad \left(z \in U\right)$$

ve

$$f\left(f^{-1}\left(w\right)\right) = w \quad \left(\left|w\right| < r_0\left(f\right), r_0\left(f\right) \geq \frac{1}{4}\right)$$

şartlarını sağlayan

$$g(w) = f^{-1}\left(w\right) = w \ - a_2 w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right) w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right) w^4 + \cdots \quad (2.3)$$

şeklinde bir f^{-1} ters fonksiyonu mevcuttur.

Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları U da yalınkat ise $f \in A$ fonksiyonuna U da *kendisi ve tersi yalınkat fonksiyon* (bi-univalent fonksiyon) denir. Kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların sınıfı Σ ile gösterilir.

$$\frac{z}{1-z}, \quad -\log(1-z), \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Σ sınıfına ait örnekler iken Koebe fonksiyonu

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

S sınıfına ait fakat Σ sınıfına ait olmayan bir örnektir. Ayrıca

$$z - \frac{z^2}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{z}{1-z^2}$$

Σ sınıfına ait olmayan diğer bilinen örneklerdir.

Tanım 2.8.2. g, (2.3) ile tanımlı bir fonksiyon olsun. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 \leq \beta < 1 \text{ ve } z, w \in U$$

olmak üzere

$$\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

ve

$$\Re\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right) > \beta$$

şartları sağlanıyorsa β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S^*_\Sigma(\beta)$ sınıfındadır denir (Brannan ve Taha 1986).

Tanım 2.8.3. g, (2.3) ile tanımlı bir fonksiyon olsun. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 \leq \beta < 1 \text{ ve } z, w \in U$$

için

$$\Re\left(f'(z)\right) > \beta$$

ve

$$\Re\left(g'(w)\right) > \beta$$

şartları sağlanıyorsa β mertebeli bi-konvekse yakın fonksiyonların $H_\Sigma(\beta)$ sınıfındandır denir (Srivastava ve ark. 2010).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni alt sınıfları tanımlanmıştır. Tanımlanan bu yeni sınıflara ait fonksiyonların başlangıç katsayıları olan a_2 ve a_3 ün modülleri için üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra q^{th} Hankel determinantı kullanılarak $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ ikinci Hankel determinantının modülü için üst sınır hesaplanmıştır ve Fekete-Szegö eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak Faber polinomları yardımıyla a_n genel katsayı tahmini yapılmıştır.

3.1. $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfı olan $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfı tanımlanacak ve bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayıları a_2 ve a_3 ün modülleri için üst sınır elde edilecektir. Ayrıca değişkenlerin bazı özel halleri için elde edilen alt sınıflar incelenecektir.

Tanım 3.1.1. $\phi, \psi : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için

$$\min\left\{\Re\left(\phi(z)\right), \Re\left(\psi(w)\right)\right\} > 0,$$

$$\phi(0) = \psi(0) = 1$$

olsun. $g = f^{-1}$ olmak üzere (2.1) formundaki f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 < \lambda \leq 1 \text{ ve } z, w \in U$$

için

$$\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) \in \phi(U),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}+\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)\in\psi(U)$$

şartlarını sağlıyorsa $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfındadır denir (Akgül ve Altınkaya 2017).

Uyarı 3.1.2. Burada $\phi(z)=\psi(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ $(0<\alpha\leq 1)$ olarak seçilirse Altınkaya ve Yalçın (2015d) tarafından tanımlanan ve çalışılan $S_{\Sigma}(\lambda,\alpha)$ sınıfı elde edilir. Ayrıca $\phi(z)=\psi(z)=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ $(0\leq\beta<1)$ olarak seçilirse yine Altınkaya ve Yalçın (2015d) tarafından tanımlanan ve çalışılan $S_{\Sigma}(\lambda,\beta)$ sınıfı elde edilir.

Uyarı 3.1.3. Tanım 3.1.1 de $\lambda=1$ olarak alınırsa $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfı Bulut (2013) tarafından tanımlanan $B_{\Sigma}^{\phi,\psi}$ sınıfına dönüşür. $B_{\Sigma}^{\phi,\psi}$ sınıfında $\phi(z)=\psi(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ $(0<\alpha\leq 1)$ olarak seçilirse $S_{\Sigma}^{*}(\alpha)$, $\phi(z)=\psi(z)=\frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}$ $(0\leq\beta<1)$ olarak seçilirse $S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ sınıfları elde edilir. $S_{\Sigma}^{*}(\alpha)$ ve $S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ sınıfları Brannan ve Taha (1986) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Teorem 3.1.4. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$|a_2|\leq\min\left\{\sqrt{\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|\psi'(0)|^2\right)\lambda^2}{(1+\lambda)^2}},\sqrt{\frac{\left(|\phi''(0)|+|\psi''(0)|\right)\lambda^2}{2\lambda^2+\lambda+1}}\right\}$$

ve

$$|a_3|\leq\ \min\left\{\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|\psi'(0)|^2\right)\lambda}{(1+\lambda)^2}+\frac{\left(|\phi''(0)|+|\psi''(0)|\right)\lambda}{4(1+\lambda)},\right.$$

$$\left.\frac{\left(6\lambda^3+5\lambda^2+\lambda\right)|\phi''(0)|}{4(1+\lambda)\left(2\lambda^2+\lambda+1\right)}+\frac{\left(2\lambda^3+3\lambda^2-\lambda\right)|\psi''(0)|}{4(1+\lambda)\left(2\lambda^2+\lambda+1\right)}\right\}$$

dir (Akgül ve Altınkaya 2017).

İspat. Kabul edelim ki $f \in S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ olsun. Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) = \phi\left(z\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)} + \left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) = \psi\left(w\right) \tag{3.2}$$

yazılır ve $\phi\left(z\right)$, $\psi\left(w\right)$ fonksiyonları

$$\phi\left(z\right) = 1 + \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots,$$

$$\psi\left(w\right) = 1 + \psi_1 w + \psi_2 w^2 + \cdots$$

şeklinde Taylor-Maclaurin seri açılımlarına sahiptir. (3.1) ve (3.2) de katsayılar eşitlenirse

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda}a_2 = \phi_1, \tag{3.3}$$

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda}\left(2a_3 - a_2^2\right) + \frac{1-\lambda}{4\lambda^2}a_2^2 = \phi_2 \tag{3.4}$$

ve

$$-\frac{\lambda+1}{2\lambda}a_2 = \psi_1, \tag{3.5}$$

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda}\left(3a_2^2 - 2a_3\right) + \frac{1-\lambda}{4\lambda^2}a_2^2 = \psi_2 \tag{3.6}$$

bulunur. (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden

$$\phi_1 = -\psi_1$$

ve

$$\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda^2}a_2^2=\phi_1^2+\psi_1^2 \tag{3.7}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.4) ve (3.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{2\lambda^2+\lambda+1}{2\lambda^2}a_2^2=\phi_2+\psi_2 \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden

$$|a_2|^2\leq\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|p'(0)|^2\right)\lambda^2}{(1+\lambda)^2},$$

$$|a_2|^2\leq\frac{(|\phi''(0)|+|p''(0)|)\lambda^2}{2\lambda^2+\lambda+1}$$

bulunur.

a_3 katsayısının modülüne ait üst sınırı bulmak için (3.6) eşitliği (3.4) den çıkarılırsa

$$\frac{2(\lambda+1)}{\lambda}\left(a_3-a_2^2\right)=\phi_2-\psi_2 \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) da sırasıyla (3.7) ve (3.8) eşitliklerindeki a_2^2 değeri yazılırsa

$$a_3=\frac{2\left(\phi_1^2+\psi_1^2\right)\lambda}{(\lambda+1)^2}+\frac{(\phi_2-\psi_2)\lambda}{2(\lambda+1)},$$

$$a_3=\frac{2(\phi_2+\psi_2)\lambda^2}{2\lambda^2+\lambda+1}+\frac{(\phi_2-\psi_2)\lambda}{2(\lambda+1)}$$

bulunur. Buradan da

$$|a_3|\leq\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|\psi'(0)|^2\right)\lambda}{(1+\lambda)^2}+\frac{(|\phi''(0)|+|\psi''(0)|)\lambda}{4(1+\lambda)}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{(6\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda) |\phi'' (0)|}{4 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda + 1)} + \frac{(2\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda) |\psi'' (0)|}{4 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda + 1)}$$

eşitsizlikleri yazılır.■

Sonuç 3.1.5. f fonksiyonu (2.1) formunda ve $B_\Sigma^{\phi,\psi}$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \min \left\{ \sqrt{\frac{|\phi' (0)|^2 + |\psi' (0)|^2}{2}}, \sqrt{\frac{|\phi'' (0)| + |\psi'' (0)|}{4}} \right\}$$

ve

$$|a_3| \leq \min \left\{ \frac{|\phi' (0)|^2 + |\psi' (0)|^2}{2} + \frac{|\phi'' (0)| + |\psi'' (0)|}{8}, \frac{3 |\phi'' (0)| + |\psi'' (0)|}{8} \right\}$$

dir (Bulut 2013).

3.2. $H_\Sigma^\delta (h, \beta)$ Sınıfı

Bu bölümde konvolusyon yardımıyla kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanıtılacaktır. Sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayıları olan a_2 ve a_3 ün modülleri için üst sınırlar elde edilecektir.

Tanım 3.2.1. (2.1) formunda verilen bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu

$$0 \leq \beta < 1, \ m \geq 2 \text{ ve } \delta \in \mathbb{C}, \ z, w \in U$$

için

$$(1 - \delta) \frac{(f * h)(z)}{z} + \delta (f * h)'(z) \in P_m(\beta),$$

$$(1-\delta)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\delta\left((f*h)^{-1}\right)'(w)\in P_m(\beta)$$

şartlarını sağlıyorsa $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ sınıfındadır denir (Altınkaya ve Yalçın 2016d).

Burada h, (2.2) formunda bir fonksiyon, $(f*h)^{-1}(w)$ ise

$$(f*h)^{-1}(w)=w-a_2h_2w^2+\left(2a_2^2h_2^2-a_3h_3\right)w^3-\left(5a_2^3h_2^3-5a_2h_2a_3h_3+a_4h_4\right)w^4+\cdots$$

şeklindedir.

Uyarı 3.2.2. $\delta=1,\ m=2$ ve $h(z)=\frac{z}{1-z}$ olarak seçilirse $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ sınıfı Srivastava ve ark. (2010) tarafından çalışılan $H_{\Sigma}(\beta)$ sınıfına dönüşür.

Teorem 3.2.3. $h_2,h_3\neq 0$ ve $\delta\in\mathbb{C}\backslash\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$ olmak üzere $f\in H_{\Sigma}^{\lambda}(h,\beta)$ olsun. Bu takdirde

$$|a_2|\leq\min\left\{\sqrt{\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_2|^2}},\frac{m(1-\beta)}{|1+\delta|\,|h_2|}\right\},$$

$$|a_3|\leq\min\left\{\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|}+\frac{m^2(1-\beta)^2}{|1+\delta|^2\,|h_3|},\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|}\right\}$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2016d).

İspat. Kabul edelim ki $f\in H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$. Tanım 3.2.1 den

$$(1-\delta)\frac{(f*h)(z)}{z}+\delta(f*h)'(z)=\Phi(z),$$

$$(1-\delta)\frac{(f*h)^{-1}(w)}{w}+\delta\left((f*h)^{-1}\right)'(w)=\Psi(w)$$

yazılır. $\Phi,\Psi\in P_m(\beta)$ olduğundan

$$\Phi(z)=1+\Phi_1 z+\Phi_2 z^2+\cdots,$$

$$\Psi(w)=1+\Psi_1 w+\Psi_2 w^2+\cdots$$

şeklinde seri açılımları vardır. Buradan

$$(1+\delta)a_2h_2=\Phi_1, \tag{3.10}$$

$$(1+2\delta)a_3h_3=\Phi_2, \tag{3.11}$$

$$-(1+\delta)a_2h_2=\Psi_1 \tag{3.12}$$

ve

$$(1+2\delta)\left(2a_2^2h_2^2-a_3h_3\right)=\Psi_2 \tag{3.13}$$

elde edilir. Ayrıca $\Phi,\Psi\in P_m(\beta)$ olduğundan Lemma 2.4.8 gereği

$$\begin{aligned}&|\Phi_n|\le m(1-\beta)\quad (n\ge 1),\\ &|\Psi_n|\le m(1-\beta)\quad (n\ge 1)\end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı da bilinmektedir. (3.11) ile (3.13) eşitlikleri taraf tarafa toplanır, (3.14) eşitsizlikleri uygulanırsa

$$|a_2|^2\le\frac{|\Phi_2|+|\Psi_2|}{2\,|1+2\delta|\,|h_2|^2}\le\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_2|^2};\quad\left(\delta\in\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden sırasıyla

$$|a_2| \leq \frac{m(1-\beta)}{|1+\delta|\,|h_2|}; \quad (\delta \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}),$$

$$|a_3| \leq \frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|}; \quad \left(\delta \in \mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$$

yazılır. Diğer taraftan (3.13) eşitliği (3.11) eşitliğinden çıkarılırsa

$$2(1+2\delta)(a_3h_3 - a_2^2h_2^2) = \Phi_2 - \Psi_2$$

bulunur. Elde edilen son denklemde, Φ_2 ve Ψ_2 için (3.14) eşitsizlikleri uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|} + \frac{m^2(1-\beta)^2}{|1+\delta|^2\,|h_3|}, \quad \left(\delta \in \mathbb{C}\backslash\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}\right)$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3 ün ispatı tamamlanır.■

Sonuç 3.2.4. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu $H_\Sigma(\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1-\beta)}{3}}; & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{3} \\ \\ 1-\beta; & \frac{1}{3} < \beta < 1 \end{cases},$$

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{3}$$

dir.

Uyarı 3.2.5. Sonuç 3.2.4 te, $\frac{1}{3} < \beta < 1$ için elde edilen $|a_2|$ üst sınırı ve $0 \leq \beta < 1$

için elde edilen $|a_3|$ üst sınırı Srivastava ve ark. (2010, Teorem 2) tarafından elde edilen eşitsizliklerden daha küçüktür.

3.3. $B_\Sigma(p,\lambda,\varphi)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla yeni bir alt sınıfı olan $B_\Sigma(p,\lambda,\varphi)$ sınıfı tanımlanacak, bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayıları a_2 ve a_3 ün modülleri için üst sınır elde edilecektir. Daha sonra Faber polinomları kullanılarak a_n genel katsayısının modülü için üst sınır hesaplanacaktır.

Tanım 3.3.1. Kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların Σ sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$\lambda \geq 1,\ p \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } z, w \in U$$

olmak üzere

$$\frac{(1-\lambda)\,D^p f(z) + \lambda D^{p+1} f(z)}{z} \prec \varphi(z)$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)\,D^p g(w) + \lambda D^{p+1} g(w)}{w} \prec \varphi(w)$$

sabordinasyon şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(p,\lambda,\varphi)$ sınıfındadır denir (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

Teorem 3.3.2. $p \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \geq 1$ olmak üzere f fonksiyonu $B_\Sigma(p,\lambda,\varphi)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3^p(2\lambda+1)B_1^2 - 4^p(1+\lambda)^2 B_2\right| + 4^p(1+\lambda)^2 B_1}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{B_1}{3^p(2\lambda+1)}; & B_1 \leq \frac{4^p(1+\lambda)^2}{3^p(2\lambda+1)} \\ \\ \frac{\left|3^p(2\lambda+1)B_1^2-4^p(1+\lambda)^2B_2\right|B_1+3^p(2\lambda+1)B_1^3}{3^p(2\lambda+1)\left[\left|3^p(2\lambda+1)B_1^2-4^p(1+\lambda)^2B_2\right|+4^p(1+\lambda)^2B_1\right]}; & B_1 > \frac{4^p(1+\lambda)^2}{3^p(2\lambda+1)} \end{cases}$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

İspat. $\varphi \in P$ ve $\varphi(U)$ reel eksene göre simetrik, 1 noktasına göre yıldızıl olsun. Bu durumda φ fonksiyonu

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots \quad (B_1 > 0) \tag{3.15}$$

biçiminde Taylor seri açılımına sahiptir.

Ayrıca $u(z)$ ve $v(w)$, Ω sınıfına ait fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned} u(z) &= c_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \quad (|z| < 1), \\ v(w) &= d_1 w + \sum_{n=2}^{\infty} d_n w^n \quad (|w| < 1) \end{aligned} \tag{3.16}$$

biçiminde seri açılımınları mevcuttur ve

$$\begin{aligned} &|c_1| \leq 1, \quad |c_2| \leq 1 - |c_1|^2; \\ &|d_1| \leq 1, \quad |d_2| \leq 1 - |d_1|^2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\varphi\left(u\left(z\right)\right)=1+B_1c_1z+\left(B_1c_2+B_2c_1^2\right)z^2+\cdots \quad \left(|z|<1\right) \tag{3.18}$$

ve

$$\varphi\left(v\left(w\right)\right)=1+B_1d_1w+\left(B_1d_2+B_2d_1^2\right)w^2+\cdots \quad \left(|w|<1\right) \tag{3.19}$$

elde edilir.

Tanım 3.3.1 gereği

$$\frac{\left(1-\lambda\right)D^pf\left(z\right)+\lambda D^{p+1}f\left(z\right)}{z}=\varphi\left(u(z)\right)$$

ve

$$\frac{\left(1-\lambda\right)D^pg\left(w\right)+\lambda D^{p+1}g\left(w\right)}{w}=\varphi\left(v(w)\right)$$

yazılabilir. Burada karşılıklı katsayılar eşitlenirse

$$\left[\left(1-\lambda\right)2^p+\lambda 2^{p+1}\right]a_2=B_1c_1, \tag{3.20}$$

$$\left[\left(1-\lambda\right)3^p+\lambda 3^{p+1}\right]a_3=B_1c_2+B_2c_1^2 \tag{3.21}$$

ve

$$-\left[\left(1-\lambda\right)2^p+\lambda 2^{p+1}\right]a_2=B_1d_1, \tag{3.22}$$

$$\left[\left(1-\lambda\right)3^p+\lambda 3^{p+1}\right]\left(2a_2^2-a_3\right)=B_1d_2+B_2d_1^2 \tag{3.23}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.20) ve (3.22) eşitliklerinden

$$d_1 = -c_1 \tag{3.24}$$

olduğu görülür. Ayrıca (3.21) ile (3.23) taraf tarafa toplanır ve a_2 için (3.20) eşitliği kullanılırsa

$$\left[2\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] B_1^2 - 2\left[(1-\lambda)\,2^p + \lambda 2^{p+1}\right]^2 B_2\right] a_2^2 = B_1^3\,(c_2 + d_2)$$

bulunur. Bu son eşitlik için (3.17) uygulanırsa

$$\left|2\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] B_1^2 - 2\left[(1-\lambda)\,2^p + \lambda 2^{p+1}\right]^2 B_2\right| |a_2|^2 \leq 2B_1^3\left(1 - |c_1|^2\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da a_2 katsayısının modülüne ait üst sınır

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3^p\,(2\lambda+1)\,B_1^2 - 4^p\,(1+\lambda)^2 B_2\right| + 4^p\,(1+\lambda)^2 B_1}}$$

olarak bulunur.

a_3 katsayısının modülüne ait üst sınırı bulmak için (3.23) eşitliği (3.21) dan çıkarılırsa

$$2\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] a_3 - 2\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] a_2^2 = B_1\,(c_2 - d_2) + B_2\left(c_1^2 - d_1^2\right)$$

bulunur. (3.24) ve (3.17) birlikte düşünüldüğünde elde edilen eşitsizlik

$$\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] B_1\,|a_3| \leq \left\{\left[(1-\lambda)\,3^p + \lambda 3^{p+1}\right] B_1 - 4^p\,(1+\lambda)^2\right\} |a_2|^2 + B_1^2$$

dir. Sonuç olarak $|a_3|$ için Teorem 3.3.2 de iddia edilen üst sınır elde edilir.■

Burada P sınıfına ait bazı özel φ fonksiyonları için elde edilen sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

Sonuç 3.3.3. Eğer

$$\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \cdots \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

olarak alınırsa Teorem 3.3.2 de elde edilen eşitsizlikler

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\left|2.3^p (2\lambda+1) - 4^p (1+\lambda)^2\right| \alpha + 4^p (1+\lambda)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{2\alpha}{3^p(2\lambda+1)}; & 0 < \alpha \leq \frac{2^{p-1}(1+\lambda)}{3^p(2\lambda+1)} \\ \frac{2\left[\left|2.3^p(2\lambda+1)-4^p(1+\lambda)^2\right|+2.3^p(2\lambda+1)\right]\alpha^2}{3^p(2\lambda+1)\left[\left|2.3^p(2\lambda+1)-4^p(1+\lambda)^2\right|\alpha+4^p(1+\lambda)^2\right]}; & \frac{2^{p-1}(1+\lambda)}{3^p(2\lambda+1)} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

olarak bulunur (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

Uyarı 3.3.4. $|a_2|$ ve $|a_3|$ için elde edilen bu üst sınırlar Porwal ve Darus (2013, Teorem 2.1) tarafından elde edilen sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

Sonuç 3.3.5. Eğer

$$\varphi(z) = \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z} = 1 + 2(1-\beta)z + 2(1-\beta)z^2 + \cdots \quad (0 \leq \beta < 1)$$

olarak alınırsa Teorem 3.3.2 de elde edilen eşitsizlikler

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\beta)}{\sqrt{\left|2(1-\beta)3^p(2\lambda+1) - 4^p(1+\lambda)^2\right| + 4^p(1+\lambda)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{2(1-\beta)}{3^p(2\lambda+1)}; & \frac{3^p(2\lambda+1)-2^{p-1}(1+\lambda)}{3^p(2\lambda+1)} \leq \beta < 1 \\ \\ \frac{2\left[\left|2(1-\beta)3^p(2\lambda+1)-4^p(1+\lambda)^2\right|+2(1-\beta)3^p(2\lambda+1)\right](1-\beta)}{3^p(2\lambda+1)\left[\left|2(1-\beta)3^p(2\lambda+1)-4^p(1+\lambda)^2\right|+4^p(1+\lambda)^2\right]}; & 0 \leq \beta < \frac{3^p(2\lambda+1)-2^{p-1}(1+\lambda)}{3^p(2\lambda+1)} \end{cases}$$

olarak bulunur (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

Uyarı 3.3.6. $|a_2|$ ve $|a_3|$ için elde edilen bu üst sınırlar Porwal ve Darus (2013, Teorem 3.1) tarafından elde edilen sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014b).

$B_\Sigma(p, \lambda, \varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_n|$ katsayı sınırını elde etmeden önce ispatta kullandığımız Faber polinomları hakkında kısaca bilgi verelim (Faber 1903).

A sınıfına ait, (2.1) formunda tanımlı f fonksiyonları için Faber polinom açılımı kullanılarak, f nin ters fonksiyonu $f^{-1} = g$

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, ...)\, w^n$$

biçiminde ifade edilmiştir (Airault ve Bouali 2006).

Burada

$$K_{n-1}^{-n} = \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!} a_2^{n-1} + \frac{(-n)!}{[2(-n+1)]!(n-3)!} a_2^{n-3} a_3$$

$$+ \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!} a_2^{n-4} a_4$$

$$+\frac{(-n)!}{[2(-n+2)]!(n-5)!}a_2^{n-5}\left[a_5+(-n+2)\,a_3^2\right]$$

$$+\frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!}a_2^{n-6}\left[a_6+(-2n+5)\,a_3a_4\right]$$

$$+\sum_{r\geq 7}a_2^{n-r}V_r$$

olarak elde edilmiştir ve $7 \leq r \leq n$ olmak üzere V_r polinomları $a_2, a_3, ..., a_n$ değişkenlerine bağlıdır (Airault ve Ren 2002).

O halde K_{n-1}^{-n} için ilk üç terim

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}K_1^{-2} = -a_2,\\
&\tfrac{1}{3}K_2^{-3} = 2a_2^2 - a_3, \qquad (3.25)\\
&\tfrac{1}{4}K_3^{-4} = -\left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Genel olarak ise

$$E_n^m\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m!\,(a_1)^{\mu_1}\,...\,(a_n)^{\mu_n}}{\mu_1!...\mu_n!}$$

ve $E_n^p = E_n^p\left(a_2, a_3, ...\right)$ olmak üzere $p \in \mathbb{N}$ için

$$K_n^p = pa_n + \frac{p\,(p-1)}{2}E_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!}E_n^3 + ... + \frac{p!}{(p-n)!n!}E_n^n$$

biçimindedir (Airault 2007).

(3.25) eşitliğinde $a_1 = 1$ iken, verilen toplam

$$\mu_1 + \mu_2 + \ ...\ + \mu_n = m,$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \ ... \ + n\mu_n = n$$

şartlarını sağlayan negatif olmayan tüm $\mu_1, ..., \mu_n$ tam sayı değerlerini alır. Sonuç olarak $E_n^n(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1^n$ elde edilir (Airault 2008).

Teorem 3.3.7. $p \in \mathbb{N}_0$ ve $\lambda \geq 1$ olmak üzere $f \in B_\Sigma(p, \lambda, \varphi)$ olsun. Eğer $a_m = 0$ ve $2 \leq m \leq n-1$ şartları sağlanıyorsa

$$|a_n| \leq \frac{2}{n^p[1+(n-1)\lambda]}; \qquad n \geq 4$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2015e).

İspat. A sınıfına ait (2.1) formundaki analitik f fonksiyonları için

$$\frac{(1-\lambda)D^p f(z) \ + \ \lambda D^{p+1} f(z)}{z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^p[1+(n-1)\lambda]a_n z^{n-1} \tag{3.26}$$

ve $g = f^{-1}$ için

$$\begin{aligned} \frac{(1-\lambda)D^p g(w) \ + \ \lambda D^{p+1} g(w)}{w} &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^p[1+(n-1)\lambda] \\ &\times \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, ..., a_n) w^{n-1} \qquad (3.27) \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n^p[1+(n-1)\lambda] b_n w^{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer yandan, Tanım 3.3.1 gereği

$$u(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

ve

$$v\left(w\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}d_{n}w^{n}$$

fonksiyonları P sınıfına ait olmak üzere

$$\frac{\left(1-\lambda\right)D^{p}f\left(z\right)\;+\;\lambda D^{p+1}f\left(z\right)}{z}=\varphi(u(z)),$$

$$\frac{\left(1-\lambda\right)D^{p}g\left(w\right)\;+\;\lambda D^{p+1}g\left(w\right)}{w}=\varphi(v(w))$$

eşitlikleri yazılır. Burada

$$\varphi(u(z))=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k}E_{n}^{k}\left(c_{1},c_{2},...,c_{n}\right)z^{n} \tag{3.28}$$

ve

$$\varphi(v(w))=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k}E_{n}^{k}\left(d_{1},d_{2},...,d_{n}\right)w^{n} \tag{3.29}$$

dir. (3.26) ve (3.28) eşitliklerinde karşılıklı katsayılar eşitlenerek

$$n^{p}\left[1+\left(n-1\right)\lambda\right]a_{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k}E_{n-1}^{k}\left(c_{1},c_{2},...,c_{n-1}\right)\quad(n\geq2)$$

benzer şekilde (3.27) ve (3.29) eşitliklerinden

$$n^{p}\left[1+\left(n-1\right)\lambda\right]b_{n}=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k}E_{n-1}^{k}\left(d_{1},d_{2},...,d_{n-1}\right)\qquad(n\geq2)$$

elde edilir. $a_m = 0$ ve $2 \leq m \leq n-1$ için $b_n = -a_n$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} &n^p \left[1 + (n-1)\lambda\right] a_n = \varphi_1 c_{n-1}, \\ &-n^p \left[1 + (n-1)\lambda\right] a_n = \varphi_1 d_{n-1} \end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak yazılabilir. (3.30) eşitliğinde, $|\varphi_1| \leq 2$, $|c_{n-1}| \leq 1$ ve $|d_{n-1}| \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılırsa a_n genel katsayısının modülü için

$$|a_n| = \frac{|\varphi_1 c_{n-1}|}{n^p \left[1 + (n-1)\lambda\right]} = \frac{|\varphi_1 d_{n-1}|}{n^p \left[1 + (n-1)\lambda\right]} \leq \frac{2}{n^p \left[1 + (n-1)\lambda\right]}$$

şeklindeki üst sınır elde edilir.■

Teorem 3.3.8. $\lambda \geq 1$ olmak üzere $f \in B_\Sigma(p, \lambda, \varphi)$ olsun. Bu takdirde

$$(i) \qquad |a_2| \leq \min\left\{\frac{1}{2^{p-1}(1+\lambda)}, \frac{2}{\sqrt{3^p(1+2\lambda)}}\right\} = \frac{1}{2^{p-1}(1+\lambda)}$$

$$\begin{aligned} (ii) \qquad |a_3| &\leq \min\left\{\frac{1}{2^{2p-2}(1+\lambda)^2} + \frac{2}{3^p(1+2\lambda)}, \frac{2}{3^{p-1}(1+2\lambda)}\right\} \\ &= \frac{1}{2^{2p-2}(1+\lambda)^2} + \frac{2}{3^p(1+2\lambda)} \end{aligned}$$

$$(iii) \qquad |a_3 - \eta a_2^2| \leq \frac{2\eta}{3^p(1+2\lambda)}; \quad \eta = 1, 2$$

eşitsizlikleri elde edilir (Altınkaya ve Yalçın 2015e).

İspat. (3.30) eşitliğinde n yerine sırasıyla 2 ve 3 yazılırsa

$$2^p(1+\lambda)a_2 = \varphi_1 c_1, \tag{3.31}$$

$$3^p\left(1+2\lambda\right)a_3=\varphi_1 c_2+\varphi_2 c_1^2 \tag{3.32}$$

ve

$$-2^p(1+\lambda)a_2=\varphi_1 d_1, \tag{3.33}$$

$$3^p\left(1+2\lambda\right)\left(2a_2^2-a_3\right)=\varphi_1 d_2+\varphi_2 d_1^2 \tag{3.34}$$

bulunur. (3.31) ve (3.33) eşitliklerinden

$$|a_2|=\frac{|\varphi_1 c_1|}{2^p(1+\lambda)}=\frac{|\varphi_1 d_1|}{2^p(1+\lambda)}\leq\frac{1}{2^{p-1}(1+\lambda)}$$

yazılır. Ayrıca (3.31) ve (3.33) toplanarak

$$2.3^p\left(1+2\lambda\right)a_2^2=\varphi_1\left(c_2+d_2\right)+\varphi_2\left(c_1^2+d_1^2\right) \tag{3.35}$$

ve buna denk olarak

$$|a_2|\leq\frac{2}{\sqrt{3^p(1+2\lambda)}}$$

elde edilir.

(3.32) eşitliğinden

$$|a_3|=\frac{|\varphi_1 c_2+\varphi_2 c_1^2|}{3^p\left(1+2\lambda\right)}\leq\frac{4}{3^p\left(1+2\lambda\right)}$$

yazılır. Ayrıca (3.32) eşitliğinden (3.34) çıkarılırsa

$$2.3^p\left(1+2\lambda\right)\left(a_3-a_2^2\right)=\varphi_1\left(c_2-d_2\right)+\varphi_2\left(c_1^2-d_1^2\right) \tag{3.36}$$

ve

$$|a_3| \leq |a_2|^2 + \frac{|\varphi_1 (c_2 - d_2)|}{3^p (1 + 2\lambda)} \leq |a_2|^2 + \frac{2}{3^p (1 + 2\lambda)} \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.34) ve (3.35) eşitliklerinden a_2^2 değeri çekilir (3.37) eşitliğinde yerine yazılırsa, sırasıyla

$$|a_3| \leq \frac{1}{2^{2p-2}(1+\lambda)^2} + \frac{2}{3^p (1 + 2\lambda)}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2}{3^{p-1} (1 + 2\lambda)}$$

bulunur. Diğer yandan (3.34) eşitliği

$$3^p (1 + 2\lambda) (a_3 - 2a_2^2) = - \left(\varphi_1 d_2 + \varphi_2 d_1^2\right)$$

olarak yazılırsa

$$\left|a_3 - 2a_2^2\right| = \frac{|\varphi_1 d_2 + \varphi_2 d_1^2|}{3^p (1 + 2\lambda)} \leq \frac{4}{3^p (1 + 2\lambda)}$$

elde edilir. Buna ilave olarak (3.36) eşitliği $a_3 - a_2^2$ değerini elde etmek için kullanılırsa

$$\left|a_3 - a_2^2\right| = \frac{|\varphi_1 (c_2 - d_2) + \varphi_2 (c_1^2 - d_1^2)|}{3^p (1 + 2\lambda)} \leq \frac{2}{3^p (1 + 2\lambda)}$$

bulunur.■

Uyarı 3.3.9. Teorem 3.3.8 de $p = 0$ olarak alınırsa elde edilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ eşitsizlikleri Frasin ve Aouf (2011) tarafından elde edilen eşitsizliklerden daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2015e).

Uyarı 3.3.10. Teorem 3.3.8 de $p = 0$ ve $\lambda = 1$ olarak alınırsa elde edilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ sınırları Srivastava ve ark. (2010) tarafından elde edilen sınırlarından daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2015e).

3.4. $Q(p, \lambda, \beta)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların yeni bir alt sınıfı olan $Q(p, \lambda, \beta)$ sınıfı tanımlanacak ve bu sınıfa ait fonksiyonların a_n genel katsayısının modülü için üst sınır elde edilecektir. Elde edilen $|a_n|$ katsayı sınırı kullanılarak $|a_2|$ ve $|a_3|$ için sınırlar verilecektir.

Tanım 3.4.1. S sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$\lambda \geq 1,\ 0 \leq \beta < 1,\ p \in \mathbb{N}_0,\ \text{ve } z \in U$$

için

$$\Re\left\{\frac{(1-\lambda)\, D^p f\,(z) + \lambda D^{p+1} f\,(z)}{z}\right\} > \beta$$

şartını sağlıyorsa $Q(p, \lambda, \beta)$ sınıfındadır denir (Altınkaya ve Yalçın 2015b).

Uyarı 3.4.2. Burada $p = 0$ olarak alınırsa $Q(p, \lambda, \beta)$ sınıfı Frasin ve Aouf (2011) tarafından çalışılan $B_\Sigma(\beta, \lambda)$ sınıfına dönüşür.

Uyarı 3.4.3. $p = 0$ ve $\lambda = 1$ olarak alınırsa $Q(p, \lambda, \beta)$ sınıfı Srivastava ve ark. (2010) tarafından tanımlanan ve çalışılan $H_\Sigma(\beta)$ sınıfına dönüşür.

Teorem 3.4.4. $p \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 1$ olmak üzere $f \in Q(p, \lambda, \beta)$ ve $g \in$

$Q(p,\lambda,\beta)$ olsun. Eğer $a_m = 0,\ 2 \leq m \leq n-1$ şartları sağlanıyorsa

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\beta)}{n^p\left[1+(n-1)\lambda\right]}; \qquad n \geq 4$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2015b).

İspat. A sınıfına ait (2.1) formundaki analitik f fonksiyonları ve $g = f^{-1}$ için Tanım 3.4.1 den

$$\frac{(1-\lambda)\,D^p f(z) + \lambda D^{p+1} f(z)}{z} = 1 + (1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(c_1, c_2, ..., c_n)\, z^n \tag{3.38}$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)\,D^p g(w) + \lambda D^{p+1} g(w)}{w} = 1 + (1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(d_1, d_2, ..., d_n)\, w^n \tag{3.39}$$

bulunur.

(3.38) de katsayılar eşitlenirse

$$n^p\left[1+(n-1)\lambda\right] a_n = (1-\beta)\, K_{n-1}^1(c_1, c_2, ..., c_{n-1}),$$

(3.39) de katsayılar eşitlenirse

$$n^p\left[1+(n-1)\lambda\right] b_n = (1-\beta)\, K_{n-1}^1(d_1, d_2, ..., d_{n-1})$$

elde edilir. $a_m = 0$, $2 \leq m \leq n-1$ olmak üzere $b_n = -a_n$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} n^p\left[1+(n-1)\lambda\right] a_n &= (1-\beta)\, c_{n-1}, \\ -n^p\left[1+(n-1)\lambda\right] a_n &= (1-\beta)\, d_{n-1} \end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitlikleri yazılır. Her iki eşitlikte mutlak değer alınırsa ve Carathéodory Lemma uygulanırsa

$$|a_n| = \frac{(1-\beta)\,|c_{n-1}|}{n^p\,[1+(n-1)\,\lambda]} = \frac{(1-\beta)\,|d_{n-1}|}{n^p\,[1+(n-1)\,\lambda]} \leq \frac{2\,(1-\beta)}{n^p\,[1+(n-1)\,\lambda]}$$

bulunur.■

Teorem 3.4.5. $0 \leq \beta < 1$ ve $1 \leq \lambda \leq 1+\sqrt{2}$ olmak üzere $Q(p, \lambda, \beta)$ sınıfına ait f ve g fonksiyonlarının başlangıç katsayıları için

$$(i) \qquad |a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\,(1-\beta)}{3^p\,(1+2\lambda)}}; & 0 \leq \beta < \frac{3^p(1+2\lambda)-2^{2p-1}(1+2\lambda)^2}{3^p(1+2\lambda)} \\ \dfrac{2\,(1-\beta)}{2^p\,(1+2\lambda)}; & \frac{3^p(1+2\lambda)-2^{2p-1}(1+2\lambda)^2}{3^p(1+2\lambda)} \leq \beta < 1 \end{cases}$$

$$(ii) \quad |a_3| \leq \tfrac{2(1-\beta)}{3^p(1+2\lambda)}$$

$$(iii) \quad |a_3 - 2a_2^2| \leq \tfrac{2(1-\beta)}{3^p(1+2\lambda)}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Altınkaya ve Yalçın 2015b).

İspat. (3.40) eşitliğinde n yerine sırasıyla 2 ve 3 yazılırsa

$$2^p\,(1+\lambda)\,a_2 = (1-\beta)\,c_1, \tag{3.41}$$

$$3^p\,(1+2\lambda)\,a_3 = (1-\beta)\,c_2 \tag{3.42}$$

ve

$$-2^p\,(1+\lambda)\,a_2 = (1-\beta)\,d_1, \tag{3.43}$$

$$3^p(1+2\lambda)\left(2a_2^2-a_3\right)=(1-\beta)\,d_2 \tag{3.44}$$

elde edilir. (3.41) veya (3.43) eşitliğinde mutlak değer alınıp Carathéodory Lemma uygulanırsa

$$|a_2|=\frac{(1-\beta)\,|c_1|}{2^p(1+\lambda)}=\frac{(1-\beta)\,|d_1|}{2^p(1+\lambda)}\leq\frac{2\,(1-\beta)}{2^p(1+\lambda)}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.42) ve (3.44) eşitliklerinin toplamından

$$a_2^2=\frac{(1-\beta)\,(c_2+d_2)}{2.3^p(1+2\lambda)}$$

elde edilir. Ayrıca (3.42) eşitliğinden

$$|a_3|=\frac{(1-\beta)\,|c_2|}{3^p(1+2\lambda)}\leq\frac{2\,(1-\beta)}{3^p(1+2\lambda)}$$

bulunur. Son olarak ise a_2 ve a_3 arasındaki bağıntı

$$\left|a_3-2a_2^2\right|=\frac{(1-\beta)\,|d_2|}{3^p(1+2\lambda)}\leq\frac{2\,(1-\beta)}{3^p(1+2\lambda)}$$

olarak ifade edilir.■

Uyarı 3.4.6. Teorem 3.4.5 de $p=0$ olarak alınırsa $|a_2|$ ve $|a_3|$ için elde edilen sınırlar Jahangiri ve Hamidi (2013) tarafından elde edilen sonuçlar ile çakışır.

3.5. $B_\Sigma(\mu,\lambda,\varphi)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla $B_\Sigma(\mu,\lambda,\varphi)$ sınıfı tanımlanacak, bu sınıfa ait fonksiyonların başlangıç katsayıları a_2, a_3 ve genel katsayısı a_n in modülleri için üst sınır elde edilecektir. Ayrıca bu sınıfa ait fonksiyonlar için Fekete-Szegö eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 3.5.1. $g = f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$\lambda \geq 1, \;\; \mu \geq 0 \text{ ve } z, w \in U$$

için

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(z)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \prec \varphi(w)$$

sabordinasyon şartlarını sağlıyorsa $B_{\Sigma}(\mu, \lambda, \varphi)$ sınıfındadır denir (Altınkaya ve Yalçın 2016b).

Teorem 3.5.2. $\lambda \geq 1$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere $f \in B_{\Sigma}(\mu, \lambda, \varphi)$ olsun. Eğer $a_m = 0, \; 2 \leq m \leq n-1$ olarak seçilirse

$$|a_n| \leq \frac{2}{\mu + (n-1)\lambda}; \qquad n \geq 4$$

elde edilir (Altınkaya ve Yalçın 2016b).

İspat. Kabul edelim ki (2.1) formundaki f fonksiyonu $B_{\Sigma}(\mu, \lambda, \varphi)$ sınıfına ait olsun.

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(a_2, a_3, ..., a_n)\, a_n z^{n-1} \quad (3.45)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}F_{n-1}\left(A_2,A_3,...,A_n\right)a_n w^{n-1} \quad (3.46)$$

eşitliklerinden başlangıç katsayıları

$$\begin{aligned}
F_1 &= (\mu+\lambda)a_2, \\
F_2 &= (\mu+2\lambda)\left[\frac{\mu-1}{2}a_2^2+a_3\right], \\
F_3 &= (\mu+3\lambda)\left[\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{3!}a_2^3+(\mu-1)a_2a_3+a_4\right]
\end{aligned}$$

olarak ve genel katsayı ise

$$\begin{aligned}
F_{n-1} &= [\mu+(n-1)\lambda]\times[(\mu-1)!] \\
&\quad \times\left[\sum_{i_1+2i_2+\cdots(n-1)i_{n-1}=n-1}\frac{a_2^{i_1}a_3^{i_2}\ldots a_n^{i_{n-1}}}{i_1!i_2!\ldots i_n!\left[\mu-(i_1+i_2+\cdots+i_{n-1})\right]!}\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur (Bulut 2014).

Diğer yandan, Tanım 3.5.1 gereği

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}=\varphi(u(z))$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}=\varphi(v(w))$$

eşitlikleri yazılır. Burada (3.45) ve (3.28) eşitliklerinden

$$[\mu+(n-1)\lambda]\, a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k E_{n-1}^{k}\left(c_1,c_2,...,c_{n-1}\right) \quad (n\geq 2),$$

benzer şekilde (3.46) ve (3.29) eşitliklerinden

$$[\mu+(n-1)\lambda]\, b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_k E_{n-1}^{k}\left(d_1,d_2,...,d_{n-1}\right) \quad (n\geq 2)$$

elde edilir. $a_m=0$ ve $2\leq m\leq n-1$ olduğu kullanılırsa $b_n=-a_n$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} &[\mu+(n-1)\lambda]\, a_n=\varphi_1 c_{n-1}, \\ &-[\mu+(n-1)\lambda]\, a_n=\varphi_1 d_{n-1} \end{aligned} \tag{3.47}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliklerde her iki tarafın modülü alınır, $|\varphi_1|\ \leq\ 2,\ |c_{n-1}|\leq 1$ ve $|d_{n-1}|\leq 1$ olduğu kullanılırsa $|a_n|$ katsayı sınırı

$$|a_n|=\frac{|\varphi_1 c_{n-1}|}{\mu+(n-1)\lambda}=\frac{|\varphi_1 d_{n-1}|}{\mu+(n-1)\lambda}\leq\frac{2}{\mu+(n-1)\lambda}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 3.5.3. $\lambda\geq 1$ ve $\mu\geq 0$ olmak üzere $f\in B_{\Sigma}\left(\mu,\lambda,\varphi\right)$ olsun. Bu takdirde

$$(i) \qquad |a_2|\leq \min\left\{\frac{2}{\mu+\lambda},\sqrt{\frac{8}{(\mu+2\lambda)(\mu+1)}}\right\}$$

$$(ii) \qquad |a_3|\leq \min\left\{\frac{4}{(\mu+\lambda)^2}+\frac{2}{\mu+2\lambda},\frac{8}{(\mu+2\lambda)(\mu+1)}+\frac{2}{\mu+2\lambda}\right\}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

İspat. (3.47) eşitliğinde sırasıyla, $n = 2$ ve $n = 3$ alınırsa

$$(\mu + \lambda)a_2 = \varphi_1 c_1, \tag{3.48}$$

$$(\mu + 2\lambda)\left[\frac{\mu - 1}{2}a_2^2 + a_3\right] = \varphi_1 c_2 + \varphi_2 c_1^2 \tag{3.49}$$

ve

$$-(\mu + \lambda)a_2 = \varphi_1 d_1, \tag{3.50}$$

$$(\mu + 2\lambda)\left[\frac{\mu + 3}{2}a_2^2 - a_3\right] = \varphi_1 d_2 + \varphi_2 d_1^2 \tag{3.51}$$

bulunur. (3.48) veya (3.50) eşitliklerinden

$$|a_2| = \frac{|\varphi_1 c_1|}{\mu + \lambda} = \frac{|\varphi_1 d_1|}{\mu + \lambda} \leq \frac{2}{\mu + \lambda} \tag{3.52}$$

olduğu görülür. (3.49) ve (3.51) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(\mu + 2\lambda)(\mu + 1)\, a_2^2 = \varphi_1 (c_2 + d_2) + \varphi_2 \left(c_1^2 + d_1^2\right)$$

eşitliği ve burada Carathéodory Lemması kullanılırsa

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{8}{(\mu + 2\lambda)(\mu + 1)}} \tag{3.53}$$

üst sınırı bulunur. a_3 katsayısına ait üst sınırı hesaplamak için (3.49) ve (3.51) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$2(\mu + 2\lambda)\left(a_3 - a_2^2\right) = \varphi_1 (c_2 - d_2) + \varphi_2 \left(c_1^2 - d_1^2\right)$$

elde edilir. Buradan

$$|a_3| \leq |a_2|^2 + \frac{|\varphi_1 (c_2 - d_2)|}{2(\mu + 2\lambda)} \leq |a_2|^2 + \frac{2}{\mu + 2\lambda} \tag{3.54}$$

bulunur. Diğer yandan (3.52) ve (3.53) deki a_2^2 değeri (3.54) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$|a_3| \leq \frac{4}{(\mu+\lambda)^2} + \frac{2}{\mu+2\lambda}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{8}{(\mu+2\lambda)(\mu+1)} + \frac{2}{\mu+2\lambda}$$

bulunur.

Teorem 3.5.4. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu $B_\Sigma(\mu,\lambda,\varphi)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde $\eta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left|a_3 - \eta a_2^2\right| \leq \begin{cases} \frac{B_1}{\mu+2\lambda}; & |\eta-1| \leq \frac{\mu+1}{2}\left|1 + \frac{2(B_2-B_1)(\mu+\lambda)^2}{(\mu+2\lambda)(\mu+1)B_1^2}\right| \\ \frac{2B_1^3|\eta-1|}{\left|(\mu+2\lambda)(\mu+1)B_1^2+2(B_2-B_1)(\mu+\lambda)^2\right|}; & |\eta-1| \geq \frac{\mu+1}{2}\left|1 + \frac{2(B_2-B_1)(\mu+\lambda)^2}{(\mu+2\lambda)(\mu+1)B_1^2}\right| \end{cases}$$

dir (Orhan ve ark. 2016).

3.6. $P_\Sigma(\alpha,\beta)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların genel bir alt sınıfı olan, Prema ve Keerthi (2013) tarafından çalışılan $P_\Sigma(\alpha,\beta)$ sınıfına yer verilmiştir. Prema ve Keerthi (2013) bu sınıfa ait fonksiyonlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminlerini hesaplamıştır. $|a_n|$ katsayı tahmini ise Jahangiri ve Hamidi (2015) tarafından hesaplanmıştır. $P_\Sigma(\alpha,\beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $H_2(2)$ Hankel determinantıyla ilgili çalışmalar Altınkaya ve Yalçın (2016c) tarafından yapılmıştır.

Tanım 3.6.1. $g = f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 \leq \alpha < 1,\ \beta \geq 0 \text{ ve } z, w \in U$$

için

$$\Re\left(\frac{z^{1-\beta} f'(z)}{[f(z)]^{1-\beta}}\right) > \alpha$$

ve

$$\Re\left(\frac{w^{1-\beta} g'(w)}{[g(w)]^{1-\beta}}\right) > \alpha$$

şartlarını sağlıyorsa $P_\Sigma(\alpha, \beta)$ sınıfındadır denir (Prema ve Keerthi 2013).

Uyarı 3.6.2. Tanım 3.6.1 de $\alpha = 0$ alınırsa $S^*_\Sigma(\beta)$ sınıfı elde edilir.

Teorem 3.6.3. (2.1) formunda verilen bir f fonksiyonu $P_\Sigma(\alpha, \beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{1+\beta}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+\beta} + \frac{4(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}$$

dir (Prema ve Keerthi 2013).

Teorem 3.6.4. $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$ için $f \in P_\Sigma(\alpha, \beta)$ olsun. $a_m = 0$ ve $2 \leq m \leq n-1$

şartları sağlanıyorsa

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n-1)+\beta}; \quad n \geq 3$$

dir (Jahangiri ve Hamidi 2015).

Teorem 3.6.5. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere (2.1) formunda verilen f fonksiyonu $P_\Sigma(\alpha,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq$$

$$\begin{cases} \dfrac{4(1-\alpha)^2}{3(\beta+1)^3(\beta+3)}\left[2(\beta+3)(\beta+2)(1-\alpha)^2+3(\beta+1)^2\right], \\ \qquad \alpha \in \left[0, 1-\frac{3(\beta+1)(\beta+3)+(\beta+1)\sqrt{9(\beta+3)^2+48(\beta+2)^3(\beta+3)}}{8(\beta+2)^2(\beta+3)}\right] \\ (1-\alpha)^2\left\{\frac{4}{(\beta+2)^2}\right. \\ \left. -\frac{3\left[(\beta^2+5\beta+6)(1-\alpha)+(\beta+1)(\beta^2+4\beta+6)\right]^2}{(\beta+1)(\beta+2)^2(\beta+3)[2(\beta+2)^3(\beta+3)(1-\alpha)^2-3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)(1-\alpha)-3(\beta+1)^2(\beta^2+4\beta+5)]}\right\}, \\ \qquad \alpha \in \left(1-\frac{3(\beta+1)(\beta+3)+(\beta+1)\sqrt{9(\beta+3)^2+48(\beta+2)^3(\beta+3)}}{8(\beta+2)^2(\beta+3)}, 1\right) \end{cases}.$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2016c).

İspat. $f \in P_\Sigma(\alpha,\beta)$ olsun. φ ve ψ fonksiyonları P sınıfına ait olmak üzere

$$\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1-\beta} f'(z) = \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\beta}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \alpha + (1-\alpha)\varphi(z) \tag{3.55}$$

ve

$$\left(\frac{w}{g(w)}\right)^{1-\beta} g'(w) = \left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\beta} \left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right) = \alpha + (1-\alpha)\psi(w) \tag{3.56}$$

yazılabilir. (3.55) ve (3.56) den

$$(1+\beta)\, a_2 = (1-\alpha)\, \varphi_1, \tag{3.57}$$

$$(2+\beta)a_3 - \frac{(1-\beta)(2+\beta)}{2} a_2^2 = (1-\alpha)\, \varphi_2, \tag{3.58}$$

$$(3+\beta)a_4 - (1-\beta)(3+\beta)a_2a_3 - \tfrac{(1-\beta)(\beta-2)(\beta+3)}{6} a_2^3 = (1-\alpha)\, \varphi_3 \tag{3.59}$$

ve

$$-\,(1+\beta)\, a_2 = (1-\alpha)\, \psi_1, \tag{3.60}$$

$$\frac{6+5\beta+\beta^2}{2} a_2^2 - (2+\lambda)a_3 = (1-\alpha)\, \psi_2, \tag{3.61}$$

$$(12+7\beta+\beta^2)a_2a_3 - (3+\beta)a_4 + \left[\tfrac{(1-\beta)(30+13\beta+\beta^2)}{6} - 5(3+\beta)\right] a_2^3 = (1-\alpha)\psi_3 \tag{3.62}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.57) ve (3.60) dan

$$\varphi_1 = -\psi_1 \tag{3.63}$$

ve

$$a_2 = \frac{(1-\alpha)}{1+\beta}\varphi_1$$

olduğu kolayca görülür. a_3 katsayısını elde etmek için (3.58) ve (3.61) kullanılırsa

$$a_3 = \frac{(1-\alpha)^2}{(1+\beta)^2}\varphi_1^2 + \frac{(1-\alpha)}{2\,(2+\beta)}\,(\varphi_2 - \psi_2)$$

bulunur. a_4 katsayısı için (3.62), (3.59) den çıkarılırsa

$$a_4 = \tfrac{(1-\beta)(4+\beta)(1-\alpha)^3}{6(1+\beta)^3}\varphi_1^3 + \tfrac{5(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)(2+\beta)}\varphi_1\left(\varphi_2 - \varphi_2\right) + \tfrac{(1-\alpha)}{2(3+\beta)}\left(\varphi_3 - \psi_3\right)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $H_2(2)$ determinantı

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg| \left[\tfrac{(1-\beta)(4+\beta)}{6} - 1\right] \tfrac{(1-\alpha)^4}{(1+\beta)^4}\varphi_1^4 + \tfrac{(1-\alpha)^3}{4(1+\beta)^2(2+\beta)}\varphi_1^2\left(\varphi_2 - \psi_2\right) \\ + \tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(3+\beta)}\varphi_1\left(\varphi_3 - \psi_3\right) - \tfrac{(1-\alpha)^2}{4(2+\beta)^2}\left(\varphi_2 - \psi_2\right)^2 \Bigg| \end{aligned} \tag{3.64}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 2.3.3 ve (3.63) birlikte kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_2 = \varphi_1^2 + x(4-\varphi_1^2) \\ \\ 2\psi_2 = \psi_1^2 + y(4-\psi_1^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2 - \psi_2 = \frac{4-\varphi_1^2}{2}(x-y) \tag{3.65}$$

ve

$$\begin{aligned} 4\varphi_3 &= \varphi_1^3 + 2(4-\varphi_1^2)\varphi_1 x - \varphi_1(4-\varphi_1^2)x^2 + 2(4-\varphi_1^2)(1-|x|^2)z, \\ 4\psi_3 &= \psi_1^3 + 2(4-\psi_1^2)\psi_1 y - \psi_1(4-\psi_1^2)y^2 + 2(4-\psi_1^2)(1-|y|^2)w, \end{aligned}$$

$$\varphi_3 - \psi_3 = \frac{\varphi_1^3}{2} + \tfrac{\varphi_1(4-\varphi_1^2)}{2}(x+y) - \tfrac{\varphi_1(4-\varphi_1^2)}{4}(x^2+y^2) + \tfrac{4-\varphi_1^2}{2}\left[(1-|x|^2)z - (1-|y|^2)w\right] \tag{3.66}$$

bulunur. (3.65), (3.66) eşitlikleri (3.64) de kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
|a_2a_4-a_3^2| = & \left|\tfrac{-(2+3\beta+\beta^2)}{6}\tfrac{(1-\alpha)^4}{(1+\beta)^4}\varphi_1^4+\tfrac{(1-\alpha)^3}{4(1+\beta)^2(2+\beta)}\varphi_1^2\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{2}(x-y)\right.\\
& +\tfrac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)(3+\beta)}\varphi_1^4+\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(3+\beta)}\varphi_1^2\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{2}(x+y)\\
& -\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(3+\beta)}\varphi_1^2\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{4}(x^2+y^2)\\
& +\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)(3+\beta)}\varphi_1\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{2}\left[\left(1-|x|^2\right)z-\left(1-|y|^2\right)w\right]\\
& \left.-\tfrac{(1-\alpha)^2}{4(2+\beta)^2}\tfrac{(4-\varphi_1^2)^2}{4}(x+y)^2\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. $\varphi\in P$ olduğundan $|\varphi_1|\leq 2$ dir. Ayrıca $|\varphi_1|=\varphi$ ve $\varphi\in[0,2]$ için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
|a_2a_4-a_3^2| \leq & \ \tfrac{(2+3\lambda+\lambda^2)}{6}\tfrac{(1-\alpha)^4}{(1+\lambda)^4}\varphi^4+\tfrac{(1-\alpha)^2}{4(1+\lambda)(3+\lambda)}\varphi^4+\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\lambda)(3+\lambda)}\varphi(4-\varphi^2)\\
& +\left[\tfrac{(1-\alpha)^3}{4(1+\lambda)^2(2+\lambda)}\varphi^2\tfrac{\left(4-\varphi^2\right)}{2}+\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\lambda)(3+\lambda)}\varphi^2\tfrac{\left(4-\varphi^2\right)}{2}\right](|x|+|y|)\\
& +\left[\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\lambda)(3+\lambda)}\varphi^2\tfrac{(4-\varphi^2)}{4}-\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\lambda)(3+\lambda)}\varphi\tfrac{(4-\varphi^2)}{2}\right]\left(|x|^2+|y|^2\right)\\
& +\tfrac{(1-\alpha)^2}{4(2+\lambda)^2}\tfrac{(4-\varphi^2)^2}{4}(|x|+|y|)^2
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\eta=|x|\leq 1$ ve $\mu=|y|\leq 1$ için

$$
\begin{aligned}
T_1 &= T_1(\varphi)=\tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1+\beta)}\left[\left(\tfrac{(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^3}+\tfrac{1}{2(3+\beta)}\right)\varphi^4-\tfrac{1}{3+\beta}\varphi^3+\tfrac{4}{3+\beta}\varphi\right]\geq 0,\\
T_2 &= T_2(\varphi)=\tfrac{(1-\alpha)^2}{4(1+\beta)}\varphi^2(4-\varphi^2)\left[\tfrac{(1-\alpha)}{2(1+\beta)(2+\beta)}+\tfrac{1}{3+\beta}\right]\geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3 &= T_3(\varphi) = \tfrac{(1-\alpha)^2}{8(1+\beta)(3+\beta)}\varphi(4-\varphi^2)(\varphi-2) \leq 0, \\
T_4 &= T_4(\varphi) = \tfrac{(1-\alpha)^2}{16(2+\beta)^2}(4-\varphi^2)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|a_2a_4 - a_3^2| &\leq T_1 + (\eta+\mu)\, T_2 + (\eta^2+\mu^2)\, T_3 + (\eta+\mu)^2\, T_4 \\
&:= G(\eta,\mu)
\end{aligned}
$$

fonksiyonu elde edilir. Şimdi $G(\eta,\mu)$ fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesi üzerinde maksimum değerini bulmak için $\varphi \in (0,2)$, $\varphi = 0$ ve $\varphi = 2$ durumları göz önüne alınarak $G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu} - (G_{\eta\mu})^2$ incelenecektir.

1. durum: $\varphi \in (0,2)$ olsun. Böylece $T_3 < 0$ ve $T_3 + 2T_4 > 0$ olacağından

$$G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu} - (G_{\eta\mu})^2 < 0$$

elde edilir. Bu durum G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin içinde yerel maksimuma sahip olamayacağını gösterir. G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin sınırındaki durumunu incelemek için $\eta = 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 0$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) şartları altında elde edilen

$$G(0,\mu) := H(\mu) = (T_3+T_4)\mu^2 + T_2\mu + T_1$$

fonksiyonu incelenecektir.

- Burada $T_3 + T_4 \geq 0$ ise $H'(\mu) = 2(T_3+T_4)\mu + T_2 > 0$ olup $H(\mu)$ artan fonksiyondur. O halde $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır ve

$$\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

elde edilir.

- $T_3 + T_4 < 0$ ise $T_2 + 2(T_3 + T_4) \geq 0$ ve $T_2 + 2(T_3 + T_4) < 2(T_3 + T_4)\mu + T_2 < T_2$ olacağından $H'(\mu) > 0$ olarak bulunur. $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır.

2. durum: $\varphi = 2$ olsun. Bu durumda

$$G(\eta,\mu) = \frac{8(1-\alpha)^2}{1+\beta}\left[\frac{(\beta+2)\,(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^2} + \frac{1}{2(3+\beta)}\right] \tag{3.67}$$

bulunur. (3.67) eşitliği de $0 \leq \mu \leq 1$ ve $0 \leq \varphi \leq 2$ şartları altında 1. durumdaki gibi incelenirse

$$\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

elde edilir.

Bu iki durum $\eta = 1$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) şartları altında tekrar değerlendirilirse

$$G(1,\mu) := F(\mu) = (T_3 + T_4)\mu^2 + (T_2 + 2T_4)\mu + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

elde edilir ve yine $T_3 + T_4$ için pozitif veya negatif olma durumu incelenirse

$$\max F(\mu) = F(1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4$$

bulunur. Buradan $\varphi \in [0,2]$ için $H(1) \leq F(1)$ olduğu görülür ve G fonksiyonu maksimum değerini $\eta = 1$ ve $\mu = 1$ noktalarında alır. Bu durumda

$$K(\varphi) := \max G(\eta,\mu) = G(1,1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4 \tag{3.68}$$

olarak elde edilir ve T_1, T_2, T_3, T_4 değerleri (3.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= (1-\alpha)^2 \left\{ \left(\tfrac{(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2}{6(1+\beta)^4} - \tfrac{1-\alpha}{4(1+\beta)^2(2+\beta)} - \tfrac{1}{2(1+\beta)(3+\beta)} + \tfrac{1}{4(2+\beta)^2} \right) \varphi^4 \right. \\ &\left. + \left(\tfrac{1-\alpha}{(1+\beta)^2(2+\beta)} - \tfrac{2}{(2+\beta)^2} + \tfrac{3}{(1+\beta)(3+\beta)} \right) \varphi^2 + \tfrac{4}{(2+\beta)^2} \right\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi $K(\varphi)$ nin maksimum değerini hesaplamak için türev alınırsa

$$\begin{aligned} K'(\varphi) &= (1-\alpha)^2 \left\{ \left(\tfrac{2(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^4} - \tfrac{1-\alpha}{(1+\beta)^2(2+\beta)} - \tfrac{5+4\beta+\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)} \right) \varphi^3 \right. \\ &\left. + \left(\tfrac{2(1-\beta)}{(1+\beta)^2(2+\beta)} + \tfrac{2(6+4\beta+\beta^2)}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)} \right) \varphi \right\} \end{aligned}$$

bulunur.

- Kabul edelim ki $\left(\tfrac{2(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^4} - \tfrac{1-\alpha}{(1+\beta)^2(2+\beta)} - \tfrac{5+4\beta+\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)} \right) \geq 0$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \left[0, 1 - \tfrac{3(1+\beta)(3+\beta)+(1+\beta)\sqrt{9(3+\beta)^2+24(2+\beta)(3+\beta)(5+4\beta+\beta^2)}}{4(2+\beta)^2(3+\beta)} \right]$ olup $\varphi \in (0,2)$ için $K'(\varphi) > 0$ elde edilir. K artan bir fonksiyon olarak bulunduğundan maksimum değerini $\varphi = 2$ noktasında alır. Buradan $K(2)$

  $$\max K(\varphi) = K(2) = \frac{8(1-\alpha)^2}{1+\beta} \left[\frac{(\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^2} + \frac{1}{2(3+\beta)} \right]$$

  dir.

- Kabul edelim ki $\left(\tfrac{2(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^4} - \tfrac{1-\alpha}{(1+\beta)^2(2+\beta)} - \tfrac{5+4\beta+\beta^2}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)} \right) < 0$ olsun. Bu durumda $\alpha \in \left(1 - \tfrac{3(1+\beta)(3+\beta)+(1+\beta)\sqrt{9(3+\beta)^2+24(2+\beta)(3+\beta)(5+4\beta+\beta^2)}}{4(2+\beta)^2(3+\beta)}, 1 \right)$ olup

$K'(\varphi) = 0$ dır. Buradan iki kritik nokta

$$\varphi_{0_1} = 0$$

ve

$$\varphi_{0_2} = \sqrt{\frac{-6\left[\left(\beta^2+5\beta+6\right)(1-\alpha)+(1+\beta)\left(\beta^2+4\beta+6\right)\right](1+\beta)^2}{2(2+\beta)^2(3+\beta)(\beta^2+3\beta+2)(1-\alpha)^2-3(1+\beta)^2(2+\beta)(3+\beta)(1-\alpha)-3(1+\beta)^3(\beta^2+4\beta+5)}}$$

bulunur.

$$\alpha \in \left(1 - \frac{(1+\beta)\left[3(3+\beta)+\sqrt{9(3+\beta)^2+24(2+\beta)(3+\beta)(5+4\beta+\beta^2)}\right]}{4(2+\beta)^2(3+\beta)},\right.$$

$$\left. 1 - \frac{(1+\beta)\left[3(3+\beta)+\sqrt{9(3+\beta)^2+48(2+\beta)^3(3+\beta)}\right]}{8(2+\beta)^2(3+\beta)}\right]$$

için $\varphi_{0_2} \geq 2$ olarak bulunduğundan φ_{0_2} kökü $(0,2)$ aralığının dışında kalır. O halde K artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini $\varphi = 2$ noktasında alır. Buradan

$$\max K(\varphi) = K(2) = \frac{8(1-\alpha)^2}{1+\beta}\left[\frac{(\beta+2)(1-\alpha)^2}{3(1+\beta)^2} + \frac{1}{2(3+\beta)}\right]$$

dir.

$$\alpha \in \left(1 - \frac{3(1+\beta)(3+\beta) + (1+\beta)\sqrt{9(3+\beta)^2 + 48(2+\beta)^3(3+\beta)}}{8(2+\beta)^2(3+\beta)}, 1\right)$$

için $\varphi_{0_2} < 2$ olarak bulunur; yani φ_{0_2} kökü $(0,2)$ aralığı içinde kalır. $K''(\varphi_{0_2}) < 0$ olduğundan $K(\varphi)$ maksimum değerini $\varphi = \varphi_{0_2}$ noktasında alır. Buradan

$$K(\varphi_{0_2}) = (1-\alpha)^2\left\{\frac{4}{(2+\beta)^2} - \right.$$

$$\left.\frac{3\left[\left(\beta^2+5\beta+6\right)(1-\alpha)+(1+\beta)\left(\beta^2+4\beta+6\right)\right]^2}{(1+\beta)(2+\beta)^2(3+\beta)[2(2+\beta)^3(3+\beta)(1-\alpha)^2-3(1+\beta)(2+\beta)(3+\beta)(1-\alpha)-3(1+\beta)^2(\beta^2+4\beta+5)]}\right\}$$

dir.■

Uyarı 3.6.6. Teorem 3.6.4 de $\beta = 0$ olarak alınırsa $S^*_\Sigma(\alpha)$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı elde edilir (Deniz ve ark. 2015).

Uyarı 3.6.7. Teorem 3.6.4 de $\beta = 0$ ve $\alpha = 0$ olarak alınırsa kendisi ve tersi yıldızıl fonksiyon sınıfı S^*_Σ için ikinci Hankel determinantı elde edilir (Deniz ve ark. 2015).

Sonuç 3.6.8. (2.1) formunda verilen f fonksiyonu S^*_Σ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \frac{20}{3}$$

elde edilir (Altınkaya ve Yalçın 2016c).

3.7. $H_\Sigma(\lambda, \beta)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların genel bir alt sınıfı olan, Jahangiri ve ark. (2014) tarafından tanımlanan $H_\Sigma(\lambda, \beta)$ sınıfı çalışılmıştır. Jahangiri ve ark. (2014) tarafından elde edilen $|a_2|$, $|a_3|$ ve $|a_n|$ katsayı tahminleri verilmiştir. Daha sonra bu sınıfa ait fonksiyonlar için $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ Hankel determinantı elde edilmiştir.

Tanım 3.7.1. $\lambda \in \mathbb{N}$ ve $g = f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 \leq \beta < 1 \text{ ve } z, w \in U$$

için

$$\Re\left(f'(z)\right)^\lambda > \beta,$$

$$\Re\left(g'(w)\right)^{\lambda} > \beta$$

şartlarını sağlıyorsa $H_\Sigma(\lambda,\beta)$ sınıfındadır denir (Jahangiri ve ark. 2014).

Uyarı 3.7.2. Tanım 3.7.1 de $\lambda = 1$ olarak alınırsa $H_\Sigma(\beta)$ sınıfı elde edilir. Bu sınıf Srivastava ve ark. (2010) tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Teorem 3.7.3. $0 \leq \beta < 1$ ve $\lambda \geq 2$ olmak üzere (2.1) formunda verilen f fonksiyonu $H_\Sigma(\lambda,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{1-\beta}{\lambda}$$

dir (Jahangiri ve ark. 2014).

Teorem 3.7.4. $0 \leq \beta < 1$ ve $\lambda \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f \in H_\Sigma(\lambda,\beta)$ olsun. Eğer $a_m = 0,\ 2 \leq m \leq n-1$ olarak seçilirse

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\beta)}{n\lambda}; \qquad n \geq 3$$

elde edilir (Jahangiri ve ark. 2014).

Teorem 3.7.5. $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere (2.1) formunda verilen f fonksiyonu $H_\Sigma(\lambda,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \tfrac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\left[16 - \frac{\left[6(1-\beta)+11\lambda\right]^2}{2\left[3\left(2\lambda^2+3\lambda+1\right)(1-\beta)^2 - 6\lambda(1-\beta) - 10\lambda^2\right]}\right]$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2016a).

İspat. Kabul edelim ki $f \in H_\Sigma(\lambda,\beta)$ olsun. φ ve ψ fonksiyonları P sınıfına ait olmak üzere

$$(f'(z))^{\lambda} = \beta + (1-\beta)\varphi(z) \tag{3.69}$$

ve

$$(g'(w))^{\lambda} = \beta + (1-\beta)\psi(w) \tag{3.70}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.69) ve (3.70) de katsayılar eşitlenirse

$$2\lambda a_2 = (1-\beta)\,\varphi_1, \tag{3.71}$$

$$3\lambda a_3 + 2\lambda(\lambda-1)a_2^2 = (1-\beta)\,\varphi_2, \tag{3.72}$$

$$4\lambda a_4 + 6\lambda(\lambda-1)a_2a_3 + \frac{4}{3}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a_2^3 = (1-\beta)\,\varphi_3 \tag{3.73}$$

ve

$$-2\lambda a_2 = (1-\beta)\,\psi_1, \tag{3.74}$$

$$3\lambda(2a_2^2 - a_3) + 2\lambda(\lambda-1)a_2^2 = (1-\beta)\,\psi_2, \tag{3.75}$$

$$-4\lambda\left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right) - 6\lambda(\lambda-1)(2a_2^3 - a_2a_3) - \frac{4}{3}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a_2^3 = (1-\beta)\psi_3 \tag{3.76}$$

elde edilir. Burada (3.71) ile (3.74)

$$\varphi_1 = -\psi_1$$

ve

$$a_2 = \frac{(1-\beta)}{2\lambda}\varphi_1$$

eşitliklerini verir. (3.72) ve (3.75) eşitliklerinden

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2}{4\lambda^2}\varphi_1^2 + \frac{(1-\beta)}{6\lambda}(\varphi_2 - \psi_2)$$

elde edilir. (3.73) ve (3.76) taraf tarafa çıkarılırsa

$$a_4 = \frac{-(2\lambda^2+3\lambda-5)(1-\beta)^3}{48\lambda^3}\varphi_1^3 + \frac{5(1-\beta)^2}{24\lambda^2}\varphi_1(\varphi_2-\psi_2) + \frac{(1-\beta)}{8\lambda}(\varphi_3-\psi_3)$$

bulunur. Böylece $H_2(2)$ determinantı

$$|a_2a_4 - a_3^2| = \left|\frac{-(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^4}{96\lambda^4}\varphi_1^4 + \frac{(1-\beta)^3}{48\lambda^3}\varphi_1^2(\varphi_2-\psi_2)\right.$$
$$\left. + \frac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\varphi_1(\varphi_3-\psi_3) - \frac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}(\varphi_2-\psi_2)^2\right| \tag{3.77}$$

şeklinde elde edilir. (3.65), (3.66) ve (3.77) eşitliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned}|a_2a_4 - a_3^2| = & \left|\frac{-(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^4}{96\lambda^4}\varphi_1^4 + \frac{(1-\beta)^3}{48\lambda^3}\frac{\varphi_1^2(4-\varphi_1^2)}{2}(x-y) + \frac{(1-\beta)^2}{32\lambda^2}\varphi_1^4\right. \\ & + \frac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\frac{\varphi_1^2(4-\varphi_1^2)}{2}(x+y) - \frac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\frac{\varphi_1^2(4-\varphi_1^2)}{4}(x^2+y^2) \\ & + \frac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\frac{\varphi_1(4-\varphi_1^2)}{2}\left[(1-|x|^2)z - (1-|y|^2)w\right] \\ & \left. - \frac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\frac{(4-\varphi_1^2)^2}{4}(x-y)^2\right|\end{aligned}$$

bulunur. $\varphi \in P$ olduğundan $|\varphi_1| \leq 2$ elde edilir. Ayrıca $|\varphi_1| = \varphi$ ve $\varphi \in [0,2]$ için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^4}{96\lambda^4}\varphi^4 + \frac{(1-\beta)^2}{32\lambda^2}\varphi^4 + \frac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\varphi(4-\varphi^2)$$

$$+\left[\tfrac{(1-\beta)^3}{48\lambda^3}\tfrac{\varphi^2(4-\varphi^2)}{2}+\tfrac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\tfrac{\varphi^2(4-\varphi^2)}{2}\right](|x|+|y|)$$

$$+\left[\tfrac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\tfrac{\varphi^2(4-\varphi^2)}{4}-\tfrac{(1-\beta)^2}{16\lambda^2}\tfrac{\varphi(4-\varphi^2)}{2}\right](|x|^2+|y|^2)$$

$$+\tfrac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\tfrac{(4-\varphi^2)^2}{4}(|x|+|y|)^2$$

bulunur. Buradan $\eta=|x|\leq 1$ ve $\mu=|y|\leq 1$ için

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_1(\varphi)=\frac{(1-\beta)^2}{4\lambda^2}\left[\left(\tfrac{(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^2}{24\lambda^2}+\frac{1}{8}\right)\varphi^4-\frac{\varphi^3}{4}+\varphi\right]\geq 0,\\
T_2 &= T_2(\varphi)=\frac{(1-\beta)^2}{32\lambda^2}\varphi^2(4-\varphi^2)\left[\tfrac{(1-\beta)}{3\lambda}+1\right]\geq 0,\\
T_3 &= T_3(\varphi)=\frac{(1-\beta)^2}{64\lambda^2}\varphi(4-\varphi^2)(\varphi-2)\leq 0,\\
T_4 &= T_4(\varphi)=\frac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\frac{(4-\varphi^2)^2}{4}\geq 0
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
|a_2a_4-a_3^2| &\leq T_1+(\eta+\mu)\,T_2+(\eta^2+\mu^2)\,T_3+(\eta+\mu)^2\,T_4\\
&:= G(\eta,\mu)
\end{aligned}$$

fonksiyonu elde edilir. Şimdi $G(\eta,\mu)$ fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesi üzerinde maksimum değerini bulmak için $\varphi\in(0,2)$, $\varphi=0$ ve $\varphi=2$ durumlarını göz önüne alarak $G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu}-(G_{\eta\mu})^2$ değeri incelenecektir.

1. durum: $\varphi\in(0,2)$ olsun. Böylece $T_3<0$ ve $T_3+2T_4>0$ olacağından

$$G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu}-(G_{\eta\mu})^2<0$$

elde edilir. Bu durum G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin içinde yerel maksimuma sahip olamayacağını gösterir. G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin sınırındaki durumunu incelemek için $\eta = 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 0$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) şartları altında

$$G(0,\mu) := H(\mu) = (T_3 + T_4)\mu^2 + T_2\mu + T_1$$

elde edilir.

- Burada $T_3 + T_4 \geq 0$ ise $H'(\mu) = 2(T_3 + T_4)\mu + T_2 > 0$ olup $H(\mu)$ artan fonksiyondur. O halde $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır ve

  $$\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

  elde edilir.

- $T_3 + T_4 < 0$ ise $T_2 + 2(T_3 + T_4) \geq 0$ ve $T_2 + 2(T_3 + T_4) < 2(T_3 + T_4)\mu + T_2 < T_2$ olacağından $H'(\mu) > 0$ olarak bulunur. $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır.

2. durum: $\varphi = 2$ olsun. Bu durumda

$$G(\eta,\mu) = \frac{(1-\beta)^2}{6\lambda^4}\left[\left(2\lambda^2 + 3\lambda + 1\right)(1-\beta)^2 + 3\lambda^2\right] \tag{3.78}$$

bulunur. (3.78) eşitliği de $0 \leq \mu \leq 1$ ve $0 \leq \varphi \leq 2$ şartları altında 1. durumdaki gibi incelenirse

$$\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

elde edilir.

Bu iki durum $\eta = 1$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) şartları altında tekrar değerlendirilirse

$$G(1,\mu) := F(\mu) = (T_3 + T_4)\mu^2 + (T_2 + 2T_4)\mu + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

fonksiyonu elde edilir ve yine T_3+T_4 için pozitif veya negatif olma durumu incelenirse

$$\max F(\mu) = F(1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4$$

bulunur. Buradan $\varphi \in [0,2]$ için $H(1) \leq F(1)$ olduğu görülür ve G fonksiyonu maksimum değerini $\eta = 1$ ve $\mu = 1$ noktalarında alır. Bu durumda

$$K(\varphi) := \max G(\eta,\mu) = G(1,1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4 \tag{3.79}$$

olarak yazılır ve T_1, T_2, T_3, T_4 değerleri (3.79) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$K(\varphi) = \tfrac{(1-\beta)^2}{4\lambda^2}\left[\left(\tfrac{(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^2}{24\lambda^2} - \tfrac{(1-\beta)}{12\lambda} - \tfrac{5}{36}\right)\varphi^4 + \left(\tfrac{(1-\beta)}{3\lambda} + \tfrac{11}{18}\right)\varphi^2 + \tfrac{16}{9}\right]$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $K(\varphi)$ nin maksimum değerini hesaplamak için

$$K'(\varphi) = \tfrac{(1-\beta)^2}{2\lambda^2}\left[\left(\tfrac{(6\lambda^2+9\lambda+3)\beta^2-6(2\lambda^2+2\lambda+1)\beta-(4\lambda^2-3\lambda-3)}{36\lambda^2}\right)\varphi^3 + \tfrac{6(1-\beta)+11\lambda}{18\lambda}\varphi\right]$$

türev fonksiyonunu göz önüne alalım. $0 < \varphi < 2$ ve her $\beta \in [0,1)$ için $(6\lambda^2 + 9\lambda + 3)\beta^2 - 6(2\lambda^2 + 2\lambda + 1)\beta - (4\lambda^2 - 3\lambda - 3) < 0$ ve $6\,(1-\beta) + 11\lambda > 0$ elde edilir. Bu durumda $K'(\varphi) = 0$ olmak üzere iki reel kritik nokta

$$\varphi_{0_1} = 0,$$

$$\varphi_{0_2} = \sqrt{\frac{-2\left[6\left(1-\beta\right)+11\lambda\right]\lambda}{3\left(2\lambda^2+3\lambda+1\right)\left(1-\beta\right)^2-6\lambda(1-\beta)-10\lambda^2}}$$

bulunur. Her $\beta \in [0,1)$ için $\varphi_{0_2} \leq 2$ dir. Ayrıca $K''(\varphi_{0_2}) < 0$ olduğundan $K(\varphi)$ maksimum değerini $\varphi = \varphi_{0_2}$ noktasında alır. Böylece

$$\max K(\varphi) = K(\varphi_{0_2}) = \tfrac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\left[16 - \tfrac{[6(1-\beta)+11\lambda]^2}{2[3(2\lambda^2+3\lambda+1)(1-\beta)^2-6\lambda(1-\beta)-10\lambda^2]}\right]$$

elde edilir. Diğer yandan $\varphi = 0$ için

$$K(0) = \tfrac{4(1-\beta)^2}{9\lambda^2}$$

ve $\varphi = 2$ için

$$K(2) = \frac{(1-\beta)^2}{6\lambda^4}\left[\left(2\lambda^2+3\lambda+1\right)(1-\beta)^2+3\lambda^2\right]$$

elde edilir. Bu üç değer karşılaştırıldığında

$$K(0) < K(2) \leq K(\varphi_{0_2})$$

olduğu kolayca görülür. Buradan K fonksiyonun maksimum değerini φ_{0_2} noktasında aldığı sonucunu elde edilir.■

Sonuç 3.7.6. $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere (2.1) formunda verilen f fonksiyonu $H_\Sigma(\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \tfrac{(1-\beta)^2}{36}\left[16 - \tfrac{[6(1-\beta)+11]^2}{36(1-\beta)^2-12(1-\beta)-20}\right]$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2016a).

3.8. $S_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ Sınıfı

Bu kısımda kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonların $S_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ sınıfı için Noonan ve Thomas (1976) tarafından tanımlanan q^{th} Hankel determinantı kullanılarak $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ ikinci Hankel determinantı için üst sınır hesaplanacaktır.

Tanım 3.8.1. $g = f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu

$$f \in \Sigma,\ 0 \leq \beta < 1,\ 0 < \alpha \leq 1,\ z, w \in U$$

için

$$\Re\left(\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} + \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) > \beta$$

ve

$$\Re\left(\frac{1}{2}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)} + \left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) > \beta$$

şartlarını sağlıyorsa $S_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ sınıfındadır denir (Altınkaya ve Yalçın 2015d).

Teorem 3.8.2. $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere (2.1) formunda verilen f

fonksiyonu $S_\Sigma(\alpha,\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq \begin{cases} \frac{16\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}\left(1-\beta\right)^2\left[\frac{8\left(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1\right)}{3(\alpha+1)^3}\left(1-\beta\right)^2+1\right], \\ \qquad \beta\in\left[0,1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}\right] \\ \frac{4\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\left(1-\beta\right)^2\left\{1-\frac{9\{2\alpha(1-\beta)+(\alpha+1)\}^2(\alpha+1)}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)(1-\beta)^2-36\alpha(\alpha+1)^2(1-\beta)-15(\alpha+1)^3}\right\}, \\ \qquad \beta\in\left[1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)},1\right) \end{cases}$$

dir (Altınkaya ve Yalçın 2018b).

İspat. $f\in S_\Sigma(\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda φ ve ψ fonksiyonları P sınıfına ait olmak üzere

$$\frac{1}{2}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}+\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\beta+(1-\beta)\varphi(z) \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}+\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)=\beta+(1-\beta)\psi(w) \tag{3.81}$$

elde edilir ve bu eşitliklerde karşılıklı katsayılar eşitlenirse

$$\frac{\alpha+1}{2\alpha}a_2=(1-\beta)\,\varphi_1, \tag{3.82}$$

$$\frac{\alpha+1}{2\alpha}\left(2a_3-a_2^2\right)+\frac{1-\alpha}{4\alpha^2}a_2^2=(1-\beta)\,\varphi_2, \tag{3.83}$$

$$\tfrac{\alpha+1}{2\alpha}\left(3a_4+a_2^3-3a_2a_3\right)+\tfrac{1-\alpha}{2\alpha^2}\left(2a_2a_3-a_2^3\right)+\tfrac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{12\alpha^3}a_2^3=(1-\beta)\,\varphi_3 \tag{3.84}$$

ve

$$-\frac{\alpha+1}{2\alpha}a_2=(1-\beta)\,\psi_1, \tag{3.85}$$

$$\frac{\alpha+1}{2\alpha}\left(3a_2^2-2a_3\right)+\frac{1-\alpha}{4\alpha^2}a_2^2=(1-\beta)\,\psi_2, \tag{3.86}$$

$$-\tfrac{\alpha+1}{2\alpha}\left(3a_4+10a_2^3-12a_2a_3\right)-\tfrac{1-\alpha}{2\alpha^2}(3a_2^3-2a_2a_3)-\tfrac{(1-\alpha)(1-2\alpha)}{12\alpha^3}a_2^3=(1-\beta)\psi_3 \tag{3.87}$$

bulunur. (3.82) ve (3.85) eşitliklerinden

$$\varphi_1=-\psi_1 \tag{3.88}$$

ve

$$a_2=\frac{2\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)\,\varphi_1 \tag{3.89}$$

olduğu kolayca görülür. a_3 katsayısını elde etmek için (3.83) ve (3.86) eşitlikleri kullanılırsa

$$a_3=\frac{4\alpha^2}{(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\,\varphi_1^2+\frac{\alpha}{2\,(\alpha+1)}(1-\beta)\,(\varphi_2-\psi_2) \tag{3.90}$$

bulunur. a_4 katsayısını için (3.84) ve (3.87) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a_4 = {} & \tfrac{12\alpha^3+16\alpha^2-3\alpha-1}{18\alpha^2(\alpha+1)}\tfrac{8\alpha^3}{(\alpha+1)^3}(1-\beta)^3\varphi_1^3+\tfrac{5\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi_1(\varphi_2-\psi_2) \\ & +\tfrac{\alpha}{3(\alpha+1)}(1-\beta)(\varphi_3-\psi_3) \end{aligned} \tag{3.91}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden $H_2(2)$ determinantı

$$\begin{aligned} |a_2a_4-a_3^2| = {} & \Big|-\tfrac{(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{18\alpha^2(\alpha+1)}\tfrac{16\alpha^4}{(\alpha+1)^4}(1-\beta)^4\varphi_1^4+\tfrac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3}(1-\beta)^3\varphi_1^2(\varphi_2-\psi_2) \\ & +\tfrac{2\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi_1(\varphi_3-\psi_3)-\tfrac{\alpha^2}{4(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2(\varphi_2-\psi_2)^2\Big| \end{aligned} \tag{3.92}$$

olarak bulunur. (3.65) ve (3.66) eşitlikleri (3.92) de yerine yazılırsa

$$|a_2a_4 - a_3^2| = \left| -\tfrac{(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{18\alpha^2(\alpha+1)} \tfrac{16\alpha^4}{(\alpha+1)^4} (1-\beta)^4 \varphi_1^4 + \tfrac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3} (1-\beta)^3 \varphi_1^2 \tfrac{\left(4-\varphi_1^2\right)}{2}(x-y) \right.$$

$$+\tfrac{\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1^4 + \tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1^2\tfrac{\left(4-\varphi_1^2\right)}{2}(x+y) - \tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1^2\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{4}(x^2+y^2)$$

$$+\tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{2}\left[\left(1-|x|^2\right)z - \left(1-|y|^2\right)w\right]$$

$$\left. -\tfrac{\alpha^2(1-\beta)^2}{4(\alpha+1)^2}\tfrac{(4-\varphi_1^2)^2}{4}(x-y)^2 \right|$$

bulunur. $\varphi \in P$ olduğundan $|\varphi_1| \leq 2$ elde edilir. Ayrıca $|\varphi_1| = \varphi$ ve $\varphi \in [0,2]$ için üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \tfrac{(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{18\alpha^2(\alpha+1)}\tfrac{16\alpha^4}{(\alpha+1)^4}(1-\beta)^4\varphi_1^4 + \tfrac{\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi_1^4$$

$$+\tfrac{2\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi_1(4-\varphi_1^2)$$

$$+\left[\tfrac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3}(1-\beta)^3\varphi_1^2\tfrac{\left(4-\varphi_1^2\right)}{2} + \tfrac{2\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi_1^2\tfrac{\left(4-\varphi_1^2\right)}{2}\right](|x|+|y|)$$

$$+\left[\tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1^2\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{4} - \tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\varphi_1\tfrac{(4-\varphi_1^2)}{2}\right](|x|^2+|y|^2)$$

$$+\tfrac{\alpha^2(1-\beta)^2}{4(\alpha+1)^2}\tfrac{(4-\varphi_1^2)^2}{4}(|x|+|y|)^2$$

elde edilir. Buradan $\eta = |x| \leq 1$ ve $\mu = |y| \leq 1$ için

$$T_1 = T_1(\varphi) = \tfrac{\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\left[\left(\tfrac{8(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{3(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2+1\right)\varphi^4 - 2\varphi^3 + 8\varphi\right] \geq 0$$

$$T_2 = T_2(\varphi) = \tfrac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\varphi^2\tfrac{(4-\varphi^2)}{2}\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)+\tfrac{2}{3}\right] \geq 0$$

$$T_3 = T_3(\varphi) = \frac{\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\frac{(4-\varphi^2)}{2}\varphi(\varphi-2) \leq 0$$

$$T_4 = T_4(\varphi) = \frac{\alpha^2}{4(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\frac{(4-\varphi^2)^2}{4} \geq 0$$

olmak üzere

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq T_1 + (\eta+\mu)\,T_2 + (\eta^2+\mu^2)\,T_3 + (\eta+\mu)^2\,T_4 = G(\eta,\mu)$$

fonksiyonu elde edilir. Şimdi $G(\eta,\mu)$ fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesi üzerinde maksimum değerini bulmak için $\varphi \in (0,2)$, $\varphi = 0$ ve $\varphi = 2$ durumları göz önüne alınarak $G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu} - (G_{\eta\mu})^2$ incelenecektir.

1. durum: $\varphi \in (0,2)$ olsun. Böylece $T_3 < 0$ ve $T_3 + 2T_4 > 0$ olacağından

$$G_{\eta\eta}.G_{\mu\mu} - (G_{\eta\mu})^2 < 0$$

elde edilir. Bu durum G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin içinde yerel maksimuma sahip olamayacağını gösterir. G fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ karesinin sınırındaki durumunu incelemek için $\eta = 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 0$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) şartları altında

$$G(0,\mu) = H(\mu) = (T_3+T_4)\mu^2 + T_2\mu + T_1$$

elde edilir.

- Burada $T_3 + T_4 \geq 0$ ise $H'(\mu) = 2(T_3+T_4)\mu + T_2 > 0$ olup $H(\mu)$ artan fonksiyondur. O halde $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ noktasında alır ve

$$\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

elde edilir.

- $T_3+T_4<0$ ise $T_2+2(T_3+T_4)\geq 0$ ve $T_2+2(T_3+T_4)<2(T_3+T_4)\mu+T_2<T_2$ olacağından $H'(\mu)>0$ olarak bulunur. $H(\mu\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu=1$ noktasında alır.

2. durum: $\varphi=2$ olsun. Bu durumda

$$G(\eta,\mu)=\frac{16\alpha^2}{3\left(\alpha+1\right)^2}\left(1-\beta\right)^2\left[\frac{8\left(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1\right)}{3(\alpha+1)^3}\left(1-\beta\right)^2+1\right] \tag{3.93}$$

elde edilir. (3.93) eşitliği de $0\leq\mu\leq 1$ ve $0\leq\varphi\leq 2$ şartları altında 1. durumdaki gibi incelenirse

$$\max H(\mu)=H(1)=T_1+T_2+T_3+T_4$$

elde edilir.

Bu iki durum $\eta=1$ ve $0\leq\mu\leq 1$ (benzer şekilde $\mu=1$ ve $0\leq\eta\leq 1$) şartları altında tekrar değerlendirilirse

$$G(1,\mu)=F(\mu)=(T_3+T_4)\mu^2+(T_2+2T_4)\mu+T_1+T_2+T_3+T_4$$

fonksiyonu elde edilir ve yine T_3+T_4 için pozitif veya negatif olma durumu incelenirse

$$\max F(\mu)=F(1)=T_1+2T_2+2T_3+4T_4$$

bulunur. Buradan $\varphi\in[0,2]$ için $H(1)\leq F(1)$ olduğu görülür ve G fonksiyonu maksimum değerini $\eta=1$ ve $\mu=1$ noktalarında alır. Bu durumda

$$K(\varphi)=\max G(\eta,\mu)=G(1,1)=T_1+2T_2+2T_3+4T_4 \tag{3.94}$$

olarak yazılır ve T_1, T_2, T_3, T_4 değerleri (3.94) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= \tfrac{\alpha^2(1-\beta)^2}{(\alpha+1)^2}\Big\{\Big(\tfrac{8(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{9(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2-\tfrac{\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)-\tfrac{5}{12}\Big)\varphi^4 \\ &\quad +\big(\tfrac{4\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)+2\big)\varphi^2+4\Big\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi $K(\varphi)$ nin maksimum değerini hesaplamak için

$$\begin{aligned} K'(\varphi) &= \tfrac{2\alpha^2(1-\beta)^2}{(\alpha+1)^2}\Big\{\Big(\tfrac{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{9(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2-\tfrac{2\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)-\tfrac{5}{6}\Big)\varphi^3 \\ &\quad +\big(\tfrac{4\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)+2\big)\varphi\Big\} \end{aligned}$$

türev fonksiyonunu göz önüne alalım.

- Kabul edelim ki $\frac{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{9(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2-\frac{2\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)-\frac{5}{6}\geq 0$ olsun. Bu durumda $\beta\in\left[0,1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+120(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}\right]$ olup $K'(\varphi)$ >0 elde edilir. K artan bir fonksiyon olarak bulunduğundan maksimum değerini $\varphi=2$ noktasında alır. Buradan $K(2)$ değeri

  $$\max K(\varphi)=K(2)=\tfrac{16\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\left[\tfrac{8\left(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1\right)}{3(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2+1\right]$$

  dir.

- Kabul edelim ki $\frac{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}{9(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2-\frac{2\alpha}{\alpha+1}(1-\beta)-\frac{5}{6}<0$ olsun. Bu durumda $\beta\in\left(1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+120(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)},1\right)$ olup $K'(\varphi)=0$ elde edilir. Buradan K fonksiyonunun iki kritik noktası

  $$\varphi_{0_1}=0$$

ve

$$\varphi_{0_2} = \sqrt{\frac{-36\{2\alpha(1-\beta)+(\alpha+1)\}(\alpha+1)^2}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)(1-\beta)^2-36\alpha(\alpha+1)^2(1-\beta)-15(\alpha+1)^3}}$$

elde edilir.

$$\beta \in \begin{array}{l}\left[1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+120(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{16(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)},\right. \\ \left. 1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}\right]\end{array}$$

için $\varphi_{0_2} \geq 2$ olarak bulunduğundan φ_{0_2} kökü $(0,2)$ aralığının dışında kalır. O halde K artan fonksiyon olduğundan maksimum değerini $\varphi = 2$ noktasında alır. Buradan

$$\max K(\varphi) = K(2) = \frac{16\alpha^2(1-\beta)^2}{3(\alpha+1)^2}\left[\frac{8\left(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1\right)}{3(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2+1\right]$$

elde edilir.

$$\beta \in \left(1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)},1\right)$$

için $\varphi_{0_2} < 2$ olarak bulunur; yani φ_{0_2} kökü $(0,2)$ aralığı içinde kalır. $K''(\varphi_{0_2}) < 0$ olduğundan $K(\varphi)$ maksimum değerini $\varphi = \varphi_{0_2}$ noktasında alır. Buradan

$$K(\varphi_{0_2}) = \frac{4\alpha^2(1-\beta)^2}{(\alpha+1)^2}\left\{1-\frac{9\{2\alpha(1-\beta)+(\alpha+1)\}^2(\alpha+1)}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)(1-\beta)^2-36\alpha(\alpha+1)^2(1-\beta)-15(\alpha+1)^3}\right\}$$

elde edilir.■

Uyarı 3.8.3. Tanım 3.8.1 de $\alpha = 1$ olarak alınırsa $S_\Sigma(\beta)$ sınıfı için ikinci Hankel determinantı elde edilir.

Sonuç 3.8.4. (2.1) formunda verilen f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \begin{cases} \frac{4(1-\beta)^2}{3}\left(4\beta^2 - 8\beta + 5\right), & \beta \in \left[0, \frac{29-\sqrt{137}}{32}\right) \\ \\ (1-\beta)^2\left(\frac{13\beta^2-14\beta-7}{16\beta^2-26\beta+5}\right), & \beta \in \left(\frac{29-\sqrt{137}}{32}, 1\right) \end{cases}$$

dir (Deniz ve ark. 2015).

4. SONUÇ

Katsayı eşitsizlikleri elde etme problemi tek değişkenli kompleks değerli analitik yalınkat fonksiyonlar için en önemli araştırma alanlarından biridir. Analitik yalınkat fonksiyonlarda bu problemi çözüme ulaştırmak için birçok alt sınıf tanımlama gerekliliği ortaya çıkmıştır. Benzer durum kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonlar için de söz konusudur. Bu gereklilikten hareketle, bu tez çalışmasında, $S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ ve $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ yeni alt sınıfları tanımlanmış, bu sınıflara ait fonksiyonların başlangıç katsayıları için üst sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean türev operatörü yardımıyla $B_{\Sigma}(p,\lambda,\varphi)$, $Q(p,\lambda,\beta)$ alt sınıfları, sabordinasyon prensibinden faydalanarak $B_{\Sigma}(\mu,\lambda,\varphi)$ alt sınıfı tanımlanmış ve çalışılmıştır. Daha önce tanımlanan ve çalışılan $P_{\Sigma}(\alpha,\beta)$, $H_{\Sigma}(\lambda,\beta)$ ve $S_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ sınıflarındaki fonksiyonlara ait $H_2(2)=a_2a_4-a_3^2$ Hankel determinantının modülü için üst sınır hesaplanmıştır.

$S_{\Sigma}^{\phi,\psi}(\lambda)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|\psi'(0)|^2\right)\lambda^2}{(1+\lambda)^2}},\sqrt{\frac{\left(|\phi''(0)|+|\psi''(0)|\right)\lambda^2}{2\lambda^2+\lambda+1}}\right\},$$

$$|a_3| \leq \min\left\{\frac{2\left(|\phi'(0)|^2+|\psi'(0)|^2\right)\lambda}{(1+\lambda)^2}+\frac{\left(|\phi''(0)|+|\psi''(0)|\right)\lambda}{4(1+\lambda)},\right.$$

$$\left.\frac{(6\lambda^3+5\lambda^2+\lambda)|\phi''(0)|}{4(1+\lambda)(2\lambda^2+\lambda+1)}+\frac{(2\lambda^3+3\lambda^2-\lambda)|\psi''(0)|}{4(1+\lambda)(2\lambda^2+\lambda+1)}\right\}$$

katsayı sınırları elde edilirken $H_{\Sigma}^{\delta}(h,\beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_2|^2}},\frac{m(1-\beta)}{|1+\delta|\,|h_2|}\right\},$$

$$|a_3| \leq \min\left\{\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|}+\frac{m^2(1-\beta)^2}{|1+\delta|^2\,|h_3|},\frac{m(1-\beta)}{|1+2\delta|\,|h_3|}\right\}$$

sınırları elde edilmiştir (Akgül ve Altınkaya 2017, Altınkaya ve Yalçın 2016d). Daha sonra $B_{\Sigma}(p,\lambda,\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_n| \leq \frac{2}{n^p\left[1+(n-1)\lambda\right]}; \qquad n \geq 4,$$

$Q(p,\lambda,\beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\beta)}{n^p\left[1+(n-1)\lambda\right]}; \qquad n \geq 4$$

ve $B_{\Sigma}(\mu,\lambda,\varphi)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$|a_n| \leq \frac{2}{\mu+(n-1)\lambda}; \qquad n \geq 4$$

katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2014b, Altınkaya ve Yalçın 2015b,e, Altınkaya ve Yalçın 2016b). Bu sınıflara ilave olarak, bu çalışmada daha önceden tanımlanan $P_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ ve $H_{\Sigma}(\lambda,\beta)$ sınıflarına da yer verilmiştir. Prema ve Keerthi (2013) tarafından tanımlanan, $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için üst sınırları elde edilen $P_{\Sigma}(\alpha,\beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right| \leq \begin{cases} \frac{4(1-\alpha)^2}{3(\beta+1)^3(\beta+3)}\left[2(\beta+3)(\beta+2)(1-\alpha)^2+3(\beta+1)^2\right], \\ \qquad \alpha \in \left[0, 1-\frac{3(\beta+1)(\beta+3)+(\beta+1)\sqrt{9(\beta+3)^2+48(\beta+2)^3(\beta+3)}}{8(\beta+2)^2(\beta+3)}\right] \\ (1-\alpha)^2\left\{\frac{4}{(\beta+2)^2}\right. \\ \left.-\frac{3\left[(\beta^2+5\beta+6)(1-\alpha)+(\beta+1)(\beta^2+4\beta+6)\right]^2}{(\beta+1)(\beta+2)^2(\beta+3)[2(\beta+2)^3(\beta+3)(1-\alpha)^2-3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)(1-\alpha)-3(\beta+1)^2(\beta^2+4\beta+5)]}\right\}, \\ \qquad \alpha \in \left(1-\frac{3(\beta+1)(\beta+3)+(\beta+1)\sqrt{9(\beta+3)^2+48(\beta+2)^3(\beta+3)}}{8(\beta+2)^2(\beta+3)}, 1\right) \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2016c). Yine Jahangiri ve ark. (2014) tarafından tanımlanan ve çalışılan $H_\Sigma(\lambda, \beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \tfrac{(1-\beta)^2}{36\lambda^2}\left[16 - \frac{\left[6(1-\beta)+11\lambda\right]^2}{2\left[3\left(2\lambda^2+3\lambda+1\right)(1-\beta)^2 - 6\lambda(1-\beta) - 10\lambda^2\right]}\right]$$

katsayı eşitsizliği elde edilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2016a). Son olarak Altınkaya ve Yalçın (2015d) tarafından tanımlanan $S_\Sigma(\alpha, \beta)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $H_2(2)$ Hankel determinantı

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \begin{cases} \frac{16\alpha^2}{3(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\left[\frac{8\left(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1\right)}{3(\alpha+1)^3}(1-\beta)^2+1\right], \\ \qquad \beta \in \left[0, 1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}\right] \\ \frac{4\alpha^2}{(\alpha+1)^2}(1-\beta)^2\left\{1-\frac{9\{2\alpha(1-\beta)+(\alpha+1)\}^2(\alpha+1)}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)(1-\beta)^2-36\alpha(\alpha+1)^2(1-\beta)-15(\alpha+1)^3}\right\}, \\ \qquad \beta \in \left[1-\frac{9\alpha(\alpha+1)^2+(\alpha+1)\sqrt{81\alpha^2(\alpha+1)^2+192(\alpha+1)(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}}{32(6\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1)}, 1\right) \end{cases}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Elde edilen bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa daha önce tanımlanan ve çalışılan, kendisi ve tersi yalınkat fonksiyonlar için temel teşkil eden sınıflara ait sonuçlar elde edilir.

Bütün bu çalışmalara ilave olarak birçok yazar (Srivastava ve ark. 2016, Xu ve ark. 2012, Yavuz 2018) başlangıç katsayıları a_2 ve a_3 ün modülleri için üst sınır elde etme çalışmaları yapmıştır. Bazı yazarlar çalışmalarını Fekete-Szegö problemi, Hankel determinantı üzerine yoğunlaştırmıştır (Altınkaya ve Yalçın 2015c,d, Altınkaya ve Yalçın 2016a,c, Deniz ve ark. 2015, Murugusundaramoorthy ve ark. 2019). Son yıllarda ise a_n genel katsayının modülü için üst sınır elde etme üzerine çalışmalar yapılmaktadır (Altınkaya ve Yalçın 2015b,e, Altınkaya ve Yalçın 2016b, Bulut 2014, Hamidi ve Jahangiri 2016, Jahangiri ve Hamidi 2013, Jahangiri ve Hamidi 2015, Jahangiri ve ark. 2014, Srivastava ve ark. 2018b, Zireh ve ark. 2016). Literatür taraması yapıldığında bu çalışmalar oldukça sınırlıdır ve sadece Faber polinomları yardımıyla genel katsayı tahmini yapılabilmektedir. Bu nedenle $n \in \mathbb{N} \backslash \{1,2\}$; $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ olmak üzere $|a_n|$ katsayı tahmini Σ sınıfı için hâlâ açık bir problemdir.

KAYNAKLAR

Airault, H. 2007. Symmetric sums associated to the factorization of Grunsky coefficients. Conference Groups and Symmetries, 27-29 April, 2007, Montreal, Canada.

Airault, H. 2008. Remarks on Faber polynomials. *Int. Math. Forum*, 3(9): 449-456. **Airault, H., Bouali, H. 2006.** Differential calculus on the Faber polynomials. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 130(3): 179-222.

Airault, H., Ren, J. 2002. An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 126(5): 343-367.

Akgül, A., Altınkaya, Ş. 2017. Coefficient estimates associated with a new subclass of bi-univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 52(4): 121-128.

Alkahtani, B.S., Goswami, P., Bulboacă, T. 2016. Estimate for initial Maclaurin coefficients of certain subclasses of Bi-univalent functions. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(2): 739-748.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014a. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions. *International Journal of Analysis*, Article ID 867871, 2014: 1-4.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014b. Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 40: 347-354.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014c. Fekete-Szegö inequalities for certain classes of bi-univalent functions. *International Scholarly Research Notices*, Article ID 327962, 2014: 1-5.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014d. Fekete-Szegö inequalities for classes of bi-univalent functions defined by subordination. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 3(2): 63-71.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015a. Coefficient estimates for two new subclasses of bi-univalent functions with respect to symmetric points. *Journal of Function Spaces*, Article ID 145242, 2015: 1-5.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015b. Coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(2): 180-185.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015c. On a new subclass of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, 7(1): 5-14.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015d. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. *Creative Mathematics and Informatics*, 24(2): 101-106.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015e. Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 353(12): 1075–1080.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016a. Second Hankel determinant for a comprehensive subclass of bi-univalent functions. *Annals of Oradea University-Mathematics Fascicola 2*, 23(1): 113-118.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016b. Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 61(1):

37-44.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016c. Upper bound of second Hankel determinant for bi-Bazilevič functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13: 4081-4090.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016d. Coefficient problem for certain subclasses of bi-univalent functions defined by convolution. *Mathematica Moravica*, 20(2): 15-21.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017a. On a new subclass of bi-univalent functions of Sakaguchi type satisfying subordinate conditions. *Malaya Journal of Mathematics*, 5(2): 305-309.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017b. The Fekete-Szegö problem for a general class of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Sahand Comm. Math. Anal.*, 5(1): 1-7.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018a. Estimate for initial MacLaurin of general subclasses of bi-univalent functions of complex order involving subordination. *Honam Mathematical Journal*, 40(3): 391-400.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018b. Construction of second Hankel determinant for a new subclass of bi-univalent functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(6): 2876-2884.
Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vernitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math.*, 138: 940-955.
Branges, L. De. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154: 137-152.
Brannan, D.A., Clunie, J.G., (Editors). 1980. Aspects of contemporary complex analysis. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute (University of Durham, 1-20 July, 1979), Academic Press, New York and London.
Brannan, D.A., Taha, T.S. 1986. On some classes of bi-univalent functions. in *Mathematical Analysis and Its Applications* (Kuwait; February 18-21, 1985) (S. M. Mazhar, A. Hamoui and N. S. Faour, Editors), pp. 53-60, KFAS Proceedings Series, Vol. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford, 1988; see also *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 31(2): 70-77.
Bulut, S. 2013. Coefficient estimates for a class of analytic and bi-univalent functions. *Novi Sad J. Math.*, 43(2): 59-65.
Bulut, S. 2014. Faber polynomial coeficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 352(2): 479-484.
Deniz, E., Çağlar, M., Orhan, H. 2015. Second Hankel determinant for bi-starlike and bi-convex functions of order β. *Applied Mathematics and Computation*, 271: 301-307.
Duren, P.L. 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo, 393 pp.
Elhosh, M.M. 1986. On the second Hankel determinant of univalent functions. *Bull. Malays. Math. Soc.*, 9(1): 23-25.
Faber, G. 1903. Über polynomische entwickelungen. *Math. Ann.*, 57(3): 1569-1573.

Fekete, M., Szegö, G. 1933. Eine Bemerkung uber ungerade schlichte funktionen. *J. London Math. Soc.*, 8: 85-89.
Frasin, B.A., Aouf, M.K. 2011. New subclasses of bi-univalent functions. *Appl. Math. Lett.*, 24(9): 1569-1573.
Garabedian, P.R., Schiffer, M. 1955. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mech. Anal.*, 4: 427-465.
Graham, J., Kohr, G. 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc., New York, 515 pp.
Grenander, U., Szegö, G. 1958. Toeplitz forms and their applications. California Monographs in Mathematical Sciences, Univ. California Press, Berkeley, 254 pp.
Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.
Güney, H.Ö., Murugusundaramoorthy, G., Srivastava, H.M. 2019. The second Hankel determinant for a certain class of bi-close-to-convex functions. *Results Math.*, 74: 1-13.
Hamidi, S.G., Jahangiri, J.M. 2016. Faber polynomial coefficients of bi-subordinate functions. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 354: 365-370.
Hayman, W.K. 1968. On the second Hankel determinant of mean univalent functions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 18: 77-94.
Jahangiri, J.M., Hamidi, S.G. 2013. Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Article ID 190560, 2013: 1-4.
Jahangiri, J.M., Hamidi, S.G. 2015. Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-Bazilevic functions. *Matematicki Vesnik*, 67(2): 123-129.
Jahangiri, J.M., Hamidi, S.G., Halim, S.A. 2014. Coefficients of bi-univalent functions with positive real part derivatives. *Bull. Malays. Math. Soc.*, in press, http://math.usm.my/bulletin/pdf/acceptedpapers/2013-04-050-R1.pdf.
Janteng, A., Halim, S.A., Darus, M. 2007. Hankel determinant for starlike and convex functions. *Int. Journal of Math. Analysis*, 1(13): 619-625.
Kanas, S., Darwish, D.E. 2010. Fekete-Szegö problem for starlike and convex functions of complex order. *Appl. Math. Lett.*, 23(7): 777-782.
Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. Nach. Ges. Wiss. Gottingen, 191-210.
Kwon, O-S., Cho, N-E. 2003. On the Fekete-Szegö problem for certain analytic functions. *The Pure and Applied Mathematics*, 10(4): 265-271.
Kumar, S.S., Kumar, V., Ravichandran, V. 2013. Estimates for the initial coefficients of bi-univalent functions. *Tamsui Oxf. J. Inf. Math. Sci.*, 29: 487-504.
Lewin, M. 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 18(1): 63-68.
Lindelöf, E. 1909. Memorie sur certains inegalities dans la theorie des fonctions monogeneswetsurquelques proprietes nouvelles de ces fonctions dans le Voisinage d'un point singulier essentiel. *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 35(7): 1-35.
Littlewood, J.E. 1925. On inequalities in the theory of functions. *Proc. London*

Math. Soc., 23: 481-519 and Lectures on the theory of functions. Oxford Universty Press, London.
Löwner, K. 1923. Uniersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. *Math. Ann.*, 89: 103-121.
Mazi, E., Altınkaya, Ş. 2019. On a new subclass of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 68(1): 724-733.
Murugusundaramoorthy, G., Magesh, N. 2009. Coefficient inequalities for certain classes of analytic functions associated with Hankel determinant. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 1(3): 85-89.
Murugusundaramoorthy, G., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019. Fekete-Szegö inequalities for subclass of bi-univalent functions associated with Sălăgean type q-difference operator. *Afrika Matematika*, 30: 979-987.
Netanyahu, E. 1969. The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 32: 100-112.
Noonan, J.W., Thomas, D.K. 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 223: 337–346.
Orhan, H., Deniz, E., Raducanu, D. 2010. The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(1): 283-295.
Orhan, H., Magesh, N., Balaji, V.K. 2016. Fekete-Szegö problem for certain classes of Ma-Minda bi-univalent functions, *Afr. Mat.*, 27: 889-897.
Ozawa, M. 1969. On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 21: 97-128.
Padmanabhan, K., Parvatham, R. 1975. Properties of a class of functions with bounded boundary rotation. *Ann. Polon. Math.*, 31: 311-323.
Palka, B.P. 1991. An introduction to complex function theory. Springer-Verlag, New York, 560 pp.
Pederson, R.W. 1968. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31: 331-351.
Pederson, R.W., Schiffer, M. 1972. A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45: 161-193.
Porwal, S., Darus, M. 2013. On a new subclass of bi-univalent functions. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21(3): 190-193.
Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 393 pp.
Prema, S., Keerthi, B.S. 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of analytic functions. *Journal of Mathematical Analysis*, 4(1): 22-27.
Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse. **Ph.D. Thesis**, University of Göttingen, Germany.
Rogosinski, W.W. 1943. On Subordinate Functions. *Proc. Cambridge Philos.*

Soc., 35: 1-26 and On the coefficients of Subordinate Functions. *Proc. London Math. Soc.*, 48: 48-82.
Sălăgean, G.S. 1983. Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1013: 362-372.
Srivastava, H.M., Mishra, A.K., Gochhayat, P. 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. *Appl. Math. Lett.*, 23: 1188-1192.
Srivastava, H.M., Sivasubramanian, S., Sivakumar, R. 2014. Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions. *Tbilisi Math. J.*, 7: 1-10.
Srivastava, H.M., Bansal, D. 2015. Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions. *J. Egyptian Math. Soc.*, 23: 242-246.
Srivastava, H.M., Joshi, S.B., Joshi, S.S., Pawar, H. 2016. Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions. *Palest. J. Math.*, 5(Special Issue: 1): 250-258.
Srivastava, H.M., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018a. Hankel determinant for a subclass of bi-univalent functions defined by using a symmetric q-derivative operator. *Filomat*, 32(2): 503-516.
Srivastava, H.M., Sümer Eker, S., Hamidi, S.G., Jahangiri, J.M. 2018b. Faber polynomial coefficient estimates for bi-univalent functions defined by the Tremblay fractional derivative operator. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 44(1): 149-157.
Tan, D.L. 1984. Coefficient estimates for bi-univalent functions. *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 5: 559-568.
Xu, Q.H., Gui, Y.C., Srivastava, H.M. 2012. Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions. *Appl. Math. Lett.*, 25: 990-994.
Yavuz, T. 2018. Coefficient estimates for a new subclass of bi-univalent functions defined by convolution. *Creat. Math. Inform.*, 27: 89-94.
Zaprawa, P. 2014. On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 21: 169-178.
Zireh, A., Analouei Adegani, E., Bulut, S. 2016. Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions defined by subordination. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 23: 487–504.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Şahsene ALTINKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Kırcaali/Bulgaristan, 11.04.1990
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Bursa Erkek Lisesi 2004-2008
Lisans	:	Erciyes Üniversitesi 2008-2012
Yüksek Lisans	:	Uludağ Üniversitesi 2012-2014

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Bursa Uludağ Üniversitesi-2013

İletişim : sahsene@uludag.edu.tr
sahsenealtinkaya@gmail.com

Yayınları :

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014a. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions. *International Journal of Analysis*, Article ID 867841, 2014: 1-4.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014b. Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 40: 347-354.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014c. Fekete-Szegö inequalities for certain classes of bi-univalent functions. *International Scholarly Research Notices*, Article ID 327962, 2014: 1-6.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014d. Fekete-Szegö inequalities for classes of bi-univalent functions defined by subordination. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 3(2): 63-71.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015a. Coefficient estimates for two new subclasses of bi-univalent functions with respect to symmetric points. *Journal of Function Spaces*, Article ID 145242, 2015: 1-5.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015b. Coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 6(2): 180-185.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015c. On a new subclass of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica*, 7(1): 5-14.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015ç. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. *Creative Mathematics and Informatics*, 24(2): 101-106.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015d. Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 353(12): 1075-1080.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015e. Coefficient estimates for two new subclasses of bi-univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 43: 53-63.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015f. Second Hankel determinant for a general subclass of bi-univalent functions associated with the Ruscheweyh derivative. *Acta Universitatis Apulensis*, 43: 199-208.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015g. Coefficient bounds for certain subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions. *Journal of Mathematics*, Article ID 241683, 2015: 1-5.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015ğ. Initial coefficient bounds for a comprehensive subclass of Sakaguchi type functions. *Acta Universitatis Matthiae Belii Series Mathematics*, 23: 27-33.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016a. Second Hankel determinant for a comprehensive subclass of bi-univalent functions. *Annals of Oradea University Mathematics Fascicola*, 23(1): 113-118.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016b. Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 61(1): 37-44.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016c. Second Hankel determinant for a general subclass of bi-univalent functions. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(1): 98-104.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016ç. On Hankel determinant for concave univalent functions. *Creative Mathematics and Informatics*, 25(1): 11-14.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016d. Third Hankel determinant for Bazileviç functions. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 5(2): 91-96.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016e. Chebyshev polynomial bounds for classes of univalent functions. *Khayyam Journal of Mathematics*, 2(1): 1-5.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016f. Coefficient bounds for a general subclass of bi-univalent functions. *Le Matematiche*, 71(1): 89-97.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016g. Second Hankel determinant problem for 2-bi-starlike functions. *Annals of Oradea University Mathematics Fascicola*, 23(2): 41-48.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016ğ. Coefficient estimates for a certain subclass of bi-univalent functions. *Le Matematiche*, 71(2): 53-61.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016h. Coefficient problem for certain subclasses of bi-univalent functions defined by convolution. *Mathematica Moravica*, 20(2): 15-21.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016ı. Upper bound of second Hankel determinant for bi-Bazileviç functions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(6): 4081-4090.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016i. Coefficient bounds for two new subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions. *Serdica Mathematical Journal*, 42(2): 175-186.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016j. On a class of harmonic univalent functions defined by using a new differential operator. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 6(2): 125-133.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016k. General properties of multivalent concave functions involving linear operator of Carlson-Shaffer type. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 69(12): 1533-1540.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016l. Third Hankel determinant for a class of univalent functions defined by using symmetric q-derivative operator. *Libertas Mathematica (new series)*, 36(2): 1-12.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016m. On the certain subclasses of univalent functions associated with the Tschebyscheff polynomials. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, 8(2): 105-113.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017a. On a new subclass of bi-univalent functions of Sakaguchi type satisfying subordinate conditions. *Malaya Journal of Mathematics*, 5(2): 305–309.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017b. Faber polynomial coefficient estimates for a class of bi-univalent functions based on the symmetric q-derivative operator. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, 8(2): 79-87.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017c. The Fekete-Szegö problem for a general class of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 5(1): 1-7.
Bayram, H., Altınkaya Ş. 2017ç. General properties of concave functions defined by the generalized Srivastava-Attiya operator. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 23(3): 408-416.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017d. On the Faber polynomial coefficient bounds of bi-Bazileviç functions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 66(2): 289-296.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017e. On the Fekete-Szegö problem for analytic functions defined by using symmetric q-derivative operator. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(1): 176-186.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017f. Faber polynomial coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions defined by using the Jackson (p, q)-derivative operator. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(6): 3067-3074.
Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017g. On $H_3(1)$ Hankel determinant for univalent functions defined by using q-derivative operator. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, 9(1): 25-33.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017ğ. Estimates on coefficients of a general subclass of bi-univalent functions associated with symmetric q-derivative operator by means of the Chebyshev polynomials. *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 4(2): 90-99.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017h. On the Chebyshev polynomial coefficient problem of some subclasses of bi-univalent functions. *Gulf Journal of Mathematics*, 5(3): 34-40.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017ı. Poisson distribution series for certain subclasses

of starlike functions with negative coefficients. *Annals of Oradea University Mathematics Fascicola*, 24(2): 5-8.
Altınkaya, Ş., Sağlam Özkan, Y. 2017i. On S$\tilde{a}$l$\tilde{a}$gean type pseudo-starlike functions. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 21(2): 275-285.
Altınkaya, Ş. 2017j. Application of quasi-subordination for generalized Sakaguchi type functions. *Journal of Complex Analysis*, Article ID 3780675, 2017: 1-5.
Joshi, S., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017k. Coefficient estimates for Salagean type λ-bi-pseudo-starlike functions. *Kyungpook Mathematical Journal*, 57(4): 613-621.
Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017l. On a subclass of harmonic univalent functions based on subordination. *Theory and Applications of Mathematics & Computer Science*, 7(2): 51-62.
Akgül A., Altınkaya Ş. 2017m. Coefficient estimates associated with a new subclass of bi-univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 52: 121-128.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017n. Faber polynomial coefficient estimates for bi-univalent functions of complex order based on subordinate conditions involving of the Jackson *(p,q)*-derivative. *Miskolc Mathematical Notes*, 18(2): 555-572.
Magesh, N., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018a. Certain subclasses of k-uniformly starlike functions associated with symmetric q-derivative operator. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 24(8): 1464-1473.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018b. On some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 67(1): 29-36.
Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018c. A subclass of harmonic univalent functions defined by means of differential subordination. *Khayyam Journal of Mathematics*, 4(1): 28-38.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018ç. On a subclass of harmonic univalent functions involving a linear operator. *AIP Proceedings*, 1926(1): 020045, 1-8.
Srivastava, H.M., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018d. Hankel determinant for a subclass of bi-univalent functions defined by using a symmetric q-derivative operator. *Filomat*, 32(2): 503-516.
Altınkaya, Ş., Yalçın S. 2018e. Poisson distribution series for analytic univalent functions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 12(5): 1315-1319.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş., Owa, S. 2018f. Generalized Hankel determinant for a general subclass of univalent functions. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 28(1a): 311-317.
Mazi, E., Altınkaya, Ş. 2018g. On a new subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions equipped with subordinate conditions. *Khayyam Journal of Mathematics*, 4(2): 188-198.
Altınkaya, Ş., Yalçın S. 2018ğ. Estimate for initial MacLaurin of general subclasses of bi-univalent functions of complex order involving subordination. *Honam Mathematical Journal*, 40(3): 391-400.

Altınkaya, Ş., Çakmak, S., Yalçın S. 2018h. On a new class of S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean-type harmonic univalent functions associated with subordination. *Honam Mathematical Journal*, 40(3): 429-442.
Altınkaya, Ş., Yalçın S. 2018ı. Construction of second Hankel determinant for a new subclass of bi-univalent functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(6): 2876-2884.
Altınkaya, Ş., Yalçın S. 2018i. On the Chebyshev coefficients for a general subclass of univalent functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(6): 2885-2890.
Altınkaya, Ş., Yalçın S. 2018j. On a new subclass of bi-univalent functions based on quasi-subordination. *Mathematical Advances in Pure and Applied Sciences*, 1(2): 56-64.
Kanas, S., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019a. Subclass of k-uniformly starlike functions defined by symmetric q-derivative operator. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70(11): 1499-1510.
Mazi, E., Altınkaya, Ş. 2019b. On a new subclass of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 68(1): 724-733.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019c. Hankel determinant for m-fold symmetric bi-univalent functions. *Creative Mathematics and Informatics*, 28(1): 1-8.
Altınkaya, Ş. 2019ç. Inclusion properties of Lucas polynomials for bi-univalent functions introduced through the q-analogue of Noor integral operator. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(2): 620-629.
Kamble, P., Shrigan, M., Altınkaya, Ş. 2019d. On λ-pseudo q-bi-starlike functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(2): 751-758.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S., Çakmak, S. 2019e. A subclass of bi-univalent functions based on the Faber polynomial expansions and the Fibonacci numbers. *Mathematics*, 160(7): 1-9.
Magesh, N., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019f. Construction of Toeplitz Matrices whose elements are the coefficients of univalent functions associated with q-derivative operator. *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 8(1): 51-57.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019g. Chebyshev polynomial bounds for a certain subclass of univalent functions defined by Komatu integral operator. *Afrika Matematika*, 30: 563-570.
Altınkaya, Ş., Owa, S., Yalçın, S. 2019ğ. Notes on certain analytic functions concerning with some subordinations. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 23(1): 79-85.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019h. Bi-concave functions involving a differential operator. *Journal of Mathematical Extension*, 13(2): 111-122.
Porwal, S., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019ı. The Poisson distribution series of general sublasses of univalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 58: 45-52.
Srivastava, H.M., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019i. Certain subclasses of bi-univalent functions associated with the Horadam polynomials. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43: 1873-1879.

Kanas, S., Altınkaya, Ş. 2019j. Functions of bounded variation related to domains bounded by conic sections. *Mathematica Slovaca*, 69(4): 833-842.
Murugusundaramoorthy, G., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019k. Fekete-Szegö inequalities for subclass of bi-univalent functions associated with S$\widetilde{a}$l$\widetilde{a}$gean type q-difference operator. *Afrika Matematika*, 30: 979-987.
Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019l. Some connections between various classes of analytic functions associated with the power series distribution. *Sakarya University Journal of Science*, 23(5): 982-985.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019m. On the (p, q)-Lucas polynomial coefficient bounds of the bi-univalent function class σ. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 25: 567–575.

Bildirileri :

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014a. Fekete-Szegö inequalities for a general class of bi univalent functions. 3rd International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 25-28 August, 2014, Vienna, Austria.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2014b. On the Fekete-Szegö problem for a certain subclass of bi-univalent functions defined by subordination. 3rd International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 25-28 August, 2014, Vienna, Austria.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014c. Analitik Bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için katsayı tahminleri. 13th Mathematics Symposium, 15-17 May, 2014, Karabük University, Karabük, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014ç. Bi-ünivalent fonksiyonların bazı sınıfları için Fekete-Szegö eşitsizlikleri. 9th Ankara Mathematics Days, 12-13 June, 2014, Atılım University, Ankara, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015a. Coefficient inequalities for two comprehensive subclasses of Sakaguchi type functions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 8-12 June, 2015, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015b. Initial coefficient bounds for a comprehensive subclass of Sakaguchi type functions. 11th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, 24-27 August, 2015, Ohrid, Macedonia.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015c. Initial coefficient bounds for a comprehensive subclass of Sakaguchi type functions. 28th National Conference of The Turkish Mathematical Society, 7-9 September, 2015, Antalya, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2015ç. Bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı için Faber polinomu katsayı tahmini. 14th Mathematics Symposium, 14-16 May, 2015, Niğde University, Niğde, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016a. On a new class of k-uniformly starlike functions with negative coefficients based on q-derivative operator. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belg-

rade, Serbia.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016b. On the Chebyshev polynomial coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belgrade, Serbia.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016c. A subclass of convex univalent functions as related to Sigmoid function. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belgrade, Serbia.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2016ç. A new subclass of analytic functions of defined by using symmetric q-derivative operator. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belgrade, Serbia.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2016d. The Hankel determinant for a certain subclass of univalent functions. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belgrade, Serbia.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2016e. A new class of Sălăgean type univalent functions as related to Sigmoid function. 5th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 16-19 August, 2016, Belgrade, Serbia.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2016f. Hankel determinant problem of a certain subclass of bi-univalent functions defined by symmetric q-derivative operator. 12th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications, 25-28 August, 2016, Alba Iulia, Romania.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017a. Upper bound of second Hankel determinant for a new subclass of bi-univalent functions based on symmetric q-derivative operator. Konferencja "Śladami kobiet w matematyce - w stulecie urodzin Profesor Heleny Rasiowej", 22-24 June, 2017, Rzeszow, Poland.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017b. On the Faber polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions defined by Sălăgean differential operator. Konferencja "Śladami kobiet w matematyce - w stulecie urodzin Profesor Heleny Rasiowej", 22-24 June, 2017, Rzeszow, Poland.
Karahüseyin, Z., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017c. Unified approach to the third Hankel determinant of a new subclass of univalent functions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July, 2017, Istanbul, Turkey.
Yalçın, S., Karahüseyin, Z., Altınkaya, Ş. 2017ç. On the coefficient problem of analytic functions associated with univalent functions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 3-7 July, 2017, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2017d. On the coefficient problems for a new subclass of bi-univalent functions. International Conference on Computational Methods and Function Theory 2017, 10-15 July, 2017, Lublin, Poland.
Bayram, H., Altınkaya, Ş. 2017e. Some specific properties of concave functions defined by the generalized Srivastava-Attiya operator. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.

Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017f. On a subclass of harmonic univalent functions involving a linear operator. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017g. On a coefficient problem for a subclass of bi-univalent functions defined by using a q-derivative operator. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017ğ. Estimates of coefficients for a subclass of bi-univalent functions by making use of Faber polynomial expansions. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017h. On a general subclass of univalent functions based on the q-derivative operator. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017ı. On a subclass of univalent functions defined by Chebyshev polynomials. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2017i. Coefficient estimates for analytic bi-bazileviç functions of order type β. 6th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences and Applications, 15-18 August, 2017, Budapest, Hungary.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018a. Estimates of Faber polynomial coefficients for Bi-univalent functions equipped with the Jackson *(p,q)*-derivative operator. International Conference on Mathematical Advances and Applications, 11-13 May, 2018, Istanbul, Turkey.
Szatmari, E., Altınkaya, Ş. 2018b. Coefficient estimates and Fekete-Szegö inequalities for a new subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions satisfying subordinate conditions. International Conference on Mathematics and Computer Science, 14-16 June, 2018, Braşov, Romania.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018c. Applications of the (p,q)-Lucas polynomials to certain subclasses of bi-univalent functions involving subordination. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 20-24 June, 2018, Istanbul, Turkey.
Kanas, S., Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018ç. Estimates of Faber polynomial coefficients for an unified class of bi-univalent functions involving the Jackson (p,q)-derivative operator. XIX Conference on Analytic Functions and Related Topics, 24-29 June, 2018, Rzeszow, Poland.
Kanas, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018d. Inclusion properties of a new class of Sălăgean-type harmonic univalent functions involving subordination. XIX Conference on Analytic Functions and Related Topics, 24-29 June, 2018, Rzeszow, Poland.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018e. Coeffcient estimates for two general subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions. International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-6 July, 2018, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018f. Chebyshev polynomial coeffcient bounds for an

unified subclass of bi-univalent functions. International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-6 July, 2018, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018g. Estimates of Faber polynomial coefficients for an unified class of bi-univalent functions defined through the Jackson *(p,q)*-derivative operator. 5th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 23-27 July, 2018, Trabzon, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018ğ. On a subclass of bi-univalent functions with the Faber polynomial expansion. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018h. On the bounds of general subclasses of analytic and bi-univalent functions associated with subordination. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2018ı. Chebyshev polynomial coefficient results on a subclass of analytic and bi-univalent functions involving quasi-subordination. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018i. Certain convex harmonic functions defined by subordination. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018j. Certain subclasses of harmonic univalent functions associated with a multiplier linear operator. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2018k. Results on a class of harmonic univalent functions involving a new differential operator. 4th International Conference on Analysis and Its Applications, 11-14 September, 2018, Kırşehir, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019a. Some properties of harmonic univalent functions defined by multiplier transformation. 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 March, 2019, Istanbul, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019b. Certain starlike harmonic functions defined by subordination. 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 March, 2019, Istanbul, Turkey.
Çakmak, S., Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019c. On a subclass of Goodman-Ronning type harmonic functions defined by q-calculus operator. 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 March, 2019, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019ç. The extension Chebyshev polynomial bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. 4th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-22 April, 2019, Antalya, Turkey.
Sakar, F.M., Aydoğan, S.M., Altınkaya, Ş. 2019d. Coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions involving Hadamard product and differential operator. 2nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, 3-5 May, 2019, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019e. The (p, q)-Chebyshev polynomial coefficients for

a certain subclass of analytic and bi-univalent functions. International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-5 July, 2019, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019f. Some applications of the *(p,q)*-Lucas polynomials to an unified class of bi-univalent functions. International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-5 July, 2019, Istanbul, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019g. An application of q-derivative to a subclass of harmonic univalent functions. International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, 3-5 July, 2019, Istanbul, Turkey.
Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2019ğ. The (p, q)-Lucas polynomial coefficient estimates of a bi-univalent functions with respect to symmetric points. Operators in General Morrey-Type Spaces and Applications, 16-20 July, 2019, Kütahya, Turkey.
Yalçın, S., Altınkaya, Ş. 2019h. Multivalent harmonic starlike functions defined by subordination. Operators in General Morrey-Type Spaces and Applications, 16-20 July, 2019, Kütahya, Turkey.