T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN KUADRATİK ϕ-YAPI

Sinem GÖNÜL
0000-0003-1022-6401

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Sinem GÖNÜL tarafından hazırlanan "Hemen Hemen Kuadratik ϕ-Yapı" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
0000-0002-2273-3243
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN
0000-0003-4471-3291
Bursa Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
27./12/2019

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../….

İmza

Sinem GÖNÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN KUADRATİK ϕ-YAPI

Sinem GÖNÜL

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Bu çalışmanın amacı hemen hemen kuadratik ϕ-manifold örnekleri ve bu manifoldların özellikleri ile ilgili sonuçları vermektir.
Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde sonraki bölümde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde altın sayı kavramı ve metalik yapılar ile donatılmış diferensiyellenebilir manifoldlar tanıtılmıştır. Ayrıca katlı çarpım manifoldları tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Son olarak hemen hemen kuadratik ϕ-yapıları tanıtılmıştır.
Dördüncü bölümde hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapı tanıtılarak katlı çarpım manifoldu $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times_f N, <,> = dt^2 + f^2 g)$ nın bir kuadratik metrik ϕ-yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte (ϕ, η, ξ) hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı ile verilen diferensiyellenebilir her M manifoldunun kendisiyle uyumlu bir Riemann metriğinin var olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ lokal metalik Riemann manifoldunun kuadratik ϕ-hiperyüzeyleri incelenmiştir ve bunlarla ilgili çalışmalar yapılmıştır.
Son olarak beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Altın oran, Polinom yapısı, Altın yapı, Metalik yapı, Katlı çarpım manifoldları, hemen hemen kuadratik ϕ-yapı, hemen hemen kuadratik ϕ-manifold.

2019, vii+47 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

ALMOST QUADRATİC ϕ-STRUCTURE

Sinem GÖNÜL

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

The aim of this thesis is to give the results about the almost quadratic ϕ-manifold examples and properties of these manifolds.
This thesis consists five chapters.
First chapter is introduction.
Second chapter consists of some basic definitions which will be use in the other chapters.
In the third chapter, the concept of gold number and differentiable manifolds endowed with metallic structures are introduced. In addition, warped product manifolds are defined and their properties are given. Finally, almost quadratic ϕ-structures are introduced.
In the fourth chapter, almost quadratic metric ϕ-structure is introduced and it is shown that there is a quadratic metric ϕ-structure on warped product manifold $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times_f N, <,> = dt^2 + f^2 g)$. However, it has been proved that every differentiable manifold M endowed with an almost quadratic ϕ-structure (ϕ, η, ξ) admits associated Riemannian metric. In addition, the quadratic ϕ-hypersurfaces of the local metallic Riemannian manifold $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ have been studied and related studies have been made.
Finally, the fifth chapter is the conclusion section.

Key Words: Golden ratio, Polynomial structure, Golden structure, Metallic structure, Warped product manifolds, almost quadratic ϕ-structure, almost quadratic ϕ-manifold.

2019, vii+47 pages.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçilmesinden tezimin bitimine kadar değerli bilgilerini benimle paylaşan, araştırmalarımın her aşamasında deneyimleri ve önerileriyle beni yönlendiren değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a,

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında önemli katkıları olan, çalışmalarım boyunca ilgisini ve desteğini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN'e,

Beni bugünlere getiren, attığım her adımda ve aldığım her kararda yanımda olan, beni her daim destekleyen kıymetli aileme,

Çalışmalarımdaki görsellere çizimleriyle katkı sağlayan, çalışmalarım sırasında beni destekleyen ve hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim, Arş. Gör. Alper GÖNÜL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sinem GÖNÜL

../../....

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

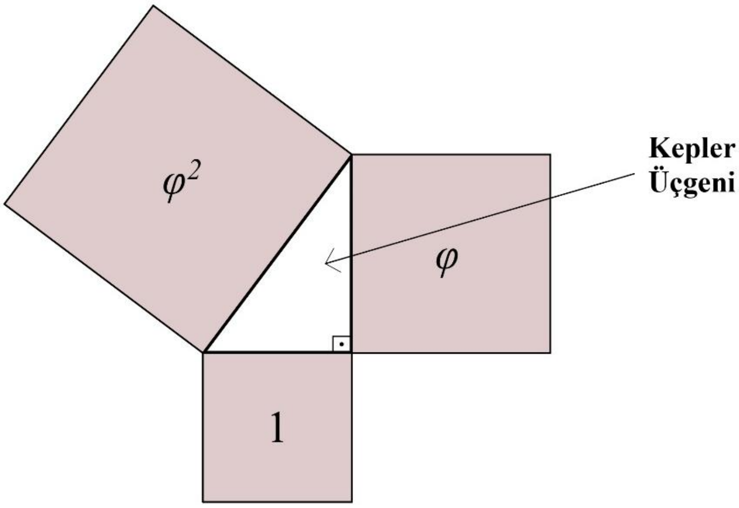
Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
X, Y	Vektör alanları
$\mathbb{S}$	Yüzey
$<,>$	İç çarpım fonksiyonu, metrik tensörü
M^n	n -boyutlu manifold
TM	M nin tanjant demeti
$\Gamma(TM)$	TM nin bütün kesitlerinin cümlesi
C^∞	Diferensiyellenebilme
g	Riemann metriği
M, N	Riemann manifold
e_i , $\tilde{e}_i$	Vektörler
A	Lineer dönüşüm
∇	M üzerinde afin konneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon
$[,]$	Lie braket operatörü
T	Torsiyon tensörü
R	Eğrilik tensörü
$\wp$	Düzlem kesiti
$K(\wp)$	Kesit eğriliği
$\mathcal{S}$	Ricci tensör alanı
τ	M nin skaler eğriliği
$\mathcal{F}$	$(1,1)$ tipinde tensör alanı
$N_{\mathcal{F}}$	$\mathcal{F}$ nin Nijenhuis torsiyon tensörü
J	$(1,1)$ tipinde tensör alanı
I	Birim dönüşüm
π	1. izdüşüm dönüşümü
σ	2. izdüşüm dönüşümü
$M \times N$	M ile N nin çarpım manifoldu
$\tilde{M} = M \times_f N$	Katlı çarpım manifoldu
$\wedge$	Dış Çarpım
$\oplus$	Direk toplam
$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$	M deki vektör alanının yatay lifti (kaldırılmışı)
$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$	N deki vektör alanının dikey lifti (kaldırılmışı)
H	Hessian
$\\| \ \\|$	Norm
ϕ	$(1,1)$ tensör alanı
ξ	Birim vektör alanı

η	1-form
H^n	n -boyutlu hiperbolik uzay
$\mathcal{A}$	Şekil operatörü
$\tilde{h}$	Riemann metriği
ν	Birim normal vektör alanı
i	İzometrik immersiyon

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

M.Ö antik çağlarda yaşamış önemli bir bilim adamı ve filozof Öklid, 13 ciltten oluşan "Elementler" isimli çalışmanın 2. cildinde; "Belli uzunlukta verilen bir AB doğru parçasını; CB uzunluğu AC uzunluğundan büyük olacak şekilde iki parçaya ayıralım ki CB kenar uzunluğuna sahip olan karenin alanı AB ve AC kenar uzunluklarına sahip dikdörtgenin alanına eşit olsun." şeklinde ifade edilen "Ekstrem Bölme ve Ortalama Oran" geometrik problemi $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...$ reel sayısına ulaştırmıştır. Bu reel sayı literatürde altın bölme, altın ortalama, altın oran veya altın sayı olarak isimlendirilir (Stakhov 2006).



Şekil 1.1. Kepler Üçgeni

Dikkat edilirse altın oran sayısı

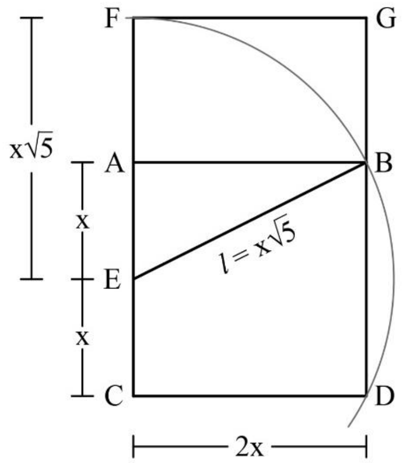
$$x^2-x-1=0$$

denkleminin pozitif reel köküdür.

Büyük bir astronom ve matematikçi olan Johannes Kepler bu altın oran sayının önemini "Matematik iki büyük hazineye sahiptir. Bunlardan birisi Pisagor Teoremi, diğeri ise Ekstrem Bölme ve Ortalama Oran problemidir. Birincisini bir altın hazineyle, ikincisini değerli bir taş ile karşılaştırabiliriz." sözü ile ifade etmiştir (Stakhov 2006).

Son zamanlarda Altın oran, modern fizik araştırmalarında ve atom fiziğinde önemli bir rol üstlenmiştir. Altın oran; Newton fiziğinden görecelilik mekaniğine geçişte karşımıza çıkarak altın dikdörtgen, zaman aralıklarının genişlemesini ve özel görecelilikteki uzunlukların Lorentz daralmasını elde etmek için kullanılmıştır (Sigalotti ve Mejias 2006).

Altın oran aynı zamanda El Naschie’nin alan teorisinde olduğu gibi 4-manifold topolojisinde, konformal alan teorisinde, matematiksel olasılık teorisinde, Cantorian uzay zamanında ilginç özelliklere sahiptir (Marek-Crnjac 2003).

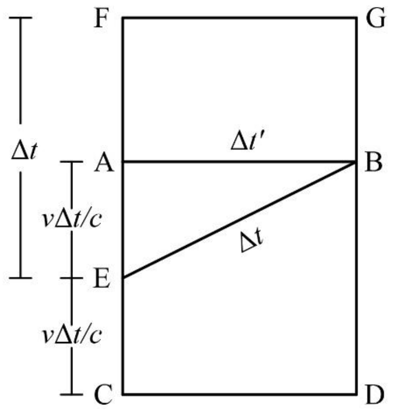


Şekil 1.2. Altın dikdörtgen

Kenar uzunluğu $2x$ birim olan bir $ABCD$ karesi çizilsin. AC kenarının orta noktasına E denilsin. Böylece ABE dik üçgeninde Pisagor bağıntısı uygulanırsa EB uzunluğu $l = x\sqrt{5}$ bulunur. Burada E merkezli ve $l = x\sqrt{5}$ yarıçaplı çember çizilerek EF uzunluğu $x\sqrt{5}$ olacak şekilde $FGDC$ dikdörtgeni elde edilir ve bu dikdörtgen altın dikdörtgen olarak isimlendirilir. Buradan

$$\varphi = \frac{CF}{AB} = \frac{AB}{AF}$$

bağıntısı sağlanır (Sigalotti ve Mejias 2006).



Şekil 1.3. Lorentz daralması

$\Delta t = Nesnenin\ durgun\ olduğu\ referans\ çatısında,\ gerçek\ uzunluk$
$\Delta t' = Nesnenin\ hareket\ ettiği\ referans\ çatısında,\ gözlenen\ uzunluk$
$v = hız$
$c = ışık\ hızı\ (3.0 \times 10^8\ m/s)$

olmak üzere, altın dikdörtgen bağıntısı kullanılarak

$$\frac{\Delta t(1+\frac{v}{c})}{\Delta t'} = \frac{\Delta t'}{\Delta t(1-\frac{v}{c})},$$

bulunur ve buradan Lorentz uzaklık daralması olan

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

denklemi elde edilir (Sigalotti ve Mejias 2006).

Şimdi Lorentz daralması aşağıdaki örnek ile anlatılmaya çalışılsın.

Bir uzay gemisi mürettebatı, geminin uzunluğunun 100 m olarak ölçmektedir. Gemi, Dünya'dan geçen ışık hızının 0,900 katı hızla uçmaktadır. Dünyadaki gözlemciler geminin uzunluğunu ölçerse, ne ölçerlerdi?

Geminin mürettebat üyesinin referans çatısı, geminin durgun olduğu çatıdır. Mürettebatın ölçülen uzunluğu, Δt gerçek uzunluktur. Gözlemlenen uzunluk $\Delta t'$ olup dünyadaki gözlemciler gözlemlenen uzunluğu ölçmüşlerdir. Dünya temelli gözlemciler tarafından referans çatısındaki geminin uzunluğu aşağıdaki formül kullanılarak bulunmuştur:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$
$$\Delta t' = 100\sqrt{1-\left(\frac{0,900c}{c}\right)^2}$$
$$\Delta t' = 100\sqrt{1-(0,900)^2}$$
$$\Delta t' = 100\sqrt{1-0,810}$$
$$\Delta t' = 100\sqrt{1-0,190}$$
$$\Delta t' \cong 100.(0,436) \cong 43,6\ m$$

Dünyadaki gözlemciler geminin uzunluğunu 43,6 m olarak ölçmüşlerdir. Bu, gemi mürettebatının referans çatısında ölçülen 100 m uzunluğundan daha azdır (Anonim 2017).

Daha genel olarak p ve q iki pozitif tamsayı olarak belirlenirse

$$x^2 - px - q = 0$$

denklemin pozitif çözümü

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

dır. Bu özellikteki (p,q) ikilisine *metalik sayılar* denir ve $p = q = 1$ seçilirse altın sayı elde edilir (Spinadel 2000).

M^n türevlenebilir bir manifold ve M üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipindeki tensör alanı J, birim dönüşüm I ve $rank(J) = n$ olmak üzere

$$Q(J) = J^n + a_{n-1}J^{n-1} + ... + a_2 J^2 + a_1 J + a_0 I = 0, \quad a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

ile tanımlı $Q(J)$ yapı polinomu gözönüne alındığında (M, J) *polinom manifold* kavramına ulaşılır (Goldberg ve Yano 1970, Goldberg ve Petridis 1973).

M^n diferensiyellenebilir manifold özel olarak

$$Q(J) = J^2 - pJ - qI$$

yapı polinomu ile donatılsın. Eğer $Q(J) = 0$ olursa, yani bir başka deyişle $J^2 = pJ + qI$ ise p ve q nun seçimlerine göre literatürde başlıca iyice bilinen aşağıdaki yapılar elde edilir.

i) Eğer $p = q = 1$ ise J 'ye M üzerinde *altın yapı* denir $(J^2 = J + I)$ ve $\sigma_{p,q} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oranı bulunur (Crasmareanu ve Hretcanu 2009).

ii) Eğer p ve q pozitif tamsayılar ise J 'ye M üzerinde *metalik yapı* denir $(J^2 = pJ + qI)$ (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

$iii)$ Eğer $p = 0,\ q = -1$ ise J ye M üzerinde *hemen hemen kompleks yapı* denir $(J^2 = -I)$ (Yano ve Kon 1984).

M, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve ϕ $(1,1)$ tensör alanı, ξ birim vektör alanı, η 1-form olsun. p ve q sıfırdan farklı sabitler olmak üzere;

$$\phi\xi = 0, \quad \phi^2 = p\phi + q(I - \eta \otimes \xi); \quad p^2 + 4q \neq 0$$

bağıntılarını sağlayan (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde *hemen hemen kuadratik* ϕ*-yapı* denir (Debmath ve Konar 2011).

Debmath ve Konar (2011), böylece metalik yapı kavramını hemen hemen değme yapıların bir genellemesi olarak gözüken hemen hemen kuadratik ϕ-yapılarına taşımıştır ve aynı çalışmalarında sayısal bir hemen hemen kuadratik ϕ-yapı örneği vermiştir.

Hemen hemen bir Kaehler manifold ile reel sayılar kümesinin Riemann çarpımı ya da katlı Riemann çarpımı göz önüne alındığında sırasıyla hemen hemen kosimplektik ve hemen hemen Kenmotsu manifoldları elde edilebilir.

Temel olarak bu tezde, "Doğal olarak bir metalik manifold ile bir boyutlu reel sayılar kümesinin katlı çarpımı göz önüne alındığında ne çeşit hemen hemen kuadratik ϕ-manifold örnekleri elde edilebilir ve bu çeşit manifoldlar hangi özelliklere sahiptir?" sorusuna bir cevap vermeye çalıştık.

2. KURAMSAL TEMELLER

(1777-1855) yılları arasında yaşamış olan ünlü matematik bilim insanı Carl Friedrich Gauss; Latince Theorema Egregium (Hatırlanabilir Teorem) olarak adlandırılan teoremi 1827 yılında “Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas” isimli çalışmasında 3 boyutlu Öklid uzayında yatan bir $\mathbb{S}$ yüzeyinin bir lokal parametrelendirilmesi yardımıyla Gauss eğriliğinin E, F ve G büyüklüklerine bağlı olarak hesaplanabileceğini göstermiştir. Diğer sözlerle Gauss eğriliğinin bir içsel özellikte olduğunu ifade etmiştir (Gauss 1827). Burada $\mathbb{S}$ yüzeyinin bir lokal parametrelendirilmesi

$$\begin{aligned} X : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{S} \subset \mathbb{E}^3 \\ (u,v) &\to X(u,v) \end{aligned}$$

şeklinde verilmek üzere

$$E = < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} >, \; F = < \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} >, \; G = < \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} >,$$

$<,>$, $\mathbb{E}^3$ te yukarıdaki gibi tanımlanan Öklid iç çarpımıdır.

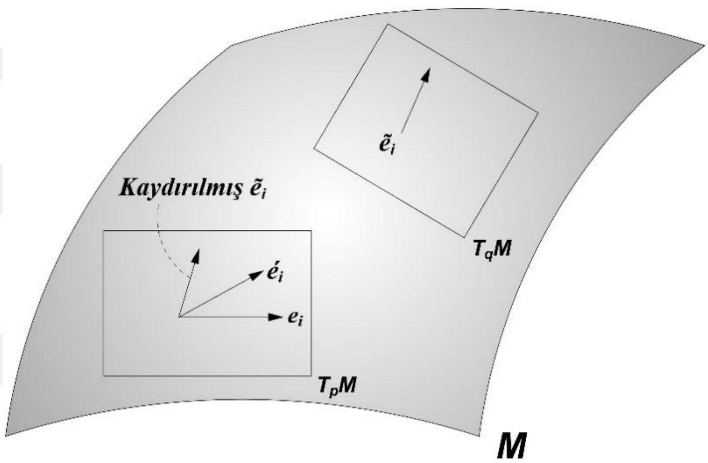
1854 yılında Riemann, yukarıdaki tartışmayı keyfi bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifolda nasıl geliştirilebilir sorusundan yola çıkarak manifoldun her noktasındaki tanjant uzayı üzerinde Öklid iç çarpımının temel özelliklerini sağlayan bir $(0,2)$ tipinde tensör alanı gerekliliğini fark etmiştir. Bu da kendi ismiyle anılan Riemann metrik tensörü kavramını ortaya çıkarmıştır.

Bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde verilen herhangi iki noktadaki tanjant uzayları karşılaştırmak için bir başka matematiksel büyüklüğe ihtiyaç vardır. Bu da konneksiyon teoremini ortaya koymuştur. Aslında bu teori vektör analizinde hatırlanabileceği gibi yöne göre türevin bir genellemesi olarak gözükebilir (Gauss 1827).

Bu kısımda daha sonraki kısımlarda ifade edilecek olan ve yukarıda bahsedilen kavramlar tanıtılıp bu kavramlara bağlı olarak literatürde elde edilen temel tanımlar ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.1. Bir diferensiyellenebilir manifold M üzerinde; simetrik, dejenere olmayan, $(0,2)$-tipinde tensör alanı g ye bir *Riemann metrik tensörü* denir. M nin her noktasında böyle bir g tensörü tanımlanabiliyorsa (M,g) ikilisi de bir *Riemann manifold* olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

M nin p noktasındaki teğet uzayı T_pM ve $q \in M$ noktasındaki teğet uzayı da T_qM olsun. p noktası q noktasından farklı ise T_pM ve T_qM teğet uzaylarındaki vektörleri karşılaştırmak gerekebilir. Bunun için de T_pM ve T_qM arasında bire-bir bir dönüşüme ihtiyaç vardır. Özel olarak p ve q noktaları birbirine oldukça yakın seçilsin.



Şekil 2.1. İki tanjant uzayının karşılaştırılması

p ve q noktaları arasındaki uzaklık dp olarak tanımlansın. p noktasındaki M nin teğet uzayı T_pM nin bir bazı $e_i(p)$ ve $q = p + dp$ noktasındaki teğet uzayı T_qM nin bazı $\tilde{e}_i(q) = e_i(p + dp)$ olsun.

$$A : T_{p+dp}M \to T_pM$$

dp ye bağlı lineer dönüşümü göz önüne alalım. Bu lineer dönüşüm dp, sıfıra gittiği zaman birim (özdeşlik) dönüşüme indirgenir.

Şimdi üç boyutlu bir Öklid uzayında düzlemsel olmayan bir yüzey göz önüne alalım. $T_{p+dp}M$ yi T_pM ye paralel olarak kaydırdığımızda e_i ve $\tilde{e}_i$ vektörlerinin yönleri birbirinden farklı olabilir. Bu nedenle kaydırılmış $\tilde{e}_i$ vektörünün T_pM ye izdüşümünü hesaplamak gerekir.

$\tilde{e}_i$ nın T_pM ye izdüşüm vektörü $\acute{e}_i \in T_pM$ olsun. O halde $\acute{e}_i$, T_pM de $\tilde{e}_i \in T_{p+dp}M$ nin karşılığını tutmuş olur. Böylece bu izdüşüm yardımıyla T_pM ve $T_{p+dp}M$ arasında bir ilişki kurulmuş olur. Bu ileride tanımlanacak olan bir afin konneksiyon için örnek teşkil eder.

Şimdi daha genel durumu göz önüne alalım. *M*, *n*-boyutlu keyfi bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\tilde{e}_i \in T_{p+dp}M$ yi $\acute{e}_i \in T_pM$ ye götüren lineer dönüşüm

$$\acute{e}_i = e_i + de_i$$

olarak temsil edilsin. O zaman T_pM deki de_i fark vektörü baz vektörleri cinsinden

$$de_i = (de_i^j)e_j$$

yazılımına sahip olur. *dp* sıfıra giderken de_i^j baz bileşenleri 0 olacağından de_i^j, *dp* ye lineer bağımlı olur. O zaman

$$de_i^j = \Gamma_{ki}^j(p)dp^k$$

eşitliği elde edilir. Böylece A lineer dönüşümü n^3. dereceden $\Gamma_{ki}^j(p)$ fonksiyonları yardımı ile tanımlanmış olur. Sonuç olarak

$$A : T_{p+dp}M \to T_pM$$

$$A(\tilde{e}_i) = A(e_i(p+dp)) = \acute{e}_i = e_i(p) + de_i = e_i(p) + (de_i^j)e_j = e_i(p) + \Gamma_{ki}^j(p)dp^k e_j$$

olarak tanımlanır.

Böylece T_pM ve $T_{p+dp}M$ tanjant uzaylarını karşılaştırma imkânı elde edilmiş olur. X, M nin bir vektör alanı olsun. O zaman $X \in \Gamma(TM)$ nin p ve $p+dp$ noktalarındaki tanjant vektörleri sırasıyla, $X(p) = X^i(p)e_i(p) \in T_pM$ ve $X(p+dp) = X^i(p+dp)e_i(p+dp) \in T_{p+dp}M$ olur.

Birinci dereceden Taylor açılımı kullanılarak

$$X^k(p+dp) = X^k(p) + dX^k$$

elde edilir.

Böylece *A* lineer dönüşümü kullanılarak

$$A(X(p+dp)) = (X^k e_k + dX^k)A(e_k(p+dp))$$

$$= (X^k e_k + dX^k)\acute{e}_k$$

$$= (X^k e_k + dX^k)(e_k(p) + (de_k^j)e_j)$$

$$= (X^k e_k + \partial_j X^k dp^j)(e_k(p) + (de_k^j)e_j)$$

$$= (X^k e_k + \partial_j X^k dp^j)(e_k(p) + \Gamma_{jk}^m(p)dp^j e_m)$$

$$= (X^k(p)e_k + \partial_j X^k e_k dp^j + \Gamma_{jk}^m X^k(p)e_m dp^j$$
$$+\partial_j X^k \Gamma_{jk}^m e_m dp^j \partial p^j)$$

bulunur. Birinci dereceden bir yaklaşım yapıldığından son terim ihmal edilebilir. Sonuç olarak

$$A\big(X(p+dp)\big) = (X^k(p)e_k + \partial_j X^k e_k dp^j + \Gamma_{jk}^m X^k(p)e_m dp^j + \partial_j X^k \Gamma_{jk}^m e_m dp^j \partial p^j)$$

eşitliğinden

$$(X^k e_k + dX^k) - X(p) = (\partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j)dp^i e_k$$

denklemi elde edilir. Böylece p^i koordinat eğrisi boyunca bir *X* vektör alanın X^k bileşenin değişimi

$$\nabla_i X^k = \partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j$$

olarak tanımlanır ve $X(p)$ *nin kovaryant türevi* olarak adlandırılır.

Sonuç olarak *Y* ve *X*, *M* nin keyfi vektör alanları olmak üzere *Y* boyunca *X* in değişimi

$$\nabla_Y X = Y^i \nabla_i X^k = Y^i(\partial_i X^k + \Gamma_{ij}^k X^j)e_k$$

şeklinde ifade edilir ve *Y boyunca X in kovaryant türevi* olarak isimlendirilir (Amari 2016).

Tanım 2.2. *M* diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü, M üzerinde diferensiyellenebilir her f, g fonksiyonu ve X, Y, Z vektör alanları için;

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;\ \text{birinci bileşene göre } C^{\infty}(M) \text{ lineer} \\
&(2)\ \nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y \qquad (2.1) \\
&(3)\ \nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z;\ \text{ikinci bileşene göre } \mathbb{R}-\text{lineer}
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlayan $(1,2)$ tipindeki tensör alanı ∇, M üzerinde bir *afin* veya *lineer konneksiyon* olarak adlandırılır. $\nabla_X Y$ 'ye, *Y nin X yönündeki değişimi* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.3. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde bir tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve

$$
\begin{aligned}
&i)\ L_X(f) = X(f),\quad \forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\
&ii)\ L_X Y = [X,Y],\quad \forall Y \in \Gamma(TM) \qquad (2.2) \\
&iii)\ L_X g(Y,Z) = Xg(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y),\ \forall Y,Z \in \Gamma(TM)
\end{aligned}
$$

koşullarını sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.4. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$
\begin{aligned}
&[,]:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM) \\
&(X,Y)\to[,](X,Y)=[X,Y]:C^{\infty}(M)\to C^{\infty}(M) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f \ \to\ [X,Y]f = XYf - YXf
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı braket operatörü *Lie braket operatörü* olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.5. *M*, *n*-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki afin konneksiyon ∇ olsun.

$$
\begin{aligned}
&T:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM) \\
&(X,Y)\to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]
\end{aligned} \qquad (2.3)
$$

biçiminde tanımlı tensöre ∇ konneksiyonun *torsiyon tensörü* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.6. (M,g) bir Riemann manifold olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
&(4)\ T = 0, \\
&(5)\ \nabla g = 0
\end{aligned} \qquad (2.4)
$$

biçiminde tek bir afin konneksiyon vardır. Bu özelikteki afin konneksiyonuna Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu denir. Daha fazlası M nin Riemann konneksiyonu Koszul formülü olarak isimlendirilen aşağıdaki denklemi de sağlar;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z, X) &= Yg(Z,X) + Zg(X,Y) - Xg(Y,Z) \\ &\quad - g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) + g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{2.5}$$

(O'Neill 1983).

Tanım 2.7. (M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} &R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \\ &(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = R_{X,Y}Z \end{aligned} \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlı olan R ye ∇ konneksiyonunun *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.8. (M,g) bir Riemann manifold ve R, M nin bir Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman R aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z \tag{2.8}$$

$$g(R_{X,Y}Z, W) = -g(R_{X,Y}W, Z) \tag{2.9}$$

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0 \tag{2.10}$$

$$g(R_{X,Y}Z, W) = g(R_{Z,W}X, Y) \tag{2.11}$$

Tanım 2.9. (M,g) Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasında, T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu bir $\wp$ lineer alt uzayına M nin p noktasındaki *düzlem kesiti* denir. $\wp$ düzlem kesitinin $\{u,v\}$ bazı için

$$\mathcal{Q}(u,v) = g(u,u)g(v,v) - (g(u,v))^2$$

ile tanımlanan reel sayı sıfırdan farklı ise $\wp$ düzlem kesiti dejenere değildir denir. p noktasında dejenere olmayan $\wp$ düzlem kesiti için

$$K(u,v)=\frac{g(R(u,v)v,u)}{\mathcal{Q}(u,v)}$$

sayısına *kesit eğriliği* denir ve $K(\wp)$ şeklinde gösterilir ve daha fazlası bu kesit eğriliği $\wp$ düzlem kesitinin baz seçiminden de bağımsızdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.10. (M,g) bir n-boyutlu Riemann manifold olsun. M nin tanjant uzayının bir ortonormal çatı alanı $\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\rightarrow C^{\infty}(M)\\&(X,Y)\rightarrow\mathcal{S}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}g(R_{e_i,X}Y,e_i)\end{aligned}\tag{2.12}$$

biçiminde olarak ifade edilen $(0,2)$-tipindeki tensör alanı $\mathcal{S}$, M nin *Ricci tensör alanı* olarak adlandırılır. (O'Neill 1983).

Tanım 2.11. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifold ve M nin tanjant uzayının bir ortonormal çatı alanı $\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ olmak üzere

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{S}(e_i,e_i)=\sum_{i<j}K(e_i,e_j)$$

değerine M nin *skaler eğriliği* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.12. M diferensiyellenebilir bir manifold ve $\mathcal{F}$, M üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}&N_{\mathcal{F}}:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\rightarrow\Gamma(TM)\\&(X,Y)\rightarrow N_{\mathcal{F}}(X,Y)\end{aligned}\tag{2.13}$$

olmak üzere

$$N_{\mathcal{F}}(X,Y)=\mathcal{F}^2([X,Y])+[\mathcal{F}(X),\mathcal{F}(Y)]-\mathcal{F}[\mathcal{F}(X),Y]-\mathcal{F}[X,\mathcal{F}(Y)]\tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanan (1,2) tipindeki $N_{\mathcal{F}}$ tensör alanı, $\mathcal{F}$ nin *Nijenhuis torsiyon tensörü* olarak adlandırılır. Eğer $N_{\mathcal{F}}\equiv 0$ ise $\mathcal{F}$ tensör alanı integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.13. (M, g_M) ve (N, g_N) iki Riemann manifold olsun.

$$i : M \to N$$

diferensiyellenebilir dönüşümünün türev dönüşümü rankı $rank(i_*) = boyM$ olmak üzere $i^* g_N = g_M$ ise o zaman i ye bir *izometrik immersiyon* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.14. M ve $\bar{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$ -boyutlu Riemann manifoldları ve M ve $\bar{M}$ nin Riemann alt manifoldu ve üzerlerindeki Riemann konneksiyonları ∇ ve $\bar{\nabla}$ olsun. Böylece $X, Y \in \Gamma(TM)$ M üzerinde vektör alanları olmak üzere;

$$\begin{aligned} II &: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma^{\perp}(TM) \\ II(X, Y) &= \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlı olan II ye M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $II = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir ve (2.15) denklemi *Gauss denklemi* olarak adlandırılır (Chen 1973).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde hemen hemen kuadratik ϕ-yapıları tanıtılmıştır. Temel olarak Debmath ve Konar (2011) çalışması esas alınmıştır. Önce metalik yapıların ortaya çıkmasına ilham veren altın sayı kavramı ve daha sonra metalik yapılar ile donatılmış diferensiyellenebilir manifoldlar tanıtılmıştır.

Carriazo ve Pérez-García (2017) hemen hemen bir kompleks manifold ile reel sayılar kümesinin Riemann çarpımı ya da katlı Riemann çarpımı göz önüne alındığında sırasıyla hemen hemen kosimplektik ve hemen hemen Kenmotsu yapıları elde etmişlerdir. Buradaki yöntem kullanılarak yeni bir hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı elde edilmiştir.

3.1. Metalik Manifoldlar

Tanım 3.1. Herhangi bir AB doğru parçası üzerindeki bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranına *ekstrem oran*, $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına *ortalama oran* denir (Yağcı 2005).

Şekil 3.1. Ekstrem ve ortalama oran

Tanım 3.2. Eğer AB doğru parçası üzerindeki bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|}$ ekstrem oranı, $\frac{|AC|}{|CB|}$ ortalama oranına eşit oluyorsa, yani

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|CB|}$$

ise C ye AB doğru parçasının *altın bölümü* ya da *altın noktası*, $\frac{|AB|}{|AC|}$ veya $\frac{|AC|}{|CB|}$ oranına da *altın oran* denir (Yağcı 2005).

Yukarıdaki AB doğru parçasında $|AC|=x$ ve $|CB|=y$ olsun. O halde,

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{x+y}{x}$$

$$\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{x}{y}$$

olarak bulunur. Bu iki ifadenin eşitliğinden

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \tag{3.1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte paydalar eşitlenirse

$$xy+y^2=x^2 \tag{3.2}$$

denklemi elde edilir. (3.2) denkleminin her iki tarafı y^2 ye bölünürse

$$\frac{x}{y}+1=\left(\frac{x}{y}\right)^2 \tag{3.3}$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak $\frac{x}{y}=t$ olarak tanımlanırsa (3.3) eşitliği

$$t^2-t-1=0 \tag{3.4}$$

olarak yazılır. İkinci dereceden bu denklemin kökleri ise

$$t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. x ve y uzunluğu ifade ettiğinden $x,y>0$ dır ve $\frac{x}{y}=t>0$ olur. Dolayısıyla (3.4) denkleminin negatif olan kökü değil pozitif olan kökü alınarak

$$t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,6180339...$$

reel sayısına ulaşılır. Böylece $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{x}{y}=t$ sayısı literatürde altın oran sayısı olarak adlandırılır (Yağcı 2005).

Altın oran sayısının *Fibonacci dizileri* ile ilişkisi aşağıdaki şekilde kurulur:

Her pozitif s reel sayısı için $s-Fibonacci\ dizisi$ $(\mathbb{F}_{s,m})_{m\in\mathbb{N}}$

$$\mathbb{F}_{s,0}=0,\quad \mathbb{F}_{s,1}=1 \tag{3.5}$$

başlangıç şartıyla

$$\mathbb{F}_{s,m+1} = s\mathbb{F}_{s,m} + \mathbb{F}_{s,m-1}; \quad m \geq 1 \tag{3.6}$$

rekürans bağıntısıyla bellidir (Falcon ve Plaza 2007, Falcon 2014).

$s-Fibonacci\ sayıları$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{F}_{s,0} = 0\\
&\mathbb{F}_{s,1} = 1\\
&\mathbb{F}_{s,2} = s\\
&\mathbb{F}_{s,3} = s^2 + 1\\
&\mathbb{F}_{s,4} = s^3 + 2s\\
&\mathbb{F}_{s,5} = s^4 + 3s^2 + 1\\
&\mathbb{F}_{s,6} = s^5 + 4s^3 + 3s\\
&\mathbb{F}_{s,7} = s^6 + 5s^4 + 6s^2 + 1\\
&\mathbb{F}_{s,8} = s^7 + 6s^5 + 10s^3 + 4s\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Eğer $s = 1$ olarak alınırsa $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...\}$ dizisine *klasik Fibonacci dizisi* denir (Falcon ve Plaza 2007, Falcon 2014).

Tekrar $s-Fibonacci\ dizisi$ göz önüne alınsın ve (3.6) eşitliğinde $s = 1$ yazılsın. O halde

$$\mathbb{F}_{1,m+1} = \mathbb{F}_{1,m} + \mathbb{F}_{1,m-1}; \quad m \geq 1 \tag{3.7}$$

elde edilir. Kısalığın hatırı için bu dizi

$$f_{m+1} = f_m + f_{m-1}; \quad m \geq 1 \tag{3.8}$$

şeklinde gösterilsin. Burada $f_0 = f_1 = 1$ olarak tanımlansın.

Şimdi

$$\mathbb{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m \tag{3.9}$$

kuvvet serisi yazılsın. (3.8) yardımıyla

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{m+1} x^m = \sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m + \sum_{m=1}^{\infty} f_{m-1} x^m \tag{3.10}$$

denklemi elde edilir. Şimdi de bu denklem $\mathbb{F}(x)$ cinsinden yazılmaya çalışılsın.

Önce $\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m$ serisi bulunsun.

$$\mathbb{F}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m = f_0+\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m = 1+\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m \tag{3.11}$$

yazılabilir ve buradan

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m = \mathbb{F}(x)-1 \tag{3.12}$$

olarak bulunur. Şimdi $\sum_{m=1}^{\infty} f_{m-1} x^m$ serisi bulunmaya çalışılsın.

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{m-1} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^{m+1} = x\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m = x\mathbb{F}(x) \tag{3.13}$$

elde edilir. Son olarak $\sum_{m=1}^{\infty} f_{m+1} x^m$ serisi $\mathbb{F}(x)$ cinsinden yazılsın. O halde

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{m+1} x^m = \sum_{m=2}^{\infty} f_m x^{m-1} = \frac{1}{x}\sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m \tag{3.14}$$

olarak yazılır. Diğer taraftan $\mathbb{F}(x)$ kuvvet serisi

$$\mathbb{F}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m = f_0+xf_1+\sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m = 1+x+\sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m \tag{3.15}$$

olarak açılabilir. Buradan

$$\sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m = \mathbb{F}(x)-1-x \tag{3.16}$$

bulunur. (3.14) ve (3.16) denklemlerinden

$$\frac{1}{x}\sum_{m=2}^{\infty} f_m x^m = \frac{\mathbb{F}(x)-1-x}{x} \tag{3.17}$$

elde edilir ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{m+1} x^m = \frac{\mathbb{F}(x)-1-x}{x} \tag{3.18}$$

olarak bulunur.

Şimdi elde edilen (3.12), (3.13) ve (3.18) ifadeleri (3.10) denkleminde yerine yazılsın. Böylece

$$\frac{\mathbb{F}(x)-1-x}{x}=(\mathbb{F}(x)-1)+x\mathbb{F}(x) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\mathbb{F}(x)=\frac{1}{1-x-x^{2}} \tag{3.20}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}1-x-x^{2}&=-(x-r)(x-p)\\ r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},&\quad p=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

formunda yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x)&=\frac{1}{1-x-x^{2}}\\ &=\frac{-1}{(x-r)(x-p)}=\frac{1}{(r-p)}\left(\frac{1}{x-p}-\frac{1}{x-r}\right)\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x)&=\frac{1}{(r-p)}\left(\frac{-\frac{1}{p}}{1-\frac{x}{p}}-\frac{-\frac{1}{r}}{1-\frac{x}{r}}\right)\\ &=\frac{1}{(r-p)}\left(-\frac{1}{p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}}{p^{m}}+\frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}}{r^{m}}\right)\\ &=\frac{1}{(r-p)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}}{r^{m+1}}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m}}{p^{m+1}}\right)\\ &=\frac{1}{(r-p)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^{m+1}-r^{m+1}}{(rp)^{m+1}}x^{m}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$r.p=(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})=-1$$
$$r-p=\sqrt{5}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(x)&=\frac{1}{(r-p)}(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{p^{m+1}-r^{m+1}}{(-1)^{m+1}}x^m)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{p^{m+1}-r^{m+1}}{r-p}x^m\\&=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{p^{m+1}-r^{m+1}}{\sqrt{5}}x^m\\&=\sum_{m=0}^{\infty}f_m x^m\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece

$$f_m=(-1)^{m+1}\frac{p^{m+1}-r^{m+1}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

$$u=-r=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad v=-p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

değişimi ile

$$f_m=\frac{v^{m+1}-u^{m+1}}{\sqrt{5}}$$

sonucuna ulaşılır.

Bir başka şekilde

$$f_m=\frac{1}{\sqrt{5}}(v^{m+1}-(1-v)^{m+1})$$

Binet formülü bulunur.

Son olarak

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f_{m+1}}{f_m}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{v^{m+2}-(1-v)^{m+2}}{v^{m+1}-(1-v)^{m+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{m+2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{m+1}}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

altın oranına ulaşılır (Nesin 2009).

Tanım 3.3. p ve q iki pozitif tamsayı olsun.

$$x^2-px-q=0$$

denklemini göz önüne alınsın. Bu denklemin pozitif çözümü

$$\sigma_{p,q}=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \tag{3.21}$$

dır. Bu özellikteki (p,q) ikilisine *metalik sayılar* denir (Spinadel 2000).

Burada

i) $p=q=1$ ise $\sigma_{1,1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *altın oran,*

ii) $p=2,\ q=1$ ise $\sigma_{2,1}=1+\sqrt{2}$ *gümüş oran,*

iii) $p=3,\ q=1$ ise $\sigma_{3,1}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ *bronz oran,*

iv) $p=1,\ q=2$ ise $\sigma_{1,2}=2$ *bakır oran,*

v) $p=1,\ q=3$ ise $\sigma_{1,3}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ *nikel oran* vb. bulunur.

Tanım 3.4. n-boyutlu M diferensiyellenebilir manifold üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipindeki tensör alanı J ve birim dönüşüm I,

$$J^2 - J - I = 0$$

denklemini sağlar ise J tensör alanına M nin bir *altın yapısı* ve (M, J) ikilisine *altın manifold* denir (Crasmareanu ve Hretcanu 2008).

Aslında bu yapılar aşağıda tanımı verilecek polinom yapıların özel bir durumu olarak ortaya çıkmaktadır.

Tanım 3.5. M^n diferensiyellenebilir bir manifoldu üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipindeki tensör alanı J, birim dönüşüm I ve $rank(J) = n$ olmak üzere

$$Q(J) = J^n + a_{n-1}J^{n-1} + ... + a_2 J^2 + a_1 J + a_0 I = 0, \qquad a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

ile tanımlı $Q(J)$ polinomuna *yapı polinomu*, J ye *polinom yapı* ve (M, J) ikilisine *polinom manifold* denir (Goldberg ve Yano 1970, Goldberg ve Petridis 1973).

Tanım 3.6. M^n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde tanımlı $(1,1)$ tipindeki tensör alanı J, birim dönüşüm I, $rank(J) = n$ ve yapı polinomu

$$Q(J) = J^2 + a_1 J + a_0 I = 0$$

verilsin. Yani

$$J^2 = pJ + qI; \;\; p = -a_1, \; q = -a_0 \tag{3.22}$$

olsun.

i) Eğer $p = 1,\; q = 1$ ise J, M üzerinde *altın yapı* olur ve $\sigma_{p,q} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oranı bulunur (Crasmareanu ve Hretcanu 2009).

ii) Eğer p ve q pozitif tamsayılar ise J ye M üzerinde *metalik yapı* denir $(J^2 = pJ + qI)$ (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

iii) Eğer $p = 0,\; q = -1$ ise J ye M üzerinde *hemen hemen kompleks yapı* denir $(J^2 = -I)$ (Yano ve Kon 1984).

iv) Eğer $p=0,\ q=1$ ise J ye M üzerinde *hemen hemen çarpım yapı* veya *para-kompleks yapı* denir $(J^2=I)$ (Gray 1967).

v) Eğer $p\in\mathbb{R}-(-2,2)$ ve $q=-1$ ise J ye M üzerinde *Poly-Norden yapı* denir (Şahin 2018).

vi) Eğer $p=-1,\ q=\dfrac{3}{2}$ ise J ye M üzerinde *hemen hemen kompleks altın yapı* denir $(J^2=-J+\dfrac{3}{2}I)$ (Bilen, Turanlı ve Gezer 2018).

Tanım 3.7. M , J metalik yapısı ile verilmiş diferensiyellenebilir bir manifold olsun. O halde (M,J) ikilisine *metalik manifold* adı verilir. (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

M üzerinde herhangi bir J metalik yapı verilirse, aşağıdaki formda iki tane hemen hemen çarpım yapı elde edilir (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

$$F_{\pm}=\pm\left(\frac{2}{2\sigma_{p,q}-p}J-\frac{p}{2\sigma_{p,q}-p}I\right)$$

Tersine, M üzerinde herhangi bir F hemen hemen çarpım yapısı varsa, M üzerinde aşağıdaki formda iki tane metalik yapı elde edilir (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

$$J_{\pm}=\pm\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}F+\frac{p}{2}I$$

Tanım 3.8. M bir Riemann manifold ve $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$g(JX,Y)=g(X,JY) \tag{3.23}$$

ise g metriği J polinom yapısı ile uyumlu olduğu söylenir. Bu durumda (g,J) ikilisine *metalik Riemann yapı*, (M,g,J) üçlüsü de *metalik Riemann manifold* denir (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

(3.22) ve (3.23) yardımı ile $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$g(JX,JY)=pg(JX,Y)+qg(X,Y) \tag{3.24}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca Tanım 2.12. gereğince $N_J \equiv 0$ ise J polinom yapısı integrallanebilir olacaktır.

∇, g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere; $\nabla J = 0$ ise J metalik Riemann yapısı, *lokal metalik* olarak adlandırılır.

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \qquad \nabla_X JY = J\nabla_X Y \tag{3.25}$$

ve (3.22) denklemi kullanılarak $N_J \equiv 0$ olarak elde edilir. Böylece bir lokal metalik Riemann manifoldu daima integrallenebilirdir sonucu çıkarılabilir (Crasmareanu ve Hretcanu 2013).

3.2. Katlı Çarpım Manifoldları

Katlı çarpım manifoldları genel görelilik teorisinde kozmolojik modeller inşa etmek için önemli bir yere sahiptir. Örneğin Schwarzschild ve Robertson-Walker kozmolojik modeller katlı çarpım manifoldlarının iyi bilinen örnekleridir (O’Neill 1983). Ayrıca katlı çarpım manifoldları Riemann çarpım manifoldlarının bir genellemesi olarak da ortaya çıkar (Bishop ve O'Neill 1969).

Bu bölümde katlı çarpım manifoldları tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.9. (M^m, g_M) ve (N^n, g_N) iki Riemann manifold ve *f*, *M* üzerinde pozitif değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\pi : M \times N \to M$ ve $\sigma : M \times N \to N$, $M \times N$ manifoldunun doğal izdüşüm dönüşümleri olmak üzere $\tilde{M} = M \times_f N$ katlı çarpım manifoldu her $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$< \tilde{X}, \tilde{Y} > = g_M(\pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y}) + (f \circ \pi)^2 g_N(\sigma_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y}) \tag{3.26}$$

metrik tensörü ile oluşturulmuş $M \times N$ çarpım manifoldudur (O'Neill 1983).

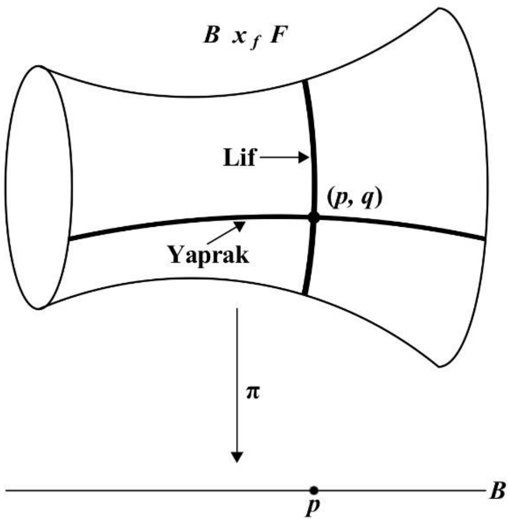
f fonksiyonu katlı çarpımın kıvrılma (warping) fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer $f = 1$ ise $\tilde{M} = (M \times_f N, <,>)$ katlı çarpım manifoldu, Riemann çarpım manifolduna indirgenir.

Bir Riemann manifoldundaki gibi $p \times N = \pi^{-1}(p)$ lifleri ve $M \times q = \sigma^{-1}(q)$ yaprakları $\tilde{M} = M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunun alt manifoldlarıdır ve katlı metrik aşağıdaki üç özellikle karakterize edilir (O'Neill 1983):

i) Herhangi $q \in N$ için $\pi_{M\times q}$ dönüşümü *M* üzerinde bir izometridir.

$ii)$ Herhangi $p \in M$ için $\pi_{p\times N}$ dönüşümü N üzerinde $1/f(p)$ sabit çarpan ile çarpım halindedir.

$iii)$ Herhangi $(p,q) \in M$ için $p \times N = \pi^{-1}(p)$ lifleri ve $M \times q = \sigma^{-1}(q)$ yaprakları (p,q) noktasında ortogonaldir.



Şekil 3.2. Katlı çarpım

$X \in \Gamma(TM)$ ve $U \in \Gamma(TN)$ için

$$\begin{aligned} K(X \wedge U) &= g(\nabla_U \nabla_X X - \nabla_X \nabla_U X, U) \\ &= (1/f)\{(\nabla_X X)f - X^2 f\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

olmak üzere eğer $(\tilde{M}, g)$ n-boyutlu bir Riemann manifoldu için $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bir lokal ortonormal çatı, $\{e_1, e_2, ..., e_{n_1}\}$ M manifolduna ve $\{e_{n_1+1}, ..., e_n\}$ N manifolduna teğet olacak şekilde seçilirse,

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{i=1}^{n} K(e_j, e_s) \tag{3.28}$$

elde edilir (O'Neill 1983).

M ve N manifoldları, $\tilde{M}$ katlı çarpım manifoldunun sırasıyla *bazı* ve *lifi* olarak adlandırılır.

$(p,q)\in M\times N$ noktası için $T_{(p,q)}(M\times N)$ tanjant uzayı,

$T_{(p,q)}(M\times q)\oplus T_{(p,q)}(p\times N)=T_pM\oplus T_qN$ direk toplamına izomorfiktir.

$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$, M üzerindeki vektör alanının yatay lifti (kaldırılmışı) ve $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$, N üzerindeki vektör alanının dikey lifti (kaldırılmışı) olan $M\times N$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi olsun.

Bu durumda $\bar{X}\in\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$ ve $\bar{U}\in\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$ olmak üzere $M\times N$ üzerindeki bir vektör alanı $\bar{E}=\bar{X}+\bar{U}$ olarak yazılabilir.

Böylece,

$\pi_*(\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M))=\Gamma(TM)$ ve $\sigma_*(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N))=\Gamma(TN)$ dır. Yani,

$\pi_*(\bar{X})=X\in\Gamma(TM)$ ve $\sigma_*(\bar{U})=U\in\Gamma(TN)$ dır (O'Neill 1983).

Sonuç 3.10. (M^m,g_M) ve (N^n,g_N) iki Riemann manifoldu ve $\tilde{M}=M\times_f N$ katlı çarpım manifoldu olsun. Eğer,

$$\bar{X},\bar{Y}\in\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M) \text{ ise } [\bar{X},\bar{Y}]=\overline{[X,Y]}\in\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M) \tag{3.29}$$

dır (O'Neill 1983).

Benzer durum $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$ için de yazılabilir.

Sonuç 3.11. (M,g_M) ve (N,g_N) iki Riemann manifoldu ve $\tilde{M}=M\times_f N$ katlı çarpım manifoldu olsun. O halde

$$\bar{X}\in\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M) \text{ ve } \bar{U}\in\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N) \text{ ise } <\bar{X},\bar{U}>=0 \text{ ve } [\bar{X},\bar{U}]=0 \tag{3.30}$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 3.12. $\tilde{M}=M\times_f N$ katlı çarpım manifoldu için $\bar{\nabla}$, ${}^M\nabla$ ve ${}^N\nabla$ konneksiyonları sırasıyla $\tilde{M}$, M ve N üzerindeki Riemann konneksiyonları olmak üzere; $X,Y\in\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$ ve $U,V\in\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$ için,

$i) \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$, ${}^{M}\nabla_X Y$ nin liftidir. Yani, $\pi_*(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}) = {}^{M}\nabla_X Y$

$$ii) \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{U} = \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{X} = \frac{X(f)}{f} U \tag{3.31}$$

$$iii) \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V} = {}^{N}\nabla_U V - \frac{<U,V>}{f}(grad f), \quad \sigma_*(\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V}) = {}^{N}\nabla_U V$$

dır (O'Neill 1983).

Burada $f \circ \pi$ için f ve $grad(f \circ \pi)$ için $grad f$ yazılarak gösterim sadeleştirilmiştir.

Önerme 3.13. $\tilde{M} = M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörü ${}^{\tilde{M}}R$ ve H^f, f nin Hessianı olmak üzere;

Eğer $X,Y,Z \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$ ve $U,V,W \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$ ise,

$$\begin{aligned}
&(1)\ {}^{\tilde{M}}R_{X,Y}Z = {}^{M}R_{X,Y}Z \\
&(2)\ {}^{\tilde{M}}R_{X,V}Y = \frac{H^f(X,Y)}{f} V \\
&(3)\ {}^{\tilde{M}}R_{X,Y}V = {}^{\tilde{M}}R_{V,W}X = 0 \\
&(4)\ {}^{\tilde{M}}R_{X,V}W = -\frac{<V,W>}{f} \nabla_X (grad f) \\
&(5)\ {}^{\tilde{M}}R_{V,W}U = {}^{N}R_{V,W}U + \frac{\|grad f\|^2}{f^2} \{<V,U>W - <W,U>V\}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dır (Chen 2017).

Önerme 3.14. $\tilde{M} = M \times_f N$ katlı çarpım manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ${}^{\tilde{M}}\mathcal{S}$ olmak üzere $X,Y \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(M)$ ve $U,V \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(N)$ için,

$$\begin{aligned}
&(1)\ {}^{\tilde{M}}\mathcal{S}(X,Y) = {}^{M}\mathcal{S}(X,Y) - \frac{k}{f} H^f(X,Y), \quad k = boyN \\
&(2)\ {}^{\tilde{M}}\mathcal{S}(X,U) = 0 \\
&(3)\ {}^{\tilde{M}}\mathcal{S}(U,V) = {}^{N}\mathcal{S}(U,V) - \left\{ \frac{\Delta f}{f} - (k-1)\frac{\|grad f\|^2}{f^2} \right\} <U,V>
\end{aligned} \tag{3.33}$$

dır (Chen 2017).

Şimdi $\tilde{M} = I \times_f N$, $<,> = dt^2 + f^2(t)g_N$ olarak tanımlanan özel bir katlı çarpım manifoldu düşünülsün. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_{\partial t}\partial t = 0, \ \ \tilde{\nabla}_{\partial t}X = \tilde{\nabla}_X \partial t = \frac{f'(t)}{f(t)}X \\ &\tilde{\nabla}_X Y = {}^N\nabla_X Y - \frac{<X,Y>}{f(t)} f'(t)\partial t \end{aligned} \tag{3.34}$$

dır.

3.3. Hemen Hemen Kuadratik ϕ-Yapı

Tanım 3.15. M, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve ϕ $(1,1)$ tensör alanı, ξ birim vektör alanı, η 1-form olsun. p keyfi sabit ve q sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\phi\xi = 0$$

$$\phi^2 = p\phi + q(I - \eta \otimes \xi); \quad p^2 + 4q \neq 0 \tag{3.35}$$

ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde *hemen hemen kuadratik ϕ-yapı,* (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne ise *hemen hemen kuadratik ϕ-manifold* adı verilir (Debmath ve Konar 2011).

i) Eğer $p = 0,\ q = -1$ ise $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ yapısına *hemen hemen kontak yapı* denir (Blair 2010).

ii) Eğer $p = 0,\ q = 1$ ise $\phi^2 = I - \eta \otimes \xi$ yapısına *hemen hemen para-kontak yapı* denir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.16. Hemen hemen kuadratik ϕ-manifoldunun hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı tek değildir (Debmath ve Konar 2011).

İspat: $\phi^2 = p\phi + q(I - \eta \otimes \xi); \quad p^2 + 4q \neq 0$ denklemini göz önüne alınsın. f, M^n üzerinde singüler olmayan vektör değerli lineer fonksiyon ve ϕ^* $(1,1)$ tensör alanı, η^* $1-$form, ξ^* birim vektör alanı olsun.

$$f \circ \phi^* = \phi \circ f, \ \ \eta^* = \eta \circ f, \ \ f\xi^* = \xi$$

dır. Buradan bazı hesaplamalar yapılırsa ve f nin singülerliğini kullanılırsa

$$\phi^{*2} = -p\phi^* - q(I - \eta^* \otimes \xi^*); \quad p^2 + 4q \neq 0$$

elde edilir (Debmath ve Konar 2011).

Teorem 3.17. M^n hemen hemen kuadratik ϕ-manifoldu aşağıdaki özelliklere sahiptir (Debmath ve Konar 2011).

1) $\eta \circ \phi = 0$

2) $\eta \xi = 1$

3) $rank\,\phi = n-1$

ϕ yapı tensörünün öz değerleri $\dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $\dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve 0'dır. Eğer λ_i, σ_i ve ξ sırasıyla ϕ nin özdeğerlerine karşılık gelen öz vektörler ise, λ_i, σ_i ve ξ lineer bağımsızdır (Debmath ve Konar 2011).

Şimdi aşağıdaki gibi dağılımlar tanımlansın:

$$\Pi_r = \{X \in \Gamma(TM) : \alpha LX = -\phi^2 X - (\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2})\phi,\ \alpha = -2q - \frac{p^2+\sqrt{p^2+4q}}{2}\};\ boy\,\Pi_r = r,$$

$$\Pi_s = \{X \in \Gamma(TM) : \beta QX = -\phi^2 X + (\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2})\phi,\ \beta = -2q - \frac{p^2-\sqrt{p^2+4q}}{2}\};\ boy\,\Pi_s = s,$$

$$\Pi_1 = \{X \in \Gamma(TM) : \beta RX = \phi^2 X - p\phi X - qX = -q\eta(X)\xi\};\ boy\Pi_1 = 1$$

Yukarıdaki gösterimlerle ilgili olarak Debmath ve Konar (2011) aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 3.18. Bir M^n manifoldunun hemen hemen kuadratik ϕ-manifold olması için gerek ve yeter koşul, M^n manifoldunun bütün noktalarında $\Pi_r \cap \Pi_s = \{\varnothing\}$, $\Pi_r \cap \Pi_1 = \{\varnothing\}$, $\Pi_s \cap \Pi_1 = \{\varnothing\}$ ve $\Pi_r \cup \Pi_s \cup \Pi_1 = TM$ olacak şekilde Π_r, Π_s ve Π_1 dağılımlarının var olmasıdır (Debmath ve Konar 2011).

Teorem 3.19. Her hemen hemen kuadratik ϕ-manifold M^n de

$$g(X,\xi) = \eta(X) \text{ ve } g(\phi X, \phi Y) = qg(X,Y) - q\eta(X)\eta(Y)$$

biçiminde bir g Riemann metrik tensörü bulunabilir (Debmath ve Konar 2011).

Örnek 3.20. Debmath ve Konar (2011) aşağıdaki gibi $\mathbb{R}^4$ üzerinde hemen hemen kuadratik ϕ -yapı örneğini verdi:

ϕ $(1,1)$ tensör alanı, η 1-form ve ξ vektör alanı olmak üzere;

$$\phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\phi^2 = 4\phi + 5(I_4 - \eta \otimes \xi)$$

dır. O halde $\mathbb{R}^4$ hemen hemen kuadratik ϕ -yapısına sahiptir.

4. BULGULAR

4.1. Hemen Hemen Kuadratik Metrik ϕ-Yapı

Debmath ve Konar (2011) bir diferensiyellenebilir *n*-boyutlu manifold üzerinde 3. bölümde tanıtıldığı üzere hemen hemen kuadratik ϕ-yapılarını tanıtmıştır ve bu yapıları sağlayan sayısal bir örnek vermiştir.

Hemen hemen bir kompleks manifold ile reel sayılar kümesinin Riemann çarpımı ya da katlı Riemann çarpımı göz önüne alındığında sırasıyla hemen hemen kosimplektik ve hemen hemen Kenmotsu yapıları elde edilir (Carriazo ve Pérez-García 2017).

Böylece bir hemen hemen metalik manifold ile bir reel sayının Riemann ya da katlı Riemann çarpımı yardımıyla Debmath ve Konar (2011) tarafından tanımlanan hemen hemen kuadratik ϕ-manifoldları elde edilip edilemeyeceği problemi ortaya çıkmıştır.

Bu bölüm orijinal sonuçlardan meydana gelmektedir. Bu kısımda öncelikle hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapı tanıtılacaktır. Lokal metalik Riemann manifold N ile $\mathbb{R}$ katlı çarpımı olan $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times_f N, \ll,\gg = dt^2 + f^2 g)$ Riemann manifoldun bir kuadratik metrik ϕ-yapıya sahip olduğu ispat edilecektir. (ϕ, η, ξ) hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı ile verilen diferensiyellenebilir her M manifoldunun kendisiyle uyumlu bir Riemann metriğinin var olduğu ispatlanarak Teorem 3.19. un daha genel formu verilecektir.

Tanım 4.1. (M, g_M) Riemann manifold ve (ϕ, ξ, η), M üzerinde hemen hemen kuadratik ϕ-yapı olsun. Eğer,

$$g_M(\phi X, Y) = g_M(X, \phi Y) \tag{4.1}$$

ise g_M Riemann metriği kuadratik ϕ-yapı ile uyumludur denir ve (g_M, ϕ, ξ, η) dörtlüsü M üzerinde *hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapı* olarak adlandırılır.

(4.1) denkleminde X yerine ϕX yazılıp (3.35) denklemi kullanılırsa

$$g_M(\phi X, \phi Y) = p g_M(\phi X, Y) + q(g_M(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \tag{4.2}$$

denklemi elde edilir.

(N, g_N, J) metalik Riemann manifold olmak üzere $\ll,\gg = dt^2 + f^2 g_N$ Riemann metriği ile verilen $\tilde{M} = \mathbb{R} \times_f N$ katlı çarpım manifoldunu göz önüne alınsın.

Şimdi Carriazo ve Pérez-García (2017) çalışmasındaki benzer yöntem kullanılarak $(\tilde{M}, \tilde{g})$ üzerinde hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapı tanımlansın. X , N üzerinde herhangi keyfi vektör alanı ve $dt = \eta$, $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ verilmek üzere, $\tilde{M}$ üzerinde herhangi bir keyfi bir vektör alanı

$$\tilde{X} = \eta(\tilde{X})\xi + X$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse $\eta(\xi) = dt(\frac{\partial}{\partial t}) = 1$ dir. J metalik tensör alanı yardımıyla $\tilde{M}$ üzerinde (1,1) tipinde yeni bir ϕ tensör alanı $\tilde{X} \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\phi\tilde{X} = JX, \quad X \in \Gamma(TN) \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\tilde{M}$ üzerinde herhangi bir $\tilde{X}$ vektör alanı için

$$\phi\xi = \phi(\xi + 0) = J0 = 0 \tag{4.4}$$

dır. Daha fazlası (4.1) yardımıyla

$$\eta(\phi\tilde{X}) = \eta(\phi X) = dt(JX) = 0 \tag{4.5}$$

dır. Böylece (4.4), (4.5) ve (3.22) yardımıyla

$$\phi^2\tilde{X} = p\phi\tilde{X} + q(\tilde{X} - \eta(\tilde{X})\xi) \tag{4.6}$$

denklemi elde edilir. Her $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\ll \phi\tilde{X}, \tilde{Y} \gg = f^2 g(JX, Y) = f^2 g(X, JY) = \ll \tilde{X}, \phi\tilde{Y} \gg$$

eşitliğine ulaşılır. Daha fazlası

$$\begin{aligned}
\ll \phi\tilde{X}, \phi\tilde{Y} \gg &= f^2 g(JX, JY) \\
&= f^2(pg(X, JY) + qg(X, Y)) \\
&= p \ll \tilde{X} - \eta(\tilde{X})\xi, \phi\tilde{Y} \gg + q(\ll \tilde{X}, \tilde{Y} \gg - \eta(\tilde{X})\eta(\tilde{Y})) \\
&= p \ll \tilde{X}, \phi\tilde{Y} \gg + q(\ll \tilde{X}, \tilde{Y} \gg - \eta(\tilde{X})\eta(\tilde{Y}))
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki önermeye ulaşılır.

Önerme 4.2. (N, g, J) bir metalik Riemann manifoldu ise $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times_f N, \ll,\gg = dt^2 + f^2 g)$ katlı çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapısı vardır.

Tanım 4.3. $(M, g, \nabla, \phi, \xi, \eta)$ hemen hemen kuadratik metrik ϕ-manifoldu

$$(\nabla_X \phi)Y = \beta\{g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X\}, \quad \beta \in C^\infty(M) \tag{4.7}$$

özelliğini sağlıyorsa (β, ϕ)*-Kenmotsu kuadratik metrik manifold* olarak adlandırılır.

(4.7) ifadesinde $Y = \xi$ alınırsa ve (3.35) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_X \xi = -\beta(X - \eta(X)\xi) \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca (4.8) eşitliği ile $d\eta = 0$ bulunur. Eğer $\beta = 0$ ise bu tür manifoldlar *kosimplektik kuadratik manifold* olarak adlandırılır.

Teorem 4.4. (N, g, ∇, J) lokal metalik Riemann manifold ise $\mathbb{R} \times_f N$ katlı çarpım manifoldu bir $(-\frac{f'}{f}, \phi)$-Kenmotsu kuadratik metrik manifolddur.

İspat: $X, Y \in \Gamma(TN)$ ve $\xi = \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(\mathbb{R})$ olmak üzere $\mathbb{R} \times_f N$ üzerinde $\tilde{X} = \eta(\tilde{X})\xi + X$ ve $\tilde{Y} = \eta(\tilde{Y})\xi + Y$ vektör alanlarını göz önüne alınsın. (4.3) yardımıyla

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \phi)\tilde{Y} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \phi\tilde{Y} - \phi\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \\ &= \tilde{\nabla}_X JY + \eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_\xi JY - \phi(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y} + \eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_\xi \tilde{Y}) \\ &= \tilde{\nabla}_X JY + \eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_\xi JY - \phi(\tilde{\nabla}_X Y + X(\eta(\tilde{Y}))\xi + \eta(\tilde{Y})\tilde{\nabla}_X \xi \\ &\quad + \eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_\xi Y + \xi(\eta(\tilde{Y}))\eta(\tilde{X})\xi)\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) de (3.34) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \phi)\tilde{Y} &= (\nabla_X J)Y - \frac{f'}{f} \ll X, JY \gg \xi + \eta(\tilde{X})\frac{f'}{f} JY - \phi(\eta(\tilde{Y})\frac{f'}{f} X + \eta(\tilde{X})\frac{f'}{f} Y) \\ &= (\nabla_X J)Y - \frac{f'}{f}(\ll \tilde{X}, \phi\tilde{Y} \gg \xi + \eta(\tilde{Y})\phi\tilde{X})\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur.

$\nabla J = 0$ olduğundan son denklem

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi)\tilde{Y} = -\frac{f'}{f}(\ll \tilde{X}, \phi\tilde{Y} \gg \xi + \eta(\tilde{Y})\phi\tilde{X}) \tag{4.11}$$

denklemine indirgenir. $\tilde{\nabla}_X \xi = \frac{f'}{f} X$ eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\xi = \frac{f'}{f}(\tilde{X} - \eta(\tilde{X})\xi)$$

elde edilir. Böylece $\mathbb{R} \times_f N$ bir $(-\frac{f'}{f}, \phi)$-Kenmotsu kuadratik metrik manifolddur.

$f = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5. (N, g, ∇, J) lokal metalik Riemann manifold olsun. O halde $\mathbb{R} \times N$ çarpım manifoldu bir kosimplektik kuadratik metrik manifolddur.

Örnek 4.6. Blaga ve Hretcanu (2018) aşağıdaki şekilde $\mathbb{R}^{n+m}$ üzerinde metalik bir yapı inşa etmişlerdir:

p, q pozitif tamsayıları için $\sigma = \sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4pq}}{2}$ ve $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{p,q} = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4pq}}{2}$ olmak üzere;

$$J(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = (\sigma x_1, ..., \sigma x_n, \bar{\sigma} y_1, ..., \bar{\sigma} y_m).$$

Teorem 4.4. yardımı ile $H^{n+m+1} = \mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^{n+m}$, $(-1, \phi)$-Kenmotsu kuadratik metrik manifold elde edilir.

Tanım 4.7. M, $N^{n+1}(c)$ uzay formunun bir hiperyüzeyi olsun. M nin şekil operatörü $\mathcal{A}$, M üzerinde bir metalik yapı yani

$$\mathcal{A}^2 = p\mathcal{A} + qI$$

ise M ye $N^{n+1}(c)$ uzayında *metalik şekilli hiperyüzey* denir (Özgür ve Yılmaz Özgür 2015).

Eğer M, $N^{n+1}(c)$ nin bir metalik şekilli hiperyüzeyi ise M nin asli eğrilikleri

$$k_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2}, \qquad k_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4pq}}{2}$$

şeklinde olur.

Teorem 4.8. $\mathbb{R}^{n+1}$ in metalik şekilli hiperyüzeyleri

$S^n(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+4pq}})$ ve $S^n(\frac{2}{\sqrt{p^2+4pq}-p})$ hiperküreleridir (Özgür ve Yılmaz Özgür 2015).

Örnek 4.9. Teorem 4.4. ve Teorem 4.8. kullanılarak

$$H^{n+1} = \mathbb{R} \times_{\cosh(t)} S^n(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+4q}})$$

$(-\tanh t, \phi)$ -Kenmotsu kuadratik metrik manifold örneği elde edilir.

Teorem 4.10. (ϕ, η, ξ) hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı ile verilen diferensiyellenebilir her M manifoldunun kendisiyle uyumlu bir Riemann metriği vardır.

İspat: (ϕ, η, ξ) hemen hemen kuadratik bir ϕ-yapısı olduğundan $\phi^2 X = p\phi X + q(X - \eta(X)\xi)$ dir. Şimdi M üzerinde

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = pg(\phi X, Y) + q\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right], g(X,\xi) = \eta(X) \,; \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{4.12}$$

olacak şekilde bir g metriğin varlığını göstermek ispatı tamamlar.

$\tilde{h}$, M üzerinde keyfi bir Riemann metriği olsun. $\tilde{h}$ yardımı ile M üzerinde simetrik ve 2-lineer bir dönüşüm

$$h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

$$h(X,Y) = \tilde{h}(\phi^2 X, \phi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y) \,; \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

şekilde tanımlansın.

O zaman,

$$h(X,Y) = \tilde{h}(p\phi X + q(X - \eta(X)\xi), \; p\phi Y + q(Y - \eta(Y)\xi)) + \eta(X)\eta(Y)$$

ve

$$h(X,\xi)=\eta(X) \tag{4.13}$$

dir.

Şimdi bu h dönüşümünü kullanarak bir

$$g:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^{\infty}(M)$$

$\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $\alpha+\delta\neq 0$ için

$$g(X,Y)=\frac{1}{\alpha+\delta}\left[\alpha h(X,Y)+\beta h(\phi X,\phi Y)+\frac{\gamma}{2}(h(\phi X,Y)+h(X,\phi Y)+\delta\eta(X)\eta(Y)\right]$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda (4.13) denklemi ile birlikte

$$g(X,\xi)=\frac{1}{\alpha+\delta}(\alpha h(X,\xi)+\delta\eta(X))=\frac{1}{\alpha+\delta}g(X,\xi)=\frac{1}{\alpha+\delta}(\alpha+\delta)\eta(X)=\eta(X) \tag{4.14}$$

eşitliği elde edilir. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$g(\phi X,\phi Y)=\frac{1}{\alpha+\delta}\left[\alpha h(\phi X,\phi Y)+\beta h(\phi^2X,\phi^2Y)+\frac{\gamma}{2}\left(h(\phi^2X,\phi Y)+h(\phi X,\phi^2Y)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\alpha h(\phi X,\phi Y)+\beta h\left(p\phi X+q(X-\eta(X)\xi),p\phi Y+q(Y-\eta(Y)\xi)\right)\\+\frac{\gamma}{2}\left(h(p\phi X+q(X-\eta(X)\xi),\phi Y)+h(\phi X,p\phi Y+q(Y-\eta(Y)\xi))\right)\end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$g(\phi X,\phi Y)=\frac{1}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\alpha h(\phi X,\phi Y)+\beta p^2h(\phi X,\phi Y)+\beta pqh(\phi X,Y)\\+\beta pqh(X,\phi Y)+\beta q^2h(X,Y)-\beta q^2\eta(X)\eta(Y)\\+\frac{\gamma}{2}\left(ph(\phi X,\phi Y)+qh(X,\phi Y)+ph(\phi X,\phi Y)+qh(\phi X,Y)\right)\end{bmatrix}$$

bulunur.

Sonuç olarak

$$g(\phi X,\phi Y)=\frac{1}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\beta q^2h(X,Y)+(\alpha+\beta p^2+\gamma p)h(\phi X,\phi Y)\\+(\beta pq+q\frac{\gamma}{2})(h(X,\phi Y)+h(\phi X,Y))-\beta q^2\eta(X)\eta(Y)\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

denklemi elde edilir.

$$pg(\phi X,Y)=\frac{p}{\alpha+\delta}\left[\alpha h(\phi X,Y)+\beta h(\phi^2 X,\phi Y)+\frac{\gamma}{2}\left(h(\phi^2 X,Y)+h(\phi X,\phi Y)\right)\right]$$

$$=\frac{p}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\alpha h(\phi X,Y)+\beta ph(\phi X,\phi Y)+\beta qh(X,\phi Y)\\ +\frac{\gamma}{2}\left(ph(\phi X,Y)+qh(X,Y)-q\eta(X)\eta(Y)+h(\phi X,\phi Y)\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{p}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\frac{q}{2}\gamma h(X,Y)+(\beta p+\frac{\gamma}{2})h(\phi X,\phi Y)+(\alpha+p\frac{\gamma}{2})h(\phi X,Y)\\ +\beta qh(X,\phi Y)-q\frac{\gamma}{2}\eta(X)\eta(Y)\end{bmatrix}$$

eşitliği düzenlenirse

$$pg(\phi X,Y)=\frac{p}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\frac{q}{2}\gamma h(X,Y)+(\beta p+\frac{\gamma}{2})h(\phi X,\phi Y)+(\alpha+p\frac{\gamma}{2})h(\phi X,Y)\\ +\beta qh(X,\phi Y)-q\frac{\gamma}{2}\eta(X)\eta(Y)\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

denklemi elde edilir.

Son olarak

$$qg(X,Y)=\frac{q}{\alpha+\delta}\left[\alpha h(X,Y)+\beta h(\phi X,\phi Y)+\frac{\gamma}{2}\left(h(\phi X,Y)+h(X,\phi Y)\right)+\delta\eta(X)\eta(Y)\right] \tag{4.17}$$

eşitliği elde edilir. (4.14) yardımı ile

$$-q\eta(X)\eta(Y)=-q\frac{\alpha+\delta}{\alpha+\delta}\eta(X)\eta(Y) \tag{4.18}$$

denklemi elde edilir.

Şimdi bu denklemler (4.12) ile karşılaştırılırsa

$$\frac{1}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\beta q^2 h(X,Y)+(\alpha+\beta p^2+\gamma p)h(\phi X,\phi Y)\\ +(\beta pq+q\frac{\gamma}{2})(h(X,\phi Y)+h(\phi X,Y))-\beta q^2\eta(X)\eta(Y)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{p}{\alpha+\delta}\begin{bmatrix}\frac{q}{2}\gamma h(X,Y)+(\beta p+\frac{\gamma}{2})h(\phi X,\phi Y)+(\alpha+p\frac{\gamma}{2})h(\phi X,Y)\\ +\beta q h(X,\phi Y)-q\frac{\gamma}{2}\eta(X)\eta(Y)\end{bmatrix}$$
$$+\frac{q}{\alpha+\delta}\left[\alpha h(X,Y)+\beta h(\phi X,\phi Y)+\frac{\gamma}{2}\big(h(\phi X,Y)+h(X,\phi Y)\big)+\delta\eta(X)\eta(Y)\right]$$
$$-q\frac{\alpha+\delta}{\alpha+\delta}\eta(X)\eta(Y)$$

eşitliğine ulaşılır.

Bu denklemdeki terimlerin katsayıları birbirleri ile eşitlenirse

$h(X,Y)$ teriminin katsayılarından,

$$\frac{\beta q^2}{\alpha+\delta}=(\frac{p}{\alpha+\delta})\frac{q}{2}\gamma+\frac{q}{\alpha+\delta}\alpha$$

bulunur.

Bu denklem düzenlenirse $2\beta q^2=pq\gamma+2q\alpha$ bulunur ve buradan da

$$\beta q=\frac{p\gamma}{2}+\alpha \tag{4.19}$$

denklemi elde edilir.

$h(\phi X,\phi Y)$ teriminin katsayılarından,

$$\beta q=\alpha+\frac{1}{2}\gamma p$$

elde edilir.

$h(\phi X,Y)$, $h(X,\phi Y)$ ve $\eta(X)\eta(Y)$ terimlerin katsayılarından tekrar $\beta q=\alpha+\frac{1}{2}\gamma p$ eşitliği elde edilir. Böylece $\beta q=\alpha+\frac{1}{2}\gamma p$ ve $\alpha+\delta\neq 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde α, β, γ ve δ reel sayıları belirlenirse (4.12) denklemini sağlayan M üzerinde kuadratik ϕ-yapı ile uyumlu bir g Riemann metriği bulunur.

Uyarı 4.11. Eğer $\alpha=\delta=q$ ve $\beta=\gamma=1$ seçilirse, $p=0$ elde edilir. Bu durumda Teorem 3.19. elde edilir.

Önerme 4.12. $(M,g,\nabla,\phi,\xi,\eta)$ manifoldu (β,ϕ)-Kenmotsu kuadratik metrik manifold olsun. O halde ϕ kuadratik yapısı integrallenebilirdir. Bir başka deyişle ϕ ye karşılık gelen Nijenhuis tensörü $N_\phi\equiv 0$ dır.

İspat: (2.17) ifadesinde (4.6) eşitliği kullanılırsa; $X,Y\in\Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned}
N_\phi(X,Y) &= \phi^2[X,Y]+[\phi X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y]-\phi[X,\phi Y]\\
&= p\phi[X,Y]+q([X,Y]-\eta([X,Y])\xi)+\tilde{\nabla}_{\phi X}\phi Y-\nabla_{\phi Y}\phi X\\
&\quad -\phi(\nabla_{\phi X}Y-\nabla_Y\phi X)-\phi(\nabla_X\phi Y-\nabla_{\phi Y}X)\\
&= p\phi\nabla_XY-p\phi\nabla_YX+q\nabla_XY-q\nabla_YX-q\eta([X,Y])\xi\\
&\quad +(\nabla_{\phi X}\phi)Y-(\nabla_{\phi Y}\phi)X+\phi\nabla_Y\phi X-\phi\nabla_X\phi Y
\end{aligned}\tag{4.20}$$

elde edilir.

(4.6) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
p\phi\nabla_XY-\phi\nabla_X\phi Y &= p\phi\nabla_XY+(\nabla_X\phi)\phi Y-\nabla_X\phi^2Y\\
&=-p(\nabla_X\phi)Y+(\nabla_X\phi)\phi Y-q\nabla_XY\\
&\quad +qX(\eta(Y))\xi+q(\eta(Y))\nabla_X\xi
\end{aligned}\tag{4.21}$$

bulunur.

(4.20) de son denklem yazılırsa

$$\begin{aligned}
N_\phi(X,Y) &= -p(\nabla_X\phi)Y+p(\nabla_Y\phi)X+(\nabla_X\phi)\phi Y-(\nabla_Y\phi)\phi X\\
&\quad +(\nabla_{\phi X}\phi)Y-(\nabla_{\phi Y}\phi)X+q(X\eta(Y)\xi-Y\eta(X)\xi-\eta([X,Y])\xi)\\
&\quad +q(\eta(Y)\nabla_X\xi-\eta(X)\nabla_Y\xi)
\end{aligned}\tag{4.22}$$

elde edilir.

(4.22) de (4.6) ve (4.11) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
N_\phi(X,Y) &= q(X\eta(Y)\xi-Y\eta(X)\xi-\eta([X,Y]\xi)\\
&=0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.2. Metalik Riemann Manifoldlarının Kuadratik ϕ-Hiperyüzeyleri

Bu bölümde $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ lokal metalik Riemann manifoldunun kuadratik ϕ-hiperyüzeyleri incelenmiştir ve orijinal sonuçlardan oluşmaktadır.

Teorem 4.13. $\tilde{M}^{n+1}$, J metalik yapısına sahip diferensiyellenebilir bir manifold ve M^n, $\tilde{M}^{n+1}$ nın bir hiperyüzeyi olsun. O zaman M^n üzerinde (ϕ, η, ξ) almost kuadratik ϕ-yapısı vardır.

İspat: M^n nin birim normal vektör alanı ν ile gösterilsin. ϕ M^n üzerinde $(1,1)$ tensör alanı, $\xi \in \Gamma(TM)$ ve η 1-form olmak üzere herhangi bir $X \in \Gamma(TM^n)$ vektör alanı için;

$$JX = \phi X + \eta(X)\nu \tag{4.23}$$

$$J\nu = q\xi + p\nu \tag{4.24}$$

$$J\xi = \nu \tag{4.25}$$

$\eta(\xi) = 1$ ve $\eta \circ \phi = 0$ olacak şekilde tanımlansın.

(4.23) eşitliği üzerine J operatörü tekrar uygulanırsa ve (4.22) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} J^2 X &= J(\phi X) + \eta(X) J\nu \\ &= \phi^2 X + \eta(X)(q\xi + p\nu) \end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir.

(4.22) ile (3.22) ifadesi karşılaştırılırsa

$$p\phi X + p\eta(X)\nu + qX = \phi^2 X + \eta(X)(q\xi + p\nu) \tag{4.27}$$

denklemi elde edilir. Böylece

$$\phi^2 X = p\phi X + q(X - \eta(X)\xi) \tag{4.28}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 4.14. (M^n, g) ve $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ iki Riemann manifold olsun. $i : (M^n, g) \to (\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ bir izometrik immersiyon (gömme) ise (M^n, g) ye $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ nin bir *Riemann hiperyüzeyi* denir (O'Neill 1983).

(M^n, g), $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir hiperyüzeyi ve ν, M^n nin birim normal vektör alanı olsun. M^n nin g metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu ∇, $\tilde{M}^{n+1}$ in $\tilde{g}$ Riemann metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. O halde g, $\tilde{g}$ dan indirgenmiş M^n nin Riemann metriği ve A, M^n nin şekil operatörü olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla;

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\nu\,; \quad \text{Gauss denklemi} \tag{4.29}$$

$$\tilde{\nabla}_X \nu = -AX\,; \quad \text{Weingarten denklemi} \tag{4.30}$$

dir (Chen 1973).

Önerme 4.15. $(\tilde{M}^{n+1}, <,>, \tilde{\nabla}, J)$ bir lokal metalik Riemann manifold olsun. Eğer (M^n, g, ∇, ϕ) $\tilde{M}^{n+1}$ in kuadratik metrik ϕ-hiperyüzeyi ise, o zaman

$$(\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)AX + g(AX, Y)\xi \tag{4.31}$$

$$\nabla_X \xi = pAX - \phi AX, \quad A\xi = 0 \tag{4.32}$$

ve

$$(\nabla_X \eta)Y = pg(AX, Y) - g(AX, \phi Y) \tag{4.33}$$

dır.

İspat: J lokal metalik yapı olduğundan her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $(\tilde{\nabla}_X J)Y = 0$ dır. Bir başka ifade ile

$$\tilde{\nabla}_X JY = J\tilde{\nabla}_X Y \tag{4.34}$$

dır. (4.23) - (4.25) ile tanımlanan ifadelerde J metalik yapı tensörünün X e göre kovaryant türevi alınırsa Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 0 = &(\nabla_X \phi)Y - \eta(Y)AX - qg(AX, Y)\xi \\ &+ (g(AX, \phi Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) - pg(AX, Y))\nu \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir.

Eğer (4.35) denkleminin teğet bileşenleri ve normal bileşenleri belirlenirse, sırasıyla;

$$(\nabla_X \phi)Y - \eta(Y)AX - qg(AX,Y)\xi = 0 \tag{4.36}$$

$$g(AX,\phi Y) + X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y) - pg(AX,Y) = 0 \tag{4.37}$$

bulunur.

J nin $\tilde{g}_{|_M} = g$ ile uyumluluğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(JX,JY) &= pg(X,JY) + qg(X,Y) \\ &\overset{(4.23)}{=} pg(X,\phi Y) + qg(X,Y) \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir.

Başka bir şekilde ifade edilirse,

$$\begin{aligned} g(JX,JY) &\overset{(4.23)}{=} g(\phi X,\phi Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ &\overset{(4.2)}{=} pg(X,\phi Y) + q(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) + \eta(X)\eta(Y) \\ &= pg(X,\phi Y) + qg(X,Y) + (1-q)\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilir.

(4.38) ve (4.39) dikkate alınırsa $q=1$ bulunur. (4.36) ile (4.31) ifadesine varılır. Eğer (4.36) de $Y=\xi$ alınırsa

$$\phi\nabla_X \xi = -AX - g(AX,\xi)\xi \tag{4.40}$$

elde edilir.

(4.40) denkleminin her iki tarafına ξ uygulanırsa $A\xi = 0$ elde edilir.

(4.40) denkleminin her iki tarafına ϕ uygulanıp ve $A\xi = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\phi AX &= p\phi\nabla_X \xi + (\nabla_X \xi - \eta(\nabla_X \xi)\xi) \\ &\overset{(7.16)}{=} -pAX + \nabla_X \xi \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.32) ifadesine varılır. (4.32) yardımıyla kolayca (4.33) elde edilir ve bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4.16. (M,g) bir Riemann manifold ve ∇, g metriği ile indirgenmiş M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. M üzerindeki her X vektör alanı için aşağıdaki koşullar denktir (Yano ve Kon 1984):

(1) X, Killing vektör alanıdır; yani, $L_X g = 0$

(2) Her $Y,Z \in \Gamma(TM)$ için $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$

Önerme 4.17. $(M^n, g, \nabla, \phi, \eta, \xi)$, $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ lokal metalik Riemann manifoldunun bir kuadratik ϕ-hiperyüzeyi olsun. ξ karakteristik vektör alanının Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul $\phi A + A\phi = 2pA$ dır.

İspat: Önerme 4.16. den,

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0$$

elde edilir. Son denklemde (4.32) ifadesinden yararlanılarak

$$pg(AX,Y) - g(\phi AX, Y) + pg(AY, X) - g(\phi AY, X) = 0$$

eşitliği bulunur. A ve ϕ nin simetriklik özelliği kullanılarak

$$2pg(AX,Y) = g(\phi AX, Y) + g(A\phi X, Y)$$

elde edilir ve bu eşitlikten istenilen denkleme varılır.

Önerme 4.18. $(M^n, g, \nabla, \phi, \xi)$, $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ lokal metalik Riemann manifoldunun bir (β, ϕ) -Kenmotsu kuadratik hiperyüzeyi ise o zaman $\phi A = A\phi$ ve $A^2 = \beta pA + \beta^2 (I - \eta \otimes \xi)$ dır.

İspat: $d\eta = 0$ olduğundan, (4.32) kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= g(Y, \nabla_X \xi) - g(X, \nabla_Y \xi) \\ &= pg(Y, AX) - g(Y, \phi AX) - pg(X, AY) + g(X, \phi AY) \\ &= g(A\phi X - \phi AX, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\phi A = A\phi$ bulunur. (4.7) ve (4.31) eşitlikleri ile

$$\beta(g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X) = \eta(Y)AX + g(AX, Y)\xi$$

bulunur.

Eğer son denklemin her iki tarafına ξ eklenirse

$$\beta g(X,\phi Y) = g(AX,Y)$$

elde edilir. Yani

$$\beta\phi X = AX \tag{4.41}$$

dır. X in yerine AX koyulursa ve (4.41) de (4.28) kullanılırsa

$$A^2X = \beta pAX + \beta^2(X - \eta(X)\xi)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

(4.4) yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.19. $(M^n, g, \nabla, \phi, \xi)$, lokal metalik Riemann manifoldunun bir kosimplektik kuadratik ϕ-hiperyüzeyi olsun. O halde M total geodeziktir.

Uyarı 4.20. Hretcanu ve Crasmareanu (2013) çalışmasında metalik Riemann manifoldlarının hiperyüzeyleri üzerinde indirgenen yapının bazı özellikleri araştırıldı. Fakat Önerme 4.15. deki argüman metalik Riemann manifoldun kuadratik ϕ-hiperyüzeyi elde edilmesidir. Bazı makalelerde M üzerindeki indirgenen yapının, indirgenen Levi-Civita konneksiyonuna paraleldir ancak ve ancak M total geodeziktir ifadesi kanıtlanmıştır.

Önerme 4.15. ile aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.21. $(M^n, g, \nabla, \phi, \xi)$, lokal metalik Riemann manifoldunun bir kuadratik hiperyüzeyi olsun. O halde her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R_{X,Y}\xi = p((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X) - \phi((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X)$$

dır.

Sonuç 4.22. $(M^n, g, \nabla, \phi, \xi)$, lokal metalik Riemann manifoldunun kuadratik hiperyüzeyi olsun. Şayet ikinci temel form paralelse bu takdirde $R_{X,Y}\xi = 0$ dır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde hemen hemen kuadratik metrik ϕ-yapı tanıtılarak lokal metalik Riemann manifold N ile $\mathbb{R}$ katlı çarpımı olan katlı çarpım manifoldu $\tilde{M} = (\mathbb{R} \times_f N,\ <,> = dt^2 + f^2 g)$ Riemann manifoldun bir kuadratik metrik ϕ-yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Daha sonra (ϕ, η, ξ) hemen hemen kuadratik ϕ-yapısı ile verilen diferensiyellenebilir her M manifoldunun kendisiyle uyumlu bir Riemann metriğinin varlığı ispatlanmıştır.

Ayrıca $(\tilde{M}^{n+1}, \tilde{g}, \tilde{\nabla}, J)$ lokal metalik Riemann manifoldunun kuadratik ϕ-hiperyüzeyi $(M^n, g, \nabla, \phi, \eta, \xi)$ bazı özelikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Amari, S. 2016. Information Geometry and Its Applications. Springer, Japan, 373 pp.

Anonim, 2017. Length Contraction Formula. http://www.softschools.com/formulas/physics/length_contraction_formula/220/ (Erişim tarihi: 09.03.2019).

Bilen, L., Turanlı, S., Gezer, A. 2018. On Kaehler-Norden-Codazzi golden structures on pseudo-Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(2018): 1-10.

Bishop, R.L., O'Neill, B. 1969. Manifolds of Negative Curvature. *Transactions American Mathematical Soceity*, 145(1969): 1-49.

Blaga, A.M., Hretcanu C.E. 2018. Invariant, Anti-invariant and Slant Submanifolds of a Metallic Riemannian Manifold. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 48(2): 55-80.

Blair, D.E. 2010. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Birkhäuser, Boston, Massachusetts, USA, 304 pp.

Carriazo, A., Pérez-García, M.J. 2017. Slant Submanifolds in Neutral almost Contact Pseudo-Metric Manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 54: 71-80.

Chen, B. Y. 1973. Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, INC. New York, 298 pp.

Chen, B. Y. 2017. Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 516 pp.

Crasmareanu, M., Hretcanu, C.E. 2008. Golden Differential Geometry. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(2008): 1229-1238.

Crasmareanu, M., Hretcanu, C.E. 2009. Applications of the Golden Ratio on Riemannian Manifolds. *Turkish J. Math.*, 33(2009): 179-191.

Crasmareanu, M., Hretcanu, C.E. 2013. Metallic Structures on Riemannian Manifolds, *Revista de La Union Matematica Argentina*, 54(2): 15-27.

Debmath, P., Konar, A. 2011. A New Type of Structure on Differentiable Manifold, *International Electronic Journal of Geometry*, 4(1): 102-114.

Falcon, S. 2014. Generalized (k, r) - Fibonacci Number. *Gen. Math. Notes*, 25(2): 148-158.

Falcon, S., Plaza A. 2007. The *k*-Fibonacci Sequence and the Pascal 2-triangle. *Chaos, Solitons and Fractals*, 33(2007): 38-49.

Gauss, C.F. 1827. Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas. Typis Ditericianis, Gottinga, Germany, 50 pp.

Goldberg, S.I., Yano, K. 1970. Polynomial Structures on Manifolds. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 22(1970): 199-218.

Goldberg, S.I., Petridis, N.C. 1973. Differentiable Solutions of Algebraic Equations on Manifolds. *Kodai Math Sem Rep*, 25(1973): 111-128.

Gray, A. 1967. Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions. *J. Math. Mech.*, 16(1967): 715-737.

Marek-Crnjac, L. 2003. On the Mass Spectrum of the Elementary Particles of the Standard Model Using El Naschie's Golden Field Theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, 15(4):611-618.

Nesin, A. 2009. Matematiğe Giriş-3: Sayma / Kombinasyon Hesapları. Nesin Matematik Köyü Yayınları, İzmir, 312 s.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, New York, USA, 468 pp.

Özgür, C., Özgür, N.Y. 2015. Classification of Metallic Shaped Hypersurfaces in Real Space Forms. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(5): 784-794.

Sigalotti, LDiG., Mejias, A. 2006. The Golden Ratio in Special Relativity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3): 521-524.

Spinadel, V.W. 2000. The Metallic Means Family and Renormalization Group Techniques. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 6(1): 173-189.

Stakhov, A. 2006. The International Club of the Golden Section, 6 McCreary Trail, Bolton, ON, L7E 2C8, Canada.

Şahin, B. 2018. Almost Poly-Norden Manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics*, 1(1): 68-79

Yano, K., Kon, M. 1984. Structures on Manifolds. World Scientific, Singapore, 520 pp.

Yağcı, M. 2005. Altın Oran. *Matematik Dünyası*, 3: 52-60.

Zamkovoy, S. 2009. Canonical Connections on Paracontact Manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 36(1): 37-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sinem GÖNÜL
Doğum Yeri ve Tarihi : Altındağ/ANKARA, 09.11.1989
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Mustafa Kemal Y. Dil Ağırlıklı Lisesi, 2004-2008
Lisans : Ankara Üniversitesi, 2009-2013

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Batıkent Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, 2015-2016
Osmaneli Çok Programlı Anadolu Lisesi, 2016-2017
Karacabey Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, 2017-

İletişim (e-posta) : sinemarol@gmail.com

Yayınları :

1. **Gönül, S., Küpeli-Erken, İ., Yazla, A., Murathan, C. 2019**. A Neutral relation between metallic structure and almost quadratic ϕ-structure. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(2019): 268 – 278.

2. **Gönül, S., Küpeli-Erken, İ., Yazla, A., Murathan, C. 2018**. A Neutral relation between polynomial structure and almost quadratic ϕ-structure. 16th International Geometry Symposium, Manisa Celal Bayar University, Manisa, Turkey, 4-7 July 2018.