KONKAV YALINKAT FONKSİYONLAR

Hasan BAYRAM

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONKAV YALINKAT FONKSİYONLAR

Hasan BAYRAM

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Hasan BAYRAM tarafından hazırlanan “KONKAV YALINKAT FONKSİYONLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
Bursa U.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Bursa U.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof. Dr. Orhan GÜRLER
Bursa U.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi,
Fizik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Arzu AKGÜL
Kocaeli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
1 ../4/..2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Hasan BAYRAM

22/03/2019

ÖZET

Doktora Tezi

KONKAV YALINKAT FONKSİYONLAR

Hasan BAYRAM

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin amacı konkav yalınkat fonksiyonları detaylıca incelemek ve yeni sınıflar keşfetmektir.

Birinci bölümde; tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; $\mathbb{D}$ açık birim diskinde normalize edilmiş analitik ve yalınkat fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının temel özellikleri verildi. Ayrıca S sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı bağıntıları, alan teoremleri, büyüme, örtme ve distorsiyon sonuçları verildi.

Tezin esas kısmını oluşturan üçüncü bölümde; konkav yalınkat fonksiyonların ve bazı özel alt sınıflarının tanımı yapıldı ve bu sınıflara ait teoremlere yer verildi. Ayrıca bazı konkav yalınkatlık kriterleri incelendi.

Son bölümde de teze ait genel inceleme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat Fonksiyonlar, Konkav Yalınkat Fonksiyonlar
2019, vi + 56 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

CONCAVE UNIVALENT FUNCTIONS

Hasan BAYRAM

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consist of four chapters. The aim of this thesis is to examine concave univalent functions and to define new classes.

In the first chapter; some of definitions and theorems which will be used later are introduced.

In the second chapter; the basic features of the S class which is composed of normalized analytical and univalent functions, are given in the open unit disk $\mathbb{D}$. Furthermore the coefficient equations, theorems of the growth, covering and distortion results for univalent functions were examined.

In the third section, which constitutes the main part of the thesis, the definition of classes of concave univalent functions and some special subclasses and theorems of these classes were defined. In addition, some concave univalence criteria were examined.

In the last section, a general review of the thesis was made.

Key words: Univalent Functions, Concave Univalent Functions
2019, vi + 56 pages.

TEŞEKKÜR

Doktora tez dönemimde danışmanlığımı yürüten, akademik bilgisini ve bilimsel desteğini büyük bir sabır içerisinde tüm imkânlarıyla sunan ve bundan sonraki akademik yaşantımda tecrübelerinden istifade edeceğim Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, matematik öğrenimim ve eğitimimde katkısı olan tüm hocalarıma, doktora eğitimi sürecinde desteklerinden faydalandığım TÜBİTAK'a, bu günlere gelmemi sağlayan, sevgisini, anlayışını ve sabrını hiç esirgemeyen, bana yeni ufuklar açan çok değerli anne ve babama, her zaman destekçim olan ve güvenimi tazeleyen ablamlara, bu zor süreçte anlayışı, desteği, hissettirdiği sevgi ile her problemin üstesinden gelmemi sağlayan çok sevdiğim eşime sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışma kızım Zeynep Nur'a ve oğlum Hamza'ya ithaf edilmiştir.

Hasan BAYRAM

22/03/2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı disk
$\mathbb{D}$	Birim disk
Δ	Birim diskin dışı
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\overline{D}(z_0, r)$	D diskinin kapanışı
$D^*(z_0, r)$	D diskinin delinmiş komşuluğu
$\partial D(z_0, r)$	D diskinin sınırı
$f(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ birim diskinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
S	Normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
Σ	Δ bölgesinde tanımlı analitik ve yalınkat foksiyonların sınıfı
Σ_0	Σ sınıfındaki $z_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}$	Birim diskte analitik fonksiyonların sınıfı
LY	Lokal yalınkat fonksiyonların sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
C	Konveks fonksiyonların sınıfı
Co	Konkav yalınkat fonksiyonların sınıfı
T_f	pre-Schwarzian türev operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

"Rene Descartes 1630 yılı dolayında negatif bir sayının karekökünü "sanal" olarak niteledi. Onun bu nesneler konusundaki derin endişeleri $\sqrt{-1}$ sayısı için i sembolünü kullanmak şeklinde, günümüze kadar uzanmıştır. Kompleks analiz on dokuzuncu yüzyıl matematiğinin en yüksek onur ve övünç kaynağı oldu. Gauss kompleks integralin önemini 1811'de fark etti. Cauchy, kendi adını taşıyan o güzel integral teoremini 1825'te ispatladı ve analitik fonksiyonlarla bir grup kısmi diferansiyel denklemler sistemi arasındaki bağıntıyı ortaya çıkardı. Riemann kompleks analizin geometrik teorisini geliştirdi. On dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında Karl Weierstrass kuvvet serileri konusundaki teorisini ortaya koyarak kompleks analize tam bir kesinlik kazandırdı (King 1992)."

İkinci bölümde verilen tanım ve teoremler konkav yalınkat fonksiyonların açıklanmasında yardımcı olacak temel kavramlardır. Kompleks sayılarda açık disk, analitiklik, konformluk, yalınkatlık, yıldızıllık ve konvekslik gibi ifadelerin tanımları verilecektir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı teoremler verilecektir. Bieberbach (1916) tarafından verilen S sınıfının temeli olarak bilinen birim diskte normalizasyon şartlarını sağlayan analitik ve yalınkat fonksiyonların katsayıları ile ilgili Bieberbach konjektürü olarak bilinen ve 1984 yılına kadar birçok matematikçi tarafından çalışılan en sonunda tam ispatı de Branges (1984) tarafından yapılan teoreme yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise ilk olarak Goodman (1956) ve daha sonra ise Miller (1970, 1980) tarafından temelleri atılan konkav yalınkat fonksiyon kavramı ve bu fonksiyonların oluşturduğu Co sınıfına ait olma şartları ile bu sınıfın katsayı problemleri, distorsiyon bağıntıları gibi temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Livingston (1994) tarafından tekrar ele alınan ve detaylıca araştırılıp incelenen konkav yalınkat fonksiyonların $p \in (0,1)$ noktasında basit kutbu olan $Co(p)$ sınıfından ve bu sınıfa ait olma şartları ile temel teoremlerden bahsedilmiştir. İlk olarak Avkhadiev ve Wirths (2005) tarafından tanımlanan $Co(\alpha)$ sınıfının tanımı verilmiştir. Bu sınıfı daha sonra ele alan Bhowmik ve ark. (2010) tarafından elde edilen temel teoremlerden bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde yazar tarafından ele alınan $Co(\alpha)$ sınıfının bir alt sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfa ait katsayı bağıntıları, distorsiyon teoremleri verilmiştir.

Son bölümde yapılan çalışmaların kısa bir özeti ve tartışması verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde açık disk, analitiklik, yalınkatlık, yıldızıllık ve konvekslik gibi temel kavramlar ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler verilecektir.

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1.1 Tanım. z_0, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sabit bir nokta ve $0 < r < \infty$ olmak üzere

$$D(z_0, r) = \{z: |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z: |z - z_0| \leq r\}$$

$$D^*(z_0, r) = \{z: 0 < |z - z_0| < r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z: |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli ve r yarıçaplı *açık disk*, *kapalı disk*, *delinmiş açık disk* ve *çember* (z_0 merkezli ve r yarıçaplı açık diskin *sınırı*) denir.

Özel olarak $z_0 = 0$ ve $r = 1$ ise $D(0,1) = \mathbb{D}$ diski *birim disk* olarak adlandırılacaktır.

2.1.2 Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve A kümesinin boş olmayan açık bir alt kümesi U olsun. Eğer f fonksiyonu U kümesinin her noktasında diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna U da *analitiktir* denir (Koebe 1907).

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun analitikliği ile ilgili aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

2.1.3 Teorem. f fonksiyonu bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebiliyorsa bu noktada her mertebeden türeve sahiptir ve f fonksiyonu z_0 merkezli açık bir dairede yakınsak ve $a_n = f^n(z_0)/n!$ olmak üzere;

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.1}$$

Taylor serisi biçiminde tek türlü yazılabilir (Ahlfors 1966).

2.1.4 Teorem (Schwarz Lemma). f fonksiyonu, $\mathbb{D}$ diskinde $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathbb{D}$ de $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlikler $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir (Ahlfors 1966).

2.1.5 Teorem (Schwarz-Pick Lemma). $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| < 1$ olsun. Bu takdirde

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir (Ahlfors 1966).

Bazen birim disk yerine birim diskin dışını almak daha kullanışlı olabilir.

$\Delta = \{z \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| > 1\}$ bölgesi üzerinde

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^{-n} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlı Tanım 2.2.1 de verilmiş fonksiyonların sınıfı Σ ile, bu sınıfa ait olup $z_0 = 0$ değerini almayan fonksiyonların sınıfı Σ_0 ile gösterilir. $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ve Σ sınıfına ait her bir fonksiyonun, Δ bölgesini kompakt ve bağlantılı bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürdüğü açıktır.

2.1.6 Tanım. f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik değil fakat $D^*(z_0, r)$ diskinde analitik olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun *ayrık singüler noktası* denir (Ahlfors 1966).

2.1.7 Tanım. Eğer z_0 noktası f fonksiyonunun ayrık singüler noktası ise f fonksiyonu $D^* = D^*(z_0, r)$ delinmiş diskinde

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.3}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir. Eğer (2.3) ifadesinde bütün a_{-n} katsayıları sıfır ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *kaldırılabilir singüler noktası*, eğer sonlu sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı diğer tüm katsayılar sıfır ise z_0 noktasına f

fonksiyonunun *kutup noktası*, eğer sonsuz sayıda a_{-n} katsayıları sıfırdan farklı ise z_0 noktasına f fonksiyonunun *esaslı singüler noktası* denir (Ahlfors 1966).

2.1.8 Tanım. Eğer f fonksiyonunun bir bölgedeki singüler noktaları kutup noktalarından ibaretse f ye bu bölgede *meromorf fonksiyon* denir (Ahlfors 1966).

2.1.9 Teorem. U, $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da açık bir küme ve $f: U \to \bar{\mathbb{C}}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun meromorf olması için gerek ve yeter şart $E = \{z \in U : z = \infty \text{ veya } f(z) = \infty\}$ kümesinin U kümesinin ayrık alt kümesi ve f fonksiyonunun $U - E \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinde analitik olmasıdır (Palka 1991).

2.1.10 Tanım. D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $f(z_0) = w_0$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir *konform dönüşüm*dür denir. Eğer her $z_0 \in D$ noktasında f konform ise f, D de *konformdur* denir (Palka 1991).

Aşağıdaki teoremde bir fonksiyonun ne zaman konform olacağı ile ilgili pratik bir yol verilmiştir.

2.1.11 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur (Zill ve Shanahan 2003).

1851 yılında Riemann tarafından her bir basit bağlantılı bölgenin birim disk üzerine konform olarak dönüştürülebileceği ifade ve ispat edildi.

2.1.12 Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). B, $\mathbb{C}$ nin basit bağlantılı bir öz alt kümesi ve $z_0 \in B$ noktası verilmiş olsun. Bu takdirde $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ özelliğinde B yi birim disk üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f fonksiyonu vardır (Ahlfors 1966).

2.1.13 Tanım. $\mathbb{D}$ diskinde analitik, $p(0) = 1$ ve $\forall z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ olan

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \tag{2.4}$$

biçimindeki bir fonksiyona *reel kısmı pozitif analitik fonksiyon* denir. $\mathbb{D}$ de reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir (Caratheodory 1911).

P sınıfına ait bir fonksiyonun yalınkat olması gerekli değildir. Örneğin, $n \geq 2$ tamsayısı için, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olup, $\mathbb{D}$ de yalınkat değildir.

2.1.14 Lemma. $P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|p_n| \leq 2$$

dir (Caratheodory 1911).

2.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda yalınkat fonksiyonların temel tanım ve teoremlerine kısaca değinilecek ve bazı alt sınıfları tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir.

2.2.1 Tanım. B bölgesinde analitik bir f fonksiyonu aynı değeri birden fazla almıyorsa, başka bir deyişle f, B yi bir bölge üzerine bire-bir olarak resmediyorsa f fonksiyonuna B bölgesinde *yalınkat*tır (*ünivalent*) denir (Bieberbach 1916).

$\mathbb{D}$ de analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ bağıntısını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2.5}$$

biçimindeki bir fonksiyona *normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyon* denir. $\mathbb{D}$ diskinde normalize edilmiş bütün yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Bundan böyle yalınkat fonksiyon denildiğinde yalınkat analitik fonksiyon anlaşılacaktır.

S sınıfı ile Σ_0 sınıfı arasında birebir bir bağıntı mevcuttur. Gerçekten, $f \in S$ ise, $g(z) = 1/f(1/z) \ = z - a_2 + ({a_2}^2 - a_3)/z + \cdots$ fonksiyonu Σ_0 sınıfına aittir. Tersine, $g \in \Sigma_0$ ise$f(z) = 1/g(1/z) \ = z - b_0 z^2 + ({b_0}^2 - b_1)z^3 + \cdots$ fonksiyonu da S sınıfına aittir.

2.2.2 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer f, D bölgesinde yalınkat ise bu takdirde her $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ dır (Bieberbach 1919).

2.2.3 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. Eğer $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonunun yalınkat olduğu D bölgesinin z_0 noktasını bulunduran bir G alt bölgesi mevcuttur (Pommerenke 1975).

2.2.4 Teorem. f bir bölgede analitik ve bölgenin bir z_0 noktasında $f'(z_0) \neq 0$ ise bu takdirde f, z_0 ın uygun bir komşuluğunda yerel olarak yalınkattır. Tersine f fonksiyonu z_0 noktasında yerel olarak yalınkat ise $f'(z_0) \neq 0$ dır (Duren 1983).

2.2.5 Teorem. D, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun D bölgesinde konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart f nin yalınkat analitik bir fonksiyon olmasıdır (Bieberbach 1919).

2.2.6 Teorem. (f_n), bir D bölgesinde analitik ve yalınkat fonksiyonların bir dizisi ve D bölgesinin kompakt alt kümelerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olsun. Bu taktirde f fonksiyonu D bölgesinde ya yalınkat ya da sabittir (Duren 1983).

İspat. $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitiktir. Sabit olmadığı kabul edilerek yalınkat olduğu gösterilmelidir. $z_0 \in D$ keyfi sabit bir nokta olsun. $z \neq z_0$ için $f(z) \neq f(z_0)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $D_0 = D - \{z_0\}$ bölgesinde $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$ biçiminde tanımlanan (g_n) dizisi göz önüne alınsın. f_n fonksiyonları D bölgesinde yalınkat olduklarından g_n fonksiyonlarının D_0 da sıfırı yoktur. $g(z) = f(z) - f(z_0)$ olmak üzere D_0 bölgesinin kompakt alt kümelerinde $g_n \to g$ yakınsaması düzgündür. Üstelik g, D_0 da sıfır fonksiyonu değildir. (Eğer olsaydı f fonksiyonu D bölgesinde yalınkat olurdu). Hurwitz teoremi gereği g fonksiyonunun D_0 da sıfırı yoktur. Yani $z \neq z_0$ için $f(z) \neq f(z_0)$ dır. Dolayısıyla f fonksiyonu D bölgesinde yalınkattır.

2.2.7 Teorem (Bieberbach Konjektürü). $n \in \mathbb{N}$ için S sınıfında bulunan f fonksiyonlarının katsayıları $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağlar (Bieberbach, 1916).

2.2.8 Tanım. D kompleks düzlemde bir küme olsun. $0 \leq t \leq 1$ ve $z_0 \in D$ sabit bir nokta olmak üzere her $z \in D$ için $(1-t)z_0 + tz \in D$ ise D bölgesine z_0 noktasına göre *yıldızıldır* denir. $z_0 = 0$ olması halinde D bölgesini yıldızıl bir bölgeye resmeden $f(z)$ fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. Bu fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir (Alexander 1915).

2.2.9 Tanım. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in D$ için $tz_1 + (1-t)z_2 \in D$ ise D bölgesine *konvekstir* denir. D yi konveks bir bölgeye resmeden $f(z)$ fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. Konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir (Alexander 1915).

2.2.10 Teorem. f, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ eşitliklerini sağlayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{D}$ için

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır veya denk olarak;

$$f \in C \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

dir (Study 1913).

2.2.11 Teorem. $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ eşitliklerini sağlayan analitik bir f fonksiyonunun S^* sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{D}$ için

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır veya denk olarak;

$$f \in S^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

dir (Nevanlinna 1921).

Konvekslik ve yıldızıllık arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

2.2.12 Teorem. $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ eşitliklerini sağlayan $\mathbb{D}$ de analitik bir f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $g(z) = zf'(z)$ fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır (Alexander 1915).

İspat. $g(z) = zf'(z)$ olarak alınırsa

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliğinden açıkça görülüyor ki sol taraf $\mathbb{D}$ de analitik ve reel kısmı pozitif olursa benzer durum eşitliğin sağ tarafı için de geçerli olur.

2.2.13 Teorem. $\mathbb{D}$ de (2.5) tipinde bir fonksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise $f(z)$, $\mathbb{D}$ de yalınkat ve yıldızıldır.

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$ ise $f(z)$, $\mathbb{D}$ de yalınkat ve konvekstir (Alexander 1915).

2.2.14 Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^*$ ise bu takdirde $n = 2,3, \ldots$ için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik $f(z) = z/(1-z)^2$ fonksiyonu için geçerlidir (Nevanlinna 1921).

2.2.15 Teorem. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C$ ise bu takdirde $n = 2,3, \ldots$ için $|a_n| \leq 1$ dir. Eşitlik $f(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu ve onun rotasyonu için geçerlidir (Löwner 1917).

2.2.16 Teorem (Caratheodory Çekirdek Teoremi). $n = 1,2,3, \ldots$ için $f_n(z)$ fonksiyonları $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik ve yalınkat olsun ve $f_n(0) = 0$, $f_n{}'(0) > 0$, $F_n = f_n(\mathbb{D})$ olsun. $(f_n(z))$, $\mathbb{D}$ birim diskinde lokal yalınkat olarak yakınsak olması için gerek ve yeter şart $F \neq \mathbb{C}$ iken (F_n) dizisinin çekirdek -sıfır tek nokta kümesinden oluşan veya sıfırı da ihtiva eden açık bağlantılı küme- F ye yakınsamasıdır. Dahası limit fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskini F üzerine resmeder (Caratheodory 1911).

2.2.17 Tanım. $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$, $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik, tek değerli ve yalınkat olsun. D basit bağlantılı bir bölge olmak üzere $F(\mathbb{D}) = D$ olduğunu kabul edelim. $f(z)$, $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik, tek değerli, $f(0) = F(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subset D$ ise $\mathbb{D}$ birim diskinde $f(z)$, $F(z)$ ye sabordinedir denir ve $f(z) \prec F(z)$ biçiminde gösterilir (Goodman 1983).

3. KONKAV YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, D, $\mathbb{C}$ de keyfi bir bölge olmak üzere $\overline{\mathbb{C}}\backslash f(D)$ bölgesi konveks olan ve konkav olarak adlandırılan $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonları incelenecektir. Konkav fonksiyon kavramı tanımlanacak ve bazı konkav fonksiyon tipleri incelenecektir.

3.1 Co Sınıfı ve Bazı Özellikleri

Burada konkav yalınkat fonksiyonların temelini oluşturan Co sınıfı ve bu sınıfın bazı özellikleri verilecektir.

3.1.1 Tanım. $f: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde meromorf ve yalınkat olsun. f fonksiyonu sıfır noktasında analitik ve (2.5) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskini, tümleyeni $\overline{\mathbb{C}}$ a göre konveks bir bölgeye dönüştürüyorsa f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı Co ile gösterilir. Bu özelliğe sahip olan f fonksiyonları için $\overline{\mathbb{C}}\backslash f(\mathbb{D})$ kümesi konvekstir.

Bu ise f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskinde ya analitik olduğunu ya da bir kutba sahip olduğunu gösterir. $b \coloneqq f^{-1}(\infty) \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ şeklinde tanımlansın. Goluzin (1969) de geçen ve iyi bilinen bir sonuç f, $\mathbb{D}$ de analitik ise $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için

$$|a_n(f)| \leq n \tag{3.1}$$

dir.

Jenkins (1962) ve De Branges (1985)'in tahminine göre $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ için $b \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ ve f, $\mathbb{D}$ de analitik ise

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{|b|^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} |b|^{2k} \tag{3.2}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.1) ve (3.2) tipindeki sınırlar, yalınkat fonksiyonların bazı sınıfları için bilinir. Birçok durumda katsayı bölgesi sıfır merkezli disktir. Buradan $|a_n|$ için en iyi alt sınır 0 dır.

O halde belirli bir $|b| \in (0,1)$ için $C(|b|)$ sınıfı Co sınıfının özel bir alt sınıfıdır.

Yukarıdaki sonuçların tersine herhangi bir $f \in Co$ için $a_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$ ise $n = 2,3,4$ için

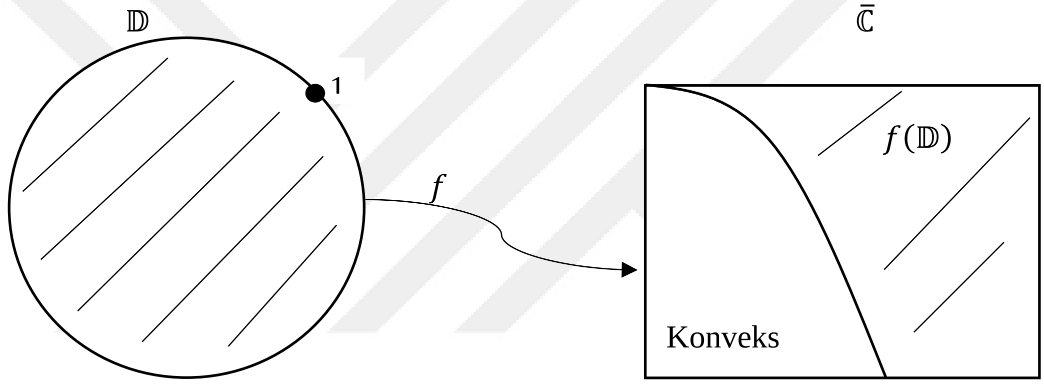
$$|a_n(f)| \geq 1 \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekte (3.3) deki tahminin $\forall n \geq 2$ için $|a_n| \geq 1/2$ olduğu gösterilmiştir.

Genel bir tanım yapılacak olursa

$$Co = \{f:\ f: \mathbb{D} \to \bar{\mathbb{C}} \text{ meromorf, yalınkat, } \bar{\mathbb{C}} \backslash f(\mathbb{D}) \text{ konveks } \}$$

yazılabilir. Bu durum Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 $f(\mathbb{D})$ nin konkavlığı

Ayrıca;

$$Co = \{f:\ f: \mathbb{D} \to \bar{\mathbb{C}} \text{ meromorf, yalınkat, } \bar{\mathbb{C}} \backslash f(\mathbb{D}) \text{ konveks, } f(b) = \infty, b \neq 0, |b| < 1 \}$$

yazılabilir.

$f \in Co$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik olabilir. Geometrik olarak $f \in Co$ için iki durum mevcuttur. $\bar{\mathbb{C}} \backslash f(\mathbb{D})$ konveks kümesi sınırlı ise f fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde yalınkat olduğundan f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskinde basit kutbu vardır. $\bar{\mathbb{C}} \backslash f(\mathbb{D})$ konveks kümesi sınırlı değilse $\infty \in \partial f(\mathbb{D})$ dir. Buradan f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ de analitik olduğu anlaşılır.

3.1.2 Teorem. $f \in Co$ ve $r := |f^{-1}(\infty)| \in (0,1]$ olsun. O halde tahminler

$$\frac{1+r^4}{r(1+r^2)} \leq |a_2(f)| \leq r + \frac{1}{r} \tag{3.4}$$

dir. (3.4) eşitsizliğinin sol tarafındaki eşitlik

$$l_r(z) = \frac{z - ((2r)/(1+r^2))z^2}{(1-z/r)(1-rz)}$$

olmak üzere

$$f(z) = e^{-i\theta} l_r\left(e^{i\theta} z\right), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu için sağlanır. (3.4) ifadesinin sağ tarafındaki eşitlik ise

$$k_r(z) = \frac{z}{(1-z/r)(1-rz)}$$

olmak üzere

$$f(z) = e^{-i\theta} k_r\left(e^{i\theta} z\right), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu için sağlanır (Avkhadiev ve Wirths 2002).

3.1.3 Lemma. $f \in Co$ ve f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ise $f_n^{-1}(\infty) \in \mathbb{D}$ ve $\mathbb{D}$ de $n \to \infty$ iken $f_n \to f$ yakınsaması düzgün olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ için bir $f_n \in Co$ dizisi vardır (Avkhadiev ve Wirths 2002).

3.1.4 Teorem. $f \in Co$ ise ϕ fonksiyonu

$$\phi(z) = z + \frac{2f'(z)}{f''(z)} \tag{3.5}$$

formülü ile tanımlanır ve $b = f^{-1}(\infty)$ ise $\phi(b) = b$ analitik tümleyenine sahiptir ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) ϕ, fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve $z \in \mathbb{D}$ için $|\phi(z)| \leq 1$ dir.

(ii) ϕ fonksiyonunun tek sabit noktası $b = f^{-1}(\infty)$ dir. Daha açık olarak, $|b| < 1$ ise $\phi(b) = b$, $\phi'(b) = \phi''(b) = 0$ ve $|b| = 1$ ise $\phi'(b) \in [0, 1/3]$ dir.

(iii) ϕ fonksiyonunun $\mathbb{D}\backslash\{b\}$ bölgesinde sabit noktası yoktur (Avkhadiev ve Wirths 2002).

3.1.5 Lemma. F ve G fonksiyonları $\mathbb{D}$ diskinde meremorf ve orijinin bir komşuluğunda analitik olsun. Burada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

ve

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$$

açılımına sahiptirler. Eğer $|\phi(z)| \leq 1$ ve $|\omega(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$ (Yani ω_1, $z = 0$ noktasında analitik olmak üzere $\omega(z) = z\omega_1(z)$ dir) özelliğinde $\mathbb{D}$ diskinde analitik ϕ ve ω fonksiyonları

$$F(z) = \phi(z)G\big(\omega(z)\big) \tag{3.6}$$

olacak şekilde mevcut ise her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |B_k|^2 \tag{3.7}$$

eşitsizliği sağlanır (Avkhadiev ve ark. 2004).

3.1.6 Sonuç. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için, F ve G fonksiyonları (3.6) eşitliğindeki gibi ve $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k |A_k|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |B_k|^2$$

eşitsizliği sağlanır (Avkhadiev ve ark. 2004).

3.1.7 Teorem. $f \in Co$ olsun. Bu taktirde $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \geq 1$ dir.

Eşitlik ancak ve ancak $\tau \in [0,2\pi)$ ve $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ olmak üzere $f(z) = z/(1 - \exp(i\tau)z)$ fonksiyonu için sağlanır (Avkhadiev ve ark. 2004).

3.2 $\boldsymbol{Co(p)}$ Sınıfı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda $Co(p)$ sınıfını tanımlamadan önce gerekli olan bazı kavramlar tanımlanacak ve bazı temel bilgiler verilecektir.

$0 < p < 1$ noktasında basit kutbu olan, $|z| < p$ için $f(z) = z + b_2 z^2 + \cdots$ tipinde kuvvet serisi açılımına sahip, birim diskte yalınkat ve meromorf fonksiyonların sınıfı $S(p)$ ile gösterilir. Bu sınıfta iki tip açılımı göz önüne alacağız. Sıfır noktasındaki Taylor açılımı

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n , \qquad |z| < p \tag{3.8}$$

ve p noktasındaki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n (z-p)^n , \qquad |z-p| < 1-p. \tag{3.9}$$

Bu sınıf birçok kişi tarafından araştırılıp incelendi. Jenkins (1962) tarafından $S(p)$ sınıfındaki f fonksiyonu (3.8) tipinde bir açılıma sahip olduğunda

$$|a_n| \leq \frac{1 + p^2 + \cdots + p^{2n-2}}{p^{n-1}} \tag{3.10}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterildi. Eşitlik $f(z) = -pz/((z-p)(1-pz))$ fonksiyonu için sağlanır.

Royster (1970) tarafından $K(p)$ sınıfının $S(p)$ sınıfına ait olan ve $0 < \delta < 1$ iken $\delta < |z| < 1$ için

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0 \tag{3.11}$$

özelliğindeki elemanlarından oluştuğu gösterildi. Ayrıca $\Sigma(p) \subset S(p)$ sınıfını da çalışan Royster (1970) tarafından bu sınıfa ait f fonksiyonlarının $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+pz}{1-pz}-\frac{z+p}{1+pz}-1-\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \tag{3.12}$$

şartını sağladığı ve $0<p<2-\sqrt{3}$ özelliğindeki p sayıları için $K(p)=\Sigma(p)$ olduğu, $p>2-\sqrt{3}$ özelliğindeki p sayıları için $K(p)$ sınıfı $\Sigma(p)$ nin bir alt kümesi olduğu gösterilmiştir.

3.2.1 Tanım. $0<p<1$ noktasında basit kutbu olan, birim diskte yalınkat ve meromorf fonksiyonlar $Co(p)$ sınıfına aittir ve orijin etrafında (3.8) tipinde açılıma sahiptir (Livingston 1994).

Bu tanımı göz önünde bulundurarak $K(p)\subset Co(p)$ olduğu görülür. Ayrıca Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) tarafından $0<p<1$ için $Co(p)=\Sigma(p)$ olduğu gösterilmiştir.

3.2.2 Teorem. f fonksiyonunun $Co(p)$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left[1+p^2-2pz+\frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{f'(z)}\right]<0 \tag{3.13}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Livingston 1994).

3.2.3 Uyarı. 3.2.2 Teoreminde $f\in Co(p)$ iken $P(z)$ fonksiyonu

$$P(z)=2pz-1-p^2-\frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{f'(z)}$$

biçiminde tanımlanırsa $z\in\mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}P(z)>0$, $P(p)=1-p^2$ ve $P'(p)=0$ dır.

3.2.4 Lemma. $P(z)$ fonksiyonu $z\in\mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}P(z)>0$ ve $P(0)=1$ şartlarını sağlasın. Bu taktirde $0<p<1$ olmak üzere $z\in\mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(z-p)(1-pz)P(z)+p}{z}-pz\right]>0$$

dır (Livingston 1994).

3.2.5 Lemma. $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}P(z) > 0$ ve $P(p) = 1 - p^2$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zP(z) - p + pz^2}{(z-p)(1-pz)}\right] > 0$$

dır (Livingston 1994).

3.2.6 Teorem. $0 < p < 1$ için $Co(p) = \Sigma(p)$ dir (Livingston 1994).

3.2.7 Lemma. $P(z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}P(z) > 0$, $P(p) = 1 - p^2$ ve $0 < p < 1$ iken $P'(p) = 0$ olsun. $|z - p| < 1 - p$ için $P(z) = (1 - p^2) + d_2(z-p)^2 + d_3(z-p)^3 + \cdots$ açılımına sahip ise

$$|d_2| \leq \frac{2}{1-p^2} \tag{3.14}$$

dir. Ayrıca $2/3 \leq p < 1$ için

$$\left|\frac{p}{1-p^2}d_2 + d_3\right| \leq \frac{6p}{(1-p^2)^2} \tag{3.15}$$

ve $0 < p \leq 2/3$ için

$$\left|\frac{p}{1-p^2}d_2 + d_3\right| \leq \frac{2[1 + (9/4)p^2]}{1-p^2} \tag{3.16}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler kesindir (Livingston 1994).

3.2.8 Teorem. $f \in Co(p)$ fonksiyonu (3.9) tipinde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda

$$|b_1| \leq \frac{p^2}{(1-p^2)^3} \tag{3.17}$$

dir. Ayrıca $0 < p \leq 2/3$ için

$$|b_2| \leq \frac{(4 + 9p^2)|b_{-1}|}{12(1-p^2)^3} \tag{3.18}$$

ve $2/3 \leq p < 1$ için

$$|b_2| \leq \frac{p}{(1-p^2)^3}|b_{-1}| \leq \frac{p^3}{(1-p^2)^4} \tag{3.19}$$

elde edilir. Bütün eşitsizlikler kesin olup (3.17) ve (3.19) bağıntılarının eşitlik halleri $f(z) = -pz/((z-p)(1-pz))$ fonksiyonu için sağlanır. (3.18) deki eşitlik $P(z)$, 3.2.7 Lemmasının hipotezini sağlayan ve (3.16) ile verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$P(z) = 2pz - 1 - p^2 - \frac{(z-p)(1-pz)f''(z)}{f'(z)}$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonu için gerçeklenir (Livingston 1994).

3.2.9 Uyarı. Burada $0 < p < 2/3$ olması halinde (3.18) de $|b_{-1}| \leq p^2/(1-p^2)$ bağıntısını kullanmak eşitsizliğin sınırı için kesin bir sonuç vermez. Daha sonra (3.17) eşitsizliğinin farklı bir ispatı Bhowmik (2010) tarafından yapılmıştır.

3.2.10 Teorem. $f \in Co(p)$ fonksiyonu (3.9) tipinde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda

$$\left|p + \frac{b_0(1-p^2)}{b_{-1}}\right| \leq \frac{1+p^2}{p}$$

olup eşitlik $f(z) = -pz/((z-p)(1-pz))$ fonksiyonu için sağlanır (Livingston 1994).

$f \in Co(p)$ fonksiyonu (3.8) açılımına sahip olsun. Bütün n sayıları için $|a_{\mathrm{n}}|$ katsayılarının kesin üst sınırları ve $Re(a_2)$ nin kesin alt sınırları Miller (1980) tarafından gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremde $Re(a_3)$ için Livingston (1994) tarafından verilen kesin alt sınır elde edilecektir.

3.2.11 Teorem. $f \in Co(p)$ fonksiyonu (3.8) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\mathrm{Re}a_2 \geq \frac{1+p^4}{p(1+p^2)} > 1 \tag{3.20}$$

ve

$$\mathrm{Re}a_3 \geq \frac{1-p^2+p^4}{p^2} = \frac{1+p^6}{p^2(1+p^2)} > 1 \tag{3.21}$$

dir. Her iki eşitsizlik de kesin olup eşitlik

$$f(z) = \frac{p(1+p^2)z - 2p^2z^2}{(1-p^2)(p-z)(1-pz)}$$

fonksiyonu için geçerlidir (Livingston 1994).

3.2.12 Uyarı. Livingston (1994) tarafından $f \in Co(p)$ iken her n için

$$\mathrm{Re}(a_n) \geq \frac{1+p^{2n}}{p^{n-1}(1+p^2)}$$

olduğu tahmin edildi.

Bir $f: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonunun $Co(p)$ sınıfına ait olabilmesi için aşağıdaki şartların sağlanması gerekir:

(*i*) f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde meromorf ve $p \in (0,1)$ noktasında basit kutba sahiptir.

(*ii*) $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ dir.

(*iii*) f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskini, $\overline{\mathbb{C}}$ kümesine göre tümleyeni konveks olan bir kümeye konform olarak resmeder.

Konkav fonksiyonlarda katsayı bağıntılarının incelenme süreci Miller (1980) tarafından (*i*) ve (*ii*) özelliğindeki f fonksiyonları için

$$\left| a_2 - \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} \right| \leq \frac{p}{1+p^2} \tag{3.22}$$

ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{2p}{z-p} - \frac{2pz}{1-pz}\right) < 0 \tag{3.23}$$

bağıntılarının ispatlanmasıyla başladı.

Aşağıdaki teorem Wirths (2004) tarafından ispatlanmış olup burada iki alternatif kısa ispatı verilecektir.

3.2.13 Teorem. f fonksiyonunun $Co(p)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun (ii) bağıntısını sağlaması ve $\mathbb{D}$ diskinde

$$\alpha := \frac{2p}{1+p^2} \in (0,1)$$

iken $\omega(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2p}{1-zp} + \frac{2}{p(1-z/p)} + \frac{2z\omega(z) - \alpha(1+\omega(z))}{1 - \alpha z\big(1+\omega(z)\big) + z^2\omega(z)} \tag{3.24}$$

bağıntılarını sağlayan bir ω analitik fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

İspat. Bunlardan birisi (3.23) eşitsizliği ile diğeri ise aşağıdaki temsil formülü ile başlar.

f fonksiyonunun $Co(p)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun (ii) bağıntısını sağlaması ve $\mathbb{D}$ diskinde $\psi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{2f'(z)}{f''(z)} + z = \frac{p + \left(\frac{z-p}{1-zp}\right)^3 \psi(z)}{1 + \left(\frac{z-p}{1-zp}\right)^3 p\psi(z)} \tag{3.25}$$

eşitliğini sağlayan analitik ψ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Avkhadiev ve ark. 2004, Avkhadiev ve Wirths 2002). Böylece (3.23) ve (3.25) nin kısa bir ispatı elde edilir.

Diğer yandan, Miller (1970), Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) ve Livingstone (1994) daki hususlar (3.23) ile birlikte göz önüne alınıp hesaplandığında f fonksiyonunun $Co(p)$ sınıfına ait olabilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun (ii) bağıntısını sağlaması ve $\mathbb{D}$ diskinde $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\big(P(z)\big) > 0, \qquad P(p) = \frac{1+p^2}{1-p^2}, \qquad P(0) = 1$$

ve

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2p}{1-zp} + \frac{2}{p(1-z/p)} + \frac{1}{z}\big(1 - P(z)\big) \tag{3.26}$$

eşitliklerini sağlayan analitik bir P fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Böylece yukarıdaki özellikleri sağlayan bir P fonksiyonunun olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{D}$ diskinde $\psi(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$P(z) = \frac{1 + z\left(\dfrac{\psi(z)\left(\frac{z-p}{1-zp}\right) + p}{1 + \psi(z)\left(\frac{z-p}{1-zp}\right)p}\right)}{1 - z\left(\dfrac{\psi(z)\left(\frac{z-p}{1-zp}\right) + p}{1 + \psi(z)\left(\frac{z-p}{1-zp}\right)p}\right)} \tag{3.27}$$

eşitliğini sağlayan ψ analitik fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

(3.27) deki fonksiyon (3.26) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2p}{1-zp} + \frac{2}{p(1-z/p)} + 2\frac{\psi(z)(z-p) + (1-zp)p}{\psi(z)(z-p)^2 - (1-zp)^2} \tag{3.28}$$

elde edilir. Benzer özdeşlik (3.25) bağıntısından da elde edilir. Bu ise (3.23) ile (3.25) eşitliklerini ispatlar. (3.24) eşitliğini elde etmek için (3.28) eşitliğinde

$$\psi(z) := \frac{p^2 - \omega(z)}{1 - \omega(z)p^2}$$

yazılması yeterlidir. ω fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve $\omega(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ olduğundan (3.24) elde edilir. Bu ise 3.2.13 Teoremindeki iddiayı ispatlar.

$Co(p)$ sınıfında bulunan f fonksiyonlarının katsayıları ile ilgili bağıntı Avkhadiev ve Wirths (2007) tarafından verilmiştir. 3.2.14 Teoreminin ispatı doktora tez konusunun dışına çıktığı için burada verilmeyecektir. İspat Avkhadiev ve Wirths (2007) de bulunabilir.

3.2.14 Teorem. $n \geq 2$ ve $p \in (0,1)$ olsun. Herhangi bir $f \in Co(p)$ için

$$\left| a_n - \frac{1 - p^{2n+2}}{p^{n-1}(1-p^4)} \right| \leq \frac{p^2(1 - p^{2n-2})}{p^{n-1}(1-p^4)} \tag{3.29}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada eşitlik hali ancak ve ancak $\theta \in [0,2\pi)$ için

$$f_\theta(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+e^{i\theta})z^2}{(1-z/p)(1-zp)} \tag{3.30}$$

biçiminde tanımlı $f = f_\theta$ fonksiyonu için elde edilir.

3.2.15 Teorem. f fonksiyonu (3.8) açılımına sahip ve $f \in Co(p)$ olsun. $p \in (0,1)$ için $\alpha := \frac{1+p^2}{p}$ iken

$$|3a_3 - (a_2+\alpha)^2 + (\alpha^2+2)| \leq 1 - |a_2 - \alpha|^2 \tag{3.31}$$

dir (Bhowmik 2010).

İspat. 2.1.5 Teoremindeki Schwarz-Pick Lemması $z = 0$ için kullanılırsa

$$|h'(0)| + |h(0)|^2 \leq 1 \tag{3.32}$$

elde edilir. Üstelik,

$$h(0) = \omega'(0) = \frac{1}{2}P'(0)$$

ve

$$h'(0) = \frac{1}{2}\omega''(0) = \frac{1}{4}(P''(0) - (P'(0))^2)$$

olduğundan (3.32) eşitsizliğinden

$$|P''(0) - (P'(0))^2| + |(P'(0))^2| \leq 4 \tag{3.33}$$

elde edilir. $f \in Co(p)$ için (3.33) eşitliği 3.2.6 Teoreminin ispatında tanımlanan $P(z)$ eşitliğinde kullanılarak

$$\begin{cases} P'(0) = -2a_2 + 2\left(p + \frac{1}{p}\right) \\ P''(0) = -2(6a_3 - 4{a_2}^2) + 4\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right) \end{cases} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.34) deki iki eşitlik ve (3.33) deki eşitsizlik kullanılarak (3.31) deki eşitsizliğin ispatı elde edilir. Eşitlik

$$f(z)=\frac{-pz}{(z-p)(1-pz)}$$

fonksiyonu için sağlanır. Bu fonksiyonda

$$a_2=\frac{1+p^2}{p}=\alpha \qquad \text{ve} \qquad a_3=\frac{1+p^2+p^4}{p^2}=\alpha^2-1$$

olarak alınmıştır.

Şimdi $f\in Co(p)$ fonksiyonları için $\mu\in\mathbb{C}$ iken Taylor katsayılarının μa_2-a_3 kombinasyonu için değişkenlik kümesi bulunacaktır.

3.2.16 Teorem. f fonksiyonu (3.8) açılımına sahip ve $f\in Co(p)$ olsun. $\alpha:=\frac{1+p^2}{p}$ alalım. $\mu\in\mathbb{C}$ için μa_2-a_3 ün değişkenlik kümesi

$$\left|\mu a_2-a_3-\left(\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)\mu+(2-\alpha^2)\right)\right|\leq\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{3}+\frac{3|\mu-\alpha|^2}{4}\right] & , \quad |\mu-\alpha|<\frac{2}{3};\\ \left|1-\frac{\mu}{\alpha}\right| & , \quad |\mu-\alpha|\geq\frac{2}{3}\end{cases}$$

eşitsizliği ile belirlenir (Bhowmik 2010).

İspat. Teoremin ispatı için 3.2.13 Teoremindeki $f\in Co(p)$ fonksiyonları için f''/f' temsiline ihtiyaç duyulur. Bu (3.8) ifadesi ve $z\in\mathbb{D}$ için

$$\omega(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

ile birlikte kullanılırsa

$$a_2=\frac{1+p^2}{p}-\frac{p(1+c_0)}{1+p^2}=\alpha-\frac{1}{\alpha}(1+c_0)$$

ve

$$a_3=p^2+\frac{1}{p^2}-c_0-\frac{pc_1}{3(1+p^2)}=\alpha^2-2-c_0-\frac{c_1}{3\alpha}$$

elde edilir. Buradan

$$\mu a_2 - a_3 - \left(\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)\mu + (2 - \alpha^2)\right) = \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)c_0 + \frac{c_1}{3\alpha} =: \Phi_\alpha(\omega)$$

elde edilir. Böylece $|c_0| = x \in [0,1]$ iken

$$|\Phi_\alpha(\omega)| = \left|\left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right)c_0 + \frac{c_1}{3\alpha}\right|$$

$$\leq \left|1 - \frac{\mu}{\alpha}\right||c_0| + \frac{1}{3\alpha}(1 - |c_0|^2) \qquad (|c_1| \leq 1 - |c_0|^2)$$

$$= \left|1 - \frac{\mu}{\alpha}\right|x + \frac{1}{3\alpha}(1 - x^2) =: r(x) \tag{3.35}$$

olduğu görülür. Yani amaç tüm $\mu \in \mathbb{C}$ için $\max\{r(x) : x \in [0,1]\}$ değerini hesaplamaktır. Bunun için problem iki durumda incelenecektir:

1. Durum: $|\mu - \alpha| < \frac{2}{3}$ olsun. Bu durumun ispatı Bhowmik ve ark. (2007) tarafından yapılmıştır.

2. Durum: $|\mu - \alpha| \geq \frac{2}{3}$ olsun. Burada

$$r'(x) = \left|1 - \frac{\mu}{\alpha}\right| - \frac{2x}{3\alpha}$$

$$\geq \frac{2}{3\alpha}(1 - x)$$

$$\geq 0.$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $|\mu - \alpha| \geq 2/3$ iken $r(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artandır. Böylece

$$\max\{r(x) : x \in [0,1]\} = r(1) = \left|1 - \frac{\mu}{\alpha}\right|$$

elde edilir. (3.35) bağıntısından

$$|\Phi_\alpha(\omega)| \leq \left|1 - \frac{\mu}{\alpha}\right|$$

elde edilir. Bu ise teoremin ikinci eşitsizliğini ispatlar. $\omega(z) \equiv c_0$ iken disklerin $|c_0| = 1$ sınır noktalarının elde edildiği $f \in Co(p)$ fonksiyonları sadece $|c| = 1$ için

$$f_c(z) := \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+c)z^2}{\left(1 - \frac{z}{p}\right)(1 - zp)} \tag{3.36}$$

olarak tanımlanır. Teoremin ikinci eşitsizliğiyle tanımlanan diskin iç noktaları $|c| < 1$ için (3.36) fonksiyonu için sağlanır.

3.2.17 Sonuç. f fonksiyonu (3.8) tipinde bir açılıma sahip ve $f \in Co(p)$ olsun.

$$|a_2 - a_3| \leq \alpha^2 - \alpha - 1$$

elde edilir. Bilhassa $\alpha = \frac{1+p^2}{p}$ iken

$$\big||a_2| - |a_3|\big| \leq \alpha^2 - \alpha - 1$$

elde edilir. Buradaki eşitsizliklerin ikisinin de eşitlik halleri

$$f(z) = \frac{-pz}{(z-p)(1-pz)}$$

fonksiyonu için sağlanır (Bhowmik 2010).

Miller (1980) tarafından meromorf yalınkat bir f fonksiyonunun $f \in \mathrm{Co}(p)$ olması için gerek ve yeter şartın $z, \xi \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi} + \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}\right] < 0 \tag{3.37}$$

eşitsizliğini sağlaması olduğu ispatlandı. Burada

$$P_f(z) \equiv \frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\xi)} - \frac{z+\xi}{z-\xi} + \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz} \tag{3.38}$$

iken $P_f \in P$ yazılabilir. P_f nin orijin civarındaki kuvvet serisinde ilk iki katsayısı

$$p_1 = 2\left(\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} + \frac{1+p^2}{p}\right) \tag{3.39}$$

ve

$$p_2 = 2\left(\frac{1}{f(\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{f(\xi)} + \frac{1+p^4}{p^2}\right) \quad (3.40)$$

şeklindedir. P sınıfındaki fonksiyonların iyi bilinen sınır özellikleri kullanılarak

$$\left|\frac{1}{f(\xi)} - \frac{1}{\xi} + \frac{1+p^2}{p}\right| \leq 1 \quad (3.41)$$

ve

$$\left|\frac{1}{f(\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2a_2}{f(\xi)} + \frac{1+p^4}{p^2}\right| \leq 1 \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.41) ve (3.42) denklemlerindeki eşitlikler $\xi \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ ve $p \in (0,1)$ iken $f \in \mathrm{Co}(p)$ fonksiyonları için geçerlidir.

3.2.18 Teorem. $p \in (0,1)$ iken $f \in \mathrm{Co}(p)$ fonksiyonu (3.8) tipinde bir açılıma sahip ise

$$\left|2a_3 - {a_2}^2 - \frac{1+p^4}{p^2}\right| \leq 1 \quad (3.43)$$

dir (Zaprawa 2010).

Bu sonuç aşağıdaki teoremle kısmen geliştirildi.

3.2.19 Teorem. $p \in (0,1)$ iken $f \in \mathrm{Co}(p)$ fonksiyonu (3.8) tipinde bir açılıma sahip ise

$$\left|a_3 - \frac{1+p^2}{p}a_2 + 1\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 - \left|a_2 - \frac{1+p^2}{p}\right|^2\right) \quad (3.44)$$

dir (Zaprawa 2010).

3.3 $Co(\alpha)$ Sınıfı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda konkav yalınkat fonksiyonların alt sınıfı olan $Co(\alpha)$ sınıfı tanımlanacak ve bir f fonksiyonunun hangi şartlar altında bu sınıfta olacağı verilecektir. Ayrıca bu sınıfa ait fonksiyonlar için temel teoremler verilecektir.

Birim diskte analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{H}$ ile gösterilsin. Lokal yalınkat fonksiyonların sınıfı da LY ile gösterilsin. $f \in LY$ için pre-Schwarzian türev operatörü T_f;

$$T_f = \frac{f''}{f'}$$

biçiminde tanımlanır ve T_f operatörünün normu

$$\|T_f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |T_f(z)|$$

biçiminde tanımlanır. $\|f\| < \infty$ olması için gerek ve yeter şartın f fonksiyonunun lokal yalınkat olması gerektiği bilinmektedir. Örneğin $r = r(f) > 0$ sabiti vardır öyle ki $\mathbb{D}$ diskinde kalan r merkezli her bir diskte f fonksiyonu yalınkattır.

$f \in \mathcal{H}$ sınıfındaki fonksiyonlar $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonuna sahip ise A sınıfına aittirler. $\mathcal{H}_1$ ise $f(0) = 1$ eşitliğini sağlayan $f \in \mathcal{H}$ sınıfındaki fonksiyonlardan oluşur. $f \in S$ için $\|T_f\| \leq 6$ ve $f \in C$ için $\|T_f\| \leq 4$ olduğu bilinen bir özelliktir. Tersine Becker (1972) den $f \in A$ ve $\|T_f\| \leq 1$ ise $f \in S$ dir.

3.3.1 Tanım. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $Co(\alpha)$ sınıfına aittir denir:

- f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ standart normalizasyonlarını sağlayan analitik bir fonksiyondur. Ek olarak $f(1) = \infty$ şartı sağlanır.
- f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskini tümleyeni $\mathbb{C}$ ye göre konveks olan bir kümeye konform olarak resmeder.
- $f(\mathbb{D})$ nin ∞ da açılma açısı $\alpha \in (1,2]$ iken $\pi\alpha$ değerine eşit veya bu değerden daha azdır.

$Co(\alpha)$ sınıfı konkav yalınkat fonksiyonların bir sınıfı olarak tanımlanacaktır. Konkav fonksiyonlarla ilgili daha detaylı bilgiler için Avkhadiev ve ark. (2006), Cruz ve Pommerenke (2007) kaynakları kullanılabilinir. Özellikle $z \in \mathbb{D}$ için,

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0$$

eşitsizliği $f \in Co$ konkav fonksiyonları için bazen tanım olarak da kullanılır (Pfaltzgraf ve Pinchuk 1971).

Bhowmik ve ark. (2010) f analitik fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskini $\pi\alpha$ açılı konkav bir bölge üzerine resmetmesi için gerek ve yeter şartın

$$P_f(z) = \frac{2}{\alpha - 1}\left[\frac{\alpha + 1}{2}\frac{1 + z}{1 - z} - 1 - z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \tag{3.45}$$

iken $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}P_f(z) > 0 \tag{3.46}$$

olması gerektiğini göstermiştir.

$\alpha \in (1,2]$ ve $f \in Co(\alpha)$ için $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{D})$ kapalı kümesinin konveks ve sınırsız olduğu açıktır.

Şimdi $(1 - |z|^2)T_f(z)$ fonksiyonları için tam değişkenlik kümesi bulunacak ve bunun bir sonucu olarak $Co(\alpha)$ sınıfında bulunan f fonksiyonlarının $\|T_f\|$ pre-Schwarzian normu için alt ve üst sınırları hesaplanacaktır. Sonrasında ise $f''(0)$ sabit iken $f \in Co(\alpha)$ için $(1 - |z|^2)T_f(z)$ fonksiyonlarının değişkenlik kümesi bulunacaktır. $Co(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için Hadamard fonksiyonlarının terimlerinin temsil formülü verilecek sonrasında da bu sınıfa ait fonksiyonların katsayı bağıntıları verilecektir.

3.3.2 Lemma. $\psi \in \mathcal{H}_1$ fonksiyonu yalınkat ve 1 noktasına göre yıldızıl olsun $g \in A$ fonksiyonu da $z \in \mathbb{D}$ ve $\alpha \in (1,2]$ için

$$\frac{2}{\alpha - 1}\left[\frac{(\alpha + 1)}{2}\frac{1 + z}{1 - z} - 1 - z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right] = \psi(z) \tag{3.47}$$

eşitliğini sağlasın. $f \in Co(\alpha)$ fonksiyonu için

$$\frac{2}{\alpha - 1}\left[\frac{(\alpha + 1)}{2}\frac{1 + z}{1 - z} - 1 - z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right] \prec \psi(z) \tag{3.48}$$

ise

$$(1-z)^{\alpha+1}f'(z) \prec (1-z)^{\alpha+1}g'(z)$$

dir (Bhowmik ve ark. 2010).

$f, g \in A$ için $f' \prec g'$ şartı $\|T_f\| \leq \|T_g\|$ eşitsizliğini açıklar. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

3.3.3 Teorem. g' fonksiyonu (3.47) deki gibi olsun. $f \in Co(\alpha)$ ise

$$F(z) = \int_0^z (1-\zeta)^{\alpha+1} f'(\zeta)d\zeta \qquad \text{ve} \qquad G(z) = \int_0^z (1-\zeta)^{\alpha+1} g'(\zeta)d\zeta$$

iken $\|T_F\| \leq \|T_G\|$ dir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.4 Sonuç. $f \in Co(\alpha)$ ve (3.47) deki g' fonksiyonu için $w: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ analitik fonksiyonu $w(0) = 0$ eşitliğini sağladığında

$$\begin{aligned} &\left|(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - (\alpha+1)\frac{1-|z|^2}{1-z}\right| \\ &\qquad \leq \left|(1-|z|^2)\frac{g''(w(z))}{g'(w(z))} - (\alpha+1)\frac{1-|w(z)|^2}{1-w(z)}\right| \end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Eşitlik $w(z) = z$ için gerçeklenir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.5 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ sabit olsun. $(1-|z|^2)T_f(z)$, fonksiyonelinin değer kümesi $f \in Co(\alpha)$ iken

$$2\bar{z} + (\alpha+1)(1-\bar{z})/(1-z)$$

merkezli kapalı disktir ve yarıçapı $\alpha - 1$ dir. Diskin sınır noktaları ancak ve ancak $\theta \in [0,2\pi]\backslash\{\pi\}$ için

$$g_\theta(z) = \frac{1}{\alpha(1+e^{i\theta})}\left[\left(\frac{1+e^{i\theta}z}{1-z}\right)^{\alpha} - 1\right]$$

ve $\theta = \pi$ için

$$g_\pi(z) = \frac{z}{1-z}$$

olmak üzere f, g_θ nın bir fonksiyonu iken elde edilir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.6 Sonuç. $\alpha \in [1,2]$ ve $f \in Co(\alpha)$ olsun. Bu takdirde $4 \leq \|T_f\| \leq 2\alpha + 2$ dir. Alt sınırdaki eşitlik hali g_π fonksiyonu için geçerlidir. Üst sınırdaki eşitlik hali ise yukarıdaki teoremin ifadesinde kullanılan g_0 fonksiyonu için geçerlidir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.7 Uyarı. C sınıfında bulunan f konveks yalınkat fonksiyonları için $\|T_f\|$ pre-Schwarzian normunun $\|T_f\| \leq 4$ eşitsizliğini sağladığı biliniyor. Burada eşitlik $g_\pi(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu için sağlanır. Sonra konkav fonksiyonların sınıfı için $4 \leq \|T_f\|$ olduğu görüldü. Burada da eşitlik $g_\pi(z) = z/(1-z)$ fonksiyonu için sağlanır. Bu fonksiyon iki sınıf için de aynıdır fakat $Co(\alpha)$ sınıfında $\alpha = 1$ iken bulunan tek fonksiyondur (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.8 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ olsun. Her bir $f \in Co(\alpha)$ fonksiyonu ve $|z| = r < 1$ için

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Her bir $z \neq 0$, $z \in \mathbb{D}$ için eşitlik sadece $\theta \in [0,2\pi] \backslash \{0\}$ iken $f = g_\theta$ fonksiyonu için sağlanır (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.9 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ ve $f \in Co(\alpha)$ olsun. $a \in \overline{\mathbb{D}}$ sabit iken $f''(0) = \alpha + 1 + (\alpha - 1)a$ olduğunda $f \in Co(\alpha)$ olmak üzere $(1-|z|^2)T_f(z)$ fonksiyonu için değişkenlik kümesi

$$\left|(1-|z|^2)T_f(z) - 2\bar{z} - (\alpha-1)\frac{1-\bar{z}}{1-z} - (\alpha-1)\frac{\bar{z}(1+|a|^2+\overline{az})+a}{1+|z|^2+2\mathrm{Re}(az)}\right|$$
$$\leq (\alpha-1)\frac{(1-|a|^2)|z|}{1+|z|^2+2\mathrm{Re}(az)}$$

diskidir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.10 Sonuç. $f \in Co(\alpha)$ ve $f''(0) = \alpha + 1$ sabit olsun. Bu takdirde

$$3 + \alpha \leq \|T_f\| \leq 2 + 2\alpha$$

dır (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.11 Tanım. $f, g \in \mathcal{H}$ ise

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

iken f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı veya konvolüsyonu

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır. Açıktır ki $f * g \in \mathcal{H}$ dır (Bhowmik ve ark. 2010).

Hadamard çarpımı kullanılarak $Co(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için yeni karakterizasyonlar yazmak mümkündür. Sıradaki teorem buna bir örnek olarak verilebilir.

3.3.12 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ olsun. $f \in Co(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart tüm $|z| < 1$ ve $|x| = 1$ eşitliğini sağlayan tüm x değerleri için

$$\frac{1}{z}\left[f * \frac{(\alpha-1)z - (\alpha+1+2x)z^2}{(1-z)^3}\right] + \left[f * \frac{\big((\alpha+1)x+2\big)z - (\alpha-1)xz^2}{(1-z)^3}\right] \neq 0 \qquad (3.50)$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak

$$f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n \qquad (3.51)$$

ve $n \geq 1$ ve $a_1 = 1$ için

$$A_n = (\alpha - n - 1 - nx)(n+1)a_{n+1} + [n + 1 + (n+\alpha)x]na_n$$

iken $z \in \mathbb{D}$ ve $|x| = 1$ olmak üzere

$$\sum_{n\geq 0} A_n z^n \neq 0 \quad , \quad A_0 = \alpha - 1 \qquad (3.52)$$

fonksiyonu için geçerlidir (Bhowmik ve ark. 2010).

3.3.13 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ iken $f \in Co(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Lambda_\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \left(\frac{t}{\phi(t)}\right)^{(\alpha-1)/2} dt \qquad (3.53)$$

iken $f(z) = \Lambda_\phi(z)$ olacak şekilde $\phi \in S^*$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Bhowmik ve ark. 2010).

$f \in Co(\alpha)$ için yukarıdaki karakterizasyon

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \left(\frac{z}{\phi(z)}\right)^{(\alpha-1)/2} \qquad (3.54)$$

eşitliğini sağlayan ϕ fonksiyonunun S^* sınıfında olduğunu gösterir.

$$f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad \phi(z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n z^n$$

denirse ve (3.54) bağıntısındaki z^2 li terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$3a_3 = -\frac{\alpha-1}{2}\phi_3 + \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{8}{\phi_2}^2 - \frac{\alpha^2-1}{2}\phi_2 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}$$

elde edilir. Bu ise

$$A(\phi_3, \phi_2, \alpha) = -\frac{1}{2(\alpha+1)}\left[\phi_3 - \frac{\alpha+1}{4}{\phi_2}^2 + (\alpha+1)\phi_2\right]$$

iken

$$\frac{3}{\alpha^2-1}\left(a_3 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}\right) = A(\phi_3, \phi_2, \alpha)$$

olduğunu gösterir. Avkhadiev ve Wirths (2005) yaptıkları çalışmada fonksiyonun sadece bu tipte olmadığını göstermişlerdir.

3.3.14 Sonuç. $\phi(z) = z + \sum_{n\geq 2} \phi_n z^n$ fonksiyonu S^* sınıfına ait ve $\alpha \in (1,2]$ olsun. O halde

$$h(z) = z + \frac{\alpha - 2}{2(\alpha + 1)} z^2$$

iken $A(\phi_3, \phi_2, \alpha) \in \overline{h(\mathbb{D})}$ dir (Bhowmik ve ark. 2010).

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde tanımlı (2.5) tipinde S sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Klasik Fekete-Szegö eşitsizliği Loewner'in metoduna göre tanımlanırsa $f \in S$ fonksiyonunun katsayıları için $\lambda \in (0,1]$ olmak üzere $|a_3 - \lambda {a_2}^2| \leq 1 + 2\exp(-2\lambda/(1-\lambda))$ eşitsizliği geçerlidir. $\lambda \to 1^-$ iken temel $|a_3 - {a_2}^2| \leq 1$ eşitsizliği elde edilir. Dahası

$$\Lambda_\lambda(f) = a_3 - \lambda {a_2}^2$$

katsayı fonksiyonu ve $\mathbb{D}$ diskinde tanımlı normalize edilmiş f analitik fonksiyonu fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynamaktadır. Örneğin $a_3 - {a_2}^2$ sayısı S_f; $\mathbb{D}$ dairesinde lokal yalınkat f fonksiyonlarının Schwarzian türevi $(f''/f')' - (f''/f')^2/2$ olmak üzere $S_f(0)/6$ sayısını temsil eder. $\Lambda_\lambda(f)$ fonksiyonunun mutlak değerinin maksimumunu bulma problemi Fekete-Szegö (1933) problemi olarak adlandırılır. Burada konkav yalınkat fonksiyonların $Co(\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar için λ reel parametreli Fekete-Szegö problemi çözülecek.

3.3.15 Lemma. $g(\mathrm{z}) = \mathrm{z} + \mathrm{a}_2\mathrm{z}^2 + \mathrm{a}_3\mathrm{z}^3 + \cdots \in \mathrm{S}^*$ olsun. Bu taktirde

$$|\mathrm{a}_3 - \lambda {\mathrm{a}_2}^2| \leq \max\{1, |3 - 4\lambda|\}$$

dir. Eşitlik, $|\lambda - 3/4| \geq 1/4$ iken k Koebe fonksiyonu için, $|\lambda - 3/4| \leq 1/4$ iken $\left(\mathrm{k}(\mathrm{z}^2)\right)^{1/2} = \mathrm{z}/(1 - \mathrm{z}^2)$ fonksiyonu için sağlanır (Koepf 1987).

3.3.13 Teoreminden f fonksiyonu (2.5) tipinde iken $f \in Co(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} \left(\frac{z}{\phi(z)}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \tag{3.55}$$

olacak şekilde bir $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n \in S^*$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır. (3.55) eşitliğinin her iki tarafındaki z ve z^2 terimlerinin katsayıları eşitlenirse sırasıyla

$$a_2 = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{\alpha-1}{4}\phi_2$$

ve

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} - \frac{\alpha^2-1}{6}\phi_2 - \frac{\alpha-1}{6}\phi_3 + \frac{\alpha^2-1}{24}{\phi_2}^2$$

bulunur. Buradan

$$a_3 - \lambda {a_2}^2 = \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \lambda\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)\phi_2 - \frac{\alpha-1}{6}\left[\phi_3 - \left(\frac{2(\alpha+1) - 3\lambda(\alpha-1)}{8}\right){\phi_2}^2\right] \tag{3.56}$$

elde edilir.

1. Durum. $\lambda \in (-\infty, \frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}]$ olduğunda

$$\frac{2(\alpha+1) - 3\lambda(\alpha-1)}{8} \geq 1$$

Eşitsizliği sağlanır. Buradan 3.3.15 Lemma, (3.56) eşitliğinin son teriminde kullanılır ve $|\phi_2| \leq 2$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} |a_3 - \lambda {a_2}^2| &\leq \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \lambda\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)|\phi_2| \\ &\quad + \frac{\alpha-1}{6}\left[\phi_3 - \left(\frac{2(\alpha+1) - 3\lambda(\alpha-1)}{8}\right){\phi_2}^2\right] \\ &\leq \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \lambda\right) + \frac{\alpha^2-1}{2}\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \\ &\quad + \frac{\alpha-1}{6}\left(\frac{2(\alpha+1) - 3\lambda(\alpha-1)}{2} - 3\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\lambda \in (-\infty, \frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}]$ için

$$|a_3-\lambda a_2{}^2| \le \frac{2\alpha^2+1}{3}-\lambda\alpha^2 \tag{3.57}$$

yazılabilir.

2. Durum. $\lambda \ge \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$ olduğunda (3.56) eşitliğinin ilk terimi pozitif değildir. λ daki şart kısmen $\lambda > 2/3$ olur. Buradan λ varsayımı yerine

$$\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{8} < \frac{1}{2}$$

yazılabilir. 3.3.15 Lemma tekrardan kullanılırsa

$$\left|\phi_3-\left(\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{8}\right)\phi_2{}^2\right| \le 3-\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{2}$$

elde edilir. Bu gözlemler eşliğinde $|\phi_2| \le 2$ eşitsizliği ve (3.56) eşitliği kullanılırsa

$$a_3-\lambda a_2{}^2 = -\frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}-\lambda\right)-\frac{\alpha^2-1}{4}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right) + \frac{\alpha-1}{6}\left(3-\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{2}\right)$$

bulunur. Buradaki eşitliğin sağ tarafı basitleştirilirse $\lambda \ge \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$ için

$$|a_3-\lambda a_2{}^2| \le \lambda\alpha^2-\frac{2\alpha^2+1}{3} \tag{3.58}$$

elde edilir. Eşitsizlikler kesin olup eşitlik

$$f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]$$

fonksiyonu için geçerlidir.

3. Durum. Fekete-Szegö probleminin tamamının çözümünü elde etmek için

$$\lambda \in \left(\frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)},\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right) \tag{3.59}$$

durumu göz önünde bulundurulmalıdır. Bu durum için (3.55) ve (3.56) formüllerinde $w: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tipinde Taylor seri açılımına sahip iken $\phi \in S^*$ için

$$\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{1 + zw(z)}{1 - zw(z)}$$

temsil formülü kullanılır. (3.56) eşitliğinde $\phi_2 = 2c_0$ ve $\phi_3 = c_1 + 3{c_0}^2$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} - \lambda \dfrac{(\alpha+1)^2}{4}, \\ B = (\alpha^2 - 1)\left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right), \\ C = -\dfrac{(\alpha-1)\big(4 - 2\alpha + 3\lambda(\alpha-1)\big)}{12}, \\ D = -\dfrac{\alpha-1}{6} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_3 - \lambda {a_2}^2 &= \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \lambda\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\lambda - \frac{2}{3}\right) c_0 \\ &\quad - \frac{\alpha-1}{6}\left[c_1 - \left(\frac{2(\alpha+1) - 3\lambda(\alpha-1)}{8}\right){c_0}^2\right] \\ &=: A + Bc_0 + C{c_0}^2 + Dc_1 \end{aligned}$$

elde edilir. $|c_0| \le 1$ ve $|c_1| \le 1 - |c_0|^2$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$|a_3 - \lambda {a_2}^2| = |A + Bc_0 + C{c_0}^2 + Dc_1| \le |A + Bc_0 + C{c_0}^2| + |D|(1 - |c_0|^2) \quad (3.60)$$

elde edilir. $c_0 = re^{i\theta}$ olsun. İlk olarak r sabit, θ değişken değerler alırken $|A + Bc_0 + C{c_0}^2|$ ifadesinin maksimum değeri araştırılacak olunursa

$$|A + Bc_0 + Cc_0{}^2|^2 = \left|A + Bre^{i\theta} + Cr^2e^{2i\theta}\right|^2$$

$$= (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 + (2ABr + 2BCr^3)^2\cos\theta + 4ACr^2(\cos\theta)^2$$

$$=: f(r, \theta)$$

ifadesi göz önüne alınır. Buradan r, $(0,1]$ aralığında değerler alırken $f(r,\theta)$ maksimum fonksiyonunun en büyük değeri bulunmalı. Bunun için (3.59) ifadesinin bazı alt aralıklarına bakılmalıdır. Buradan yedi farklı durum ortaya çıkar.

Durum A. $\lambda \in \left(\frac{2(\alpha-3)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}\right)$ olsun. $r \in [0,1]$ için $C > 0,\ B < 0$ ve $A + Cr^2 > 0$ olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla karşılık gelen ikinci dereceden fonksiyon $x \in [-1,1]$ için

$$h(x) = (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 + 2Br(A + Cr^2)x + 4ACr^2x^2$$

olup $h(x)$ fonksiyonu maksimum değerine herhangi $r \in [0,1)$ için $x = -1$ de ulaşır. Böylece

$$g(r) = A - Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

fonksiyonunun maksimum değerinin bulunması gerekir. $\lambda < \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}$ için $g'(0) = -B$ ve

$$g'(1) = -B + 2C - \frac{\alpha - 1}{3} = \frac{\alpha - 1}{6}\big(-6\lambda + 4(\alpha - 1)\big) > 0$$

ifadeleri

$$g(r) \le g(1) = A - B + C = \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \lambda\alpha^2$$

olduğunu gösterir.

Durum B. $\lambda = \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}$ ise $C = 0$ olup h lineer fonksiyonu maksimum değerine $x = -1$ de ulaşır. Yine Durum A daki hususlar geçerli olup maksimum değerinin yukarıdaki gibi $g(1)$ olduğu görülür.

Durum C. $\lambda \in \left(\frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}\right)$ olsun. İlk olarak $x \in [-1,1]$ için ikinci dereceden h fonksiyonunun bu aralıkta monoton azalan olduğunu göstermek gerekir. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu maksimum değerini

$$x(r) = \frac{-B(A + Cr^2)}{4ACr} = \frac{-B}{4}\left(\frac{1}{Cr} + \frac{r}{A}\right)$$

için aldığından $x(r)$ nin monoton artan ve $x(1) < -1$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Buradaki λ parametresi için ilk ifade önemsiz, ikinci ifade ise

$$j(\lambda) = \alpha^2(3\lambda - 2)^2 - 4 + 3\lambda > 0$$

ifadesine denktir. Bu eşitsizlik kolaylıkla görülür. Böylece Durum A ve Durum B dekilere benzer bir üst sınır elde edilir. Sonuç olarak Durum A, B ve C $\lambda \in \left(\frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}\right)$ için

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \leq \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \lambda\alpha^2 \tag{3.61}$$

eşitsizliğini verir.

Durum D. $\lambda \in [\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \frac{2}{3})$ olsun.

$$\lambda_1 = \frac{4\alpha^2 - 1 - \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{4\alpha^2 - 1 + \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2} \tag{3.62}$$

iken $j(\lambda)$ fonksiyonu $j(\lambda) = 9\alpha^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ tipinde çarpanlarına ayrılabilir. Burada $\lambda_2 > \lambda_1$ kabul edilirse; $\lambda \in [\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \lambda_1)$ için h fonksiyonu en büyük değerini $x = -1$ noktasında alır ve g fonksiyonu maksimum değerine

$$r_m = \frac{-B}{-2C + \frac{\alpha - 1}{3}} \in (0,1]$$

noktasında ulaşır. Buradan maksimum Fekete-Szegö fonksiyoneli

$$g(r_m) = \frac{\alpha(10 - 9\lambda) - (3\lambda - 2)}{9(2 - \lambda) + 3\alpha(3\lambda - 2)}$$

olur. $\lambda \in [\lambda_1, \frac{2}{3})$ için $(0,1]$ aralığında $x(r) = -1$ eşitliğinin tek çözümü

$$r_0 = \frac{B}{2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

dır. $\lambda < \frac{2}{3}$ için $r_m < r_0$ olduğu açıktır. Dahası $r \geq r_0$ için

$$k(r) = \sqrt{h\big(x(r)\big)} + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2) = (A - Cr^2)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}} + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

fonksiyonu monoton azalandır. Buradan anlaşılıyor ki bu durumdaki aralık için de $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ nin maksimum değeri $g(r_m)$ fonksiyonu ile bulunur. Ekstremal fonksiyon $\mathbb{D}$ bölgesini sonsuzluğa $\pi\alpha$ dereceden daha az açılma açısına sahip kama biçimli ve Bhowmik ve ark. (2008) örneğindeki gibi sonlu bir köşeye sahip bir bölgeye resmeder.

Durum E. $\lambda = \frac{2}{3}$ için $B = 0$ ve $C = -\frac{\alpha-1}{6}$ dır. Böylece maksimum değer herhangi bir $r \in (0,1]$ ve $\cos\theta = 0$ için sağlanır. Tüm durumlarda kesin üst sınır olarak $|a_3 - \lambda a_2{}^2| = \frac{\alpha}{3}$ elde edilir. Ekstremal fonksiyon $\mathbb{D}$ diskini sonsuzluğa $\pi\alpha$ dereceden daha az açılma açısına sahip ve Bhowmik ve ark. (2008) örneğindeki gibi sonlu iki köşeye sahip bir bölgeye resmeder. Sonuç olarak Durum D ve E den $\lambda \in (\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \frac{2}{3}]$ için

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \leq \frac{\alpha(10 - 9\lambda) - (3\lambda - 2)}{9(2 - \lambda) + 3\alpha(3\lambda - 2)} \tag{3.63}$$

elde edilir.

Durum F. $\lambda \in (2/3, \lambda_2]$ olsun. $B > 0$ olduğundan $x(r)$ fonksiyonu monoton azalan olur. $(0,1]$ aralığında $x(r) = 1$ eşitliğinin tek çözümü

$$r_1 = \frac{B}{-2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

dır. $r < r_1$ için $h(x) \leq h(1)$ elde edilir.

$$l(r) = A + Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa, bu fonksiyon $r_n > r_1$ için

$$r_n = \frac{B}{-2C + \frac{\alpha - 1}{3}}$$

noktasında maksimum değerini alır. $k(r)$ monoton artan olduğundan bu durumda Fekete-Szegö fonksiyonelinin $\cos\theta_0 = \frac{-B(A+C)}{4AC}$ iken $c_0 = e^{i\theta_0}$ için elde edilen

$$k(1) = (A - C)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}} = \alpha(1 - \lambda)\sqrt{\frac{12(1 - \lambda)}{(4 - 3\lambda)^2 - \alpha^2(3\lambda - 2)^2}}$$

şeklinde bir maksimum değeri vardır. Böylece ekstremal fonksiyon

$$f'(z) = \frac{\left(1 - ze^{i\theta_0}\right)^{\alpha - 1}}{(1 - z)^{\alpha + 1}}$$

kompleks diferansiyel denkleminin çözümü ile belirlenir. Sonuç olarak $\lambda \in (2/3, \lambda_2]$ için

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \leq \alpha(1 - \lambda)\sqrt{\frac{12(1 - \lambda)}{(4 - 3\lambda)^2 - \alpha^2(3\lambda - 2)^2}} \tag{3.64}$$

elde edilir.

Durum G. $\lambda \in \left(\lambda_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$ olsun. Bu tipteki λ değerleri için $x(1) < -1$ olduğundan

$$r_2 = \frac{B}{-2C\left(1 - \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)}$$

sayısı $x(r_2) = -1$ ve $r_2 \in (0,1)$ şartlarını sağlar. $r \leq r_2$ için önceki durumlardaki benzer hususlar yazılabilir örneğin $r \leq r_1$ için $l(r)$ maksimum değeri alır ve $r \in (r_1, r_2]$ için $k(r)$ fonksiyonu benzer roldedir. $r > r_2$ için $x(r)$ noktası $[-1,1]$ aralığında değildir. Dolayısıyla problemdeki maksimum değer $x = -1$ veya $x = 1$ için geçerlidir.

Bu durumdaki λ değerleri için $A + C < 0$ ve $-A - Cr^2 > 0$ ve $c_0 = -r$ için (3.60) ın maksimum değeri $x = -1$ için elde edilir. Böylece $r \in (r_2, 1]$ için

$$n(r) = -A + Br - Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

maksimum fonksiyonudur. $-C > (\alpha - 1)/6$ ve $B > 0$ olduğundan bu aralıkta $n(r) \leq n(1)$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda \in \left(\lambda_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$ için

$$|a_3 - \lambda {a_2}^2| \leq n(1) = -A + B - C = \lambda\alpha^2 - \frac{2\alpha^2 + 1}{3}$$

bulunur.

(3.57), (3.58), (3.61), (3.63), (3.64) ve Durum G aşağıdaki teoremi verir.

3.3.16 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ için $f \in Co(\alpha)$ fonksiyonu (2.5) tipinde bir açılıma sahip olsun. λ_2, (3.62) bağıntısındaki gibi tanımlansın. Bu taktirde

$$|a_3 - \lambda {a_2}^2| \leq \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2 + 1}{3} - \lambda\alpha^2 & , \lambda \in \left(-\infty, \dfrac{2(\alpha - 1)}{3\alpha}\right) \\ \dfrac{\alpha(10 - 9\lambda) - (3\lambda - 2)}{9(2 - \lambda) + 3\alpha(3\lambda - 2)} & , \quad \dfrac{2(\alpha - 1)}{3\alpha} \leq \lambda < \dfrac{2}{3} \\ \alpha(1 - \lambda)\sqrt{\dfrac{12(1 - \lambda)}{(4 - 3\lambda)^2 - \alpha^2(3\lambda - 2)^2}} & , \quad \dfrac{2}{3} \leq \lambda < \lambda_2 \\ \lambda\alpha^2 - \dfrac{2\alpha^2 + 1}{3} & , \quad \lambda \in [\lambda_2, \infty) \end{cases}$$

dir. Sınırın, herhangi bir α için λ nın sürekli bir fonksiyonu olduğunu ve λ nın bazı değerleri için aynı sınırın iki farklı değerinin olduğunu vurgulamakta yarar vardır. Eşitsizlikler kesindir (Bhowmik ve ark. 2011).

İlk olarak Alexander (1915)

$$A(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$$

tipinde bir integral operatörü tanımlamıştır. Daha sonra Libera (1965) operatörü

$$L(z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)dt$$

şeklinde tanımlanmıştır. Libera operatörünün genellemesi olan Bernardi (1969) operatörü

$\gamma = 1,2,3,\cdots$ için

$$L_\gamma(z) = \frac{1+\gamma}{z^\gamma}\int_0^z f(t)t^{\gamma-1}dt$$

olarak tanımlanmıştır. Birçok yazar tarafından farklı metotlar kullanılarak özel integral operatörleri çalışılmıştır. Tüm bu özel operatörler genel operatör olarak verilen $\varphi, \phi \in \mathbb{D}$ ve γ, β, δ ve α kompleks sayılar olmak üzere

$$I[f](z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^\gamma \phi(z)}\int_0^z f^\alpha(t)t^{\delta-1}\varphi(t)dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.65}$$

operatörünün özel halleridir. (3.65) deki operatör Miller ve ark. (1978) tarafından tanımlanmıştır. Sonra Breaz ve Breaz (2002) tarafından $f_i(z) \in A$ ve $i \in 1,2,3,\ldots$ iken $\gamma_i > 0$ için

$$F_n[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t}\right)^{\gamma_1} \cdots \left(\frac{f_n(t)}{t}\right)^{\gamma_n} dt \tag{3.66}$$

operatörü tanımlanmıştır.

Frasin (2010) tarafından $i = 1, \ldots, m$ için (3.66) operatörünün genel hali olan

$$I(f_i, g_i)(z) = \int_0^z \left(\frac{(f_i * g_i)(t)}{t}\right)^{\alpha_i} dt \tag{3.67}$$

operatörü tanımlanmış ve çalışılmıştır. $I(f_i, g_i)$ operatörü; $g_i(z)$ yerine uygun bir fonksiyon seçilerek ve α_i parametresi değiştirilerek birçok iyi bilinen integral operatörüne dönüştürülebilir. Örneğin (3.67) operatöründe $m = 1$, $g_1(z) = z/(1-z)$ ve $\alpha_1 = \alpha \in [0,1]$ seçilirse Miller ve ark. (1978) tarafından çalışılan

$$\int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\alpha} dt \tag{3.68}$$

operatörü elde edilir.

Frasin (2013) tarafından genel integral operatörü $i = 1, \dots, n$ için $\gamma_i, \xi_i \in \mathbb{C}$, $f_i \in A$, $\rho_i \in P$ ve $\beta \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ iken

$$B_\beta(z) = \left[\beta \int_0^z t^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{f_i(t)}{t}\right)^{\gamma_i} {\rho_i}^{\xi_i}(t) dt\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{3.69}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu integral operatöründe de değerlerin özel seçimleriyle çalışılmış birçok operatörün elde edildiğini görmek zor değildir.

Konkav yalınkat fonksiyonlar için $\lambda > 0$ iken

$$F(z) = \frac{2}{z^{\lambda+1}} \int_0^z t^{\lambda} f(t)\, dt \tag{3.70}$$

integral operatörünün bazı dönüşüm özellikleri incelenecektir. Burada $\lambda = 0$ için (3.70) eşitliği Libera operatörünü verir.

3.3.17 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ olmak üzere $f \in A$ fonksiyonu $z \in \mathbb{D}$ için

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1 \tag{3.71}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa tüm $\lambda \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t}\right)^{\lambda} dt \tag{3.72}$$

operatörü $Co(\alpha)$ sınıfındadır (Darus ve ark. 2015).

Özel olarak $\lambda = 1$ iken Alexander (1915) operatörü elde edilir.

3.3.18 Teorem. $f \in A$ ve $\alpha \in (1,2]$ olsun. $f \in Co(\alpha)$ ise (3.72) de verilen integral operatörü

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zF''(z)}{F'(z)}\right) > 0 \tag{3.73}$$

iken

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(z^2F''(z))'}{F'(z)}\right) \leq \frac{(\alpha-1)(\lambda+2)}{2}$$

eşitsizliğini sağlar (Darus ve ark. 2015).

3.4 $\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k}Co(\alpha)$ Sınıfı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda $Co(\alpha)$ nın bir alt sınıfı tanımlanacak ve bu alt sınıf ile ilgili teoremler verilecektir.

Operatör çalışmaları kompleks analizin, geometrik fonksiyonlar teorisi ve ilgili alanlarında oldukça önemli rol oynamaktadır. Birçok türev ve integral operatörleri bazı analitik fonksiyonların konvolüsyonu olarak yazılabilir. $\mathbb{D}$ birim diskinde analitik

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j}z^n \qquad (j = 1,2)$$

tipindeki fonksiyonlar için f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Hadamard çarpımı

$$(f_1 * f_2)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1}a_{n,2}z^n = (f_2 * f_1)(z) \tag{3.74}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu içeren Dziok-Srivastava lineer konvolüsyon operatörü, Hadamard çarpımı (veya konvolüsyonu) açısından Dziok-Srivastava (1999, 2003) ve daha sonra diğer birçok yazar tarafından sistematik olarak tanıtıldı ve araştırıldı.

Srivastava ve Choi (2001) tarafından tanımlanan genel $\Phi(z,s,a)$ Hurwitz-Lerch Zeta fonksiyonu $\mathbb{Z}_0^- \coloneqq \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \coloneqq \{1,2,3,\cdots\}$ ve $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ olduğunda $|z|<1$ iken $s \in \mathbb{C}$; $|z|=1$ iken $\mathrm{Re}(s)>1$ olmak üzere

$$\Phi(z,s,a) \coloneqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

şeklinde tanımlanır. $\Phi(z,s,a)$ Hurwitz-Lerch Zeta fonksiyonu ile ilgili bu ve buna benzer birçok özellik Srivastava ve ark. (2005, 2006, 2007) tarafından çalışılmıştır. Srivastava ve Attiya (2007) tarafından $z \in \mathbb{D}$, $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$, $\mu \in \mathbb{C}$ ve $f \in A$ iken

$$\mathfrak{J}_b^{\mu} f(z) = \left(G_b^{\mu} * f\right)(z) \tag{3.75}$$

Hadamard çarpımı ile tanımlanan

$$\mathfrak{J}_b^{\mu}: A \to A$$

lineer operatörü araştırılıp tanıtıldı. Burada kolaylık sağlaması açısından $z \in \mathbb{D}$ için

$$G_b^{\mu}(z) \coloneqq (1+b)^{\mu}[\Phi(z,\mu,b) - b^{-\mu}] \tag{3.76}$$

eşitliği ile verilecek.

(2.5), (3.75) ve (3.76) eşitlikleri yardımıyla

$$\mathfrak{J}_b^{\mu} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+b}{n+b}\right)^{\mu} a_n z^n \tag{3.77}$$

eşitliği elde edilir.

Aslında Srivastava-Attiya operatörü ile ilgili olan $\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k}$ genelleştirilmiş integral operatörü Murugusundaramoorthy (2014) tarafından tanımlanmıştır. Buna göre;

$$\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k) a_n z^n \tag{3.78}$$

burada

$$\Psi_n = C_n^m(b,\mu,k) = \left|\left(\frac{1+b}{n+b}\right)^{\mu}\right| \frac{m!\,(n+k-2)!}{(k-2)!\,(n+m-1)!} \qquad (3.79)$$

olup μ ve b parametreleri $k \geq 2$ ve $m > -1$ iken $\mu \in \mathbb{C}$ ve $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ şartlarını sağlar. Burada $\mathfrak{I}_{0,0}^{1,2}$ için (2.5) açılımı elde edilir. Ayrıca $\mathfrak{I}_{\mu,b}^{1,2}$ operatörünün Srivastava-Attiya operatörü ve $\mathfrak{I}_{0,b}^{m,k}$ operatörünün de iyi bilinen Choi-Saigo-Srivastava operatörü olmasıdır (Ling ve Liu 2005). $\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} f(z)$ operatöründeki m, k, μ ve b parametreleri özel olarak seçilirse Alexander (1915), Bernardi (1969), Libera (1965) ve Livingston (1966) tarafından tanımlanan çeşitli integral operatörleri elde edilir.

3.4.1 Tanım. $f(z) \in A$ ve $\alpha \in (1,2]$ olsun. $f(z) \in \mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} Co(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\,\frac{2}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha+1}{2}\frac{1+z}{1-z} - 1 - z\frac{\left[\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right]''}{\left[\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right]'}\right] > 0$$

olmasıdır.

3.4.2 Teorem. $f(z) \in A$ fonksiyonu, $n \in \mathbb{N}$ ve bir $\alpha \in (1,2]$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(\alpha-1)n + 2n^2]\,|C_n^m(b,\mu,k)|\,|a_n| < 3 - \alpha$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z) \in \mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} Co(\alpha)$ dır.

İspat. $f(z) \in \mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} Co(\alpha)$ olduğunu göstermek için

$$\mathrm{Re}\,\frac{2}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha+1}{2}\frac{1+z}{1-z} - 1 - z\frac{\left[\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right]''}{\left[\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right]'}\right] > 0$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{\omega} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\omega - 1| < 1$$

eşitsizliğini kullanarak $|\omega| < 1$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\frac{1}{\omega}=\frac{2}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha+1}{2}\frac{1+z}{1-z}-z\frac{g'(z)}{g(z)}\right] \tag{3.80}$$

eşitliğinde

$$g(z)=z\left(\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k}f(z)\right)'=z\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)na_nz^{n-1}\right\} \tag{3.81}$$

ve

$$g'(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)n^2a_nz^{n-1} \tag{3.82}$$

dir. (3.81) ve (3.82) eşitlikleri (3.80) eşitliğinde kullanılarak

$$|\omega|\leq\frac{\alpha-1}{2}\left|\frac{2(1-z)z[1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)na_nz^{n-1}]}{(\alpha+1)(1+z)z(1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)na_nz^{n-1})-2(1-z)z(1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)n^2a_nz^{n-1})}\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Üçgen eşitsizliği kullanılıp, $z\to-1$ için limit alınırsa

$$|\omega|<\frac{\alpha-1}{2}\left(\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)|a_n|n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)|a_n|n^2}\right)$$

elde edilir. Son ifade,

$$\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)|a_n|n}{1-\sum_{n=2}^{\infty}C_n^m(b,\mu,k)|a_n|n^2}<\frac{2}{\alpha-1}$$

iken 1 ile sınırlıdır. Böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty}[(\alpha-1)n+2n^2]|C_n^m(b,\mu,k)||a_n|<3-\alpha \tag{3.83}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

3.4.3 Teorem. $f(z)\in\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k}Co(\alpha)$ ise

$$|z|-\frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}|z|^2\leq\left|\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k}f(z)\right|\leq|z|+\frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}|z|^2$$

dır.

İspat. 3.4.2 Teoreminden

$$2(3+\alpha)\sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}[(\alpha-1)n+2n^2]|C_n^m(b,\mu,k)||a_n| < 3-\alpha$$

elde edilir. Bu ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n| \leq \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}$$

eşitsizliğini verir. (3.83) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right| &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n||z|^n \\ &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n||z|^2 \\ &\leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}|z|^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right| &\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n||z|^n \\ &\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k)|a_n||z|^2 \\ &\geq |z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}|z|^2\end{aligned}$$

elde edilir.

3.4.4 Teorem. $f(z) \in \mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} Co(\alpha)$ ise

$$|z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\frac{m+1}{k(k-1)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2 \leq |f(z)| \leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\frac{m+1}{k(k-1)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2$$

dir.

İspat. 3.4.2 Teoreminden

$$2(3+\alpha)\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right|\frac{k(k-1)}{m+1}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}[(\alpha-1)n+2n^2]C_n^m(b,\mu,k)|a_n| < 3-\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\frac{m+1}{k(k-1)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right|$$

bulunur. (2.5) eşitliğine üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^n \\ &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^2 \\ &\leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\frac{m+1}{k(k-1)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^n \\ &\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^2 \\ &\geq |z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\frac{m+1}{k(k-1)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2\end{aligned}$$

Bu ise ispatı tamamlar.

3.4.5 Teorem. $f(z) \in \mathfrak{I}_{\mu,b}^{1,2}Co(\alpha)$ ise

$$|z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2 \leq |f(z)| \leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2$$

dir.

İspat. 3.4.2 Teoremi kullanılarak

$$2(3+\alpha)\sum_{n=2}^{\infty} C_n^1(b,\mu,2)|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}[(\alpha-1)n+2n^2]C_n^m(b,\mu,k)|a_n| < 3-\alpha$$

veya bu ifadeye denk olarak

$$2(3+\alpha)\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty}[(\alpha-1)n+2n^2]C_n^m(b,\mu,k)|a_n| < 3-\alpha$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right|$$

bulunur. (2.5) eşitliğinden hareketle

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^n \\ &\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^2 \\ &\leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right||z|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$|f(z)| \geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|z|^n$$

$$\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|z|^2$$

$$\geq |z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\left(\frac{2+b}{1+b}\right)^{\mu}\right| |z|^2$$

Bu ise ispatı tamamlar.

3.4.6 Teorem. $f(z) \in \mathfrak{I}_{\mu,b}^{1,2}Co(\alpha)$ ise

$$|z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!}\right| |z|^2 \leq |f(z)| \leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!}\right| |z|^2$$

dir.

İspat. 3.4.2 Teoremi kullanılarak

$$2(3+\alpha)\left|\frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!}\right| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=2}^{\infty} [(\alpha-1)n + 2n^2]C_n^m(b,\mu,k)|a_n| \leq 3-\alpha$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!}\right|$$

bulunur. (2.5) eşitliğinden hareketle

$$|f(z)| \leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|z|^n$$

$$\leq |z| + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|z|^2$$

$$\leq |z| + \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)}\left|\frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!}\right| |z|^2$$

elde edilir. Eşitsizliğin diğer tarafı aşağıdaki gibi gösterilebilir,

$$|f(z)| \geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|z|^n$$

$$\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,|z|^2$$

$$\geq |z| - \frac{3-\alpha}{2(3+\alpha)} \left| \frac{(k-2)!\,(n+m-1)!}{m!\,(n+k-2)!} \right| |z|^2.$$

4. SONUÇ

Bu doktora tezinde yalınkat fonksiyonların bir alt sınıfı olan konkav yalınkat fonksiyonlar ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıflar ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu sınıflar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin alt yapısını oluşturacak olan z_0 merkezli ve r yarıçaplı açık disk, kapalı disk, delinmiş açık disk, çember, analitiklik, Taylor seri açılımı, kompaktlık, yalınkatlık, yıldızıllık, konvekslik, singüler nokta ve çeşitleri, meromorf fonksiyon, konform dönüşüm, reel kısmı pozitif analitik fonksiyon gibi temel tanımlar ve bu tanımlarla ilgili Schwarz Lemması, Schwarz-Pick Lemma, Riemann Dönüşüm Teoremi, Bieberbach Konjektürü, yalınkatlık ile ilgili temel teoremler, konvekslik ve yıldızıllık arasındaki bağıntıyı veren bazı teoremler ayrıntılı bir biçimde verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise esas konumuz olan konkav yalınkat fonksiyonlar ele alınmıştır. Bu tipteki fonksiyonlar üç esas sınıfta kategorize edilmiştir. Bu sınıflara ait olma tanımları teorem olarak verilip ispatları yapılmıştır. Ayrıca bu sınıfın katsayı problemleri, distorsiyon bağıntıları gibi temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Bu bölümde detaylıca üzerinde durduğumuz $Co(\alpha)$ sınıfına ait olma şartı verilmiş olup bu sınıfın da katsayı problemleri, distorsiyon bağıntıları gibi temel özelliklerinden bahsedilmiştir. Üstelik bu sınıfın pre-Schwarzian norm incelemesi ve $Co(\alpha)$ sınıfına ait olan $\mathbb{D}$ diskinde tanımlı normalize edilmiş bir f analitik fonksiyonu için λ reel parametreli Fekete-Szegö (1933) problemi olarak bilinen $\Lambda_\lambda(f) = a_3 - \lambda {a_2}^2$ katsayı fonksiyonunun mutlak değerinin maksimumunu bulma problemi de ele alınmıştır. Murugusundaramoorthy (2014) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Srivastava-Attiya operatörü olarak bilinen $\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k}$ integral operatörü yardımıyla $Co(\alpha)$ sınıfının bir alt sınıfı olan $\mathfrak{I}_{\mu,b}^{m,k}Co(\alpha)$ sınıfı tanımlandı ve bu sınıfa ait olma şartları ile distorsiyon bağıntıları, katsayı problemleri gibi teoremler verilip ispatları yapıldı.

Elde edilen bu sonuçlara ilaveten ileride çalışılması düşünülen açık problemler de mevcuttur. Örneğin, konkav yalınkat fonksiyonların alt sınıflarının kategorize edilmesi gibi.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V. 1966. Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc. 317p.
Alexander, J. W. 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. of Math*., 17: 12-22.
Attiya, A. A., Hakimi, A. H. 2013. Some subordination results associated with generalized Srivastava-Attiya operatör. *Adv. Difference Equ.*, 105.
Avkhadiev, F.G., Wirths, K.J. 2002. Convex holes produce lower bounds for coefficients, *Complex Var.*.47:553-563.
Avkhadiev, F.G., Wirths, K.J. 2007. A proof of the Livingston conjecture, *Forum Math*. 19: 149-157.
Avkhadiev, F.G.,Pommerenke, C., Wirths, K.J. 2004. On the coefficients of concave univalent functions, *Math. Nachr.* 271:3-9.
Avkhadiev, F.G.,Pommerenke, C., Wirths, K.J. 2006. Sharp inequalities for the coefficient of concave schlicht functions, *Comment. Math. Helv*. 81: 801–807.
Başkan, T. 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayın Dağıtım. Türkiye. 318p.
Bayram, H., Altınkaya Ş. 2017. General Properties of Concave Functions Defined by the Generalized Srivastava-Attiya Operator, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 23 (3): 408-416.
Becker, J. 1972. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen (German), *J. Reine Angew. Math*. 255: 23–43.
Bernardi, S. D. 1969. Convex and starlike univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 135:429-446.
Bhowmik, B. 2010. On some results of A. E. Livingston and coefficient problems for concave univalent functions. *B. Arch. Math*. 95: 575-581.
Bhowmik, B., Ponnusamy, S., Wirths, K. J. 2010. Characterization and the pre-Schwarzian norm estimate for concave univalent functions. *Monatsh Math.*, 161:59-75.
Bieberbach, L. 1916. Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung *Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss*. 38: 940-955.
Bieberbach, L. 1919. Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für Schlichte konforme Abbildungen. *Math. Z.* 4: 295-305.
Caratheodory, C. 1911. "Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen" *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 32: pp. 193–217
Caratheodory, C. 1960. Theory of Functions Complex Variable. Chelsea Publishing Company New York. 236p.
Choi, J., Srivastava, H. M. 2005. Certain families of series associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function. *Appl. Math. Comput*. 170: 399-409
Cruz, L., Pommerenke, C. 2007. On concave univalent functions, *Complex Var. Elliptic Equ*. 52: 153–159.
De Branges, L. 1985. A Proof of the Bieberbach Conjecture. *Acta Math.* 154: 137-152.
Duren, P. L. 1970. Theory of Hp Spaces, New York; London: Academic Press.
Duren, P. L. 1983. Univalent Functions. Springer-Verlag. New York. 382p.
Dziok, J., Srivastava, H. M. 1999. Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Appl. Math. Comput*. 103: 1-13.
Dziok, J., Srivastava, H. M. 2003. Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Integral Transforms Spec. Funct.* 14: 7-18.

Ferreira, C., Lopez, J. L. 2004. Asymptotic expansions of the Hurwitz-Lerch Zeta function. *J. Math. Anal. Appl.*, 298: 210-224.
Garcia, S. R., Javad M., William T. R. 2016. "Real complex functions, *Contemporary Mathematics* 679: 91-128.
Goluzin, G. M. 1969. Geometric Theory of Functions of a Comlex Variable. GITTL, Moscow, 1952; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 676p.
Goodman, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar I. Mariner Publishing Company, Inc. 246p.
Goodman, A. W. 1983. Univalent Fonksiyonlar II. Mariner Publishing Company, Inc. 311p.
Jenkins, J.A. 1962. On a conjecture of Goodman concerning meromorphic univalent functions, *Michigan Math.* 9:25-27.
King J. P. 1992. Matematik Sanatı. Tübitak Popüler Bilim Kitapları, çeviri: Nermin Arık. 19. Basım 2010 263p.
Kirwan, W. E., Schober, G. 1976. Extremal problems for meromorphic univalent functions, *J. Analysis Math.* 330-348.
Kiryakova, V. 2011. Criteria for univalence of the Dziok-Srivastava and the Srivastava-Owa operators in the class A. *Appl. Math. Comput.,* 218: 883-892.
Koebe, P. 1907. Über die Uniform isierung beliebiger analytischer Kurven, *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.*, 191-210.
Koepf W. 1989, On the coefficients of symmetric functions of bounded boundary rotation, *Proc. Amer. Math. Soc*. 105: 324–329.
Kutbi, M. A., Attiya, A. A. 2012. Differential subordination results for certain integrodifferential operator and its applications. *Abst. Appl. Anal.*,2012: 1-13.
Libera, R. J. 1965. Some classes of regular univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16: 755-758.
Libera, R. J., Livingston, A. E. 1975. Weakly starlike meromorphic univalent functions, *Transactions of the Amer. Math. Soc*. 202:181-191.
Lin, S. D., Srivastava, H. M., Wang, P. Y. 2006. Some espansion formulas for a class of generalized Hurwitz-Lerch Zeta functions. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 17: 817-827.
Ling, Y., Liu, F. S. 2005. The Choi-Saigo-Srivastava integral operator and a class of analytic functions. *Appl. Math. Comput.*, 165: 613-621.
Livingston, A. E. 1966. On the radius of univalence of certain analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17: 352-357.
Livingston, A. E. 1994. Convex meromorphic mappings, *Annales Polonici Mathematici* 3: 275-291.
Löwner, K. 1917. Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$. *Leipzig Berichte*, 69:89-106.
Miller, J. 1970. Convex meromorphic mappings and related functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25: 220–228.
Miller, J. 1980. Convex and starlike meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 80: 607-613.
Murugusundaramoorthy, G. 2014. Coefficient estimate of bi-Bazilevic function defined by Srivastava-Attiya operator. *Le Matematiche*, 69 (2): 45-56.
Nevanlinna, R. 1921. Über die konforme Abbildung Sterngebieten. Oeversikt av Finska-Vetenskaps Societeten Forhandlingar 63(A): 6 FM 48-403.

Palka, B. P. 1991. An ıntroduction to Complex Function Theory. Springer-Verlag. New York. 560p.
Pfaltzgraf, J., Pinchuk, B. 1971. A variational method for classes of meromorphic functions. *J. Analyse Math.*, 24: 101-150.
Pommerenke, C. 1975. Unıvalent Functions Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht. 376p.
Royster, W. C. 1970. Convex meromorphic functions, *Mathematical Essays Dedicated to A.J. Macintyre*, *Ohio Univ. Press.* 42:331-339
Schober, G. 1975. Univalent Functions-Selected Topics. Springer – Verlag. Berlin. 1-26p.
Srivastava, H. M. 2007. Some Fox-Wright generalized hypergeometric functions and associated families of convolution operators. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 1: 56-71.
Srivastava, H. M., Attiya, A. A. 2007. An integral operator associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function and differential subordination. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 18: 207-216.
Srivastava, H. M., Choi, J. 2001. Series Associated with the Zeta and Related Functions. *Kluwer Academic, Boston*, Mass. U.S.A., 388.
Study, E. 1913. Konforme Abbildung Einfachzusammenhangender Bereiche. *B. C. Teubner, Leipzig and Berlin,* FM 44-755.
Wirths, K. J. 2004. A proof of the Livingston conjecture for the fourth and the fifth coefficient of concave univalent functions, *Annales Polinici Math.* 83.1:87-93.
Wirths, K. J. 2006. On the residuum of concave univalent, *Serdica Math. J*. 32: 209-214.
Zill, D. G., Shanahan, P. D. 2003. A first course in complex analysis with applications. Jones and Bartlett Publishers. U.S.A., 517p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Hasan BAYRAM
Doğum Yeri ve Tarihi	: BURSA 07/09/1989
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Orhangazi Öğretmen Eyüp Topçu Anadolu Lisesi 2007
Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2011
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Tezli Yüksek Lisans 2013
Çalıştığı Kurum	: Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2017-Günümüz
İletişim (e-posta)	: hbayram@uludag.edu.tr

Yayınları **:**

Bayram, H., Altınkaya Ş. 2017. General Properties of Concave Functions Defined by the Generalized Srivastava-Attiya Operator, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 23 (3) 408-416.

Bayram, H., Yalçın, S. 2017. A Subclass of Harmonic Univalent Functions Defined By A Linear Operator, *Palestine Journal of Mathematics*, Vol. 6 (Special Issue: II), 320-326.