MATRİS FORMDA PSEUDOPARABOLİK DENKLEMLER

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS FORMDA PSEUDOPARABOLİK DENKLEMLER

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2019

TEZ ONAYI

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN tarafından hazırlanan "Matris Formda Pseudoparabolik Denklemler" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Naci ÖZER
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Dursun ESER
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Orhan GÜRLER
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Setenay DOĞAN
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
24/6/2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

../../2019

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

ÖZET

Doktora Tezi

MATRİS FORMDA PSEUDOPARABOLİK DENKLEMLER

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş $Q-$holomorf fonksiyonlar teorisinden türetilmiş matris formda

$$L[w] := w_{\overline{\phi}}(z,t) + a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)} + c(z)w(z,t) + d(z)\overline{w(z,t)}$$

pseudoparabolik denklemin çözümü için genel integral temsiller elde edilmiştir. Burada $w(z,t) = \{w_{ij}(z,t)\}$, $m \times s$ tipinde kompleks değerli bir matristir. $a,\ b,\ c$ ve d katsayıları ise $m \times m$ tipinde Q ile değişmeli kompleks değerli matrislerdir. Ayrıca elde edilen integral temsilleri vasıtası ile matris formda pseudoparabolik denklemler için Riemann sınır değer problemi tanımlanmış ve negatif olmayan indeks için probleme ait çözümler sunulmuştur. Tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmış ve kaynak özetleri verilmiştir. İkinci bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan $Q-$holomorf fonksiyonlar teorisi hakkında bilgi verilmiştir. Sonraki bölümlerde tez çalışmasının konusunu oluşturan matris formda pseudoparabolik denklem için elde edilen genel çözüm temsilleri verilmiş ve negatif olmayan indeks için Riemann sınır değer probleminin çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Pseudoparabolik denklemler, genelleştirilmiş Beltrami sistemleri, Cauchy-tip integral temsiller, genelleştirilmiş Q-holomorf fonksiyonlar, sınır değer problemleri

2019, v+ 67 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS IN MATRIX FORM

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL

In this thesis, general integral representations are obtained for pseudoparabolic equation in matrix form

$$L[w] := w_{\overline{\phi}}(z,t) + a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)} + c(z)w(z,t) + d(z)\overline{w(z,t)}$$

which derived by generalized Q-holomorphic functions theory. Here $w(z,t) = \{w_{ij}(z,t)\}$ is an $m \times s$ complex valued matrix. The coefficients $a,\ b,\ c$ and d are $m \times m$ complex matrix commuting with Q. Furthermore, the Riemann boundary value problem is defined by means of obtained integral representations and solutions to the problem are presented for non-negative index. The first section of the thesis is reserved for introduction and a summary of the literature is given. In the second section, information about the $Q-$holomorphic functions which are to be used in later sections is given. In the following sections, obtained general solution representations for pseudoparabolic equation in matrix form which formed the subject of this thesis are given and solutions of Riemann boundary value problem are obtained for non-negative index.

Key Words: Pseudoparabolic equations,Cauchy-type integral representation, generalized Beltrami systems, generalized Q-holomorphic functions, boundary value problems

2019, v+67 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sezayi HIZLIYEL'e teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bununla birlikte beni bugünlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç eksik etmeyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim kıymetli aileme çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu süre boyunca gösterdiği sabır ve anlayış için sevgili eşim Şahin ÖZKAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak doktora eğitimim sırasında yurt içi doktora burs programı ile beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Yeşim SAĞLAM ÖZKAN

../../2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
Ref(z)	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
Imf(z)	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
$C(G)$	G de sürekli fonksiyonlar sınıfı
$B_{\mathbb{C}}(G)$	G de sınırlı fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
L_p	p normlu fonksiyon uzayı
$C^m(G)$	$m.$ mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar sınıfı
$B^p(G)$	$p.$ mertebeden sürekli ve sınırlı reel türevlere sahip fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\widehat{\mathbb{C}}$	Riemann küresi

1. GİRİŞ

Cauchy-Riemann sistemi,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

düzlemde birinci mertebeden en basit eliptik sistemdir. $w = u + iv$ ve $z = x + iy$ olmak üzere, kompleks formda

$$w_x + iw_y = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir veya $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ kısmi türev operatörü ile Cauchy-Riemann sistemi kompleks formda $w_{\overline{z}} = 0$ olarak tek bir denklem halinde de yazılabilir. Bilindiği gibi, (1.1) denklemini sağlayan C^1 sınıfından bir kompleks değişkenli fonksiyon analitiktir. Tersine kompleks değişkenli her analitik fonksiyon (1.1) denklemini sağlar. Yani (1.1) analitik fonksiyonları karakterize eder. (1.1) denklemi ve kompleks analitik fonksiyonlar arasındaki ilişki, birçok matematikçiyi daha genel denklemler için benzer bir ilişkinin geliştirilmesi konusunda motive etmiştir.

Douglis (1953),

$$w_x + iw_y + a(x,y)Ew_x + b(x,y)Ew_y = 0 \tag{1.2}$$

formuna sahip eliptik denklemler için analitik fonksiyonlar teorisine benzer bir teori geliştirmiştir. Burada E, $m \times m$ tipinde sabit nilpotent bir matris ve a, b ise kompleks değerli fonksiyonlardır. Bojarski (1966), Douglis'in teorisini geliştirerek

$$Dw\,(z) := \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - Q(z)\frac{\partial}{\partial z}\right) w\,(z) = 0 \tag{1.3}$$

şeklindeki matris denklemleri incelemiştir. Burada Q, $m \times m$ tipinde yarı diagonal bir matris, w, $m \times 1$ tipinde matris değerli bilinmeyen bir fonksiyon ve Q nun hepsi kompleks olan özdeğerleri mutlak değerce 1 den küçüktür.

Diğer bir genelleştirme de Hile (1982) tarafından verilmiştir. Hile, (1.3) denkleminde w yı $m \times s$ tipinde bir kompleks matris, Q yu ise $m \times m$ tipinde kendi değişmeli bir matris yani; kompleks düzlemin bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde her $z_1,\ z_2 \in \mathfrak{D}_0$ noktası için Q nun

$$Q\,(z_1)\,Q\,(z_2) = Q\,(z_2)\,Q\,(z_1)$$

değişme özelliğini sağladığını varsaymıştır. Böylece Hile, Douglis ve Bojarski'nin teorisini ihtiva edecek şekilde analitik fonksiyon teorisinin bir benzerini elde etmiştir. Ayrıca böyle bir Q matrisi bir benzerlik dönüşümü ile Bojarski'nin yarı diagonal formuna dönüştürülemez. Hile, (1.3) denklemine genelleştirilmiş Beltrami sistemi adını vermiş ve bu formdaki sistemlerin çözümlerini ise Q-holomorf fonksiyonlar olarak adlandırmıştır.

Hile, Douglis ve Bojarski'nin analitik fonksiyonlarda kompleks z değişkeninin üstlendiği göreve karşılık gelecek şekilde tanımladığı doğurucu çözüm kavramını benzer bir şekilde Q-holomorf fonksiyonlar için genelleştirmiştir. Hile, doğurucu çözüm olarak (1.3) denkleminin $\phi(z) := \phi_0(z)\, I + N(z)$ şeklinde kendi değişmeli özel bir çözümünü elde etmiş ve bu çözüm vasıtasıyla (1.3) denklemini sağlayan herhangi bir $\Phi(z)$ matris değerli fonksiyonunun, kompleks analitik bir f fonksiyonu yardımıyla $f(\phi(z))$ şeklinde yazılabildiğini göstermiştir. Böyle bir doğurucu çözüm vasıtasıyla Q-holomorf fonksiyonlarda, analitik fonksiyonlar için $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z}$ kısmi türev opetörlerinin yüksek boyutlu bir karşılığı olarak,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \left(\phi_z \overline{\phi}_{\overline{z}} - \phi_{\overline{z}} \overline{\phi}_z\right)^{-1} \left[\overline{\phi}_z \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \overline{\phi}_{\overline{z}} \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\phi}} = \left(\phi_z \overline{\phi}_{\overline{z}} - \phi_{\overline{z}} \overline{\phi}_z\right)^{-1} \phi_z D$$

kısmi türev operatörleri tanımlanabilir (Hızlıyel ve Çağlıyan 2007, s.576). (1.3) denklemi yukarıdaki türevler yardımıyla

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{\phi}} = 0$$

olarak yazılabilir.

Hızlıyel ve Çağlıyan (2004a,b), Vekua (1962) ve Bers (1953) tekniklerini kullanarak

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{\phi}} + aw + b\overline{w} = 0, \tag{1.4}$$

denklemi için bir fonksiyon teorisi geliştirmişlerdir. Burada $w(z) = \{w_{ij}(z)\}, \quad m \times s$ tipinde kompleks matris, $Q(z) = \{q_{ij}(z)\}$, $m \times m$ tipinde kendi değişmeli kompleks matris ve $q_{k,k-1} \neq 0$, $k = 2, \ldots m$. $a = \{a_{ij}(z)\}$ ve $b = \{b_{ij}(z)\}$ matrisleri $L_p(\mathfrak{D}_0)$ sınıfına ait ve Q ile değişmelidirler. Bu formdaki denklemlerin çözümleri *genelleştirilmiş Q-holomorf fonksiyonlar* olarak adlandırılmıştır. Bu denklem için elde edilen sonuçlar

Vekua ve Bers'in klasik fonksiyon teorisi ile benzerlikler göstermektedir.

Analitik fonksiyonların integral temsilleri, matematiksel analizin gelişiminde erken evrelerde ortaya çıkmıştır ve diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin açık bir temsili için oldukça uygun araçlardır. Özellikle eliptik tipten kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerine ait bazı analitik özelliklerinin elde edilmesinde önemlidir.

İki bağımsız değişkenli lineer eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin analitik teorisi Lewy (1959), Bergman (1961) ve Vekua (1967) gibi pek çok matematikçi tarafından kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. Bu araştırma alanı analitik fonksiyon teorisi ve kısmi diferensiyel denklemler arasındaki boşluğu doldurur. Analitik başlangıç koşulları varsayımı altında pseudoparabolik denklemler için uygun bir teorinin geliştirilebileceği Colton (1972) tarafından gösterilmiştir. Pseudoparabolik denklemler

$$M[u_t] + L[u] = 0$$

formundadır. Burada M ve L analitik katsayılı ikinci mertebeden lineer eliptik operatörlerdir. Ayrıca her bir operatörün temel kısmı Laplasiyandır ve M operatörü selfadjointtir. Pseudoparabolik denklemler viskoz bir sıvının akışı ile ilgili belirli problemlerle bağlantılı olarak fizikte ortaya çıkmaktadır. Örneğin, ikinci mertebeden düzensiz ve basit kayma akışının hızı, bir boyutlu sabit katsayılı bir pseudoparabolik denkleme karşılık gelir. Benzer şekilde konsolidasyon süresince bir miktar kil içindeki hidrostatik basınç yine yukarıdaki forma sahip bir denklemi sağlar (Colton 1972). Yine bir başka örnek, çatlamış kayalarda homojen sıvıların sızması teorisinde ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, çatlaklardaki sıvının ortalama basıncı, pseudodoparabolik tipte bir denklemi sağlar (Barenblat ve ark. 1960, Showalter ve Ting 1970).

Bu çalışmada, genelleştirilmiş $Q-$holomorf fonksiyonlar teorisinden türetilmiş matris formda

$$L[w] := E[w_t] + A[w] = 0$$

pseudoparabolik denklemin çözümü için genel integral temsiller elde edilecektir. Burada E

$$E[w] := w_{\overline{\phi}}(z,t) + a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)}$$

bir eliptik operatör ve A

$$A[w] := c(z)w(z,t) + d(z)\overline{w(z,t)}$$

bir cebirsel operatördür. $w(z,t) = \{w_{ij}(z,t)\}$, $m \times s$ tipinde kompleks değerli bir matristir. $a,\ b,\ c$ ve d katsayıları ise $m \times m$ tipinde Q ile değişmeli kompleks değerli matrislerdir ve zaman değişkeni t den bağımsızdır. Ayrıca bu katsayıların $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathfrak{D}}$ bölgesinde sıfır olduğu varsayılmıştır. Burada $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölgedir. Amacımız, integral temsilleri vasıtası ile matris formda pseudoparabolik denklemler için Riemann sınır değer problemini tanımlamak ve çözülebilirliğini araştırmaktır.

2. $Q-$HOLOMORF FONKSİYONLAR

Bu bölümde, Douglis ve Bojarski teorisini ihtiva eden ve Hile (1982) tarafından verilen fonksiyon teoriyi ele alacağız. Burada özetlenen fonksiyon teori aynı zamanda Douglis ve Bojarski tarafından verilen fonksiyon teorinin ana hatlarını gözden geçirmeye de fırsat verecektir.

2.1 Genelleştirilmiş Beltrami Sistemleri ve Kanonik Form

Hile, düzlemde birinci mertebeden

$$w_{\bar{z}}(z) = Q(z) w_z(z) \tag{2.1}$$

denklemini göz önüne almıştır. (2.1) denkleminde w yı $m \times s$ tipinde bir kompleks matris, Q yu da $m \times m$ tipinde kendi değişmeli bir matris ve kompleks düzlemin bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde Hölder sürekli varsayarak (2.1) denkleminin çözümleri için bir fonksiyon teori geliştirmiştir. Burada Hölder süreklilik ile, $\mathfrak{D}_0$ ın herhangi bir K kompakt alt cümlesinde bulunan tüm $z_1, z_2 \in K$ elemanları için

$$\|Q(z_1) - Q(z_2)\| \leq c|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $c \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ sabitlerinin mevcut olduğunu anlayacağız. Q nun bu özelliğini $Q \in H(\mathfrak{D}_0)$ ile göstereceğiz. Kullanılan matris norm, bir $M = (m_{ij})$ matrisi için

$$\|M\|^2 = trace\,(M^* M) = \sum_{i,j} |m_{ij}|^2$$

ile verilmiş standart normdur. Burada M^*, M matrisinin eşlenik transpoz matrisidir.

İleride karışıklığa yol açmamak için

$$w\,(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} w_{ij}\,(z)\, e^{ij} \tag{2.2}$$

ile temsil edilmiş $m \times s$ tipindeki kompleks matris değerli fonksiyonların bazı uzaylarını tanımlayalım. Burada w_{ij} kompleks değerli bir fonksiyondur. e^{ij} ise, i. satır j. sütun elemanı 1, diğer elemanları 0 olan $m \times s$ tipindeki sabit matrisi gösterir. Genelde (2.2) ile verilmiş bir fonksiyonun, eğer tüm w_{ij} kompleks fonksiyonları belirli bir uzayda ise, o fonksiyona bahsi geçen uzaydadır denilir. Örneğin, eğer tüm w_{ij} kompleks değerli fonksiyonları $L_p(\mathfrak{D})$ uzayında ise $w \in L_p(\mathfrak{D})$ denir, burada $\mathfrak{D}$ düzlemde bir bölgedir. Bu kriter aşikar olarak $\|w\| \in L_p(\mathfrak{D})$ olmasına denktir.

Bileşenleri bir $\mathfrak{D}$ bölgesinde $m.$ mertebeye kadar sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar uzayı $C^m\left(\overline{\mathfrak{D}}\right)$ ile gösterilecek ve $m = 0$ için $C^0(\mathfrak{D}) = C(\mathfrak{D})$ gösterimi kullanılacaktır. Her bir $t \in \mathbb{R}$ için $z \in \mathbb{C}$ de sınırlı olan fonksiyonların uzayı $B_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ ile gösterilecektir.

Şimdi Q matrisinin

$$Q(z_1)\,Q(z_2) = Q(z_2)\,Q(z_1)\,, \quad z_1, z_2 \in \mathfrak{D}_0$$

ile verilen kendi değişmelilik özelliğini biraz daha genelleyelim. Eğer A ve B matris değerli fonksiyonları $\mathfrak{D}_0$ da tanımlı ve her $z_1, z_2 \in \mathfrak{D}_0$ için

$$A(z_1)B(z_2) = B(z_2)A(z_1)$$

özelliğini sağlıyorsa A ve B matrislerine $\mathfrak{D}_0$ da değişmelidir denilecektir.

A ve B nin C^1 sınıfından ve $\mathfrak{D}_0$ da değişmeli olduğunu varsayalım. Bu durumda A_x, A_y, $A_z, A_{\bar{z}}$ türevlerinin tümü $\mathfrak{D}_0$ da B ile ve B nin birinci türevleriyle değişmelidir. Özellikle A, $\mathfrak{D}_0$ da kendi değişmeli ise, A nın birinci mertebeden kısmi türevleri kendi değişmeli, A ile değişmeli ve kendi aralarında değişmelidirler. Ayrıca A, $\mathfrak{D}_0$ da B ile değişmeli ise, A matrisinin tersi mevcut oluduğunda, tersi de $\mathfrak{D}_0$ da B ile değişmelidir.

Şimdi, bu ön bilgilerden sonra genelleştirilmiş Beltrami sistemini tanımlayabiliriz:

Tanım 2.1.1. Eğer Q, $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde kendi değişmeli ve her $z \in \mathfrak{D}_0$ için mutlak değerce 1 büyüklüğünde karakteristik değerlere sahip değilse, (2.1) sistemine *genelleştirilmiş Beltrami sistemi* denir. Bu sistemin çözümleri ise *Q-holomorf fonksiyonlar* olarak adlandırılmıştır (Hile 1982).

Bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde w, $m \times m$ tipinde ve v, $m \times s$ tipinde iki Q-holomorf fonksiyon olsun ve w nın $\mathfrak{D}_0$ da Q ile değişmeli olduğunu varsayalım. Bu varsayımlar altında

$$(wv)_{\bar{z}} = w_{\bar{z}}v + wv_{\bar{z}} = Qw_zv + wQv_z = Q(wv)_z$$

yazılabilir ve buradan Q-holomorf iki fonsiyonun çarpımının Q-holomorf olduğu söylenebilir. Ayrıca w nın herhangi pozitif bir kuvveti de Q-holomorftur. Diğer taraftan, w matris değerli fonksiyonunun tersinin mevcut olduğu noktalarda ise

$$(w^{-1})_{\bar{z}} = -w^{-1}w_{\bar{z}}w^{-1} = -w^{-1}Qw_z w^{-1} = -Qw^{-1}w_z w^{-1} = Q(w^{-1})_z$$

yazılabilir. Böylece w, Q-holomorf ise, w^{-1} de Q-holomorftur. Buradan Q-holomorf ve tersinir bir w fonksiyonunun negatif kuvvetlerinin de Q-holomorf olduğu söylenebilir.

Douglis (1953) ve Bojarski (1966), (2.1) denklemini Q üzerinde ki farklı varsayımlarla ele almışlar ve bu denklem için bir fonksiyon teorisi geliştirmişlerdir. Douglis, Q nun

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ a_1 & 0 & & & \\ a_2 & a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda ve Bojarski ise Q nun

$$Q = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{bmatrix}$$

formunda olması halinde (2.1) denklemini incelemişlerdir. Burada esas köşegen üzerinde bulunan A_i ler

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & & 0 \\ a_{i1} & \lambda_i & & & \\ a_{i2} & a_{i1} & \lambda_i & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{im-1} & \cdots & & a_{i1} & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

şeklindeki alt üçgensel bloklardan oluşur. Bu şekildeki Q matrisleri kendi değişmelidir ve Bojarski tarafından *alt yarı diagonal matris* olarak adlandırılmıştır. Douglis ve Bojarski'nin ele aldığı Q matrisinin kendi değişmeli olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla Hile'in (1982) Q-holomorf fonksiyonlar teorisinin, Douglis ve Bojarski tarafından geliştirilen teorinin bazı özelliklerini içerdiğini söylemek yanlış olmaz. Hile tarafından ele alınan genelleştirilmiş Beltrami sisteminin kanonik formu, Bojarski'nin alt yarı diagonal formuna yakındır. Buna ilişkin olarak aşağıdaki lemma önemlidir ve Jacobson (1953) tarafından verilen bir teoremin özel halidir.

Lemma 2.1.2. $\{Q_\alpha\}$, $m \times m$ tipinde kompleks matrislerin değişmeli bir sınıfı olmak üzere,

$$SQ_\alpha S^{-1} = \begin{bmatrix} A_{\alpha 1} & & & 0 \\ & A_{\alpha 2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{\alpha n} \end{bmatrix}$$

formundaki her Q_α için, singüler olmayan $m \times m$ tipinde bir S kompleks matrisi vardır. Burada $A_{\alpha i}$ ler

$$A_{\alpha i} = \begin{bmatrix} P_{\alpha i} & & & 0 \\ & P_{\alpha i} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & P_{\alpha i} \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve her bir $A_{\alpha i}$ nin boyutu tüm α lar için aynıdır fakat i değişebilir. $*$ ise sıfır olmayan muhtemel terimleri temsil etmektedir (Hile 1982).

Bu lemma, kendi değişmelilik özelliğinin gerçekte kuvvetli bir koşul olduğunu gösterir. Şimdi (2.1) sistemi için aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.1.3. (2.1), $\mathfrak{D}_0$ da bir genelleştirilmiş Beltrami sistemi olsun. O halde $m \times m$ tipinde sabit bir kompleks S matrisi vardır öyle ki eğer $v = Sw$ ve $\hat{Q} = SQS^{-1}$ ise, (2.1) denklemi

$$v_{\bar{z}} = \hat{Q} v_z \tag{2.3}$$

denklemine dönüşür. Ayrıca $\hat{Q}$

$$\hat{Q}(z) = \begin{bmatrix} A_1(z) & & & 0 \\ & A_2(z) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n(z) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

formundadır, burada

$$A_i(z) = \begin{bmatrix} \lambda_i(z) & & & 0 \\ & \lambda_i(z) & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_i(z) \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

dir. $A_i(z)$ lerin her biri bütün z ler için aynı boyuttadır (Hile 1982).

$\hat{Q}$ matrisi diagonal olduğundan, (2.5) de esas köşegen üzerinde bulunan $\lambda_i(z)$ ler $\hat{Q}(z)$ nin özdeğerleridir. Benzerlik dönüşümü altında özdeğerler değişmez kaldığından, $\lambda_i(z)$ ler aynı zamanda $Q(z)$ nin de özdeğerleridir. Ayrıca $\hat{Q}$ ve A_i bloklarının $\mathfrak{D}_0$ da kendi değişmeli olduğu görülebilir. Her bir A_i matrisi

$$A_i = \lambda_i(z)I + N_i(z)$$

şeklinde yazılabilir, burada I birim matris ve N_i esas köşegen üzerindeki elemanları sıfır olan bir alt üçgensel nilpotent matristir. Her $N_i(z)$ matrisi $\mathfrak{D}_0$ da kendi değişmelidir.

(2.4) ve (2.5) matrsilerinden (2.1) sisteminin (2.3) kanonik formunun

$$v_{\bar{z}} = Av_z \tag{2.6}$$

şeklinde n ayrık alt sistemden oluştuğu görülür. Burada, A, (2.5) şeklinde bir matris ve esas köşegen üzerindeki $\lambda(z)$ terimi $\mathfrak{D}_0$ da $|\lambda(z)| \neq 1$ şartını sağlar. Yalnızca v nin ilk bileşeni olan v_1 i içeren (2.6) sisteminin ilk denklemi

$$v_{1,\bar{z}} = \lambda v_{1,z}$$

bir adi Beltrami denklemidir. Burada λ Hölder sürekli olduğundan, bu denklemin herhangi bir v_1 çözümü birinci basamaktan Hölder sürekli türevlere sahiptir. (2.6) sisteminin ikinci denklemi

$$v_{2,\bar{z}} = \lambda v_{2,z} + av_{1,z}$$

formundadır. Bu denklem Hölder sürekli katsayılara sahip homojen olmayan bir Beltrami sistemidir ve böylece v_2 birinci basamaktan Hölder sürekli türevlere sahiptir. Bu şekilde devam edilirse, homojen olmayan adi Beltrami denklemlerinin çözümlerinin özellikleri kullanılarak, (2.3) denkleminin çözümleri ve dolayısıyla (2.1) genelleştirilmiş Beltrami sisteminin çözümlerinin birinci basamaktan Hölder sürekli kısmi türevlere sahip olduğu gösterilebilir.

(2.4) formundaki $\hat{Q}$ matrisinin, bir benzerlik dönüşümü yardımıyla, Bojarski'nin yarı diagonal formuna indirgenip indirgenemeyeceği açık bir sorudur ki bu Bojarski'nin formunun tüm genelleştirilmiş Beltrami sistemleri için kanonik bir form olarak ele alınması için yeterince genel olduğunu ima eder. Bu soruya bir ters örnek olarak 3×3 tipindeki

$$Q(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q(z) & i & 0 \\ r(z) & 0 & i \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. Bu matris $q(z)$ ve $r(z)$ fonksiyonlarının herhangi seçimleri için kendi değişmelidir. $q(z) = 1$, $r(z) = x$ seçimini göz önüne alalım. Bu durumda $SQ = \hat{Q}S$ sağlanacak ve $\hat{Q}$ Bojarski formuna sahip olacak şekilde tersinir bir S matrisinin mevcut olmadığı kolayca gösterilebilir. Hatta S matrisinin değişken fakat sürekli olması durumunda da ters örnekler mevcuttur. Mesela, n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$q(z) = x^n \sin(\frac{1}{x}) + x^{n+1} \cos(\frac{1}{x}), \qquad r(z) = x^{n+1} \sin(\frac{1}{x}) + x^n \cos(\frac{1}{x})$$

ise, Q, C^{n-1} sınıfına aittir. y-ekseni üzerindeki herhangi bir noktanın herhangi bir komşuluğunda $SQ = \hat{Q}S$ sağlanacak ve $\hat{Q}$ Bojarski formuna sahip olacak şekilde tersinir ve sürekli bir $S(z)$ matrisinin mevcut olmadığı gösterilebilir (Jacobson 1953). Böylece anlaşılıyor ki, Bojarski formu, tüm genelleştirilmiş Beltrami sistemleri için bir kanonik form olarak ele alınacak kadar genel değildir.

2.2 Genelleştirilmiş Beltrami Sistemi İçin P Matris

Q mutlak değerce 1 büyüklüğünde karakteristik değerlere sahip olmayan $m \times m$ tipinde sabit bir matris olmak üzere

$$P = \int_{|z|=1} (zI + \bar{z}Q)^{-1}(Idz + Qd\bar{z}) \tag{2.7}$$

integralini ele alalım. Burada I birim matristir ve $Q = 0$ ise $P = 2\pi i I$ dir. Analitik fonksiyonlarda $2\pi i$ sabitinin rolünü, burada P üstlenecektir. Q mutlak değerce bir büyüklüğünde karakteristik değere sahip olmadığı için $(zI + \bar{z}Q)$ matrisinin $|z| = 1$ çemberi üzerinde tersi mevcuttur. Dolayısıyla (2.7) integrali tanımlıdır.

Teorem 2.2.1. (2.7) ile verilen P matrisi tersinirdir ve Q matrisi ile değişmelidir. P matrisinin olası özdeğerleri yalnızca $\pm 2\pi i$ dir. Eğer Q nun tüm özdeğerleri 1 den küçük (büyük) ise bu taktirde $P = 2\pi i I$ $(-2\pi i I)$ dir (Hile 1982).

İspat. Öncelikle $|\lambda| < 1$ özelliğindeki λ lar için $Q = \lambda I$ olduğunu varsayalım. O halde

$$P = I \int_{|z|=1} \frac{1}{z + \lambda\bar{z}} (dz + \lambda d\bar{z}) \tag{2.8}$$

dir. $|\lambda| < 1$ olduğundan $z + \lambda\bar{z}$ ifadesi $|z| = 1$ üzerinde hiçbir zaman sıfır olmaz ve z birim daire etrafında saat yönünün tersine hareket ettikçe, z ile $z + \lambda\bar{z}$ nin argüman değişimleri aynıdır ve 2π dir. Böylece kompleks logaritma fonksiyonunun uygun bir dalı için

$$P = I \int_{|z|=1} d[\log(z + \lambda\bar{z})] = 2\pi i I$$

yazılabilir. Şimdi $|\lambda| > 1$ özelliğindeki λ lar için $Q = \lambda I$ olsun. (2.8) ifadesinde $\bar{\zeta} = z$ dönüşümü yapılırsa, $|\lambda|^{-1} < 1$ olacağından

$$P = -I \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\bar{\zeta} + \lambda\zeta} (d\bar{\zeta} + \lambda d\zeta) = -I \int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta + \lambda^{-1}\bar{\zeta}} (d\zeta + \lambda^{-1} d\bar{\zeta}) = -2\pi i I$$

elde edilir. Şimdi $|\lambda| \neq 1$ olmak üzere Q matrisinin $Q = \lambda I + N$ formunda olduğunu varsayalım. Burada N sabit bir nilpotent matristir (yani $N^r = 0$ olacak şekilde pozitif bir r tam sayısı vardır). O halde

$$(zI + \bar{z}Q)^{-1} = [(z + \lambda\bar{z})I + \bar{z}N]^{-1} = \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k (z + \lambda\bar{z})^{-k-1} (\bar{z})^k N^k$$

ve

$$\begin{aligned} (zI + \bar{z}Q)^{-1}(Idz + Qd\bar{z}) &= (zI + \bar{z}Q)^{-1}(Idz + \lambda I d\bar{z} + N d\bar{z}) \\ &= (z + \lambda\bar{z})^{-1}(dz + \lambda d\bar{z})I - \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k k^{-1} d[(z + \lambda\bar{z})^{-k} (\bar{z})^k N^k] \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki ifade $|z| = 1$ çemberi üzerinde integre edilirse, tam diferensiyel içeren terimler sıfır olur. Dolayısıyla

$$P = I \int_{|z|=1} (z + \lambda\bar{z})^{-1}(dz + \lambda d\bar{z}) = \begin{cases} 2\pi i I, & |\lambda| < 1 \\ -2\pi i I, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Şimdi Q nun (2.4) formunda olduğunu varsayalım. N_i nilpotent kısım ve I birim matris olmak üzere her bir A_i matrisi $A_i = \lambda_i(z)I + N_i(z)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $\hat{Q}$ için karşılık gelen P değeri $\hat{P}$ ile gösterilirse

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \pm 2\pi i I_1 & & & 0 \\ & \pm 2\pi i I_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 2\pi i I_n \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

şeklindedir. Burada I_i, A_i ile aynı boyuta sahip birim matristir ve $+$ veya $-$ işareti λ_i nin birim çemberin içinde veya dışında olmasına göre seçilir. Son olarak, varsayalım ki Q, 1 büyüklüğünde özdeğere sahip olmayan keyfi bir matris olsun. $\hat{Q}$, (2.4) formunda olmak üzere $\hat{Q} = SQS^{-1}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} SPS^{-1} &= \int_{|z|=1} S(zI + \bar{z}Q)^{-1}S^{-1}S(Idz + Qd\bar{z})S^{-1} \\ &= \int_{|z|=1} (zI + \bar{z}\hat{Q})^{-1}(Idz + \hat{Q}d\bar{z}) = \hat{P} \end{aligned}$$

dir, burada $\hat{P}$, $\hat{Q}$ ya karşılık gelen P değeridir. Böylece $P = S^{-1}\hat{P}S$. Buradan P ve $\hat{P}$ nin özdeğerlerinin aynı olduğu söylenebilir. O halde Q nun tüm özdeğerleri birim çemberin içinde (dışında) bulunuyorsa, $P = \hat{P} = 2\pi i I$ ($P = \hat{P} = -2\pi i I$) dir. (2.7) integralinden P nin Q ile değişmeli olduğu görülür.

□

Şimdi $Q = Q(z)$ nın bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde tanımlı değişken ve kendisi ile değişmeli bir matris olduğunu varsayalım. Bu durumda P matrisi formal olarak z noktasına bağlıdır. Eğer Q sürekli ise $P(z)$ nin $\mathfrak{D}_0$ da tüm z noktaları için aynı olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.2.2. $Q = Q(z)$ düzlemin bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde tanımlı ve sürekli $m \times m$ tipinde bir kompleks matris olmak üzere Q nun $\mathfrak{D}_0$ üzerinde kendisi ile değişmeli ve her $z \in \mathfrak{D}_0$ için Q nun mutlak değerce 1 büyüklüğünde özdeğere sahip olmadığını varsayalım ve

$$P(z) = \int_{|\zeta|=1} [\zeta I + \bar{\zeta}Q(z)]^{-1}[Id\zeta + Q(z)d\bar{\zeta}] \tag{2.10}$$

olsun. Bu taktirde $P(z)$, $\mathfrak{D}_0$ da sabittir ve Q ile değişmelidir (Hile 1982).

İspat. Teorem 2.1.3 yardımıyla, her $z \in \mathfrak{D}_0$ için $\hat{Q}(z) = SQ(z)S^{-1}$ olacak şekilde singüler olmayan bir S matrisinin mevcut ve $\hat{Q}$ matrisi (2.4) formunda olduğu görülebilir. $\hat{Q}$ ya ilişkin $\hat{P}$ değeri (2.9) şeklinde bir matristir. Q ve dolayısıyla $\hat{Q}$, z nin sürekli fonksiyonları olduğundan $\hat{P}$ için (2.10) integral temsili kullanılırsa, $\hat{P}$ nın da z nin sürekli fonksiyonu olduğu elde edilir. Böylece (2.9) ile verilen matrisin her bir bloğu için $+$ veya $-$ işaretinin seçimi $\mathfrak{D}_0$ da tüm z ler için aynı olacaktır ve $\hat{P}$ bir sabit matristir. Buradan $P = S^{-1}\hat{P}S$ ifadesinin de sabit olduğu görülebilir. P nin Q ile değişmeli olduğu ise P için (2.10) ile verilen integral temsilinden elde edilir.

□

2.3 $Q-$holomorf Fonksiyon Teori

Düzlemde birinci mertebeden

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

sistemine Cauchy-Riemann sistemi denir. İyi bilindiği gibi $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ kısmi türev operatörü ile Cauchy-Riemann sistemi $w_{\overline{z}} = 0$ formunda tek bir denklem olarak da yazılabilir. Burada $w = u + iv$ ve $z = x + iy$ dir. Hile (1982), Douglis (1953) ve Bojarski (1966) tarafından elde edildiği gibi, analitik fonksiyonlarda kompleks z değişkeninin üstlendiği göreve karşılık gelecek şekilde (2.1) denkleminin $\phi(z) = \phi_0(z)I + N(z)$ formuna sahip bir özel çözümünü elde etmiş ve (2.1) denkleminin $\frac{\partial w}{\partial \overline{\phi}} = 0$ şeklinde tek bir denklem olarak yazılabileceğini göstermiştir. Hile, bu özel çözümü doğurucu çözüm olarak adlandırmıştır. Elde edilen bu doğurucu çözüm vasıtası ile analitik fonksiyon teorisine benzer bir teori elde etmiştir. Bu kısımda, doğurucu çözümün varlığı kabul edilecek ve bazı özellikleri açıklanacaktır. Doğurucu çözüm kullanılarak genelleştirilmiş Beltrami sistemleri için Hile (1982) tarafından elde edilmiş fonksiyon teori açıklanacaktır. Doğurucu çözümün elde ediliş metodu bir sonraki kısımda açıklanacaktır.

Tanım 2.3.1. $\mathfrak{D}_0$ da tanımlı $m \times m$ tipnde bir $\phi = \phi(z)$ kompleks matris değerli fonksiyonuna

i) ϕ, $\mathfrak{D}_0$ da (2.1) denkleminin C^1 sınıfından bir çözümüdür,

ii) ϕ, $\mathfrak{D}_0$ da kendisi ile ve Q ile değişmelidir,

iii) her $z, \zeta \in \mathfrak{D}_0$, $z \neq \zeta$ için $\phi(\zeta) - \phi(z)$ tersinirdir,

iv) her $z \in \mathfrak{D}_0$, için $\phi_z(z)$ tersinirdir,

özelliklerini sağlaması halinde $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde (2.1) için bir *doğurucu çözüm* denir (Hile 1982).

Q nun sabit bir matris olması durumunda

$$\phi(z) = zI + \bar{z}Q$$

ifadesinin bir doğurucu çözüm olduğu kolayca gerçeklenebilir. Bu durumda fonksiyon teorisi oldukça basitleşir (Gilbert ve Buchanan 1983). (2.1) genelleştirilmiş Beltrami sisteminin bir $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde doğurucu çözüme sahip olduğunu varsayalım. $Q \in H(\mathfrak{D}_0)$ varsayıldığından ϕ nin birinci türevleri de $\mathfrak{D}_0$ bölgesinde Hölder süreklidir (Kısım 2.1'e bakınız). $z, \zeta \in \mathfrak{D}_0$ ve z ile ζ yı birleştiren doğru $\mathfrak{D}_0$ da bulunsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}&\phi(\zeta) - \phi(z) - \phi_z(\zeta - z) - \phi_{\bar{z}}(\bar{\zeta} - \bar{z}) \\ = &\int_0^1 \left\{[\phi_z(z + t(\zeta - z)) - \phi_z(z)](\zeta - z) + [\phi_{\bar{z}}(z + t(\zeta - z)) - \phi_{\bar{z}}(z)](\bar{\zeta} - \bar{z})\right\} dt\end{aligned}$$

yazılabilir. ϕ_z,$\phi_{\bar{z}} \in H(\mathfrak{D}_0)$ olduğundan, $c \geq 0$ ve $0 < \alpha < 1$ özelliğinde c ve α sabitleri vardır öyle ki z ye yeterince yakın tüm ζ değerleri için

$$\|\phi(\zeta) - \phi(z) - \phi_z(\zeta - z) - \phi_{\bar{z}}(\bar{\zeta} - \bar{z})\| \leq \int_0^1 ct^\alpha |\zeta - z|^{\alpha+1} dt = \frac{c}{\alpha + 1}|\zeta - z|^{\alpha+1}$$

dir. Ayrıca ϕ nin (2.1) denklemini sağladığını da göz önüne alırsak, $\zeta \to z$, $z \in \mathfrak{D}_0$ için doğurucu çözümün yukarıda verilen dört özelliğine ek olarak

v) $\phi(\zeta) - \phi(z) = [(\zeta - z)I + (\bar{\zeta} - \bar{z})Q]\phi_z(z) + O(|\zeta - z|^{\alpha+1})$

özelliği de geçerlidir (α, z ye bağlıdır ancak $\mathfrak{D}_0$ ın herhangi bir kompakt alt cümlesinde değişirken sabit olarak düşünülebilir). **v** özelliğinden

$$\begin{aligned}[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} = (\bar{\zeta} - \bar{z})^{-1} \left[\frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} I + Q(z)\right]^{-1} \times \\ \left\{\phi_z(z) + \left[\frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} I + Q(z)\right]^{-1} O(|\zeta - z|^\alpha)\right\}^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. $Q(z)$ matrisi varsayım gereği 1 büyüklüğünde özdeğere sahip olmadığından $\left[\frac{\zeta - z}{\bar{\zeta} - \bar{z}} I + Q(z)\right]^{-1}$ matrisi tüm $\zeta \neq z$ için düzgün sınırlıdır. Böylece doğurucu çözüm için $\zeta \to z$, $z \in \mathfrak{D}_0$ için

vi) $\|\phi(\zeta) - \phi(z)\|^{-1} = O(|\zeta - z|^{-1})$

tahmini elde edilir.

Teorem 2.3.2. $w = w(z) \in C^1(\mathfrak{D}_0),\ m \times s$ boyutlu kompleks matris değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dw(z)}{d\phi(z)} = \lim_{\Delta z \to 0} \{\phi(z + \Delta z) - \phi(z)\}^{-1} [w(z + \Delta z) - w(z)] \tag{2.11}$$

limitinin bir $z \in \mathfrak{D}_0$ noktasında mevcut olması için gerek ve yeter koşul, w fonksiyonunun z de (2.1) denklemini sağlamasıdır. Bu durumda

$$\frac{dw(z)}{d\phi(z)} = \phi_z^{-1}(z) w_z(z) \tag{2.12}$$

dir (Hile 1982).

İspat. Varsayalım ki (2.11) ile verilen limit mevcut olsun. **v** özelliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \phi(z + \Delta z) - \phi(z) =& [(\Delta z)I + (\Delta \overline{z})Q(z)]\phi_z(z) + O(|\Delta z|^{\alpha+1}) \\ =& \left\{ [I + \frac{\Delta \overline{z}}{\Delta z} Q(z)]\phi_z(z) + O(|\Delta z|^{\alpha}) \right\} \Delta z \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.1) denkleminde $\Delta z = \Delta x$, $\Delta z = i\Delta y$ yazılır ve $\Delta z \to 0$ için limit alınırsa sırasıyla

$$\frac{dw(z)}{d\phi} = [I + Q(z)]^{-1} \phi_z(z)^{-1} w_x(z) \tag{2.13}$$

ve

$$\frac{dw(z)}{d\phi} = [I - Q(z)]^{-1} \phi_z(z)^{-1} (-i w_y(z)) \tag{2.14}$$

bulunur. Buradan (2.13) ve (2.14) ifadelerinin eşitlenmesiyle

$$(I + Q)^{-1} w_x = (I - Q)^{-1} (-i w_y)$$

elde edilir. Bu ise (2.1) denklemini verir. Tersine, w, z de (2.1) denklemini sağlasın. (2.11) limitinin mevcut olduğunu gösterelim. ϕ için verilen **v** özelliği, w için aynı şekilde çıkarılabilir. Böylece bir α için

$$
\begin{aligned}
\phi(z+\Delta z) - \phi(z)]^{-1}[w(z+\Delta z) - w(z)] \\
&= \left\{ \phi_z(z) + [\frac{\Delta z}{\Delta \overline{z}} I + Q(z)]^{-1} O(|\Delta z|^{\alpha}) \right\}^{-1} \\
&\times \left\{ w_z(z) + [\frac{\Delta z}{\Delta \overline{z}} I + Q(z)]^{-1} O(|\Delta z|^{\alpha}) \right\} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Q nun mutlak değerce 1 büyüklüğünde özdeğeri olmadığı dikkate alınırsa, $|\frac{\Delta z}{\Delta \overline{z}}| = 1$ olduğundan

$$
\left[\frac{\Delta z}{\Delta \overline{z}} I + Q(z) \right]^{-1}
$$

matrisi tüm $\Delta z \neq 0$ için düzgün sınırlıdır. Böylece Δz sıfıra yaklaştığında (2.15) ifadesinden (2.12) elde edilir. $\square$

Tanım 2.3.3. $w \in C^1$ fonksiyonu için (2.11) limiti mevcutsa, w ya *ϕ-türevlenebilir* denir (Hile 1982).

Eğer ϕ, C^1 sınıfından ve (2.11) limiti mevcut ise, herhangi bir $n \geq 0$ için ϕ^n kuvveti $\mathfrak{D}_0$ da ϕ-türevlenebilir ve $\frac{d(\phi^n)}{d\phi} = n\phi^{n-1}$ dir. $z \neq \zeta$ olacak şekildeki tüm $\zeta \in \mathfrak{D}_0$ için

$$
\frac{d}{d\phi}[\phi(\zeta) - \phi]^{-n} = n\,[\phi(\zeta) - \phi]^{-n-1}
$$

dir.

Klasik fonksiyon teoride iyi bilinen Green formülleri benzer bir şekilde (2.1) denklemi için de ifade edilebilir. Bu formül, Douglis ve Bojarski tarafından Q üzerinde biraz daha kuvvetli şartlar altında ispatlanmıştır. Eğer $\overline{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}_0$ ve $\mathfrak{D}$ bölgesinin Γ sınırı, parçalı sürekli teğete sahip olan sonlu sayıda basit kapalı eğrilerden ibaret ise, sınırlı bir $\mathfrak{D}$ bölgesine $\mathfrak{D}_0$ nin *regüler bir alt bölgesi* denir.

Teorem 2.3.4. v, $\mathfrak{D}_0$ da (2.1) denkleminin $C^1(\mathfrak{D}_0)$ sınıfından, Q ile değişmeli $m \times m$ tipinde bir çözümü olsun. $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ ın $\Gamma = \partial\mathfrak{D}$ sınırına sahip bir regüler alt bölgesi olsun. O halde eğer $u \in C^1(\mathfrak{D}) \cap C(\overline{\mathfrak{D}})$ ve $\mathfrak{D}$ de birinci mertebeden sınırlı türevlere sahip ise,

$$
\int_{\Gamma} (dv)u = 2i \iint_{\mathfrak{D}} v_z(u_{\bar{z}} - Qu_z)dxdy \qquad (2.16)
$$

dir (Hile 1982).

İspat. $v \in C^{\infty}(\mathbb{C})$ olduğunu varsayalım. Kompleks formda Green formülü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma}(dv)u &= \int_{\Gamma}(v_z u dz + v_{\bar{z}} u d\bar{z}) \\
&= 2i \iint_{\mathfrak{D}} \left[(v_z u)_{\bar{z}} - (v_{\bar{z}} u)_z\right] dxdy \\
&= 2i \iint_{\mathfrak{D}} (v_z u_{\bar{z}} - v_{\bar{z}} u_z) dxdy \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Dikkat edilirse (2.17) ifadesinde ilk ve son integraller v fonksiyonunun sadece birinci türevlerini içermektedir. $v \in C^1(\mathfrak{D}_0)$ olması durumunda (2.17) deki ilk ve son integrallerin eşit olduğu sonucunu çıkarmak için, (2.17) ifadesini $C^{\infty}(\mathbb{C})$ de bulunan fonksiyonların bir dizisine uygulayabiliriz ki bu fonksiyonlar $C^1(\overline{\mathfrak{D}})$ da v ye yaklaşır. O halde (2.17) de $v_{\bar{z}} = Qv_z$ alır ve v_z nin Q ile değişmeli olduğunu kullanırsak (2.16) elde edilir.

□

Sonuç 2.3.5. ϕ, (2.1) için $\mathfrak{D}_0$ da bir doğurucu çözüm ve $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ bölgesinin Γ sınırına sahip bir regüler alt bölgesi olsun. Eğer $w \in C(\overline{\mathfrak{D}})$ ve w, $\mathfrak{D}$ bölgesinde Q-holomorf ise,

$$\int_{\Gamma}(d\phi)w = 0$$

dir (Hile 1982).

Bir sonraki lemma Cauchy integral formülün türetilmesi için ön hazırlık niteliğindedir.

Lemma 2.3.6. ϕ, $\mathfrak{D}_0$ da (2.1) için bir doğurucu çözüm olsun. Eğer $z \in \mathfrak{D}_0$ ise ve z merkezli ϵ yarıçaplı kapalı disk $\mathfrak{D}_0$ da bulnuyorsa,

$$\int_{|\zeta - z| = \epsilon} \left[\phi(\zeta) - \phi(z)\right]^{-1} (d\phi)\zeta = P \qquad (2.18)$$

dir, burada P, (2.1) sistemi için bir P-matristir (Hile 1982).

İspat. Sonuç 2.3.5, (2.18) integralinin değerinin ϵ dan bağımsız olduğunu ve $|\zeta - z| = \epsilon$ çemberi, z civarında bir kez dolanım yapan herhangi bir düzgün eğriye dönüştürülse bile bu integralin değerinin değişmeyeceğini gösterir. Böylece (2.18) integralinin değerini hesaplamak için, $\epsilon \to 0$ için integralin değerinin limitini hesaplamak yeterlidir. Doğurucu çözümün **i.** ve **v.** özellikleri ve $\zeta - z = \epsilon e^{i\theta}$ yazımı kullanılırsa

$$[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} d\phi(\zeta)$$

$$= \left\{ \left[(\zeta - z)I + (\bar{\zeta} - \bar{z})Q(z)\right] \phi_z(z) + O(|\zeta - z|^{1+\alpha}) \right\}^{-1} \phi_\zeta(\zeta) \left[d\zeta + Q(\zeta)d\bar{\zeta}\right]$$

$$= \left\{ \left[e^{i\theta}I + e^{-i\theta}Q(z)\right] \phi_z(z) + O(\epsilon^\alpha) \right\}^{-1} \phi_\zeta(z + \epsilon e^{i\theta}) \left[ie^{i\theta} - Q(z + \epsilon e^{i\theta})ie^{-i\theta}\right] d\theta$$

bulunur. Bu ifade (2.18) integralinin sol tarafında yerine yazılır ve ϵ sıfıra giderken limit alınırsa

$$\int_0^{2\pi} \left[e^{i\theta}I + e^{-i\theta}Q(z)\right] \left[Iie^{i\theta} - Q(z)ie^{-i\theta}\right] d\theta$$

$$= \int_{|\zeta|=1} \left[\zeta I + \zeta \bar{Q}(z)\right]^{-1} [Id\zeta + Q(z)d\zeta] = P$$

elde edilir.

□

Genelleştirilmiş analitik fonksiyon teorisinde genelleştirilmiş Cauchy-Pompieu formülü (Vekua 1962, s.41) olarak bilinen formülü Hile matris değerli fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

Teorem 2.3.7. $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ bölgesinin regüler bir alt bölgesi ve $\Gamma = \partial\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ bölgesinin sınırı olmak üzere w, $\mathfrak{D}$ bölgesinde birinci mertebeden sınırlı türevlere sahip $C^1(\mathfrak{D}) \cap C(\overline{\mathfrak{D}})$ sınıfından $m \times s$ tipinde bir matris olsun. O halde bir $z \in \mathfrak{D}$ için

$$w(z) = P^{-1} \int_\Gamma [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}(d\phi)(\zeta)w(\zeta)$$

$$- 2iP^{-1} \iint_{\mathfrak{D}} \phi_\zeta(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}[w_{\bar{\zeta}}(\zeta) - Q(\zeta)w_\zeta(\zeta)]d\xi d\eta \qquad (2.19)$$

dir ($\zeta = \xi + i\eta$) (Hile 1982).

İspat. $z \in \mathfrak{D}$ ve $\mathfrak{D}_\epsilon := \mathfrak{D} \setminus \{\zeta : |\zeta - z| < \epsilon\}$ olsun. (2.16) ifadesinde $v(\zeta) \equiv \phi(\zeta)$ ve

$u(\zeta) \equiv [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} w(\zeta)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
2i \iint\limits_{\mathfrak{D}_\epsilon} & \phi_\zeta(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}[w_{\bar{\zeta}}(\zeta) - Q(\zeta) w_\zeta(\zeta)] d\xi d\eta \\
&= \int\limits_{\Gamma} (d\zeta)(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} w(\zeta) \\
&\quad - \int\limits_{|\zeta - z| = \epsilon} (d\phi)(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} w(\zeta)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

bulunur. Son integralde $\epsilon \to 0$ için (2.18) ve doğurucu çözümün **vi.** özelliğinin kullanılmasıyla

$$
\begin{aligned}
\| \int\limits_{|\zeta - z| = \epsilon} & (d\phi)(\zeta)[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} w(\zeta) - P w(z) \| \\
&\leq \int\limits_{|\zeta - z| = \epsilon} \| [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} \| \| w(\zeta) - w(z) \| \| d\phi(\zeta) \| \\
&\leq (sabit) \int\limits_{|\zeta - z| <= \epsilon} |\zeta - z|^{-1} \| w(\zeta) - w(z) \| \| \phi_\zeta(\zeta) d\zeta + \phi_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\bar{\zeta} \| \\
&\leq (sabit) \sup_{|\zeta - z| = \epsilon} \left\{ \| w(\zeta) - w(z) \| (\| \phi_\zeta(\zeta) \| + \| \phi_{\bar{\zeta}}(\zeta) \| \right\}
\end{aligned}
$$

tahmini elde edilir. w, ϕ_ζ ve $\phi_{\bar{\zeta}}$ sürekli olduğundan bu son tahmin ϵ ile birlikte sıfıra yaklaşır. Böylece (2.19) elde edilir.

$\square$

Sonuç 2.3.8. w, $\mathfrak{D}$ bölgesinde Q-homolorf ve $\overline{\mathfrak{D}}$ da sürekli olsun. O halde $z \in \mathfrak{D}$ için

$$
w(z) = P^{-1} \int_\Gamma [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} d\phi(\zeta) w(\zeta) \tag{2.21}
$$

dır, burada $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$ ın regüler bir alt bölgesidir ve Γ, $\mathfrak{D}$ bölgesinin sınırıdır (Hile 1982).

Dikkat edilirse w verilen bir bölgede Q-holomorf ise (2.21) temsili w nın aynı bölgede sonsuz kere ϕ-türevlenebilir ve w nın tüm ϕ-türevlerinin de Q-holomorf olduğunu gösterir. (2.21) ifadesinin ϕ ye göre n. türevi

$$
\frac{d^n w(z)}{d\phi^n} = n! P^{-1} \int_\Gamma [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-n-1} d\phi(\zeta) w(\zeta) \tag{2.22}
$$

temsilini verir. Morera teoreminin bir benzeri $Q-$holomorf fonksiyonlar için de verilebilir:

Teorem 2.3.9. w, bir $\mathfrak{D}$ bölgesinde sürekli $m \times s$ tipinde matris değerli bir fonksiyon olmak üzere w nın $\mathfrak{D}$ de Q-holomorf olması için gerek ve yeter koşul, kapanışı $\mathfrak{D}$ de bulunan tüm R dikdörtgensel bölgeleri için

$$\int_{\partial R} (d\phi)w = 0 \tag{2.23}$$

olmasıdır (Hile 1982).

İspat. w matris değerli fonksiyonu Q-holomorf ise Sonuç 2.3.5 den (2.23) elde edilir. Aksine, w, $\mathfrak{D}$ de sürekli ve (2.23) ifadesi $\mathfrak{D}$ bölgesinde ki tüm R dikdörtgenleri için geçerli olsun. Eğer D_c, $\mathfrak{D}$ de z_0 merkezli herhangi bir daire ise, dikdörtgensel bir yol boyunca alınmış

$$v(z) \equiv \int_{z_0}^{z} d\phi(\zeta)w(\zeta) = \int_{z_0}^{z} [\phi_\zeta(\zeta)w(\zeta)d\zeta + \phi_{\overline{\zeta}}(\zeta)w(\zeta)d\overline{\zeta}]$$

çizgi integrali D_c de

$$v_z = \phi_z w, \qquad v_{\overline{z}} = \phi_{\overline{z}} w$$

denklemlerini sağlayan bir fonksiyon tanımlar. Böylece,

$$v_{\overline{z}} = Q\phi_z w = Qv_z, \qquad \frac{dv}{d\phi} = \phi_z^{-1} v_z = w$$

elde edilir. Buradan w nın D_c de Q-holomorf bir fonksiyonun ϕ-türevi olduğu söylenebilir.

□

Teorem 2.3.10. $\mathbb{C}$ de sınırlı alt üçgensel bir Q-holomorf fonksiyonu sabittir (Hile 1982).

İspat. w, $\mathbb{C}$ de sınırlı alt üçgensel bir Q-holomorf fonksiyon ve Γ, $z_0 \in \mathbb{C}$ merkezli, R yarıçaplı bir çember olsun. Cauchy tipi integral temsili kullanılarak

$$w(z) = P^{-1} \int_\Gamma [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1} d\phi(\zeta)w(\zeta)$$

yazılabilir. Bu ifadenin x e göre türetilmesi ile

$$w_x(z) = P^{-1} \int_\Gamma [\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-2} \phi_x(z) d\phi(\zeta) w(\zeta)$$

elde edilir. Doğurucu çözümün **vi** ile verilen norm özelliği kullanılırsa

$$\|w_x(z)\| \leq M \int_\Gamma \frac{1}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} R d\theta \leq \frac{M}{R} 2\pi$$

bulunur. Burada $R \to 0$ için $w_x \to 0$ dir. Benzer şekilde $R \to 0$ için $w_y \to 0$ olduğu görülebilir. Böylece, $w = c_0 + ic_1$ dir.

□

Aşağıdaki teorem, (2.21) de $[\phi(\zeta) - \phi(z)]^{-1}$ Cauchy çekirdeğinin geometrik seriye genişletilmesiyle ispatlanmıştır. Bu konuyla ilgili benzer sonuçlar, Douglis (1953), Goldschmidt (1979), Hile (1978, 1982) tarafından verildiğinden burada ispat verilmeyecektir.

Teorem 2.3.11. w fonksiyonu, muhtemel bir z_0 aykırı noktası dışında $\mathfrak{D}$ bölgesinde Q- holomorf olsun. Eğer, w z_0 noktasında da Q-holomorf ise, w z_0 ın yeterince küçük bir komşuluğunda düzgün yakınsak bir Taylor serisine

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi(\zeta) - \phi(z)]^n \frac{d^n w(z_0)}{d\phi^n} \tag{2.24}$$

şeklinde açılabilir. Daha genel olarak, w, z_0 da bir ayrık singüler noktaya sahipse, c_n

$$c_n = P^{-1} \int_{|\zeta - z| = \rho} [\phi(\zeta) - \phi(z_0)]^{-n-1} d\phi(\zeta) w(\zeta) \tag{2.25}$$

olmak üzere

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n!} [\phi(\zeta) - \phi(z)]^n c_n \tag{2.26}$$

şeklinde bir Laurent serisine açılabilir. Burada ρ, $|\zeta - z| = \rho$ diski $\mathfrak{D}$ de bulunacak şekilde seçilmiştir. (2.26) serisi, z_0 ın yeteri kadar küçük delinmiş bir komşuluğunda yakınsaktır ve yakınsaklık bu delinmiş komşuluğun kompakt alt cümleleri üzerinde düzgündür (Hile 1982).

2.4 Doğurucu Çözümün Varlığı

Bu kısımda, genelleştirilmiş Beltrami sistemi için doğurucu çözümün varlığına ilişkin teoremler ifade edilecektir. Kompleks düzlemde tanımlı ve kompleks değerli g fonksiyonları için aşağıdaki normlar kullanılacaktır:

$$\|g\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}}\{|g(z)|\}, \qquad \|g\|_p = \left\{\iint_{\mathbb{C}} |g(z)|^p dxdy\right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Eğer $v = (v_{ij})$ $\mathbb{C}$ de bileşenleri z nin fonksiyonları olan bir matris ise norm

$$\|v\|_p = \sum_{i,j} \|v_{ij}\|_p, \quad 0 < p \leq \infty$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Teorem 2.4.1. Q, $\mathbb{C}$ de sınırlı, Hölder sürekli ve kendi değişmeli $m \times m$ tipinde bir kompleks matris olsun. $\mathbb{C}$ nin her noktasında $Q(z)$ nin $\lambda_1(z), \lambda_2(z), ..., \lambda_m(z)$ karakteristik değerlerinin tümü için

$$|1 - |\lambda_i(z)|| \geq \epsilon, \qquad i = 1, 2, ..., m \tag{2.27}$$

şartı sağlanacak şekilde bir $\epsilon > 0$ sayısının mevcut olduğunu varsayalım. Ayrıca

$$z \to \infty \qquad \text{iken} \qquad Q(z) \to Q_0 \tag{2.28}$$

ve $1 \leq p' < 2$ özelliğindeki bazı p' ler için

$$Q(z) - Q_0 \in L_{p'}(\mathbb{C})$$

olacak şekilde bir Q_0 sabit matrisi mevcut olsun. O halde kompleks düzlemin tamamında (2.1) denklemi için Tanım 2.3.1 de verilen **i-iv** özelliklerini sağlayan bir ϕ doğurucu çözümü mevcuttur ve ek olarak

i) $\phi(z) - zI - \bar{z}Q_0$ $\mathbb{C}$ de sınırlıdır,

ii) $\phi_{\bar{z}} - Q_0$ ve $\phi_z - I$ ifadeleri 2 ye yeterince yakın p ler için $L_p(\mathbb{C})$ sınıfına aittir,

iii) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\|\phi(z_1) - \phi(z_2)\| \leq M|z_1 - z_2|^\alpha$$

olacak şekilde M ve α, $(0 < \alpha < 1)$, sabitleri mevcuttur, özelliklerine sahiptir (Hile 1982).

Bojarski (1966) tarafından kullanılan yöntem üzerinde yapılan değişikliklerle elde edilen metod kullanılarak bir doğurucu çözüm elde edilmiştir. Bojarski (1966) kullandığı yöntemde bir ek şart olarak Q nun düzlemin kompakt bir alt cümlesi dışında özdeş olarak sıfır olduğunu varsaymıştır. Bu yöntem, formal olarak

$$(Tv)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

$$(\Pi v)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

ile tanımlanan T ve Π operatörlerini kullanır ve bu operatörlerin özellikleri Vekua (1962) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Lemma 2.4.2. **(i)** $1 \leq p' < 2$, $2 < p' < \infty$ olmak üzere $v \in L_p(\mathbb{C}) \cap L_{p'}(\mathbb{C})$ ise o halde Tv, $\mathbb{C}$ de sınırlı ve düzgün Hölder süreklidir ($\alpha = (p-2)/p$). Ayrıca

$$\|Tv\|_\infty \leq M(p,p')\left[\|v\|_p + \|v\|_{p'}\right],$$

$$|(Tv)(z_1) - (Tv)(z_2)| \leq M(p,p')\left[\|v\|_p + \|v\|_{p'}\right]|z_1 - z_2|^\alpha, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

eşitsizliklerini sağlar ve $\mathbb{C}$ de Sobolev anlamında

$$(Tv)_{\bar{z}} = v, \qquad (Tv)_z = \Pi v$$

türev formülleri geçerlidir.

(ii) Π, $L_p(\mathbb{C})$ $(1 < p < \infty)$ uzayında

$$\|\Pi v\|_p \leq \Lambda_p \|v\|_p \tag{2.29}$$

eşitsizliğini sağlayan sınırlı bir operatördür. Burada $\Lambda_p > 0$ dır. Ayrıca $\Lambda_2 = 1$ dir ve verilen bir $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $|p-2| < \delta$ iken

$$\Lambda_p \leq 1 + \epsilon \tag{2.30}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur (Hile 1982).

Bu özellikler Vekua (1962) tarafından v fonksiyonunun skaler değerli olması halinde gösterilmiştir. Ayrıca matris değerli fonksiyonlar için de geçerli oldukları kolayca gösterilebilir.

3. MATRİS FORMDA PSEUDOPARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN İNTEGRAL TEMSİLLER

Bu bölümde, genelleştirilmiş $Q-$holomorf fonksiyonlar teorisinden türetilmiş matris formda

$$L[w] := E[w_t] + A[w] = 0 \tag{3.1}$$

pseudoparabolik denklemi için genel çözüm temsilleri elde edilecektir. Burada E

$$E[w] := w_{\overline{\phi}}(z,t) + a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)}$$

bir eliptik operatör ve A

$$A[w] := c(z)w(z,t) + d(z)\overline{w(z,t)}$$

bir cebirsel operatördür. $w(z,t) = \{w_{ij}(z,t)\}$, $m \times s$ tipinde kompleks değerli bir matristir. $a,\ b,\ c$ ve d katsayıları ise $m \times m$ tipinde Q ile değişmeli kompleks değerli matrislerdir ve zaman değişkeni t den bağımsızdır. Ayrıca bu katsayıların $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathfrak{D}}$ de sıfır olduğu varsayılmıştır. Burada $\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölgedir.

3.1 Temel Çözümler Yardımıyla Pseudoparabolik Denklemin Çözümlerinin Temsili

(3.1) denkleminde, A ve E operatörlerinin açık olarak yazılmasından sonra, iki tarafının t ye göre integralinin alınmasıyla

$$\begin{aligned} w_{\overline{\phi}}(z,t) + a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)} + \int_0^t c(z)w(z,\tau) + d(z)\overline{w(z,\tau)}d\tau \\ = w_{\overline{\phi}}(z,0) + a(z)w(z,0) + b(z)\overline{w(z,0)} \end{aligned}$$

elde edilir. Pompeiu operatörü (J) yardımıyla yukarıdaki pseudoparabolik denklem, bir integral denklem olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & w\left(z,t\right) + J\left(a\left(z\right)w\left(z,t\right) + b\left(z\right)\overline{w\left(z,t\right)}\right) \\ & \quad + J\left(\int_0^t \left(c\left(z\right)w\left(z,\tau\right) + d\left(z\right)\overline{w\left(z,\tau\right)}\right)d\tau\right) \\ & \qquad = w\left(z,0\right) + J\left(a\left(z\right)w\left(z,0\right) + b\left(z\right)\overline{w\left(z,0\right)}\right) + \Psi\left(z,t\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

burada

$$(JF)(z) = P^{-1} \int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)} \left(\phi(\zeta) - \phi(z)\right)^{-1} F(\zeta)$$

ve $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{\phi} \partial t} \equiv 0$ dır. Burada sabit P matrisi genelleştirilmiş Beltrami sistemi için P-değeri olarak adlandırılır (Hile 1982). $\Psi(z,t)$ ise

$$\Psi(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k(z)\, a_k(t) \quad (z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}), \quad \Psi(z,0) = 0,$$

şeklindedir ve yalnızca t ye bağlı olan $m \times s$ tipindeki a_k matris fonksiyonları için t nin diferensiyellenebilir bir fonksiyonudur. Her n için Q-holomorf fonksiyonlar için Cauchy integral formülünün ϕ ye göre n. türevi ile

$$\frac{d^n w(z)}{d\phi^n} = n! P^{-1} \int_{|\zeta - z| = r} d\phi(\zeta)(\phi(\zeta) - \phi(z))^{-n-1} w(\zeta)$$

temsili elde edilir. Kompleks duruma benzer şekilde Q-holomorf fonksiyonlar için Liouville teoremi ispatlanabilir (Kısım 2.3).

$w(z,t)$ matris fonksiyonunun $\mathbb{C}$ de sınırlı olması şartıyla, her $t \in \mathbb{R}$ için $\Psi(z,t)$, $\mathbb{C}$ de sınırlı Q-holomorf bir fonksiyondur. Böylece $\Psi(z,t)$ sadece t ye bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda Liouville teoreminin yardımıyla $\Psi(z,t) = \Psi(t)$ yazılabilir. (3.2) denkleminde $z \to \infty$ için

$$\Psi(t) := w(\infty, t) - w(\infty, 0), \text{ i.e. } \Psi(0) = 0$$

elde edilir. Böylece (3.1) denklemi sınırlı çözümleri için

$$\begin{aligned} &w(z,t) + J\left(a(z)w(z,t) + b(z)\overline{w(z,t)}\right) \\ &= -J\left(\int_0^t \left(c(z)w(z,\tau) + d(z)\overline{w(z,\tau)}\right) d\tau\right) + \Psi(t) + \varphi(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

denklemine denktir. Burada

$$\varphi(z) := w(z,0) + J\left(a(z)\, w(z,0) + b(z)\, \overline{w(z,0)}\right). \tag{3.4}$$

Eğer w, her bir $t \in \mathbb{R}$ için $z \in \mathbb{C}$ de (3.3) denkleminin sınırlı ve sürekli bir çözümü ise o halde

$$\Psi(t) \in C(\mathbb{R}), \quad \varphi(z) \in C(\mathbb{C})$$

dir. Şimdi verilen $\Psi \in C(\mathbb{R})$ ve $\varphi \in C(\mathbb{C})$ fonksiyonları için (3.3) denklemini göz önüne alalım.

Lemma 3.1.1. $\Psi \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C(\mathbb{C})$ olsun ve a, b katsayıları

$$\int_{\mathbb{C}} (\|a(\zeta)\| + \|b(\zeta)\|) \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \leq \alpha < 1 \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlasınlar. Bu takdirde (3.3) denklemi $B_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ uzayında bir tek çözüme sahiptir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. (3.3) denkleminin aynı başlangıç verisine ve $z \to \infty$ durumunda aynı asimptotik davranışa sahip iki çözümü w_1 ve w_2 olsun. Bu durumda $\omega := w_1 - w_2$,

$$\begin{aligned} \omega = \mathbb{T}\omega := & -J\left(a(z)\omega(z,t) + b(z)\overline{\omega(z,t)}\right) \\ & - J\left(\int_0^t \left(c(z)w(z,\tau) + d(z)\overline{w(z,\tau)}\right) d\tau\right) \end{aligned}$$

homojen denkleminin bir çözümüdür. a ve b katsayılarının sağladığı eşitsizliğe ek olarak,

$$\int_{\mathbb{C}} (\|c(\zeta)\| + \|d(\zeta)\|) \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|}$$

ifadesi için bir üst sınır olarak β yı belirleyelim. Eğer

$$\|\omega\|_1 := \sup_{z \in \mathbb{C}, |t| \leq 1} \|\omega(z,t)\|,$$

tanımı yapılır ise birkaç basit hesaplamadan sonra

$$\|\mathbb{T}\omega\|_1 \leq \alpha \sup\|\omega\| + \beta \sup\|\omega\||t|$$

$$= (\alpha + \beta|t|)\|\omega\|_1$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece

$$|t| < \min\{1, \frac{1-\alpha}{\beta}\}$$

için $\mathbb{T}$ operatörünün bir daralma dönüşümü olduğu görülür. Dolayısıyla $\omega = \mathbb{T}\omega$ sadece aşikar çözüme sahiptir, yani $z \in \mathbb{C}$ için

$$\omega(z,t) \equiv 0, \quad |t| \leq t_0 := \min\{1, \frac{1-\alpha}{\beta}\}.$$

w fonksiyonunun sürekliliği dolayısıyla, yukarıdaki ifade $|t| = t_0$ için de doğrudur. Böylece (3.1) denklemi t ye göre otonom bir diferensiyel denklem olduğundan bu sonuç

$$\omega(z,t) \equiv 0 \quad (z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R})$$

şeklinde genişletilebilir.

$\square$

Sonuç 3.1.2. $w(\infty,t) \in C(\mathbb{R})$ ve $w(z,0) \in B^0(\mathbb{C})$ olsun. Eğer (3.5) ile verilen eşitsizlik gerçekleniyorsa, bu takdirde (3.1) denklemi $B_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \times \mathbb{R})$ uzayında bir tek çözüme sahiptir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

Lemma 3.1.3. $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in B^1(\mathbb{C})$ olsun ve (3.5) eşitsizliği sağlansın. O halde (3.3) integral denklemi çözülebilirdir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. Bu lemma iterasyon yöntemi kullanılarak ispatlanacaktır. (3.3) denklemi

$$w - \mathbb{T}w = \Psi + \varphi.$$

formunda yazılırsa, iterasyon metodu yardımıyla ardışık olarak

$$\begin{aligned} &w_0 := \Psi + \varphi \\ &w_k = \Psi + \varphi + \mathbb{T}w_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (3.3) denkleminin çözümü

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{T}^k (\Psi + \varphi)$$

olarak bulunabilir.

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbb{T}w)(z,t)\| &\leq (\alpha+\beta|t|)\|w_0\|_t\,, \\
\left\|\left(\mathbb{T}^2 w\right)(z,t)\right\| &\leq \left(\alpha^2+2\alpha\beta|t|+\beta^2\frac{|t|^2}{2!}\right)\|w_0\|_t \\
&\vdots \\
\left\|\left(\mathbb{T}^k w\right)(z,t)\right\| &\leq \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\alpha^{k-l}\beta^l\frac{|t|^l}{l!}\|w_0\|_t
\end{aligned}
$$

ve

$$
\|w(z,\tau)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta|t|}{1-\alpha}\right)^k\frac{\|w_0\|_t}{1-\alpha}, (z\in\mathbb{C}, t\in\mathbb{R})
$$

ifadeleri ile yukarıda elde edilen serinin yakınsaklığı görülür. Burada

$$
\|w_0\|_t = \sup_{z\in\mathbb{C},|\tau|\leq|t|}\|\omega_0(z,\tau)\|.
$$

□

Şimdi (3.1) denkleminin sınırlı olan özel çözümleri ile ilgileneceğiz. Eğer (3.4) ile verilen φ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de sınırlı Q-holomorf bir fonksiyon ise, o halde φ sabit olmalıdır, yani

$$
\varphi(z) \equiv w(\infty,0)
$$

öyle ki $\Psi(t) = w(\infty,t) - w(\infty,0)$ olup

$$
\Psi(t) + \varphi(z) \equiv w(\infty,t)
$$

dir. Böylece ψ, $t\in\mathbb{R}$ nin diferensiyellenebilir bir fonksiyonu olmak üzere

$$
w - \mathbb{T}w = \psi, \tag{3.6}
$$

denklemini ele alabiliriz. Bu denklemi üç ayrı durumda inceleyelim.

(i) ψ reel matris değerli bir fonksiyon olsun. (3.6) denkleminin tek çözümü

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{T}^k\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\psi_k
$$

ile temsil edilir. Burada α_k, yalnızca z ye bağlı $m \times m$ tipinde kompleks matris değerli bir fonksiyondur ve ψ_k iterasyon yardımıyla

$$\psi_0 := \psi,\ \psi_k\left(t\right) := \int_0^t \psi_{k-1}\left(\tau\right) d\tau \quad \left(k \in \mathbb{N}\right) \tag{3.7}$$

ile tanımlanır. (3.6) denkleminin çözümünde bulunan α_k fonksiyonları, L operatörünün katsayıları olan $a,\ b,\ c,\ d$ fonksiyonları kullanılarak belirlenir ve ψ fonksiyonundan bağımsızdır. $a,\ b,\ c,\ d \in L_{p,2}(\mathbb{C}),\ p > 2$, olduğundan J bir kompakt operatördür (Hızlıyel ve Çağlıyan 2004a) ($L_{p,2}$ uzayının tanımı Vekua (1962) tarafından verilmiştir). $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k\psi_k$, (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(t) &= \psi + \mathbb{T}(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(t)) \\
&= \psi - J\left(a(z)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(t) + b(z)\overline{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(t)}\right) \\
&\quad - J\left(\int_0^t \left[c(z)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(\tau) + d(z)\overline{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z)\psi_k(\tau)}\right] d\tau\right) \\
&= \psi - J\left([a(z)\alpha_0(z) + b(z)\overline{\alpha_0(z)}]\psi_0(t)\right) \\
&\quad - J\left(\sum_{k=1}^{\infty}[a(z)\alpha_k(z) + b(z)\overline{\alpha_k(z)}]\psi_k(t)\right) \\
&\quad - J\left(\sum_{k=1}^{\infty}[c(z)\alpha_{k-1}(z) + d(z)\overline{\alpha_{k-1}(z)}]\int_0^t \psi_{k-1}(\tau)d\tau\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin iki yanında ψ_k terimlerinin katsayıları eşitlenirse $k = 1,\ 2,\ ...$ için

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_0\left(z\right) + J\left(a\left(z\right)\alpha_0\left(z\right) + b\left(z\right)\overline{\alpha_0\left(z\right)}\right) = I \\
&\alpha_k\left(z\right) + J\left(a\left(z\right)\alpha_k\left(z\right) + b\left(z\right)\overline{\alpha_k\left(z\right)}\right) \\
&\qquad = -J\left(c\left(z\right)\alpha_{k-1}\left(z\right) + d\left(z\right)\overline{\alpha_{k-1}\left(z\right)}\right)
\end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

sistemi elde edilir. (a,b) fonksiyonlarına karşılık gelen doğurucu çiftler (F,G) olsun. O halde α_0, F fonksiyonu olmalıdır (Hızlıyel ve Çağlıyan 2004b). Yukarıdaki sistemin çözülmesiyle α_k fonksiyonları ardışık olarak elde edilir. α_k fonksiyonları F_k ile gösterilsin. Reel matris değerli ψ fonksiyonu için, (3.6) denkleminin çözümünün

$$F_0 := F, \quad (\mathbb{F}\psi)(z,t) := \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z)\,\psi_k(t) \quad (z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}) \tag{3.9}$$

şeklinde olduğu görülür. Bu seri için, (3.8) denkleminde ikinci ifadede, (3.5) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\|F_k\| \leq \alpha \|F_k\| + \beta \|F_{k-1}\|$$

olarak bulunur. Burada $k = 1, 2, ...$ için gerekli hesaplamalar yapılırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}
\|F_1\| &\leq \frac{\beta}{1-\alpha} \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| \\
\|F_2\| &\leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2 \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\| \\
&\vdots \\
\|F_k\| &\leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^k \sup_{z\in\mathbb{C}} \|F(z)\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\psi_0 = \psi, \qquad \psi_k = \int_0^t \psi_{k-1}(\zeta) d\zeta$$

olmak üzere ardışık olarak

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \int_0^t \psi_0(\zeta) d\zeta \\
\psi_2 &= \int_0^t \int_0^{s_1} \psi_0(\zeta) d\zeta ds_1 \\
&\vdots \\
\psi_k &= \int_0^t \int_0^{s_{k-1}} \cdots \int_0^{s_1} \psi_0(\zeta) d\zeta ds_1 ... ds_{k-1} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} \psi_0(\zeta) d\zeta
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan norm özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\|\psi_k\| \leq \frac{|t|^k}{k!} \sup_{|\tau|\leq|t|} \|\psi(\tau)\|$$

bulunur. Böylece (3.9) ifadesi için bir üst sınır

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\|F(z)\| \sup_{|\tau|\leq|t|}\|\psi(\tau)\| \exp\left(\frac{\beta|t|}{1-\alpha}\right)$$

şeklinde elde edilir.

(ii) ψ sadece sanal kısımdan oluşan matris değerli bir fonksiyon olsun. (i) durumuna benzer şekilde (3.6) denkleminin çözümü

$$G_0 := G, \quad (\mathbb{G}\psi)(z,t) := \sum_{k=0}^{\infty} G_k(z)\,\psi_k(t)\,, \ \ (z\in\mathbb{C}, t\in\mathbb{R}) \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. Burada G_0 ve diğer G_k fonksiyonları

$$\begin{cases} G_0(z) + J\left(a(z)\,G_0(z) + b(z)\,\overline{G_0(z)}\right) = iI \\ \\ G_k(z) + J\left(a(z)\,G_k(z) + b(z)\,\overline{G_k(z)}\right) \\ \qquad = -J\left(c(z)\,G_{k-1}(z) + d(z)\,\overline{G_{k-1}(z)}\right). \end{cases} \tag{3.11}$$

sisteminin ardışık olarak çözülmesiyle bulunur. Sırasıyla (3.9) ve (3.10) da ki F_k ve G_k katsayıları

$$F_0(\infty) = I, \quad G_0(\infty) = iI, \quad F_k(\infty) = 0, \quad G_k(\infty) = 0, \quad (k\in\mathbb{N})$$

ile normalleştirilmiştir.

(iii) $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ bir kompleks matris değerli fonksiyon olmak üzere

$$w - \mathbb{T}w = \psi_1 + i\psi_2$$

denkleminin bir çözümü w olsun. Burada ψ_1 ve ψ_2, t nin diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonlarıdır. Böylece

$$\tilde{w} := w - \mathbb{F}\psi_1 - \mathbb{G}\psi_2$$

fonksiyonu

$$\tilde{w} - \mathbb{T}\tilde{w} = 0$$

homojen denkleminin bir çözümü olacaktır. ψ için verilen iterasyon formülü ile $t = 0$ için

$$(\mathbb{F}\psi_1 + \mathbb{G}\psi_2)(z, 0) = F_0(z)\,\psi_1(0) + G_0(z)\,\psi_2(0)$$

yazılabileceği açıktır. Ayrıca $z \to \infty$ için F_k ve G_k, $k \in \mathbb{N}_0$, fonksiyonlarının normalleştirilebildiği göz önüne alınırsa

$$(\mathbb{F}\psi_1 + \mathbb{G}\psi_2)(\infty, t) = \psi_1(t) + i\psi_2(t) = \psi(t)$$

olduğu görülür. $\tilde{w}$, $\tilde{w} - T\tilde{w} = 0$ denkleminin çözümü olduğundan bu denklemi sağlayacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} & w - \mathbb{F}\psi_1 - \mathbb{G}\psi_2 \\ & \quad + J\Big(aw - a\mathbb{F}\psi_1 - a\mathbb{G}\psi_2 + b\bar{w} - b\overline{\mathbb{F}\psi_1} - b\overline{\mathbb{G}\psi_2}\Big) \\ & \quad + J\left(\int_0^t (cw - c\mathbb{F}\psi_1 - c\mathbb{G}\psi_2 + d\bar{w} - d\overline{\mathbb{F}\psi_1} - d\overline{\mathbb{G}\psi_2})d\tau\right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi $t = 0$ için düzenlersek

$$\begin{aligned} & w(z,0) - \mathbb{F}(z)\,\psi_1(0) - \mathbb{G}(z)\,\psi_2(0) \\ & \quad + J\Big(a(z)\,w(z,0) - a(z)\,\mathbb{F}(z)\,\psi_1(0) - a(z)\,\mathbb{G}(z)\,\psi_2(0) \\ & \qquad + b(z)\,\bar{w}(z,0) - b(z)\,\overline{\mathbb{F}(z)\,\psi_1(0)} - b(z)\,\overline{\mathbb{G}(z)\,\psi_2(0)}\Big) = 0 \end{aligned}$$

buluruz. Burada (3.9) ve (3.10) ifadelerinde bulunan ψ_k lar için (3.7) iterasyonu dikkate alınır ve (3.8) ve (3.11) sistemlerinde bulunan ilk denklemler kullanılırsa

$$\varphi(z) \equiv \psi(0)$$

elde edilir. Burada φ fonksiyonu (3.4) ile verilmiştir. Sonuç olarak, $\tilde{w}$ özdeş olarak sıfırdır. Böylece ψ nin kompleks matris değerli bir fonksiyon olması durumunda, çözüm için

$$w = \mathbb{F}\psi_1 + \mathbb{G}\psi_2$$

temsili elde edilir.

Uyarı 3.1.4. (3.1) denkleminin çözüm çifti olarak Q ile değişmeli $\chi^{(k)}(z, t; \zeta, \tau)$ temel çözümler sistemini tanımlayalım. Bu sistem

$$\chi^{(k)}(z,t;\zeta,\tau)=\sum_{v=0}^{\infty}\chi_v^{(k)}(z,\zeta)\frac{(t-\tau)^{v+1}}{(v+1)!},\quad k=1,2, \tag{3.12}$$

şeklinde kuvvet serisi gösterimine sahiptir. Burada $\left\{\chi_0^{(1)}(z,\zeta),\chi_0^{(2)}(z,\zeta)\right\}$ den oluşan çift, $E[w]=0$ denklemi için bir temel çözüm sistemidir ve

$$\chi_0^{(k)}(z,\zeta)=\frac{1}{2}(-i)^{k-1}(\phi(\zeta)-\phi(z))^{-1}\exp[\omega^{(k)}(z)-\omega^{(k)}(\zeta)]$$

ile temsil edilir. Bu sistem Vekua sistemine benzer şekilde elde edilir (Begehr ve Gilbert 1993, Gilbert ve Schneider 1978, Vekua 1962). Burada $\chi_0^{(k)}\in B^{\alpha}$, $\alpha=(p-2)/p$, ve $\omega^{(k)}(z)=O(|z|^{\alpha})$ as $|z|\to\infty$, k=1,2, (Hızlıyel 2006). Yukarıdaki seriyi (3.1) denkleminde yerine koyarsak ve $(t-\tau)$ ifadesinin kuvvetlerini eşitlersek,

$$E[\chi_0^{(k)}(z,\zeta)]=0$$

$$E[\chi_{v+1}^{(k)}(z,\zeta)]+A[\chi_v^{(k)}(z,\zeta)]=0,(k=1,2,v=0,1,2,...).$$

sistemini elde ederiz. Bu sistem kullanılarak, Pompeiu operatörü yardımıyla $\chi_{v+1}^{(k)}$, $(v=0,1,2,...)$, için

$$\chi_{v+1}^{(k)}(z,\zeta)+J(a\chi_{v+1}^{(k)}+b\overline{\chi_{v+1}^{(k)}})=-J(c\chi_v^{(k)}+d\overline{\chi_v^{(k)}})+\Upsilon_{v+1}^{(k)}(z,\zeta),\quad v=0,1,2,...,$$

temsilini elde ederiz. Burada $\Upsilon_{v+1}^{(k)}$ keyfi Q-holomorf bir fonksiyondur. $\Upsilon_{v+1}^{(k)}\equiv 0$ alınarak $\chi_{v+1}^{(k)}$ normalleştirilebilir. Ayrıca (3.12) serisi için bir tahmin aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned}\left\|\chi^{(k)}(z,t;\zeta,\tau)-\chi_0^{(k)}(z,\zeta)(t-\tau)-\frac{1}{2}\chi_1^{(k)}(z,\zeta)(t-\tau)^2\right\|&\\
=\left\|\sum_{v=2}^{\infty}\chi_v^{(k)}(z,\zeta)\frac{(t-\tau)^{v+1}}{(v+1)!}\right\|&\\
=\left\|\sum_{v=0}^{\infty}\chi_{v+2}^{(k)}(z,\zeta)\frac{(t-\tau)^{v+3}}{(v+3)!}\right\|&\\
\leq\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{v}\frac{|t-\tau|^{v+3}}{(v+3)!}\sup\left\|\chi_2^{(k)}(z,\zeta)\right\|&\\
=\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{-3}\sum_{v=3}^{\infty}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^{v}\frac{|t-\tau|^{v}}{v!}\sup\left\|\chi_2^{(k)}(z,\zeta)\right\|&\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^3 \left[\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^v \frac{|t-\tau|^v}{v!} - \sum_{v=0}^{2}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^v \frac{|t-\tau|^v}{v!}\right] \sup\left\|\chi_2^{(k)}(z,\zeta)\right\|$$
$$= \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^3 \left[\exp\left(\frac{\beta|t-\tau|}{1-\alpha}\right) - \sum_{v=0}^{2}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^v \frac{|t-\tau|^v}{v!}\right] \sup\left\|\chi_2^{(k)}(z,\zeta)\right\|$$

elde edilir. Burada $\chi_{v+2}^{(k)}(z,\zeta)$ nin (3.8) sisteminin bir çözümü olduğundan bu ifade için bir üst sınır

$$\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^v \sup\left\|\chi_2^{(k)}(z,\zeta)\right\|$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.5. L operatörüne ait $\Omega^{(k)}$ temel çekirdekleri

$$\Omega^{(k)}(z,t;\zeta,\tau) = \chi^{(1)}(z,t;\zeta,\tau) + (-1)^{k-1} i\chi^{(2)}(z,t;\zeta,\tau),\ k=1,2 \tag{3.13}$$

dir. Burada $\chi^{(1)}$ ve $\chi^{(2)}$ temel çözümlerdir. Matris için tanımlanan norm özellikleri kullanılarak, $\Omega^{(k)}$ temel çekirdeklerinin yerel asimptotik davranışları Hızlıyel (2006) tarafından yapılan çalışmaya benzer olarak

$$\begin{cases} \begin{cases} \left\|\Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau) - (t-\tau)(\phi(\zeta)-\phi(z))^{-1}\right\| = O\left(|z-\zeta|^{-\frac{2}{p}}|t-\tau|\right), \\ \qquad \zeta - z \to 0, t-\tau \to 0, \frac{2}{p} < 1, \end{cases} \\ \left\|\Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\right\| = O\left(|z-\zeta|^{-\frac{2}{p}}|t-\tau|\right), (\ \zeta - z \to 0, t-\tau \to 0, \frac{2}{p} < 1), \\ \left\|\Omega^{(k)}(z,t;\zeta,\tau)\right\| = O\left(|z|^{-1}|t-\tau|\right),\quad (z\to\infty,\ k=1,2), \end{cases} \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

Tanım 3.1.6. (3.1) denkleminde bulunan L operatörüne karşılık gelen eşlenik operatör

$$\tilde{L}v = \frac{\partial}{\partial t}[v_{\bar{\phi}} - av - b^*\overline{bv}] + cv + b^*\overline{dv} \tag{3.15}$$

ile tanımlanır ve burada $b^* = \phi_z^{-1}\overline{\phi_z}$ dir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

Teorem 3.1.7. w, (3.1) denkleminin $\overline{\mathfrak{D}}\times\mathbb{R}$ de bir çözümü olsun ve $w(z,0)\equiv 0$ koşulunu sağlasın. $\tilde{\Omega}^{(1)}$ ve $\tilde{\Omega}^{(2)}$ eşlenik operatöre karşılık gelen temel çekirdekler olmak üzere

$$P^{-1}\int_\Gamma\int_0^t \left[d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(1)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)-\overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(2)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right]d\tau$$
$$=\begin{cases}-w(z,t), & z\in\mathfrak{D}, t\in\mathbb{R}\\ \\ 0, & z\notin\overline{\mathfrak{D}}, t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

dir, burada Γ, $\mathfrak{D}$ bölgesinin düzeltilebilir sınırıdır (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. İspat iyi bilinen Morera teoreminin bir versiyonuna dayanmaktadır. w ve v, sırasıyla (3.1) denkleminin ve eşlenik denklemin çözümleri olsun. $t=0$ için, eğer $w=0$ ve $v=0$ ise,

$$Re\left(\frac{1}{2i}\int_\Gamma\int_0^t d\phi(\zeta)\,v_\tau(\zeta,\tau)\,w_\tau(\zeta,\tau)\,d\tau\right)=0$$

dir. Buradan, $\tilde{\chi}_\tau^{(k)}$ eşlenik denkleme karşılık gelen temel çözümler olmak üzere $k=1,2$ ve $t\in\mathbb{R}$ için

$$\int_\Gamma\int_0^t\left(d\phi(\zeta)\,\tilde{\chi}_\tau^{(k)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)-\overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\chi}_\tau^{(k)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right)d\tau$$
$$=\begin{cases}\int_{\Gamma_\epsilon}\int_0^t\left(d\phi(\zeta)\,\tilde{\chi}_\tau^{(k)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)-\overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\chi}_\tau^{(k)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right)d\tau, & z\in\mathfrak{D}\\ \\ 0 & , z\notin\overline{\mathfrak{D}}\end{cases}$$

elde edilir, burada $\Gamma_\epsilon=\{\zeta:|\zeta-z|=\epsilon\}$ ve ϵ yeterince küçük pozitif bir sayıdır. $k=2$ için elde edilen denklem i ile çarpılarak $k=1$ için elde edilen denklemle toplanırsa

$$\int_\Gamma\int_0^t d\phi(\zeta)\left(\tilde{\chi}_\tau^{(1)}+i\tilde{\chi}_\tau^{(2)}\right)(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)\,d\tau$$
$$-\int_\Gamma\int_0^t\overline{d\phi(\zeta)\left(\tilde{\chi}_\tau^{(1)}-i\tilde{\chi}_\tau^{(2)}\right)(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}d\tau$$

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_\epsilon}\int\limits_0^t \left(d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(1)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau) - \overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(2)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right)d\tau, & z\in\mathfrak{D} \\ 0, & z\notin\overline{\mathfrak{D}} \end{cases}$$

bulunur. Temel çekirdeklerin asimptotik özellikleri kullanılırsa $z\in\mathfrak{D}$ için

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\epsilon}\int\limits_0^t \left\{d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(1)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau) - \overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(2)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right\}d\tau$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Gamma_\epsilon}\int\limits_0^t d\phi(\zeta)\left(\phi(\zeta)-\phi(z)\right)^{-1}w_\tau(\zeta,\tau)\,d\tau$$

elde edilir. w nın sürekliliği dolayısıyla ikinci integralin Pw olduğu gösterilmiştir (Hile 1982). Böylece

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_0^t \left(d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(1)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau) - \overline{d\phi(\zeta)\,\tilde{\Omega}_\tau^{(2)}(\zeta,\tau;z,t)\,w_\tau(\zeta,\tau)}\right)d\tau = -Pw(z,t)$$

olup teoremin ispatı tamamlanır.

□

Tanım 3.1.5 ve Hızlıyel (2006) tarafından yapılan çalışmada verilen Teorem 2.8 den yararlanılarak, (3.1) denklemi ve eşlenik denklemin temel çekirdekleri arasında

$$\begin{cases} \Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau) = -\tilde{\Omega}^{(1)}(\zeta,\tau;z,t), \\ \Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau) = -\overline{\tilde{\Omega}^{(2)}}(\zeta,\tau;z,t) \end{cases} \tag{3.16}$$

şeklinde bir ilişkinin mevcut olduğu görülebilir. Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.8. (3.1) denkleminin $\overline{\mathfrak{D}}\times\mathbb{R}$ de bulunan, $t=0$ için özdeş olarak sıfır olan bir çözümü

$$P^{-1}\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}\left[d\phi(\zeta)\,\Omega_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,w_\tau(\zeta,\tau) - d\overline{\phi(\zeta)}\Omega_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{w_\tau(\zeta,\tau)}\right]d\tau$$

$$= \begin{cases} w(z,t), & z \in \mathfrak{D}, \ t \in \mathbb{R}, \\ 0, & z \notin \overline{\mathfrak{D}}, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.17}$$

ile temsil edilir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. Teorem 3.1.7 ve (3.16) ifadelerinin kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

□

Teorem 3.1.9. $w(z,t)$ fonksiyonu her bir $t \in \mathbb{R}$ için $\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathfrak{D}}$ de Q-holomorf, $w_t(z,t)$, $\mathbb{C} \backslash \mathfrak{D} \times \mathbb{R}$ de sürekli olsun. $w(z,0) \equiv 0$, $w(\infty,t) \equiv 0$ ve $\overline{\mathfrak{D}}$ ın dışında a, b, c, d katsayıları özdeş olarak sıfır olmak üzere

$$P^{-1} \int_0^t \int_\Gamma \left[d\phi(\zeta) \, \Omega_\tau^{(1)}(z,t; \ \zeta, \ \tau) \, w_\tau(\zeta, \ \tau) - d\overline{\phi(\zeta)} \Omega_\tau^{(2)}(z,t; \ \zeta, \ \tau) \, \overline{w_\tau(\zeta,\tau)} \right] d\tau$$

$$= \begin{cases} -w(z,t), & z \notin \overline{\mathfrak{D}}, \ t \in \mathbb{R}, \\ 0, & z \in \mathfrak{D}, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. $G_R := \{\zeta : |\zeta| < R\}$ olsun. Burada $2|z| < R$ ve $\overline{\mathfrak{D}} \subset G_R$ dir. G_R bölgesinden bir $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{\mathfrak{D}}$ elemanı alalım. Teoremin hipotezi gereği $a, \ b, \ c, \ d$ katsayıları $\overline{\mathfrak{D}}$ nin dışında özdeş olarak sıfırdır. w, (3.1) denkleminin $(G_R \backslash \overline{\mathfrak{D}}) \times \mathbb{R}$ de bir çözümüdür. Teorem 3.1.8 in şartları w tarafından sağlandığı için

$$w(z,t) = P^{-1} \int_0^t \int_{\partial\left(G_R - \overline{\mathfrak{D}}\right)} \left\{ d\phi(\zeta) \, \Omega_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau) \, w_\tau(\zeta,\tau) \right.$$

$$\left. - \, d\overline{\phi(\zeta)} \Omega_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau) \, \overline{w_\tau(\zeta,\tau)} \right\} d\tau$$

yazılabilir. $z \to \infty$ durumunda $w(z,t) = O\left(|z|^{-1}\right), \ w_t(z,t) = O\left(|z|^{-1}\right)$ dır. Böylece, temel çekirdeklerin asimptotik davranışlarından dolayı (3.14) den $R \to \infty$ için, yukarıdaki integral iki kısımda dikkate alınırsa, ∂G_R üzerinden alınan integral sıfır olacaktır. $z \in \mathfrak{D}$ ise Teorem 3.1.8 e göre $w(z,t) = 0$ olmalıdır.

□

Teorem 3.1.10. $w(z,0) \equiv 0$ olsun. $a,\ b,\ c,\ d$ katsayılarının her biri $\overline{\mathfrak{D}}$ bölgesinin dışında sıfır olmak üzere (3.1) denkleminin $\overline{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}$ de sürekli bir çözümü

$$w(z,t) = P^{-1} \int_0^t \int_\Gamma \Big\{ d\phi(\zeta)\, \Omega_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\, \Psi_\tau(\zeta,\tau)$$

$$- \overline{d\phi(\zeta)} \Omega_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\, \overline{\Psi_\tau(\zeta,\tau)} \Big\} d\tau, \qquad (3.18)$$

ile temsil edilebilir. Burada $z \in \mathfrak{D},\ t \in \mathbb{R}$ ve $\Psi(z,t)$

$$\Psi(z,t) := P^{-1} \int_\Gamma d\phi(\zeta)\, (\phi(\zeta) - \phi(z))^{-1}\, w(\zeta,t) \qquad (3.19)$$

ile verilmek üzere $z \in \mathfrak{D}$ de Q-holomorf, $\overline{\mathfrak{D}}$ da sürekli ve $\mathbb{R}$ de t nin sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyonudur (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. (3.2) denklemini

$$w = \mathbb{T}w + \Psi \qquad (3.20)$$

şeklinde tekrar yazalım ve $\mathbb{T}w$ fonksiyonunun $z \in \hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathfrak{D}}$ ye göre Q-holomorf, $t \in \mathbb{R}$ ye göre sürekli diferensiyellenebilir olduğunu dikkate alalım.

$$(\mathbb{T}w)(\infty,t) \equiv 0, \quad (\mathbb{T}w)(z,0) \equiv 0$$

olduğu kolayca gerçeklenebilir. Böylece bir önceki teoremin hipotezleri sağlanır. Bu teoremin bir sonucu olarak

$$P^{-1} \int_0^t \int_\Gamma \Big\{ d\phi(\zeta)\, \Omega_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\, (\mathbb{T}w)_\tau(\zeta,\tau)$$

$$- \overline{d\phi(\zeta)} \Omega_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\, \overline{(\mathbb{T}w)_\tau(\zeta,\tau)} \Big\} d\tau = 0$$

dır. w ve $\mathbb{T}w$ fonksiyonları $\overline{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}$ de sürekli olduğundan, Ψ de burada süreklidir ve $z \in \mathfrak{D}$ ye göre Q-holomorf, $t \in \mathbb{R}$ ye göre sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (3.17) denkleminde w yerine $\mathbb{T}w + \Psi$ yazmak suretiyle yukarıdaki eşitliği de kullanırsak (3.18) denklemini elde ederiz. Ek olarak, Q-holomorf fonksiyonlar için Cauchy integral formülünde Ψ yerine $w - \mathbb{T}w$ yazılırsa (3.19) denklemi elde edilir. Burada $\mathbb{T}w$ fonksiyonunun her $t \in \mathbb{R}$ için $\hat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathfrak{D}}$ de Q-holomorf olduğuna ve $z \to \infty$ için özdeş olarak sıfır olduğuna dikkat edilmelidir.

□

Şimdi (3.18) ve (3.19) denklemlerini kullanarak (3.1) denklemi için yeni bir temsil verelim.

Teorem 3.1.11. $\overline{\mathfrak{D}}$ dışında $a = b = c = d = 0$ olmak üzere (3.1) denkleminin $w(z, 0) = 0$ özelliğine sahip her çözümü

$$w(z,t) = \Psi(z,t) + \int_0^t \int_{\mathfrak{D}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)} \Big\{ \Gamma_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,\Psi_\tau(\zeta,\tau) + \Gamma_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{\Psi_\tau(\zeta,\tau)} \Big\} d\tau \quad (3.21)$$

ile temsil edilebilir. Burada Ψ, (3.19) ile verilmiştir ve temel çekirdekler yardımıyla $\Gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, fonksiyonları

$$\Gamma^{(1)}(z,t;\zeta,\tau) := -P^{-1}\Omega_{\bar{\phi}}^{(1)}(z,t;\zeta,\tau),$$
$$\Gamma^{(2)}(z,t;\zeta,\tau) := -P^{-1}\Omega_{\phi}^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)$$

şeklinde tanımlıdır (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018a).

İspat. Q-holomorf fonksiyonlar için Green özdeşliğinin (Hile 1982), (3.18) denkleminin sağ tarafına uygulanmasıyla

$$w(z,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{ -P^{-1}\int_0^t \int_{\mathfrak{D}_\varepsilon} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)} \Big(\Omega_{\bar{\phi}\tau}^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,\Psi_\tau(\zeta,\tau) + \Omega_{\phi\tau}^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{\Psi_\tau(\zeta,\tau)} \Big) d\tau \Big\}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{ P^{-1}\int_0^t \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \Big(d\phi(\zeta)\,\Omega_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,\Psi_\tau(\zeta,\tau) - d\overline{\phi(\zeta)}\Omega_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{\Psi_\tau(\zeta,\tau)} \Big) d\tau \Big\},$$

elde edilir. Burada $\mathfrak{D}_\varepsilon$, $\mathfrak{D}$ ve $|\zeta - z| > \varepsilon$ bölgelerinin kesişimi ile oluşan bölgedir. (3.14) denklemi göz önüne alınırsa, ispat tamamlanır.

□

Sabit (z,t) için (ζ,τ) nun fonksiyonları olan $\chi^{(k)}$, $k=1,2$, pseudoparabolik (3.1) denkleminin çözümleri olduğu için, $\Omega^{(k)}$ fonksiyonlarının da aşağıdaki denklemlerin çözümleri olacağı açıktır:

$$\Omega^{(1)}_{\bar{\phi}\tau}(z,t;\zeta,\tau)-a(\zeta)\,\Omega^{(1)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)-b^{*}(\zeta)\overline{b(\zeta)}\Omega^{(2)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)$$

$$+c(\zeta)\,\Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)+b^{*}(\zeta)\overline{d(\zeta)}\Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)=0,$$

$$\Omega^{(2)}_{\phi\tau}(z,t;\zeta,\tau)-\overline{a(\zeta)}\Omega^{(2)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)-\overline{b^{*}(\zeta)}b(\zeta)\,\Omega^{(1)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)$$

$$+\overline{c(\zeta)}\Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)+\overline{b^{*}(\zeta)}d(\zeta)\,\Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)=0.$$

Yukarıdaki denklemler

$$\begin{cases} P\Gamma^{(1)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)=-a(\zeta)\,\Omega^{(1)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)-b^{*}(\zeta)\overline{b(\zeta)}\Omega^{(2)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau) \\ \qquad +c(\zeta)\,\Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)+b^{*}(\zeta)\overline{d(\zeta)}\Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau), \\ P\Gamma^{(2)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)=-\overline{a(\zeta)}\Omega^{(2)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau)-\overline{b^{*}(\zeta)}b(\zeta)\,\Omega^{(1)}_{\tau}(z,t;\zeta,\tau) \\ \qquad +\overline{c(\zeta)}\Omega^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)+\overline{b^{*}(\zeta)}d(\zeta)\,\Omega^{(1)}(z,t;\zeta,\tau). \end{cases}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada $b^{*}=\phi_{z}^{-1}\overline{\phi_{z}}$ dir.

3.2 İkinci Çeşit Çözümler İçin İntegral Temsiller

Bir önceki bölümde, (3.5) eşitsizliği göz önüne alınmış ve sonuçlar bu varsayım altında elde edilmiştir. Ancak bu bölümde bu varsayım olmaksızın benzer bir yaklaşımın yapılabileceği gösterilecektir. Bir diğer integral temsilini elde etmek için,

$$w_{\bar{\phi}}+aw+b\overline{w}=0$$

denklemine ait $\Omega^{(k)}(z,\zeta)$, $k=1,2$, temel çekirdeklerini kullanalım (Hızlıyel 2006). Kompleks duruma benzer olarak (Vekua 1962), (3.1) denkleminin özel çözümünün

$$w(z,t)-2iP^{-1}\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{C}}d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\Big\{\Omega^{(1)}(z,\zeta)\left[c(\zeta)\,w(\zeta,\tau)+d(\zeta)\,\overline{w(\zeta,\tau)}\right]$$

$$+\Omega^{(2)}(z,\zeta)\left[\overline{c(\zeta)w(\zeta,\tau)}+\overline{d(\zeta)}w(\zeta,\tau)\right]\Big\}d\tau=\Psi(z,t) \qquad (3.22)$$

integral denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Burada Ψ fonksiyonu

$$\Psi_{\bar{\phi}t} + a\Psi_t + b\overline{\Psi}_t = 0$$

denkleminin çözümüdür. Bu ifade, $\mathfrak{D}$ bölgesi, $\mathfrak{D}_\varepsilon$ ve $|\zeta - z| < \varepsilon$ olmak üzere iki bölgeye ayrılırsa, (3.22) denkleminin t ve $\bar{\phi}$ ye göre diferensiyellenmesiyle gerçeklenir.

(3.1) denkleminin $\mathbb{C} \times I$, $I \in \mathbb{R}$, bölgesinde sınırlı çözümü ile ilgilenelim. w, bazı Ψ fonksiyonları için (3.22) denkleminin sınırlı bir çözümü olsun. Böylece her bir $t \in \mathbb{R}$ için $\Psi_t(z,t)$, $\mathbb{C}$ de

$$\omega_{\overline{\phi}} + a\omega + b\overline{\omega} = 0$$

denkleminin sınırlı bir çözümü olmalıdır. (F_0, G_0) son denklemin doğurucu çifti olmak üzere (Bölüm 3.1), her sınırlı çözüm

$$F_0\lambda + G_0\mu$$

şeklinde yazılabilir, burada λ ve μ reel değerli sabit matrislerdir. Böylece $\Psi(z,t)$

$$\Psi(z,t) = F_0(z)\lambda(t) + G_0(z)\mu(t)$$

formunda yazılabilir. Burada λ ve μ, $t \in \mathbb{R}$ nin reel diferensiyellenebilir matris fonksiyonlarıdır. Şimdi λ ve μ ye göre genel çözümü inceleyelim.

(i) $\lambda = \mu = 0$ olsun. (3.22) denkleminde bulunan integral operatörü $\mathbb{P}$ ile gösterelim:

$$(\mathbb{P}V)(z) = 2iP^{-1}\int_0^t \int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\Big\{\Omega^{(1)}(z,\zeta)\Big[c(\zeta)V(\zeta,\tau) + d(\zeta)\overline{V(\zeta,\tau)}\Big]$$

$$+\Omega^{(2)}(z,\zeta)\Big[\overline{c(\zeta)V(\zeta,\tau)} + \overline{d(\zeta)}V(\zeta,\tau)\Big]\Big\}d\tau.$$

Bu durumda çözülmesi gereken problem

$$w - \mathbb{P}w = 0 \tag{3.23}$$

dir. $\mathbb{P}$ operatörü için

$$\|2iP^{-1}\|\int_{\mathbb{C}}\left\|d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\right\|(\|c\| + \|d\|)\left(\left\|\Omega^{(1)}(z,\zeta)\right\| + \left\|\Omega^{(2)}(z,\zeta)\right\|\right) \le \kappa < \infty,$$

sınırını dikkate alalım ve

$$\|w\|_\kappa := \sup_{\substack{z\in\mathbb{C},\\ \kappa|t|\le 1}} \|w(z,t)\|$$

olsun. Böylece $z \in \mathbb{C}$ and $\kappa|t| \le 1$ için (3.23) denklemi yardımıyla

$$\|w(z,t)\| \le \kappa \|w\|_\kappa |t|$$

eşitsizliği sağlanır. Kolayca görülebilir ki $z \in \mathbb{C}$ ve $\kappa|t| \le 1$ için w özdeş olarak sıfırdır. L operatörünün otonom olmasından dolayı, w, $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ de özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla (3.23) denklemi sadece aşikar çözüme sahiptir.

(ii) $\mu = 0$ olsun. Bu durumda

$$w - \mathbb{P}w = F_0\lambda \tag{3.24}$$

denkleminin çözümünü arayacağız. Bu çözümü bulmak için iterasyon metodunu kullanalım, yani;

$$w_0 := F_0\lambda, \quad w_k := w_0 + \mathbb{P}w_{k-1} \quad (k\in\mathbb{N}), \quad w := \lim_{k\to\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}^k w_0.$$

Eğer bu seri yakınsak ise w fonksiyonunun tek olarak tanımlı olduğu söylenebilir. Çözümü

$$\sum_k^\infty \mathbb{P}^k F_0\lambda = \sum_k^\infty F_k\lambda_k, \quad (k\in\mathbb{N}_0),$$

şeklinde alalım ve (3.24) denkleminde yerine yazalım. Burada

$$\lambda_0 := \lambda, \quad \lambda_k(t) = \int_0^t \lambda_{k-1}(\tau)d\tau \quad (k\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{R}),$$

$$F_k := 2iP^{-1}\int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\Big\{\Omega^{(1)}(z,\zeta)\Big(c(\zeta)F_{k-1}(\zeta) + d(\zeta)\overline{F_{k-1}(\zeta)}\Big)$$

$$+\Omega^{(2)}(z,\zeta)\Big(\overline{c(\zeta)F_{k-1}(\zeta)} + \overline{d(\zeta)}F_{k-1}(\zeta)\Big)\Big\}, \tag{3.25}$$

dir $(k\in\mathbb{N})$. Ayrıca

$$\|F_k\| = \sup_{z\in\mathbb{C}}\|F_k(z)\|, \quad \|\lambda_k\|_t := \sup_{|\tau|\le|t|}\|\lambda_k(\tau)\|,$$

olsun. İterasyon yardımıyla

$$\lambda_1(t) = \int_0^t \lambda_0(\tau)d\tau$$
$$\lambda_2(t) = \int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau$$
$$\vdots$$
$$\lambda_k(t) = \int_0^t \lambda_{k-1}(\tau)d\tau = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{k-1}\lambda_0(\tau)d\tau$$

elde edilir. Yukarıda tanımlanan norm kullanılırsa

$$\|\lambda_k(t)\|_t \leq \frac{1}{(k-1)!}\left\|\int_0^t (t-\tau)^{k-1}\lambda_0(\tau)d\tau\right\|$$

$$\leq \frac{|t|^k}{k!}\|\lambda_0(t)\|_t$$

yazılabilir. Benzer şekilde $\mathbb{P}$ operatörü için yukarıda elde edilen üst sınırın kullanılmasıyla $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\|F_k\| \leq \kappa^k \|F_0\|$$

bulunur. Elde edilen ifadeleri göz önüne alırsak yakınsaklık elde edilir öyle ki

$$(\mathbb{F}\lambda)(z,t) := \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z)\lambda_k(t), \qquad z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, \tag{3.26}$$

çözümdür ve λ_k, F_k aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\lambda_k(0) = 0, \quad F_k(\infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),\ F_0(\infty) = I.$$

(iii) $\lambda = 0$ olsun. Eğer μ_k ve G_k, sırasıyla (ii) durumundaki λ_k ve F_k ya benzer şekilde tanımlanırsa,

$$w - \mathbb{P}w = G_0\mu$$

denkleminin tek çözümü

$$(\mathbb{G}\mu)(z,t) := \sum_{k=0}^{\infty} G_k(z)\mu_k(t), \qquad (z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}) \tag{3.27}$$

dir. Ayrıca μ_k ve G_k,

$$\mu_k(0) = 0, \quad G_k(\infty) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),\ G_0(\infty) = iI$$

özelliklerini sağlar.

(iv) λ ve μ keyfi olsun. (ii) durumuna benzer şekilde hareket ederek

$$w - \mathbb{P}w = F_0\lambda + G_0\mu \tag{3.28}$$

denkleminin çözümünü araştıralım.

$$w_0 := F_0\lambda + G_0\mu_0, \quad w_k := w_0 + \mathbb{P}w_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad w := \lim_{k\to\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^k w_0$$

şeklinde bir tanımlama yapalım. Aranılan çözüm için

$$\sum_{k}^{\infty} \mathbb{P}^k(\lambda F_0 + \mu_0 G_0) = \sum_{k}^{\infty}(F_k\lambda_k + G_k\mu_k), \ \ (k \in \mathbb{N}_0),$$

ifadesini (3.28) denkleminde yerine yazalım. Karşılıklı olarak λ_k ve μ_k terimlerinin katsayıları eşitlenirse, F_k, (3.25) ifadesindeki gibi elde edilir. Benzer şekilde G_k da bulunabilir. Böylece (3.26) denklemindeki F_k, (3.8) denkleminin özel çözümü olduğu için yukarıda geçen $\mathbb{F}$ operatörü (3.9) denklemindeki ile aynıdır. Benzer şekilde, (3.27) denklemindeki G_k, (3.11) denkleminin özel çözümü olduğu için yukarıda geçen $\mathbb{G}$ operatörü (3.10) denklemindeki ile aynıdır. O halde çözüm

$$w = \mathbb{F}\lambda + \mathbb{G}\mu$$

ile verilir. (3.8) veya (3.11) sistemlerinde k. denklemin iki çözümünün farkını ele alalım. Bu fark

$$\omega_{\bar{\phi}} + a\omega + b\bar{\omega} = 0$$

denkleminin bir sınırlı çözümüdür ve sonsuzda sıfırdır. Bu çözüm yalnızca sıfır çözümü olabilir. (3.5) ile varsayılan kısıtlama olmaksızın, benzer yaklaşım $L_{p,2}(\mathbb{C})$ uzayına ait katsayılar için yapılabilir.

(v) (3.22) denkleminin homojen olmadığı durumu örneklendirelim. $\Psi(z,t) = f(z)t$ olsun. Bu durumda (3.22) denklemi

$$(w - \mathbb{P}w)(z,t) = f(z)t, \quad (f \in L_{p,2}(\mathbb{C}), p > 2)$$

şeklindedir. Burada f yalnızca z nin fonksiyonudur. Yukarıdakilere benzer hesaplamalarla, (ii) de verilen iterasyon yardımıyla $\lambda_0 = t$ olmak üzere

$$\lambda_k = \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

olarak bulunur. (3.26) ifadesinin kullanılmasıyla tek olarak belli olan çözüm

$$w(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} f_k(z),$$

ile verilir. Burada

$$f_0 := f,$$

$$f_k(z) := 2iP^{-1} \int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)} \Big\{ \Omega^{(1)}(z,\zeta) \Big(c(\zeta) f_{k-1}(\zeta) + d(\zeta) \overline{f_{k-1}(\zeta)} \Big)$$

$$+ \Omega^{(2)}(z,\zeta) \Big(\overline{c(\zeta) f_{k-1}(\zeta)} + \overline{d(\zeta)} f_{k-1}(\zeta) \Big) \Big\}.$$

dir.

4. PARÇALI SÜREKLİ ÇÖZÜMLER

Bu kısımda singüler integraller ile limit değerleri arasındaki bağıntıyı konu alan ve Riemann probleminin çözümünde önemli bir role sahip olan Plemelj formüllerinden bahsedilecektir.

4.1 Plemelj Formülleri

Bu bölümde, analitik fonksiyon teorisinde kapalı bir eğri boyunca önceden verilmiş sınır şartlarını sağlayan tam bir analitik fonksiyonu bulma problemi olarak iyi bilinen Riemann sınır değer problemi, genelleştirilmiş analitik fonksiyon teorisinden türetilmiş pseudoparabolik denklemler için çok bağlantılı bir bölgede ele alınacaktır.

(3.1) denkleminde tanımlanan L operatörünün a, b, c ve d katsayılarının sınırlı regüler bir $\mathfrak{D}$ bölgesinin kapanışının dışında özdeş olarak sıfır ve bir $p > 2$ için $L_p(\overline{\mathfrak{D}})$ sınıfına ait olduğunu varsayalım. $\mathfrak{D}$ bölgesinin sınırı olan Γ sınırlı, düzgün, kesişmeyen ve kapalı Γ_k, $(0 \leq k \leq m)$ eğrilerinin sonlu birleşiminden oluşan bir eğri olsun ve diğer eğriler Γ_0 eğrisinin içinde kalsın. $\mathfrak{D}_k$ ile Γ_k, $(0 \leq k \leq m)$, eğrileri tarafından sınırlanan bölgeler gösterilsin. Ayrıca $\mathfrak{D}^+$ ile Γ_0 ile sınırlandırılmış bölgenin içi ve $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ eğrileri ile sınırlanmış bölgelerin dışı olan $(m+1)$-bağlantılı bölge gösterilsin. Tüm kompleks düzlemde $\mathfrak{D}^+ + \Gamma$ nın tümleyeni olan bölge ise $\mathfrak{D}^-$ ile gösterilsin. Buna göre $\mathfrak{D}_0^-$ sınırsız bir bölgedir. Alışılmış kabullere göre, Γ_0 eğrisinin saat yönünün tersine ve diğer eğrilerin saat yönünde yönlendirildiği kabul edilecektir. Bu kabuller altında, genelleştirilmiş analitik fonksiyon teorisinde Riemann probleminin çözümünde önemli bir rol oynayan Plemelj formülleri, genelleştirilmiş $Q-$holomorf fonksiyonlarda tanımladığı gibi (Hızlıyel 2006) pseudoparabolik denklemler için de tanımlabilir:

I, $\mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere, $\Gamma \times I$ da kompleks değişken z ye göre Hölder sürekli, reel değişken t ye göre C^1 sınıfından bir $\delta(z,t)$ fonksiyonu için

$$\Phi(z,t) := P^{-1} \int_{\Gamma} d\phi(\zeta) \left(\phi(\zeta) - \phi(z)\right)^{-1} \delta(z,t)$$

şeklinde tanımlansın. Burada singüler Cauchy integrali, Cauchy esas değeri anlamındadır. Cauchy integralinin Hölder sürekliliğinden (Gakkov 1966), $\Phi(z,t)$, her $t \in I$ için $\mathfrak{D}^+$ ve $\mathfrak{D}^-$ bölgelerinde Hölder süreklidir ve t ye göre sürekli diferensiyellenebilir olup

$$\Phi_t(z,t) := P^{-1} \int_{\Gamma} d\phi(\zeta) \left(\phi(\zeta) - \phi(z)\right)^{-1} \delta_t(z,t)$$

ifadesini sağlar. Ayrıca, singüler Cauchy integrali kullanılarak elde edilen Plemelj formülleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{cases} \Phi^{+}(z,t) := \Phi(z,t) + \frac{1}{2}\delta(z,t) \\ \\ \Phi^{-}(z,t) := \Phi(z,t) - \frac{1}{2}\delta(z,t) \end{cases}, \ (z,t) \in \Gamma \times I.$$

Bu formüller, Hızlıyel tarafından 2006 yılında yapılan çalışmaya benzer olarak ispatlanabileceği için burada ispatına değinilmeyecektir.

Lemma 4.1.1. (3.1) de tanımlanan L operatörünün $a,b,c,d \in L_p(\overline{\mathfrak{D}}^{+})$ katsayıları $\overline{\mathfrak{D}}^{+}$ nın dışında özdeş olarak sıfır olsun. $\delta(z,t)$, z ye göre Hölder sürekli ve t için C^1 sınıfına ait $m \times s$ tipinde kompleks matris olmak üzere eğer $z \in \Gamma$ için $\delta(z,0) \equiv 0$ ise

$$w(z,t) = P^{-1} \int_0^t \int_\Gamma \left\{ d\phi(\zeta)\Omega_\tau^{(1)}(z,\zeta;t,\tau)\,\delta_\tau(\zeta,\tau) - \overline{d\phi(\zeta)}\Omega_\tau^{(2)}(z,\zeta;t,\tau)\,\overline{\delta_\tau(\zeta,\tau)} \right\} d\tau \quad (4.1)$$

$\mathbb{C}\backslash\Gamma$ nın her bir bileşeninde genelleştirilmiş Q-holomorf fonksiyondur ve özel olarak $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathfrak{D}}^{+}$ da $w_{\overline{\phi}t} = 0$ dır. Ayrıca $w(z,0) \equiv 0$ ve

$$\begin{cases} w^{+}(z,t) = w(z,t) + \frac{1}{2}\delta(z,t) \\ \\ w^{-}(z,t) = w(z,t) - \frac{1}{2}\delta(z,t) \end{cases}, (z,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Burada $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$, L operatörünün temel çekirdekleridir ve (4.1) de ki ilk integral Cauchy esas değeri anlamındadır.

İspat. $|\zeta - z| \to 0$ iken (3.14) ile verilen çekirdeklerin lokal davranışı ve integrallerin bağımlı değişkenleri için Plemelj formüllerinden (Gakhov 1966, s. 51)

$$(w-\Phi)^{+}(z,t) = (w-\Phi)(z,t) = (w-\Phi)^{-}(z,t), (\ z \in \Gamma, t \in \mathbb{R})$$

elde edilir. Böylece $(w-\Phi)$, Γ üzerinde bile süreklidir ve (4.2) elde edilir.

□

Teorem 4.1.2. v,

$$\tilde{L}v := \frac{\partial}{\partial t}\left(v_{\overline{\phi}} - av - b^{*}\overline{bv}\right) + cv + b^{*}\overline{dv} = 0 \ \left(b^{*} = \phi_z^{-1}\overline{\phi_z}\right), \quad (4.3)$$

eşlenik denklemin bir çözümü olsun ve $T \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $z \in \mathbb{C}$ için $v(z,T) = 0$ sağlansın. Γ üzerinde verilen Hölder sürekli $\delta(z,t)$ fonksiyonunun, $\mathfrak{D}$ bölgesinde (3.1) denkleminin Hölder sürekli ve başlangıç verisinde özdeş olarak sıfır olan bir çözümünün sınır değeri olan w^{+} yı temsil etmesi için gerek şart

$$Im\int_0^T\int_\Gamma d\phi(\zeta)v_t(\zeta,t)\delta_t(\zeta,t)dt=0 \tag{4.4}$$

ve

$$\int_0^T\int_\Gamma\left\{d\phi(\zeta)\Omega_\tau^{(1)}\left(z,\zeta;t,\tau\right)\delta_\tau\left(\zeta,\tau\right)-d\overline{\phi(\zeta)}\Omega_\tau^{(2)}\left(z,\zeta;t,\tau\right)\overline{\delta_\tau\left(\zeta,\tau\right)}\right\}d\tau=0\quad\left(z\in D^-\right) \tag{4.5}$$

olmasıdır.

İspat. Öncelikle (4.4) ifadesinin ispatına bakalım. Green özdeşliğinin (Hızlıyel 2006, s. 537) kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma d\phi(\zeta)v_t(\zeta,t)\delta_t(\zeta,t)dt\\
&=\int\limits_0^T\iint\limits_{\mathfrak{D}}\phi_\zeta D\left(v_t\delta_t\right)d\xi d\eta dt\\
&=\int\limits_0^T\iint\limits_{\mathfrak{D}}\phi_\zeta\left[av_t\delta_t+\phi_\zeta^{-1}\overline{\phi_\zeta b\overline{v_t}}\delta_t-cv\delta_t-\phi_\zeta^{-1}\overline{\phi_\zeta d}\overline{v}\delta_t-av_t\delta_t-bv_t\overline{\delta_t}-cv_t\delta-dv_t\overline{\delta}\right]d\xi d\eta dt\\
&=\int\limits_0^T\iint\limits_{\mathfrak{D}}\left[\overline{\phi_\zeta b\overline{v_t}}\delta_t-\phi_\zeta c\left(v\delta\right)_t-\overline{\phi_\zeta d}\overline{v}\delta_t-\phi_\zeta bv_t\overline{\delta_t}-\phi_\zeta dv_t\overline{\delta}+\phi_\zeta dv\overline{\delta_t}-\phi_\zeta dv\overline{\delta_t}\right]d\xi d\eta dt\\
&=\int\limits_0^T\iint\limits_{\mathfrak{D}}\left[2iIm(\overline{\phi_\zeta b\overline{v_t}}\delta_t-\overline{\phi_\zeta d}\overline{v}\delta_t)-\phi_\zeta c\left(v\delta\right)_t-\phi_\zeta d\left(v\overline{\delta}\right)_t\right]d\xi d\eta dt\\
&=2i\int\limits_0^T\iint\limits_{\mathfrak{D}}Im(\overline{\phi_\zeta}\left(\overline{b}\overline{v_t}-\overline{d}\overline{v}\right)\delta_t)d\xi d\eta dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada teoremin başlangıç verileri üzerindeki hipotezleri kullanılmıştır. Dolayısıyla (4.4) doğrudan elde edilir. (4.5) ifadesinin ispatı için

$$u(z,t):=\begin{cases}u_1(z,t)-w(z,t), & z\in\mathfrak{D}^+,t\in\mathbb{R}\\[2ex] u_1(z,t), & z\in\mathfrak{D}^-,t\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{4.6}$$

ve

$$u_1(z,t):=\int_0^T\int_\Gamma\left\{d\phi(\zeta)\Omega_\tau^{(1)}\left(z,\zeta;t,\tau\right)\delta_\tau\left(\zeta,\tau\right)-d\overline{\phi(\zeta)}\Omega_\tau^{(2)}\left(z,\zeta;t,\tau\right)\overline{\delta_\tau\left(\zeta,\tau\right)}\right\}d\tau$$

ifadelerini göz önüne alalım. Bu fonksiyonların $\Gamma \times\mathbb{R}$ üzerinde

$$u^+ - u^- = u_1^+ - u_1^- - w^+ = \delta - w^+$$

sınır koşullarını sağladığı ve her $t \in \mathbb{R}$ için $u(z,t) = O(|z|^{-1})$ $(z \to \infty)$ olduğu açıktır. Eğer $\Gamma \times\mathbb{R}$ üzerinde $w^+ = \delta$ ise u, $\mathbb{C} \times\mathbb{R}$ de sürekli Q-holomorf bir fonksiyondur ve $u(z,0) \equiv 0$, $u(\infty,t) \equiv 0$ gerçeklenir. Lemma 3.1.1 in ispatından u özdeş olarak sıfırdır. Bu da ispatı tamamlar.

□

Teorem 4.1.3. $\delta(z,t)$ fonksiyonunun, $\mathfrak{D}^+ \times \mathbb{R}$ bölgesinde (3.1) denkleminin bir çözümünün sınır değeri olması için (4.5) koşulu yeterlidir.

İspat. (4.6) ile verilen u fonksiyonu $\mathfrak{D}^+ \times \mathbb{R}$ ve $\mathfrak{D}^- \times \mathbb{R}$ de (3.1) denkleminin çözümüdür ve sınır üzerinde

$$u_1^+ - u_1^- = \delta \tag{4.7}$$

dır. Hipotez gereği (4.5) geçerli olduğundan, $z \to \infty$ için $\mathfrak{D}^-$ de u_1 özdeş olarak sıfırdır. (4.7) ifadesinin kullanılmasıyla $\Gamma\times\mathbb{R}$ üzerinde $u_1^- \equiv 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (4.5) sağlandığında, u fonksiyonunun $\mathfrak{D}^+ \times \mathbb{R}$ üzerinde sınır değeri $\delta(z,t)$ dir.

□

5. SINIR DEĞER PROBLEMİ

Cauchy tipi integrali olarak isimlendirilen

$$\vartheta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

tipindeki integraller klasik kompleks analizde önemli bir yere sahiptir. Aynı zamanda bu integral ve Γ basit kapalı düzgün eğrisine yaklaşım sonucu ortaya çıkan Plemelj-Sokhotzki formülleri sınır değer problemleri için önemlidir. Bu sınır değer problemlerinden biri Riemann sınır değer problemidir. En basit hali ile bir Riemann sınır değer problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır: Γ, kompleks düzlemi iç (G^{+}) ve dış (G^{-}) olmak üzere ikiye ayıran basit, düzgün ve kapalı bir eğri olsun. $H(z)$ ve $h(z)$, Γ eğrisi üzerinde tanımlı ve $H(z) \neq 0$ olacak şekilde Hölder sürekli fonksiyonlar olmak üzere Γ eğrisi üzerinde

$$\Phi^{+}(z) = H(z)\Phi^{-}(z) \quad \text{veya} \quad \Phi^{+}(z) = H(z)\Phi^{-}(z) + h(z)$$

koşullarından birini sağlayacak şekilde G^{+} da analitik, $\Phi^{+}(z)$, G^{-} $(z = \infty$ dahil$)$ de analitik $\Phi^{-}(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemine *Riemann sınır değer problemi* denir. Bu problem $h(z) = 0$ ise homojen ve $h(z) \neq 0$ ise homojen olmayan problem olarak isimlendirilir. Burada $H(z)$ Riemann probleminin katsayısı, $h(z)$ ise serbest terimidir. Daha önce yapılan çalışmalarda bu problem ”Hilbert problemi”, ”Riemann-Hilbert problemi”, ”Hilbert-Privalov problemi” veya ”Riemann-Privalov problemi” gibi farklı isimlerle kullanılmıştır. Bu problem ilk olarak Riemann tarafından açıklanmış ancak Riemann kendi formüle ettiği problemi çözmek için bir girişimde bulunmamıştır. Klasik Riemann sınır deger probleminin çözümlerinin araştırılmasında en temel husus indeks kavramıdır. Problemin katsayısına ait indeks aynı zamanda problemin indeksidir ve söz konusu fonksiyonun logaritmik değişiminden veya integral temsilinden hareketle ifade edilebilir. Homojen skaler problemin ilk çözümü Hilbert tarafından Fredholm denkleminden yola çıkılarak 1904 yılında yapılmıştır. Daha sonra 1927 de Picard aynı yöntemi daha genelleştirerek sunmuştur. İndeksin sıfır olarak kabul edildiği homojen problem için kapalı formdaki çözüm ise ilk kez Plemelj tarafından 1908 yılında verilmiştir. 1937 de Gakhov, skaler Riemann problemi için tam bir çözüm sunan ilk bilim adamı olmuş ve daha sonra vektörel Riemann problem, Plemelj, Gakhov, Muskhelishvili ve genişletilmiş şekilde Vekua tarafından incelenmiştir. Bu bölümde negatif olmayan indeks için Riemann sınır değer problemi ele alınacaktır.

5.1 Riemann Sınır Değer Problemi

Bu bölümde

$$Lw := \frac{\partial}{\partial t}\left[w_{\bar{\phi}} + aw + b\bar{w}\right] + cw + d\bar{w}, \;\; w(\infty, t) = 0, \;\; w(z, 0) = 0, \tag{5.1}$$

$$w^{+} = gw^{-} + \overline{hw^{-}} + \gamma, \quad \Gamma \times \mathbb{R} \tag{5.2}$$

problemi ele alınacaktır. Burada Q, $\overline{Q}$ ile değişmeli, a, b, c, d ve g, Q ile değişmeli ve γ, $m \times s$ tipinde kompleks değerli matristir. a, b, c, d katsayılarının regüler sınırlı $\mathfrak{D}$ bölgesinin kapanışının dışında özdeş olarak sıfır olduğunu varsayalım. Ayrıca $a, b, c, d \in L_p(\overline{\mathfrak{D}})$, $p > 2$, olsun. g, h, γ fonksiyonlarının ise Γ üzerinde z ye göre Hölder sürekli olduğunu varsayalım. Burada $\det g \neq 0$ dir. Ayrıca γ, t nin sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyonudur ve $\gamma(z, 0) \equiv 0$.

Teorem 5.1.1. w, $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ üzerinde (5.1)-(5.2) probleminin parçalı sürekli bir çözümü olsun. v fonksiyonu, bazı $T \in \mathbb{R}$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $v(z, T) \equiv 0$ olacak şekilde (4.3) eşlenik probleminin herhangi bir çözümü olsun ve $\Gamma \times \mathbb{R}$ üzerinde

$$v^- = v^+ g - \overline{v^+} h \overline{\frac{d\phi}{ds}} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^{-1} \tag{5.3}$$

koşulunu sağlasın. Burada $\frac{d\phi}{ds} := \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \frac{d\overline{z}}{ds}$, ds yay uzunluğu parametresidir (Hızlıyel 2014). O halde

$$Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi \left\{ v_t^- (z,t)\, w_t^- (z,t) + v_t^+ (z,t)\, \gamma_t (z,t) \right\} dt = 0. \tag{5.4}$$

İspat. (5.2) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi v_t^+ (z,t)\, w_t^+ (z,t)\, dt \\
&= Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi \Big[v_t^+ (z,t)\, g(z)\, w_t^- (z,t) + v_t^+ (z,t)\, \overline{h(z) \overline{w_t^- (z,t)}} + v_t^+ (z,t)\, \gamma_t (z,t) \Big] dt \\
&= Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi \Big[v_t^- (z,t)\, w_t^- (z,t) + \overline{v^+ (z,t)} h(z) \overline{\frac{d\phi}{ds}} \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^{-1} w_t^- (z,t) \\
&\qquad + v_t^+ (z,t)\, \overline{h(z) \overline{w_t^- (z,t)}} + v_t^+ (z,t)\, \gamma_t (z,t) \Big] dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. (5.3) denklemi ve Q-holomorf fonksiyonlar için Green özdeşliğinin kullanılmasıyla (5.4) elde edilir (Hızlıyel 2006).

□

$\gamma \equiv 0$ olması durumunda

$$Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi v_t^+ (z,t)\, w_t^+ (z,t)\, dt = Im \int_0^T \int_\Gamma d\phi v_t^- (z,t)\, w_t^- (z,t)\, dt = 0 \tag{5.5}$$

eşitliği elde edilir. Γ orijinden geçmeyen basit bir çevre olsun ve h özdeş olarak sıfır olsun. Bu durumda çalışılacak problem

$$\begin{cases} Lw = 0, & (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \times \mathbb{R} \\ w^+ = g w^- + \gamma, & \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.6}$$

problemine indirgenir.

Tanım 5.1.2. (5.6) probleminin indeksi

$$\kappa := \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg g_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\log g_0 = \sum_{k=0}^{r}\lambda_k,$$

ile tanımlanır. Burada $\lambda_k = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_k}\arg g_0, k = 0, ...r$, ve Γ_k, pozitif yönde yönlendirilmiştir (Hızlıyel 2006).

Bu bölüm boyunca buradan sonra aşağıdaki notasyon kullanılacaktır:

$$w(z,t) := \begin{cases} w^+(z,t), & z \in \mathfrak{D}^+,\ t \in \mathbb{R} \\ \\ w^-(z,t), & z \in \mathfrak{D}^-,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Q ile değişmeli bir f fonksiyonu $f = f_0 I + N_f$ olarak yazılabilir ve logaritması

$$\log f = \log f_0 + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{N_f}{f_0}\right)^k, \quad f_0 \neq 0$$

ile tanımlıdır (Hızlıyel 2006). Burada f_0, f matrisinin esas köşegeni ve N_f de f matrisinin nilpotent kısmıdır. Logaritmanın diğer tüm özellikleri bu tanım kullanılarak benzer şekilde türetilebilir. Şimdi analitik durumda olduğu gibi (Gakhov 1966, Hızlıyel 2006), Q ile değişmeli olan $g = g_0 I + N_g$ matrisinin kanonik faktorizasyonunu bulalım. Öncelikle Γ sınırı üzerinde

$$\chi^+(z) - g(z)\chi^-(z) = 0$$

şartını sağlayan ve Q ile değişmeli olan Q-holomorf bir fonksiyon arayalım. Q ile değişmeli bir matris için $\det g \neq 0$ ifadesinin $g_0 \neq 0$ ifadesine denk olduğu açıktır. Yukarıdaki ifadede iki tarafın logaritması alınırsa

$$\log\chi^+(z) - \log\chi^-(z) = \log g(z) \tag{5.7}$$

elde edilir. Matris değerli fonksiyonlar için logaritmanın tanımından tek değerlilikle ilgili tüm ifadeler $\log g_0$ üzerine indirgenir. Buradan, tüm Γ_k sınır eğrilerinin yönlendirilmesinden sonra eğer g_0 ın argüment değişimi sıfır ise $\log g$ tek değerlidir. $z_k \in \Gamma_k$, $(k = 1, 2, ..., r)$ sabit bir nokta ve

$$R(z) = \prod_{k=1}^{r}\left[\phi(z) - \phi(z_k)\right]^{\lambda_k}$$

olsun. $\phi(z)^{-\kappa}R(z)g(z)$ nin esas köşegen terimi

$$\phi_0(z)^{-\kappa}\prod_{k=1}^{r}\left[\phi_0(z)-\phi_0(z_k)\right]^{\lambda_k}g_0(z)$$

şeklindedir ve argüment değişimi

$$\Delta_{\Gamma_k}\arg\left[\phi_0(z)^{-\kappa}\prod_{l=1}^{r}\left[\phi_0(z)-\phi_0(z_l)\right]^{\lambda_l}g_0(z)\right]=0,\ k=0,1,...,r$$

dir. Böylece $\hat{g}=\log\left[\phi(z)^{-\kappa}R(z)g(z)\right]$ alınırsa esas köşegen teriminin argüment değişimi sıfır olacağından, $\hat{g}(z)$ nin tek değerli ve Hölder sürekli olduğu görülür. Buna göre (5.7) tekrar düzenlenirse

$$\log\left[R(z)\chi^{+}(z)\right]-\log\left[\phi(z)^{\kappa}\chi^{-}(z)\right]=\hat{g}(z)$$

elde edilir. Bu durumda Plemelj formüllerinin bir sonucu olarak

$$\chi(z)=\begin{cases}R(z)^{-1}\exp\left(P^{-1}\int_\Gamma d\phi(\zeta)\left[\phi(\zeta)-\phi(z)\right]^{-1}\hat{g}(\zeta)\right),\ z\in\mathfrak{D}^{+}\\[2ex] \phi(z)^{-\kappa}\exp\left(P^{-1}\int_\Gamma d\phi(\zeta)\left[\phi(\zeta)-\phi(z)\right]^{-1}\hat{g}(\zeta)\right),\ z\in\mathfrak{D}^{-}\end{cases}\tag{5.8}$$

elde edilir. Böylece (5.7) şartından $g(z)=\chi^{+}(z)(\chi^{-}(z))^{-1}$ yazılabileceği ve

$$\left[\chi_0(z)\right]^{-1}=\exp\left(P^{-1}\int_\Gamma d\phi(\zeta)\left[\phi(\zeta)-\phi(z)\right]^{-1}\hat{g}(\zeta)\right)\ (z\in\mathfrak{D}^{-})$$

olmak üzere (5.8) ifadesinden $\chi^{-}(z)=\phi(z)^{-\kappa}(\chi_0(z))^{-1}$ olduğu dikkate alınırsa $g=\chi^{+}(z)\chi_0^{-}(z)\phi(z)^{\kappa}$ $(z\in\Gamma)$, dir. ϕ ve $\hat{g}$, Q ile değişmeli olduğundan χ_0^{-} de Q ile değişmelidir (Hızlıyel ve Çağlıyan 2004a, s.438). $z\in\mathfrak{D}^{+}$ için

$$\begin{aligned}\chi(z)&=R(z)^{-1}\exp\left(P^{-1}\int_\Gamma d\phi(\zeta)\left[\phi(\zeta)-\phi(z)\right]^{-1}\hat{g}(\zeta)\right)\\&=\exp\left(P^{-1}\int_\Gamma d\phi(\zeta)\left[\phi(\zeta)-\phi(z)\right]^{-1}\hat{g}(\zeta)-logR(z)\right)\\&=:\exp(\eta(z))\end{aligned}$$

notasyonunu kullanalım.

Tanım 5.1.3. Eğer

(i) $\chi(z)$, $\mathfrak{D}^{+}$ da bir Q-holomorf fonksiyon, tersinir ve Q ile değişmeli,

(ii) $\chi_0(z)$, $\mathfrak{D}^{-}$ de bir Q-holomorf fonksiyon, $\mathfrak{D}^{-}\bigcup\{\infty\}$ de tersinir ve Q ile değişmeli,

(iii) κ bir tamsayı

ise $g(z) = \chi^{+}(z)\,\chi_0^{-}(z)\,\phi(z)^{\kappa}\;(z \in \Gamma)$, g nin kanonik faktorizasyonudur (Hızlıyel 2006, s. 549).

Şimdi (5.6) problemine tekrar dönülür ve verilen bir w fonksiyonu için

$$\omega(z,t) := \begin{cases} \chi^{-1}(z)\,w(z,t)\,, z \in \mathfrak{D}^{+}, t \in \mathbb{R} \\ \\ \chi_0(z)\,w(z,t)\,, z \in \mathfrak{D}^{-}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

dönüşümü yapılırsa, bu dönüşüm altında (5.6) problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{\bar{\phi}} + a\omega + \tilde{b}\overline{\omega}\right] + c\omega + \tilde{d}\overline{\omega} = 0,\ \omega(\infty,t) = 0,\ \omega(z,0) = 0, \\ \\ \omega^{+} = \phi^{\kappa}\omega^{-} + \tilde{\gamma} \quad \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.9}$$

problemine dönüşür. Burada $\tilde{\gamma} = \chi^{-1}\gamma$ ve

$$\tilde{b} := \begin{cases} \chi^{-1}b\overline{\chi}, z \in \mathfrak{D}^{+} \\ \\ \chi_0 b\overline{\chi_0}^{-1}, z \in \mathfrak{D}^{-} \end{cases}$$

$$\tilde{d} := \begin{cases} \chi^{-1}d\overline{\chi}, z \in \mathfrak{D}^{+} \\ \\ \chi_0 d\overline{\chi_0}^{-1}, z \in \mathfrak{D}^{-}. \end{cases}$$

(**i**) $\kappa = 0$ olsun. İndeksin sıfır olması durumunda (5.9) problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{\bar{\phi}} + a\omega + \tilde{b}\overline{\omega}\right] + c\omega + \tilde{d}\overline{\omega} = 0,\ \omega(\infty,t) = 0,\ \omega(z,0) = 0,\ \ (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \times \mathbb{R}) \\ \\ \omega^{+} = \omega^{-} + \tilde{\gamma} \quad \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.10}$$

halini alır. $a, \tilde{b}, c, \tilde{d}$ katsayılarına karşılık gelen temel çekirdekler $\hat{\Omega}^{(k)}\ (k = 1, 2)$ ile gösterilsin. O halde

$$\omega(z,t) = (I\tilde{\gamma})(z,t) := P^{-1}\int_0^t \int_\Gamma \left[d\phi(\zeta)\,\hat{\Omega}_\tau^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,\tilde{\gamma}_\tau(\zeta,\tau)\right] d\tau$$

$$-P^{-1}\int_0^t \int_\Gamma \left[\overline{d\phi(\zeta)}\hat{\Omega}_\tau^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{\tilde{\gamma}_\tau(\zeta,\tau)}\right] d\tau$$

(5.10) probleminin

$$\omega(z,0)=0 \ \ (z\in\mathbb{C}), \ \ \omega(z,t)=O\left(|z|^{-1}\right) \ \ (z\to\infty, t\in\mathbb{R})$$

ile tek olarak tanımlanan çözümüdür. Bu çözüme (5.10) denkleminin

$$\omega_0(z,0)\equiv 0 \ \ (z\in\mathbb{C}), \quad \vartheta\left(t\right):=\omega_0(\infty,t)\neq 0, \ \ \left(\vartheta\left(t\right)\in C^1\left(\mathbb{R}\right)\right),$$

özelliğindeki sınırlı bir $\omega_0(z,t)$ çözümü eklenirse, (5.10) probleminin z ve t verisine sahip bir çözümü elde edilir. Bölüm 3.2 de gösterildiği gibi, bu sınırlı $\omega_0(z,t)$ çözümü, (5.10) denklemine karşılık gelen ve sırasıyla (3.26) ve (3.27) yardımı ile verilen $\tilde{\mathbb{F}}$ ve $\tilde{\mathbb{G}}$ operatörleri ile temsil edilebilir. $\vartheta\left(t\right)=\lambda\left(t\right)+i\mu\left(t\right)$ olmak üzere bu çözüm

$$\omega_0(z,t)=\tilde{\mathbb{F}}\left(z\right)\lambda\left(t\right)+\tilde{\mathbb{G}}\left(z\right)\mu\left(t\right)$$

formuna sahiptir. $\omega_1(z,t)$, (5.10) denkleminin

$$\omega_1(z,0)=\beta\left(z\right)\neq 0, \omega_1(\infty,t)=\beta\left(\infty\right)$$

özelliğindeki çözümü ve u,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_{\bar{\phi}}+au+\tilde{b}\overline{u}\right]+cu+\tilde{d}\overline{u}=c\beta+\tilde{d}\overline{\beta}$$

denkleminin bir özel çözümü olmak üzere Bölüm 3.2 de gösterildiği gibi

$$u(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k\left(z\right)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!},$$

$$f_{-1}:=-\beta\left(z\right)$$

$$f_k\left(z\right):=2iP^{-1}\int_{\mathbb{C}}d\phi\left(\zeta\right)d\overline{\phi\left(\zeta\right)}\Big[\hat{\Omega}^{(1)}\left(z,\zeta\right)\left(c\left(\zeta\right)f_{k-1}\left(\zeta\right)+\tilde{d}\left(\zeta\right)f\overline{_{k-1}\left(\zeta\right)}\right)$$

$$+\hat{\Omega}^{(2)}\left(z,\zeta\right)\left(\overline{c\left(\zeta\right)f_{k-1}\left(\zeta\right)}+\overline{\tilde{d}\left(\zeta\right)}f_{k-1}\left(\zeta\right)\right)\Big], k\in\mathbb{N}_0,$$

ile ifade edilir. O halde $\omega_1-\beta+u$ (5.10) un homojen koşullara sahip bir çözümüdür. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1.4. (5.10) denkleminin genel çözümü

$$\omega = (I\tilde{\gamma})(z,t) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \beta(z) + \tilde{\mathbb{F}}(z)\lambda(t) + \tilde{\mathbb{G}}(z)\mu(t)$$

ile verilir. Burada $\beta \in C(\mathbb{C})$, $\beta(\infty) = \lim_{z\to\infty}\beta(z) \in \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in C^1(\mathbb{R})$, $\lambda(0) = 0, \quad \mu(0) = 0$.

(**ii**) $\kappa > 0$ olsun. Bu durumda (5.9) denkleminin bir özel çözümünü bulmak için öncelikle $\lim_{z\to\infty}\phi(z)^{\kappa}\omega(z,t) = \theta(t)$ $\left(t \in \mathbb{R}, \theta \in C^1(\mathbb{R})\right)$ ve $\omega(z,0) = 0$ $(z \in \mathbb{C})$ özelliğine sahip bir çözüm arayalım. Bu özellikteki $\omega(z,t)$ çözümleri için

$$\omega_1(z,t) := \begin{cases} \omega^+(z,t), & z \in \mathfrak{D}^+, t \in \mathbb{R} \\ \\ \phi(z)^{\kappa}\omega^-(z,t), & z \in \mathfrak{D}^-, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.11}$$

şeklinde bir dönüşüm yapılırsa bu dönüşümden sonra problem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{1\bar{\phi}} + a\omega_1 + b_1\overline{\omega_1}\right] + c\omega_1 + d_1\overline{\omega_1} = 0, & (\mathbb{C}\setminus\Gamma)\times\mathbb{R} \\ \\ \omega_1^+ = \omega_1^- + \tilde{\gamma}, & \Gamma\times\mathbb{R} \end{cases} \tag{5.12}$$

halini alır. Burada

$$b_1 := \begin{cases} \tilde{b}, & z \in \mathfrak{D}^+ \\ \\ \phi(z)^{\kappa}\,\overline{\phi(z)}^{-\kappa}\tilde{b}, & z \in \mathfrak{D}^- \end{cases} \in L_{p,2}(\mathbb{C})$$

$$d_1 := \begin{cases} \tilde{d}, & z \in \mathfrak{D}^+ \\ \\ \phi(z)^{\kappa}\,\overline{\phi(z)}^{-\kappa}\tilde{d}, & z \in \mathfrak{D}^- \end{cases} \in L_{p,2}(\mathbb{C})$$

dir. Ayrıca ω_1

$$\omega_1(z,0) = 0, z \in \mathbb{C}, \quad \omega_1(z,t) = O\left(|z|^{-1}\right) \quad (z\to\infty, t\in\mathbb{R})$$

özelliğine sahiptir. a, b_1, c, d_1 katsayılarına karşılık gelen temel çekirdekler $\hat{\Omega}_1^{(k)}$ $(k = 1,2)$ olmak üzere, bu problemin çözümü

$$\omega_1(z,t) = (I_1\tilde{\gamma})(z,t) := P^{-1}\int_0^t\int_\Gamma \left[d\phi(\zeta)\,\hat{\Omega}_{1\tau}^{(1)}(z,t;\zeta,\tau)\,\tilde{\gamma}_\tau(\zeta,\tau)\right]d\tau$$

$$-P^{-1}\int_0^t\int_\Gamma \left[d\overline{\phi(\zeta)}\hat{\Omega}_{1\tau}^{(2)}(z,t;\zeta,\tau)\,\overline{\tilde{\gamma}_\tau(\zeta,\tau)}\right]d\tau$$

ile tek olarak verilir. $\tilde{\gamma}\equiv 0$ durumunda (5.12) homojen probleminin sadece aşikar çözüme sahip olmasından dolayı çözümün tekliği garantilenir.

ω_1 çözümünü kullanarak, (5.11) dönüşümü yardımıyla, yani

$$\omega(z,t) = \begin{cases} \omega_1(z,t), & z\in\mathfrak{D}^+, t\in\mathbb{R} \\ \phi(z)^{-\kappa}\,\omega_1(z,t), & z\in\mathfrak{D}^-, t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

ile (5.9) probleminin bir özel çözümünü arayalım. Genel çözümü tamamlamak için, homojen problemin çözümlerini inceleyelim ($\tilde{\gamma}=0$).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{\bar{\phi}} + a\omega + \tilde{b}\overline{\omega}\right] + c\omega + \tilde{d}\overline{\omega} = 0, & (\mathbb{C}\setminus\Gamma)\times\mathbb{R} \\ \omega^+ = \phi^\kappa\omega^-, & \Gamma\times\mathbb{R} \end{cases} \tag{5.13}$$

homojen problemi ele alalım. (3.26) ve (3.27) yardımıyla, $\hat{\mathbb{F}}_k, \hat{\mathbb{G}}_k$, $0\le k\le\kappa$ için

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\omega_{\bar{\phi}} + a\omega + b_1\overline{\phi(z)}^k\phi(z)^{-k}\,\overline{\omega}\right] + c\omega + d_1\overline{\phi(z)}^k\phi(z)^{-k}\,\overline{\omega} = 0 \tag{5.14}$$

denklemine karşılık gelen operatörler olmak üzere

$$w_0 := \hat{\mathbb{F}}_k\lambda + \hat{\mathbb{G}}_k\mu$$

(5.14) denkleminin sınırlı bir çözümüdür. Burada λ ve μ, $t\in\mathbb{R}$ nin reel sürekli diferensiyellenebilir matris değerli fonksiyonlarıdır. Ayrıca w_0 fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$w_0(\infty,t) = \hat{F}_k(\infty)\,\lambda(t) + \hat{G}_k(\infty)\,\mu(t) = \lambda(t) + i\mu(t)\,,$$

$$w_0(z,0) = \hat{F}_k(z)\,\lambda(0) + \hat{G}_k(z)\,\mu(0)\,.$$

Burada $(\hat{F}_k, \hat{G}_k)$, $(a, b_1\overline{\phi(z)}^k\phi(z)^{-k})$ katsayı çiftine karşılık gelen doğurucu çifttir.

$$(\acute{\mathbb{F}}_k\Phi)(z,t) := \phi(z)^k(\hat{\mathbb{F}}_k\Phi)(z,t),$$

$$(\acute{\mathbb{G}}_k\Phi)(z,t) := \phi(z)^k(\hat{\mathbb{G}}_k\Phi)(z,t)$$

ile tanımlanan $\acute{\mathbb{F}}_k$ ve $\acute{\mathbb{G}}_k$ operatörleri (5.12) denkleminin $\tilde{\gamma} \equiv 0$ iken sonsuzda k. mertebeden kutba sahip olan çözümlerinin oluşturulması için kullanışlıdır. Bu operatörler $k = 0, 1, ..., \kappa$ için $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır. Daha genel olarak λ_k ve μ_k, $m \times s$ tipinde reel değerli matrisler olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \left(\acute{\mathbb{F}}_k \lambda_k + \acute{\mathbb{G}}_k \mu_k \right) (z,t) = 0,$$

ise

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \phi\left(z\right)^{k-\kappa} \left(\hat{\mathbb{F}}_k \lambda_k + \hat{\mathbb{G}}_k \mu_k \right) (z,t) = 0$$

dir. $z \to \infty$ için $\lambda_\kappa \equiv 0$ ve $\mu_\kappa \equiv 0$ dır (Hızlıyel ve Çağlıyan 2004b, s.945). Bu şekilde devam edilirse $0 \leq k \leq \kappa$ için

$$\lambda_k + i\mu_k \equiv 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $\sum\limits_{k=0}^{\kappa} \left(\acute{\mathbb{F}}_k \lambda_k + \acute{\mathbb{G}}_k \mu_k \right)$, (5.13) probleminin $\tilde{\gamma} = 0$ durumunda $t \in \mathbb{R}$ için reel sürekli diferensiyellenebilir, λ_k, μ_k fonksiyonlarının her bir sistemi için sonsuzda κ ya eşit veya daha küçük kutba sahip olan bir çözümüdür. Benzer şekilde $k = 0, 1, ..., \kappa$ için

$$\left(\tilde{\mathbb{F}}_k \Phi \right) (z,t) := \begin{cases} \phi\left(z\right)^{k} \left(\hat{\mathbb{F}}_k \Phi \right) (z,t)\,, z \in D^+, t \in \mathbb{R} \\ \\ \phi\left(z\right)^{k-\kappa} \left(\hat{\mathbb{F}}_k \Phi \right) (z,t)\,, z \in D^-, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.15}$$

$$\left(\tilde{\mathbb{G}}_k \Phi \right) (z,t) := \begin{cases} \phi\left(z\right)^{k} \left(\hat{\mathbb{G}}_k \Phi \right) (z,t)\,, z \in D^+, t \in \mathbb{R} \\ \\ \phi\left(z\right)^{k-\kappa} \left(\hat{\mathbb{G}}_k \Phi \right) (z,t)\,, z \in D^-, t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.16}$$

ile tanımlanırsa

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \left(\tilde{\mathbb{F}}_k \lambda_k + \tilde{\mathbb{G}}_k \mu_k \right) \tag{5.17}$$

ifadesi (5.13) probleminin bir çözümüdür.

Lemma 5.1.5. (5.13) homojen probleminin $t = 0$ için özdeş olarak sıfır olan her çözümü (5.17) formundadır. Burada $\lambda_k(0) = \mu_k(0) = 0$ $(0 \leq k \leq \kappa)$ dır.

İspat. $\tilde{\omega}$, (5.13) homojen probleminin $\tilde{\omega}\left(z, 0\right) \equiv 0$ özelliğinde keyfi bir çözümü olsun. $a, \tilde{b}, c, \tilde{d}$ katsayıları sonsuzda özdeş olarak sıfır olduğundan, her t için $\tilde{\omega}$ sonsuz civarında Q-holomorftur ve

$$\tilde{\omega}(z,t) = O\left(|z|^{k-\kappa}\right) \quad (z \to \infty,\ t \in \mathbb{R},\ 0 \le k \le \kappa)$$

asimptotik koşulunu sağlar.

$$\lambda_k(t) + i\mu_k(t) := \lim_{z\to\infty}\left[\phi(z)^{\kappa-k}\,\omega(z,t)\right], \quad (t \in \mathbb{R})$$

seçelim. Burada $\lambda_k, \mu_k \in C^1(\mathbb{R})$ reel matrislerdir ve $\lambda_k(0) = \mu_k(0) = 0$ dır. $\tilde{\omega} - (\tilde{\mathbb{F}}_k\lambda_k - \tilde{\mathbb{G}}_k\mu_k)$ ifadesi (5.13) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$\lim_{z\to\infty}\phi(z)^{\kappa-k}\left[\tilde{\omega} - \tilde{\mathbb{F}}_k\lambda_k - \tilde{\mathbb{G}}_k\mu_k\right](z,t) = \lim_{z\to\infty}\left[\phi(z)^{\kappa-k}\,\tilde{\omega} - \hat{\mathbb{F}}_k\lambda_k - \hat{\mathbb{G}}_k\mu_k\right](z,t) = 0$$

dır öyle ki

$$\lim_{z\to\infty}\phi(z)^{\kappa-k+1}\left[\tilde{\omega} - \tilde{\mathbb{F}}_k\lambda_k - \tilde{\mathbb{G}}_k\mu_k\right](z,t) = \lambda_{k-1}(t) + i\mu_{k-1}(t)$$

dir, burada $\lambda_{k-1}, \mu_{k-1} \in C^1(\mathbb{R})$ ve $\lambda_{k-1}(0) = \mu_{k-1}(0) = 0$ dır. Tümevarım yardımıyla (5.13) denkleminin bir çözümünün

$$\omega_0(z,t) := \tilde{\omega} - \sum_{v=0}^{k}(\tilde{\mathbb{F}}_v\lambda_v + \tilde{\mathbb{G}}_v\mu_v)$$

$$\lambda_v(0) = 0, \quad \mu_v(0) = 0, \quad (0 \le v \le k)$$

formunda olduğu görülür. Burada ω_0

$$\omega_0(z,0) = 0, \qquad \omega_0(z,t) = O(|z|^{-\kappa-1}), \qquad (z \to \infty, t \in \mathbb{R})$$

özelliğindedir. Böylece

$$\tilde{\omega}_0 := \begin{cases} \omega_0^+, \ \ z \in \mathfrak{D}^+, t \in \mathbb{R} \\ \\ \phi(z)^\kappa\,\omega_0^-, z \in \mathfrak{D}^-, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5.12) homojen probleminin $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de sınırlı bir çözümüdür ve bu çözüm

$$\tilde{\omega}_0(z,0) \equiv 0\ (z \in \mathbb{C}), \tilde{\omega}_0(z,t) = O\left(|z|^{-1}\right) \quad (z \to \infty, t \in \mathbb{R})$$

özelliğindedir öyle ki $\tilde{\omega}_0$ sonsuzda özdeş olarak sıfırdır. Böylece $\tilde{\omega} = \sum_{v=0}^{k}(\tilde{\mathbb{F}}_v\lambda_v + \tilde{\mathbb{G}}_v\mu_v)$ olarak bulunur.

□

Teorem 5.1.6. (5.6) denkleminin genel çözümü

$$w(z,t) = \exp\left(P^{-1}\int_{\Gamma} d\phi\,(\zeta)\,[\phi\,(\zeta)-\phi\,(z)]^{-1}\,\hat{g}\right)$$
$$\times\, R\,(z)^{-1}\left\{\omega_0(z,t)+\psi(z)+\sum_{k=0}^{\kappa}\left(\tilde{\mathbb{F}}_k\lambda_k+\tilde{\mathbb{G}}_k\mu_k\right)(z,t)\right\}$$

biçimindedir. Burada

$$\omega_0(z,t) := \begin{cases} (\mathbb{I}_1\tilde{\gamma})^+(z,t)-\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(z)\,\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}, & z\in\mathfrak{D}^+, t\in\mathbb{R} \\ \\ \phi\,(z)^{-\kappa}\left[(\mathbb{I}_1\tilde{\gamma})^-(z,t)-\sum_{k=0}^{\infty} f_k\,(z)\,\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right], & z\in\mathfrak{D}^-, t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

ve $\psi,\ \lambda_k,\ \mu_k\ (0\le k\le\kappa),\ f_v\ (v\in\mathbb{N}_0)$, w fonksiyonu üzerindeki başlangıç verisi yardımıyla verilmiştir. f_v, (5.19) ile tanımlıdır.

İspat. $\tilde{\omega_0}$, (5.13) denkleminin $\psi(z):=\tilde{\omega_0}(z,0),\ \ (z\in\mathbb{C})$ özelliğine sahip keyfi bir çözümü olsun. Burada $\tilde{\omega_0}(z,t)$ fonksiyonunun, her $t\in\mathbb{R}$ için sonsuzda singülerliği yoktur. Ayrıca u

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_{\bar{\phi}}+au+\tilde{b}\overline{u}\right]+cu+\tilde{d}\overline{u}=\Psi,\ (\mathbb{C}\setminus\Gamma)\times\mathbb{R} \tag{5.18}$$
$$u^+=\phi^{\kappa}u^-,\quad \Gamma\times\mathbb{R}$$

homojen olmayan problemin bir özel çözümü olsun ve $u(z,0)\equiv 0\ (z\in\mathbb{C})$ ve $u(\infty,t)\equiv 0\ (t\in\mathbb{R})$ koşullarını sağlasın. Burada $\Psi := c\psi+\tilde{d}\overline{\psi}$ dir. O halde $\tilde{\omega}:=\tilde{\omega_0}-\psi+u$ (5.13) denkleminin $\tilde{\omega}(z,0)\equiv 0\ (z\in\mathbb{C})$ özelliğine sahip bir çözümüdür. Böylece, Lemma 5.1.5 yardımıyla, $t=0$ için özdeş olarak sıfır olan her $\tilde{\omega}$ çözümü $\lambda_k(0)=0$, $\mu_k(0)=0$, $0\le k\le\kappa$ olması şartıyla (5.17) formunda verilebilir. Homojen olmayan (5.18) probleminin bir özel çözümü için

$$v(z,t) := \begin{cases} u^+(z,t), & z\in\mathfrak{D}^+, t\in\mathbb{R} \\ \phi\,(z)^{\kappa}\,u^-(z,t), & z\in\mathfrak{D}^-, t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

dönüşümünü ele alalım. O halde bu fonksiyon

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[v\bar{\phi}+av+b_1\overline{v}\right]+cv+d_1\overline{v}=f,$$

probleminin bir çözümü olmalıdır. Burada

$$f := \begin{cases} \Psi, & z\in\mathfrak{D}^+, \\ \phi\,(z)^{\kappa}\,\Psi, & z\in\mathfrak{D}^-,\end{cases}$$

ve b_1, d_1 katsayıları

$$b_1 := \begin{cases} \tilde{b}, & z \in \mathfrak{D}^+, \\ \phi(z)^{\kappa}\,\overline{\phi(z)}^{-\kappa}\tilde{b}, & z \in \mathfrak{D}^- \end{cases}$$

$$d_1 := \begin{cases} \tilde{d}, & z \in \mathfrak{D}^+, \\ \phi(z)^{\kappa}\,\overline{\phi(z)}^{-\kappa}\tilde{d}, & z \in \mathfrak{D}^-. \end{cases}$$

şeklindedir. O halde böyle bir çözüm,

$$v - \mathbb{P}_1 v = \hat{f}t,$$

integral denkleminin çözülmesiyle bulunur, burada

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 := 2iP^{-1}\int_0^t \int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\Big\{\Omega_1^{(1)}(z,\zeta)\left[c(\zeta)\,v(\zeta,\tau) + d_1(\zeta)\,\overline{v(\zeta,\tau)}\right] \\ +\Omega_1^{(2)}(z,\zeta)\left[\overline{c(\zeta)v(\zeta,\tau)} + \overline{d_1(\zeta)}v(\zeta,\tau)\right]\Big\}d\tau \end{aligned}$$

ve

$$\hat{f}(z) := -2iP^{-1}\int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\overline{d\phi(\zeta)}\left[\Omega_1^{(1)}(z,\zeta)f(\zeta) + \Omega_1^{(2)}(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}\right].$$

$\Omega_1^{(k)}$, $k = 1, 2$, ise

$$w_{\overline{\phi}} + aw + b_1\overline{w} = 0.$$

denklemine karşılık gelen temel çekirdeklerdir. Bu integral denklemin çözümü

$$v(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\,\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

ile verilir, burada

$$\begin{aligned} f_0 &= -\hat{f} \\ f_k(z) :&= 2iP^{-1}\int_{\mathbb{C}} d\phi(\zeta)\,\overline{d\phi(\zeta)}\Big[\hat{\Omega}^{(1)}(z,\zeta)\left(c(\zeta)\,f_{k-1}(\zeta) + d_1(\zeta)\,\overline{f_{k-1}(\zeta)}\right) \\ &\quad +\hat{\Omega}^{(2)}(z,\zeta)\left(\overline{c(\zeta)\,f_{k-1}(\zeta)} + \overline{d_1(\zeta)}f_{k-1}(\zeta)\right)\Big], k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{5.19}$$

ve $f_k(\infty) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

□

6. TARTIŞMA

Begehr ve Gilbert tarafından 1978 yılında yapılan çalışmada, analitik fonksiyon teorisinde, belirli bir eğri boyunca önceden belirlenmiş bir sıçramaya sahip tüm analitik fonksiyonları bulma problemi olarak bilinen Riemann sınır değer problemi, genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar teorisinde kompleks diferensiyel denklemden türetilen pseudoparabolik bir denklemin çözümleri için incelenmiştir. Bu inceleme pseudoparabolik denklemler için integral temsillerinin elde edilmesiyle mümkün olmuştur. Bu çalışmadan hareketle bu doktora tezinde, üçüncü bölümde (3.1) denklemi ile ifade edilen matris formda pseudoparabolik denklem ele alınmıştır. Bu denklemin çözümleri için integral temsillerin elde edilmesi aşamasında, Hile (1982) tarafından verilen Q-holomorf fonksiyonlar teorisine ihtiyaç duyulduğundan ikinci bölüm bu teorinin temel tanım ve teoremlerini içeren bir önbilgi niteliğinde düzenlenmiştir. Tezin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş Q-holomorf fonksiyonlar için verilen temel çekirdekler yardımıyla (3.1) denklemi için (3.17), (3.18) ve (3.21) ile verilen integral temsilleri elde edilmiştir (Sağlam Özkan ve Hızlıyel 2018). Bu integral temsiller, Begehr ve Gilbert (1978) in ele aldıkları pseudoparabolik denklem için elde ettiği integral temsillerin, bilinmeyen fonksiyonu ve katsayıları matris değerli fonksiyonlar olan pseudoparabolik bir denklem için yüksek boyutlu bir benzeridir. Dört ve beşinci bölümde ise Riemann sınır değer problemi için problemin katsayısına ait indeksin sıfır ve pozitif bir tamsayı olması durumda çözümler elde edilmiştir (Teorem 5.1.4, Teorem 5.1.6). Genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar teorisinden türetilmiş (Vekua 1962) pseudoparabolik denklemler için, literatürde var olan sınır değer problemleri, uygun integral temsilleri elde edilerek çözülmüştür. Bu çalışmanın ışığında, Riemann sınır değer probleminin çözümü için elde edilen integral temsillerin yüksek boyutlu benzerleri, diğer sınır değer problemleri için de elde edilebilir. Ancak bu sınır değer problemleri incelenirken, yüksek boyutta çalışmanın getirdiği zorluk sebebiyle, sınır şartları üzerine konulan koşullar seçilirken dikkatli olunmasında fayda vardır.

KAYNAKLAR

Barenblat, G., Zheltov, I., Kochiva, I. 1960. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids infissured rocks. *J. Appl. Math. Mech.*, 24: 1286-1303.

Begehr, H., Gilbert, R.P. 1993. Transformations, transmutations and kernel functions. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. Harlow: Longman Scientific & Technical, 275 pp.

Bergman, S. 1961. Integral operators in the theory of linear partial differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 145 pp.

Bers, L. 1953. Theory of pseudo-analytic functions. New York, (NYU Lecture Notes), 187 pp.

Bojarskiĭ, B.V. 1966. Theory of generalized analytic vectors (in Russian). *Ann. Polon. Math.*, 17: 281-320.

Colton, D. 1972. On the analytic theory of pseudoparabolic equations. *Quart. J. Math.,* 23: 179-192.

Douglis, A.A. 1953. Function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Comm. Pure Appl. Math.*, 6(2): 259-289.

Gakhov, F. D. 1937. On the Riemann boundary value problem. *Mat. Sb.*, 2(44): 673-683.

Gakhov, F. D. 1966. Boundary value problems. Oxford: Pergamon press, 564 pp.

Gilbert, R.P., Schneider, M. 1978. Generalized meta and pseudoparabolic equations in the plane. *Complex analysis and its applications*, 666: 160–172.

Gilbert, R. P., Buchanan, J. L. 1983. First order elliptic systems. Elsevier, 281 pp.

Goldschmidt, B. 1979. Funktionentheoretische eigenschaften verallgemeinerter analytischer vektoren. *Math. Nachr.*, 90 :57–90.

Hızlıyel, S. 2006. The Hilbert problem for generalized Q-holomorphic functions. *Journal for Analysis and its App.*, 25(4): 535-554.

Hızlıyel, S. 2014. Carleman-type theorems for generalized Q-holomorphic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(2): 816-827.

Hızlıyel, S., Çağlıyan, M. 2004a. Generalized Q-holomorphic functions. *Complex Var. Theory Appl.*, 49(6): 427-447.

Hızlıyel, S., Çağlıyan, M. 2004b. Pseudo Q-holomorphic functions. *Complex Var. Theory Appl.*, 49: 941-956.

Hızlıyel, S., Çağlıyan, M. 2007. A Dirichlet problem for a matrix equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 52: 575 – 588.

Hilbert, D. 1904. Über eine anwendung der integralgleichungen auf ein problem der funktionentheorie. Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg, 233-240.

Hile, G. N. 1978. Elliptic systems in the plane with first-order terms and constant coefficients. *Comm. Partial Differential Equations,* 3(10): 949–977.

Hile, G.N. 1982. Function theory for generalized Beltrami systems. *Contemporary Math.*, 11: 101-125.

Jacobson, N. 1953. Lectures in abstract algebra. Volume II: Linear algebra. Van Nostrand Reinhold.

Lewy, H. 1959. On the reflection laws of second order differential equations in two independent variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 65: 37-58.

Plemelj, I. 1908. Ein erganzungssatz zur Cauchyschen integraldarstellung analytischer funktionen, randwerte betreffend. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 19: 205-210.

Picard, E. 1927. Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique. Gauthier-Villars, Paris, 212 pp.

Sağlam Özkan, Y., Hızlıyel S. 2018a. Integral representation for solutions of the pseudoparabolic equation in matrix form. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(4): 1655-1669.

Showalter, R. E., Ting, T. W. 1970. Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1: 1-26.

Vekua, I.N. 1962. Generalized analytic functions. Pergamon, Oxford, 698 pp.

Vekua, I. N. 1967. New methods for solving elliptic equations, John Wiley, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Yeşim SAĞLAM ÖZKAN
Doğum Yeri	:	ANKARA
Doğum Tarihi	:	29.11.1989
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	İbn-i Sina Lisesi-Ankara (2006)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)
Yüksek Lisans	:	Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2014)
Doktora	:	Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2019)
Çalıştığı Kurumlar ve Yıl	:	Bursa Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2013 $- \cdots$)
İletişim	:	ysaglam@uludag.edu.tr, yesimmsaglam@gmail.com

Yayınlar

Altınkaya, Ş., Sağlam Özkan, Y. 2017. On Salagean type pseudo-starlike functions. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 21(2): 275-285.

Giresunlu, I. B., Sağlam Özkan, Y., Yaşar, E. 2017. On the exact solutions, lie symmetry analysis, and conservation laws of Schamel–Korteweg–de Vries equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(11): 3927-3936.

Hızlıyel, S., Sağlam Özkan, Y. 2016. The Cauchy–Kowalewski theorem in the space of pseudo Q-holomorphic functions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10(5): 953-963.

Sağlam Özkan, Y., Hızlıyel S. 2018a. Integral representation for solutions of the pseudo-parabolic equation in matrix form. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(4): 1655-1669.

Sağlam Özkan, Y., Hızlıyel, S. 2018b. On the approximation to complex matrix-valued functions by using solutions of partial complex differential equation in matrix form. *Süleyman Demirel University Journal of Natural and Applied Sciences*, 22(3): 1169-1174.

Sağlam Özkan, Y., Hızlıyel, S. 2018c. An investigation of solution of first order complex coefficients complex equation by using Aboodh transform. *Bulletin of the İnternational Mathematical Virtual Institute*, 8(3): 509-515.

Yaşar, E., San, S., Sağlam Özkan, Y. 2016. Nonlinear self adjointness, conservation laws and exact solutions of ill-posed Boussinesq equation. *Open Physics*, 14(1): 37-43.