T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU KLINGENBERG DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Elif DEMİRCİ
0000-0001-5087-5209

Prof. Dr. Basri ÇELİK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2019

TEZ ONAYI

Elif Demirci tarafından hazırlanan " SONLU KLINGENBERG DÜZLEMLERİ ÜZERİNE " adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Başkan: Prof. Dr. Basri ÇELİK
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

ÜYE: Doç. Dr. Atilla AKPINAR
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

ÜYE: Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN
Bursa Teknik Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
30./7./19 **(Tarih)**

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahr
- ifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

..../..../......

Elif DEMİRCİ

ÖZET

Yüksek Lisans

SONLU KLINGENBERG DÜZLEMLERİ ÜZERİNE

Elif DEMİRCİ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Bu yüksek lisans tezinde projektif düzlemlerin bir genellemesi olan Projektif Klingenberg düzlemleri tanıtılmış ve bu düzlemlerin cebirdeki karşılıkları olarak görülebilecek lokal halkalar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Özel olarak $\mathbb{Z}_4$ halkası yardımıyla inşa edilen $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ dual lokal halkası ile koordinatlanan Projektif Klingenberg düzleminin nokta ve doğruları üzerinde çalışılmıştır. Bu düzlemin aynı komşulukta olan ve olmayan doğrularının arakesit noktaları ayrı ayrı incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda farklı tiplerden doğruların ve aynı tipten olup farklı komşulukta olan doğruların arakesit noktalarının bir tek noktadan oluşacağı cebirsel olarak gösterilmiştir. Aynı tipten ve aynı komşulukta olan doğruların arakesit noktaları ise çizelgeler yardımı ile belirlenmiştir. Böylece $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ dual lokal halkası yardımıyla koordinatlanan Projektif Klingenberg düzleminin karakteristik özellikleri temel olarak elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif düzlem; Projektif Klingenberg Düzlem; Lokal Halka; Dual Lokal Halka.
2019, vii+105 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON FINITE KLINGENBERG PLANES

Elif DEMİRCİ

Bursa Uludag University,
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Basri ÇELİK (Uludağ University)

In this Master Thesis, Projective Klingenberg planes which are generalizations of the projective planes are introduced and also fundamental information about local rings which are regarded as the algebraic correspondences of the Projective Klingenberg planes. In particular, points and lines of the Projective Klingenberg plane $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ which has been coordinatized by the dual local ring $\mathbb{Z}_4$. The intersection points of the lines which are or not in the same neighborhood are studied separately. As the result, the fact that the intersection of the lines of different types will be a unique point is obtained algebraically. The intersection points of the same type lines were investigated by constructing some tables. Hence the characteristic properties of the Projective Klingenberg plane coordinatized by the dual local ring $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ are obtained.

Keywords: Projective Plane; Projective Klingenberg Plane; Local Ring; Dual Local Ring.
2019, vii+105 pages.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşma sürecinde kıymetli zamanından çok büyük fedakarlık yapan ve her zaman hoşgörü ve sabırla yol gösteren sayın danışman hocam Basri Çelik ve yine hayatımın her anında varlığını her zaman hissetiğim ,moral bulduğum çok sevgili Nisa Çelik hocama teşekkür ediyor ve saygılarımı sunuyorum.

Bu süreçte her yardıma ihtiyaç duyduğumda geri çevirmeksizin yol göstermek için büyük bir samimiyetle destek olan sevgili Fatma Özen Erdoğan ve Abdurrahman Dayıoğlu hocalarıma ve baştan beri desteğini hissetiğim Süleyman Çiftçi hocama teşekkürlerimi sunuyorum.

Aldığım her kararda arkamda desteklerini hissetiğim üzerimden dualarını hiç eksik etmeyen sevgili aileme çok teşekkür ediyorum.

Son olarak bugüne kadar aldığım eğitim içerisinde üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Elif DEMİRCİ

...../..../.....

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.. i
ABSTRACT.. ii
TEŞEKKÜR... iii
İÇİNDEKİLER.. iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.. v
ŞEKİLLER DİZİNİ.. vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.. vii
1. GİRİŞ.. 1
2. TEMEL KAVRAMLAR... 2
2 2.1. Cebirsel Kavramlar.. 2
2 2.2. Geometrik Kavramlar.. 4
3. PK DÜZLEMLERİNİN LOKAL HALKA İLE KOORDİNATLANMASI... 7
3.1. Noktaların Koordinatlanması.. 7
3.2. Doğruların Koordinatlanması.. 10
4. $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ DUAL LOKAL HALKASI İLE KOORDİNATLANAN PK-DÜZLEM.. 14
4.1. $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\boldsymbol{\varepsilon}$ Dual Lokal Halkası 14
4.2. $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile Koordinatlanan PK-düzlem.. 22
4.3. $\mathrm{PK}_2(\mathbb{Z}_4(\varepsilon))$ Düzleminde Doğruların Arakesitleri.............................. 30
4.3.1. Farklı Tipten Doğruların Arakesitleri 30
4.3.1.1. Birinci ve ikinci tip doğrularının arakesit.. 31
4.3.1.2. Birinci ve üçüncü tip doğrularının arakesit. 32
4.3.1.3. İkinci ve üçüncü tip doğrularının arakesit...................................... 33
4.3.2. Aynı Tipten Doğruların Arakesitleri.. 34
4.3.2.1. İkinci tipten doğrularının arakesit.......................... 34
4.3.2.2. Birinci tipten doğrularının arakesit.. 60
4.3.2.3. Üçüncü tipten doğrularının Arakesit......... 82
5.SONUÇ.. 103
KAYNAKLAR.. 104
ÖZGEÇMİŞ.. 105

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathcal{A}$	Afin Düzlem
$\sim$	Komşudur.
Ƥ	Projektif Düzlem
S	Projektif-Klingenberg düzlemi
$\in$	Üzerinde olma

Kısaltmalar	**Açıklama**
PK-Düzlem	Projektif Klingenberg Düzlemi
$\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$	$\mathbb{Z}_4$ üzerinde kurulan dual halka

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. 7
Şekil 3.2. 8
Şekil 3.3. 8
Şekil 3.4. 9
Şekil 3.5. 9
Şekil 3.6. 10
Şekil 3.7. 11
Şekil 3.8. 11

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. 15
Çizelge 4.2. 17
Çizelge 4.3. 19
Çizelge 4.4. 20
Çizelge 4.5.. 20
Çizelge 4.6. 39
Çizelge 4.7. 43
Çizelge 4.8. 47
Çizelge 4.9. 51
Çizelge 4.10. 55
Çizelge 4.11. 64
Çizelge 4.12. 68
Çizelge 4.13. 71
Çizelge 4.14. 75
Çizelge 4.15. 79
Çizelge 4.16. 84
Çizelge 4.17. 88
Çizelge 4.18. 91
Çizelge 4.19. 95
Çizelge 4.20. 99

1. GİRİŞ

Cebir ve geometri arasındaki ilişkilerin araştırılması, Öklid' ten (M.Ö. 330-270) beri matematikçiler için temel araştırma konularından biri olmuştur. Öklid'in, daha sonra İskoç matematikçi John Playfair (1748-1819) tarafından paralellik aksiyomu olarak daha basit formda sunduğu, beşinci postülatı yerine zaman içerisinde farklı ifadeler konularak değişik geometrilerin ortaya çıkması sağlanmıştır. Öklid'in beşinci postülatı John Playfair'in ifade ettiği haliyle “ *Bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen bir tek paralel doğru çizilebilir*." anlamına gelmektedir. İlk olarak Nicolai Lobachevsky ve János Bolyai tarafından beşinci postülat yerine " *Bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen iki paralel doğru çizilebilir.*" ifadesini koymuşlar ve elde edilen aksiyom sisteminin tutarlı ve bağımsız olduğunu göstermişlerdir. Böylece Öklid dışı geometrilerin temeli atılmıştır. Projektif düzlemler ise tüm doğruların kesiştiği yani kesişmeyen (paralel) doğruların var olmadığı geometrik yapılar olup Öklid'in beşinci postülatı buna göre düzenlenmiştir. Bu tezde üzerinde çalışılacak konu olan Projektif Klingenberg düzlemlerin fikri ise Projektif düzlemlerden esinlenerek elde edilmiş bir genelleme olup ilk defa Klingenberg tarafından (1954), (1955), (1956) makalelerinde ortaya atılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılmasını sağlayacak temel kavramlar literatürden yapılan bir derleme ile "Cebirsel Kavramlar" ve "Geometrik Kavramlar" olmak üzere iki alt başlık altında verilecektir.

2.1. Cebirsel Kavramlar

Tez içinde kullanılacak cebirsel kavramları grup kavramının ve grupla ilgili temel bilgilerin bilindiğini varsayılarak verilecektir. Grup kavramını bilmeyenler (Bayraktar 1997) kaynağına ya da herhangi bir soyut cebir kitabına bakabilirler.

Tanım 2.1.1. $\mathbf{H}$ herhangi bir küme $+$ ve $\cdot$ da bu küme üzerinde herhangi iki ikili işlem olsun. Eğer,

$\mathbf{H1}$) $(\mathbf{H},+)$ bir değişmeli gruptur.

$\mathbf{H2}$) $\cdot$ işlemi birleşimlidir.

$\mathbf{H3}$) Her $x, y, z \in \mathbf{H}$ için dağılma kuralları denilen $(y+z).x = y.x + z.x$ ve

$x.(y+z) = x.y + x.z$ eşitlikleri geçerli ise $(\mathbf{H},+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir ***halka*** denir (Kaya 2005).

Bir $(\mathbf{H},+,\cdot)$ cebirsel yapısında $(+)$ toplama işlemine göre etkisiz eleman varsa 0, $(\cdot)$ çarpma işlemine göre etkisiz eleman varsa 1 ile gösterilir. Çarpma işlemine göre etkisiz elemana ***özdeşlik eleman*** denir. Özdeşlik elemanına sahip halkalara ***birimli halka*** adı verilir. Çarpma işlemine göre değişmeli olan (yani her $a, b \in \mathbf{H}$ için $a.b = b.a$ olan) halkaya ***değişmeli halka*** denir.

$(\mathbb{Z},+,\cdot), (\mathbb{Q},+,\cdot), (\mathbb{R},+,\cdot)$ ve $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cebirsel yapıları birer halkadır. $n \in \mathbb{Z}^+$ belli bir sayı $\oplus$ ve $\odot$ n modülüne göre sırasıyla toplama ve çarpma işlemlerini göstermek ve $\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots\ldots n-1\}$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$ cebirsel yapıda bir halkadır (Çiftçi 2005). $(\mathbb{Z}_n,\oplus,\odot)$ halkası kısaca $\mathbb{Z}_n$ ***halkası*** olarak isimlendirilir. Bu çalışmada çoğunlukla $\mathbb{Z}_n$ halkalarının $n = 4$ özel hali olan $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde durulacaktır. $\mathbb{Z}_n$ halkalarındaki $\oplus$ ve $\odot$ gösterimleri yerine modüler işlem yapıldığı unutulmamak şartıyla alışılmış + ve $\cdot$ gösterimleri kullanılır. Hatta bazı durumlarda çarpma işlemi yan yana yazma ile de gösterilir.

Tanım 2.1.2. Bir halkanın, kendisine kısıtlanmış halka işlemleri altında, halka olan bir alt kümesine o halka için bir ***alt halka*** denir (Çiftçi 2005).

Tanım 2.1.3. $\mathbf{H}'$, **H** halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun. $\mathbf{H}'$ nün **H** nin bir alt halkası olabilmesi için gerek ve yeter şart her $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbf{H}'$ için

1) $\mathrm{a} - \mathrm{b} \in \mathbf{H}'$,

2) $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \in \mathbf{H}'$

olmasıdır (Bayraktar 1997).

Teorem 2.1.4. **H** birimli bir halka olsun. **H** de bir elemanının çarpmaya göre tersi varsa bu elemana bir ***birim*** denir. Eğer **H** nin sıfırdan farklı her elemanı bir birim ise **H** ye bir ***aykırı cisim*** veya ***bölümlü halka*** denir. Değişmeli bir bölümlü halkaya bir ***cisim*** denir (Çiftçi 2005).

Tanım 2.1.5. $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ bir halka ve $\mathbf{I} \subset \mathbf{H}$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa **I** ya **H** nin ideali denir:

1) $(\mathbf{I}, +)$, $(\mathbf{H}, +)$ nın alt grubudur.

2) Her $\mathrm{x} \in \mathbf{I}$ ve her $\mathrm{r} \in \mathbf{H}$ için $\mathrm{xr}, \mathrm{rx} \in \mathbf{I}$.

Bu tanımda yer alan ikinci şart "Her $\mathrm{r} \in \mathbf{H}$ için $\mathrm{r}\mathbf{I} \subset \mathbf{I}$ ve $\mathbf{I}\mathrm{r} \subset \mathbf{I}$ " anlamına gelir.

Tanım 2.1.6. $(\mathbf{H}, +, \cdot)$ özdeşlikli halkasının çarpma işlemine göre tersi olmayan elemanlarının kümesi **I** ile gösterilsin. Eğer **I**, **H** nın bir ideali ise **H** ya ***lokal halka*** denir.

Şimdi W. K. CLIFFORD tarafından **R** reel sayılar kümesi yardımıyla oluşturulan dual sayı kavramı tanıtılacaktır.

R reel sayılar kümesi olmak üzere,

$\mathbf{R}(\varepsilon) = \{\mathrm{a} + \mathrm{b}\varepsilon \mid \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbf{R},\ \varepsilon^2 = 0\}$

biçiminde tanımlanan küme üzerinde alınan keyfi $A = a + b\varepsilon$, $B = c + d\varepsilon$ elemanları için eşitlik ile toplama, çarpma işlemleri sırasıyla

$$A = B \Leftrightarrow a + b\varepsilon = c + d\varepsilon \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

$$A + B = (a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

$$A \cdot B = (a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) = (a.c) + (a.d + b.c)\varepsilon$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$(\mathbf{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ cebirsel yapısının bir değişmeli halka olduğu (Hacısalihoğlu 2000) de gösterilmiştir.

$(\mathbf{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ halkasında çarpma işleminin özdeşlik elemanının $1 = 1 + 0\varepsilon$ olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle $(\mathbf{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ halkası birimli ve değişmeli halkadır.

Tanım 2.1.7. Yukarıdaki gibi tanımlanan $(\mathbf{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ halkasına $\mathbf{R}$ ***üzerinde kurulan dual halka*** denir ve bu halkanın elemanlarına ***reel dual sayılar*** adı verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Bu tez boyunca $(\mathbf{R}(\varepsilon), +, \cdot)$ dual halkası kısaca $\mathbf{R}(\varepsilon)$ ile gösterilecektir.

2.2. Geometrik Kavramlar

Bu kısımda tez içinde kullanılacak geometrik kavramların anlaşılması için gerekli temel kavramlar kısa kısa tanıtılacaktır. Bu kısımda kaynak gösterilmeden verilen kavramlar Dembowski ve Klingenbergden (1956) alınmıştır.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanlarına sırasıyla ***noktalar*** ve ***doğrular*** adı verilen iki küme olsun. Eğer $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ve $\in \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ ise $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemine bir ***geometrik yapı*** ve $\in$ bağıntısına geometrik yapının ***üzerinde olma bağıntısı*** denir. Eğer $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümelerinin her ikisi de sonlu ise bu geometrik yapıya ***sonlu geometrik yapı*** adı verilir. $N \in d$ ifadesi "N *noktası* d *doğrusunun üzerindedir."* veya "d *doğrusu* N *noktasından geçer*." biçiminde okunur. Benzer biçimde $N \notin d$ ifadesi "N *noktası* d *doğrusu üzerinde değildir*. " veya "d *doğrusu* N *noktasından geçmez*." biçiminde okunur.

Tanım 2.2.2. $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ ve $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer

$f: \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$ fonksiyonu

1) $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$ **,**

2) $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$**,**

3) Her $N \in \mathcal{N}$**,** $d \in \mathcal{D}$ için $N \in d \Longrightarrow f(N) \in' f(d)$,

koşullarını da sağlıyorsa f ye $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ dan $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \in')$ ye bir ***homomorfizm*** denir.

Tanım 2.2.3. Bir $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ geometrik yapısında $d, d' \in \mathcal{D}$ için $d' \cap d = \emptyset$ ya da $d' = d$ ise bu doğrular birbirine ***paraleldir*** denir ve d'//d ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. Aşağıda verilen A1, A2, A3 aksiyomları gerçekleyen $\mathcal{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ sistemine ***afin düzlem*** denir.

A1) Her M,N$\in \mathcal{N}$, $M \neq N$, noktaları için $M \in d$ ve $N \in d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A2) $N \notin d$ olmak üzere her $N \in \mathcal{N}$ ve her $d \in \mathcal{D}$ için $N \in c$ ve $d \, // \, c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

A3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır (Kaya 2005).

Tanım 2.2.5. Aşağıdaki P1,P2, P3 aksiyomlarını gerçekleyen bir $\mathcal{P}=(\mathcal{N},\mathcal{D},\in)$ geometrik yapısına ***projektif düzlem*** denir.

P1) Her $M, N \in \mathcal{N}$, $M \neq N$ için $M \in d$ ve $N \in d$ olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

P2) Her $c, d \in \mathcal{D}$ için $N \in c$ ve $N \in d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır (Kaya 2005).

P2 aksiyomunda "*herhangi iki doğrunun en az bir arakesit noktasının olacağı* " ifade edilmekte olup, doğruların farklı olması durumunda aşağıdaki teoremin geçerli olduğu, P1 yardımıyla, kolayca görülecektir.

Teorem 2.2.6. Bir $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ projektif düzleminde farklı iki doğru bir tek noktada kesişir (Kaya 2005).

Tanım 2.2.7. $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$ bir geometrik yapı ve ~ , $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri üzerinde komşuluk bağıntısı olarak isimlendirilen bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda $\mathbf{S} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in, \sim)$ sistemi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa **S** ye ***Projektif-Klingenberg düzlemi*** (PK-düzlemi) denir.

PK1) Aynı komşulukta olmayan herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.

PK2) Aynı komşulukta olmayan herhangi iki doğrunun bir tek arakesit noktası vardır.

PK3) $\mathbf{S}^* = (\mathcal{N}^*, \mathcal{D}^*, \in)$ bir projektif düzlem olmak üzere, üzerinde olmayı koruyan bir $\varphi: S \to S^*$ örten homomorfizmi

$$\varphi : \mathbf{S} \to \mathbf{S}^* \quad P \sim Q \Leftrightarrow \varphi(P) = \varphi(Q) \text{ ve } l \sim m \Leftrightarrow \varphi(l) = \varphi(m).$$

şartını sağlayacak biçimde vardır. (Klingenberg)

$A, B \in \mathcal{N}$ için $A \sim B$ ifadesi; " A *ve* B *noktaları komşu noktalardır.*" biçiminde, $d, l \in \mathcal{D}$ için $d \sim l$ ifadesi "d *ve* l *doğruları komşu doğrulardır*." biçiminde okunur. Benzer biçimde $A \nsim B$ ifadesi; "A *ve* B *noktaları komşu değildir.*" biçiminde, $d \nsim l$ ifadesi "d *ve* l *doğruları komşu değildir*." biçiminde okunur.

Tanım 2.2.8. Eğer $A, B \in \mathcal{N}$ için $A \sim B$ ve $B \in d$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{N}$ varsa A noktasına d ***doğrusunun yakınındadır*** denir ve bu $A \sim d$ biçiminde gösterilir.

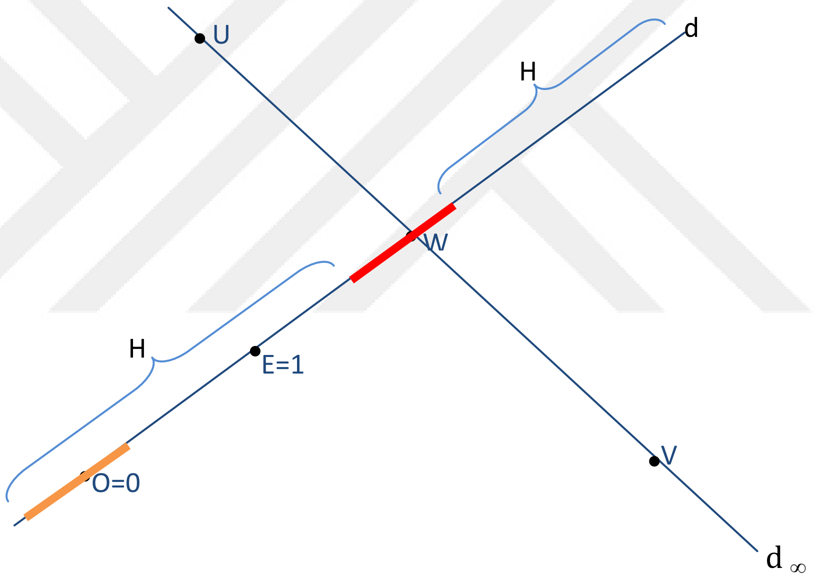
Tanım 2.2.9. Bir PK-düzlemde herhangi üçü aynı komşuluktaki doğrular üzerinde bulunmayan ve ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan dört noktaya ***dörtgen*** denir (Çiftçi ve ark. 2007).

A,B,C,D noktaları bir dörtgen oluşturuluyor ise bu {A,B,C,D} dörtgeni olarak gösterilir, eğer noktaların sırası önemli ise (A,B,C,D) gösterimi kullanılır.

3. PK DÜZLEMLERİNİN LOKAL HALKA İLE KOORDİNATLANMASI

Bu kısımda ayrıntıları Baker ve ark. (1991), Dugas (1978) ve Keppens (1988) de bulunabilecek olan PK- düzlemlerin lokal halkalar ile koordinatlanması özet olarak verilecektir. **S** bir PK-düzlem ve (O,E,U,V) bu düzlemde bir dörtgen olsun. OE doğrusu d ile, UV doğrusu d_∞ ile ve $d \cap UV$ noktası W ile gösterilsin.

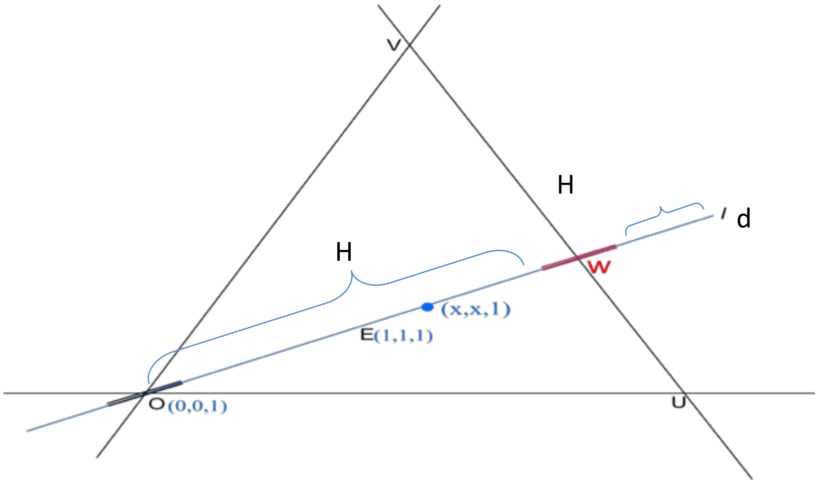
$\mathbf{H} = \{N \in \mathbf{N} | \, N \in d \, , N \nsim W\}$, $\mathbf{I} = \{N \in \mathbf{H} | \, N \sim 0\}$ olsun ve özel olarak $0 := O, 1 := E$ olarak alınsın (Şekil 3.1). Bu durumda noktaların ve doğruların nasıl koordinatlanacağı aşağıda iki başlık altında verilmiştir.



Şekil 3.1: d=OE doğrusu üzerindeki noktalarla H nın elemanlarının eşlemesi

3.1. Noktaların Koordinatlanması

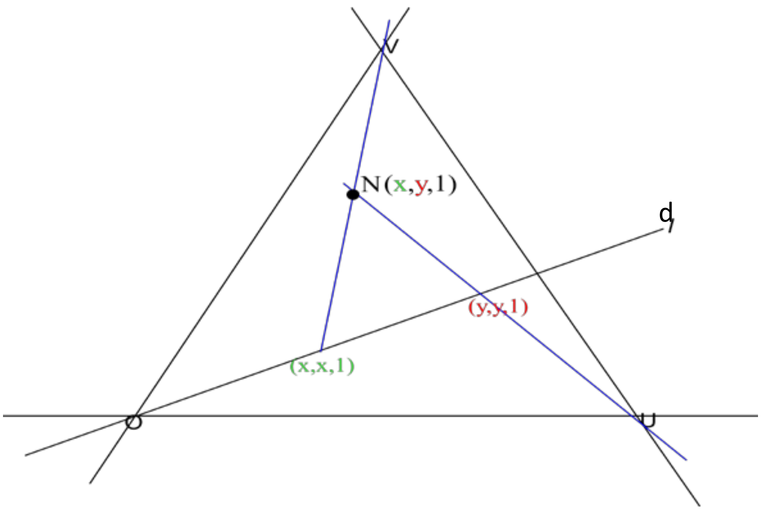
d doğrusunun üzerindeki, d_∞ doğrusuna yakın olmayan (yani W nın komşuluğunda olmayan) noktalara $x \in \mathbf{H}$ olmak üzere $(x, x, 1)$ koordinatı karşılık tutulsun. Bu durumda özel olarak $0 \in \mathbf{H}$ noktasına $(0,0,1)$ ve $1 \in \mathbf{H}$ noktasına $(1,1,1)$ koordinatlarının karşılık geleceği aşikardır (Şekil 3.2). d üzerinde W nın komşuluğunda olmayan bu noktalara karşılık tutulan koordinatlar yardımıyla düzlemin tüm noktalarına, o noktanın d_∞ doğrusuna ve V noktasına göre konumu dikkate alınarak, üç başlık altında koordinat tayin edilecektir.



Şekil 3.2. Koordinatlamaya hazırlık

1.durum N $\nsim$ d_∞ ise:

$(x, x, 1) = NV \cap d$, $(y, y, 1) = NU \cap d$ olacak biçimde belirlenen **H** nın x ve y elemanları yardımıyla N noktasına $(x, y, 1)$ koordinatları karşılık tutulur (Şekil 3.2). Yani $N = (x, y, 1)$ olur. Özel olarak d üzerindeki E ve O noktalarının koordinatlarının yine $E = (1,1,1)$ ve $O = (0,0,1)$ olduğu görülür.

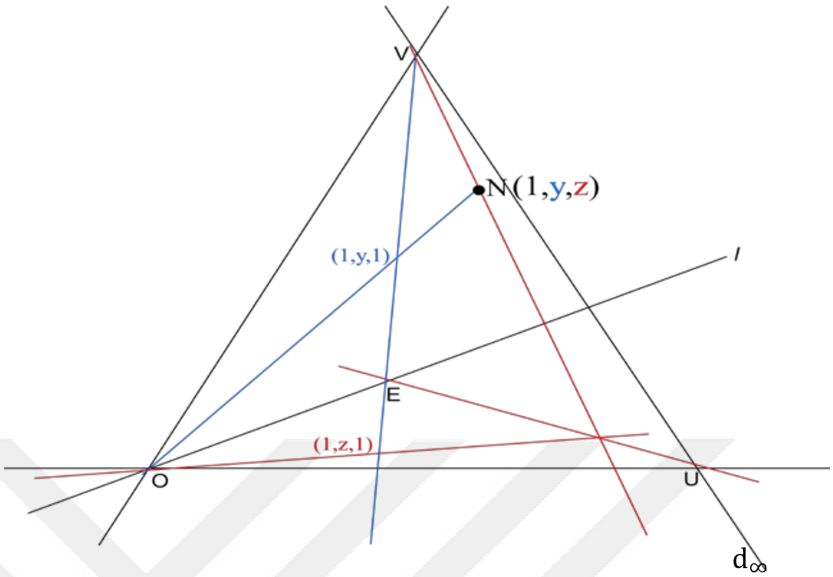


Şekil 3.3. UV=d_∞ doğrusuna yakın olmayan noktaların koordinatları

2.durum $N \sim d_\infty$, N $\nsim$ V ise:

Bu durumda $(1, z, 1) = (NV \cap UE)O \cap EV$, $(1, y, 1) = ON \cap EV$

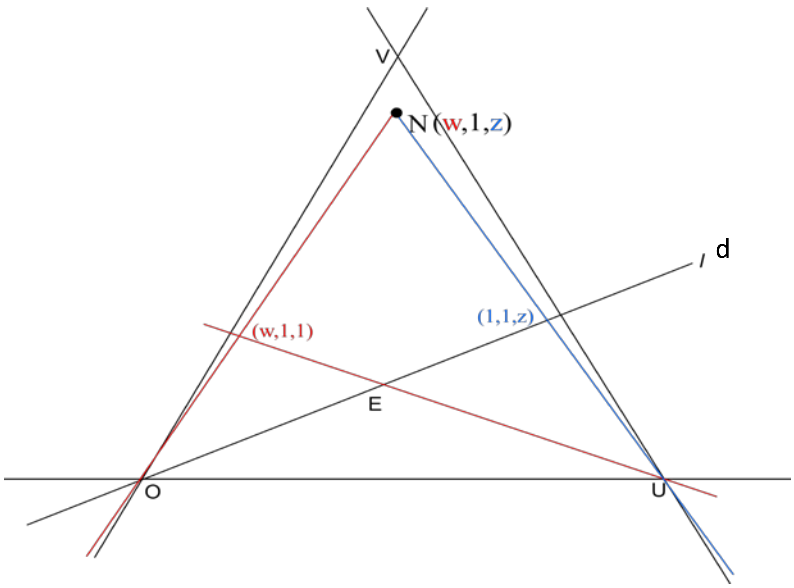
olacak biçimde belirlenen **H** nın y ve **I** nın z elemanları yardımıyla N noktasına $(1, y, z)$ koordinatları karşılık tutulur. Yani $N = (1, y, z)$ olur (Şekil 3.3).



Şekil 3.4. $UV = d_\infty$ doğrusuna yakın fakat V ye yakın olmayan noktaların koordinatı

3.durum N~V ise:

Bu durumda $(1,1,z) = NU \cap d$, $(w,1,1) = ON \cap UE$ olacak biçimdeki **I** nın z ve w elemanları yardımıyla N noktasına $(w, 1, z)$ koordinatları karşılık tutulur ve dolayısıyla $N = (w, 1, z)$ olur (Şekil 3.4).



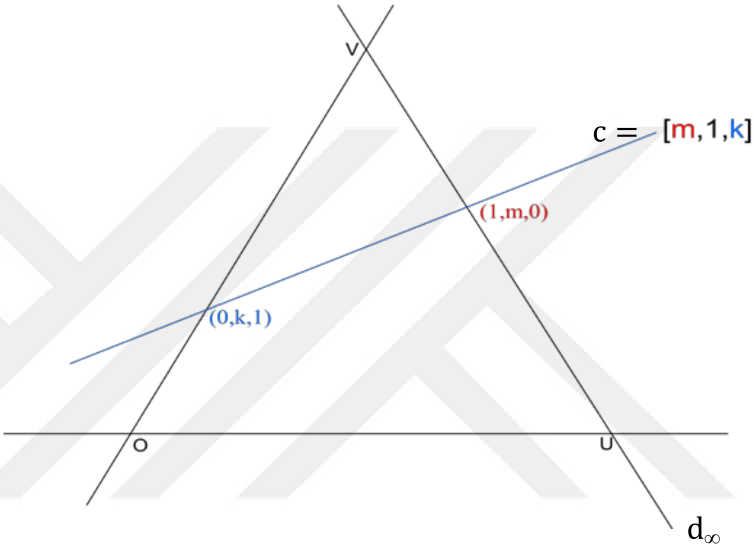
Şekil 3.5. V ye komşu noktaların koordinatları

3.2. Doğruların Koordinatlanması

Düzlemin herhangi bir c doğrusu, noktalarda olduğu gibi, üç farklı duruma ayrılarak koordinatlanır.

1.durum: $c \nsim V$ ise:

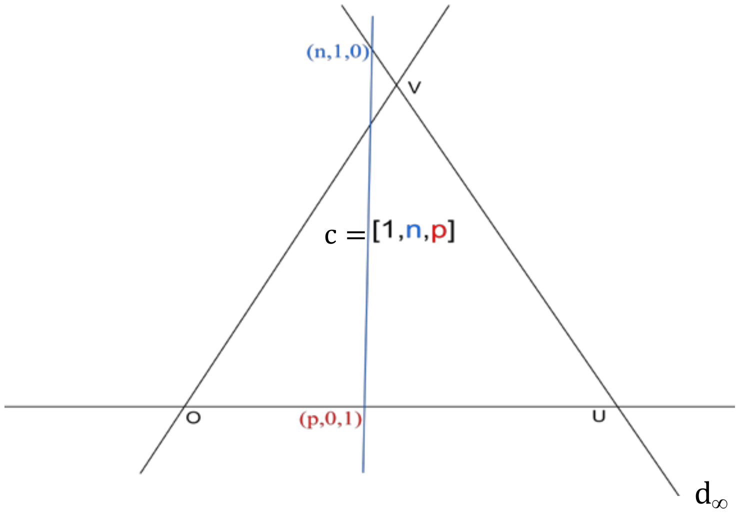
Bu durumda $c \cap d_\infty = (1, m, 0)$ ve $c \cap OV = (0, k, 1)$ iken $c = [m, 1, k]$ olarak koordinatlanır (Şekil 3.6).



Şekil 3.6. V ye yakın olmayan doğruların koordinatları

2.durum: $c \sim V$, $c \nsim d_\infty$ ise:

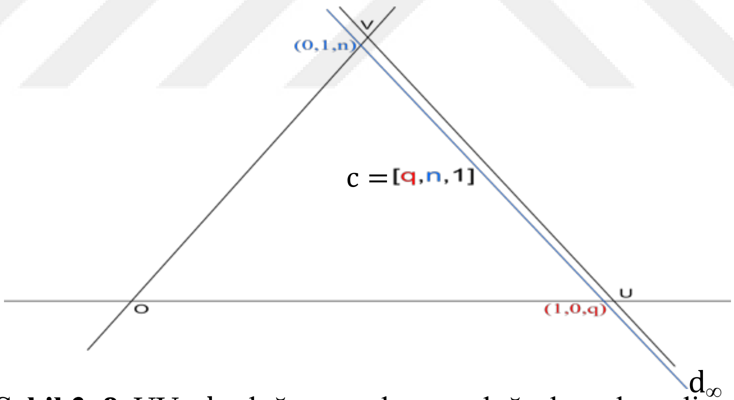
Bu durumda $c \sim V$ olduğundan $c \cap d_\infty$ arakesiti V nin komşuluğundadır ve bu nedenle koordinatları $n \in \mathbf{I}$ olmak üzere $c \cap d_\infty = (n, 1{,}0)$ biçimindedir. Aynı zamanda $c \nsim d_\infty$ olduğundan $c \cap OU$ arakesiti d_∞ doğrusuna yakın değildir. Bu nedenle $p \in \mathbf{H}$ olmak üzere $c \cap OU$ noktasının koordinatları $c \cap OU = (p, 0{,}1)$ biçimindedir. Burada belirlenen $n \in \mathbf{I}$ ve $p \in \mathbf{H}$ elemanları yardımıyla c doğrusunun koordinatları $c = [1, n, p]$ olarak alınır (Şekil 3.7).



Şekil 3.7. V ye yakın fakat UV=d_∞ doğrusuna komşu olmayan doğruların koordinatları

3.durum: $c \sim d_\infty$ ise:

Bu durumda $c \cap OU$ noktası d_∞ doğrusuna yakın ve $c \cap OV$ noktası V noktasına komşu olacağından $c \cap OU = (1,0,q)$ olacak biçimde $q \in \mathbf{I}$ ve $c \cap OV = (0,1,n)$ olacak biçimde $n \in \mathbf{I}$ elemanları vardır ve bu elemanlar yardımıyla c doğrusu $c = [q,n,1]$ olarak koordinatlanır (Şekil 3.8).



Şekil 3 .8. UV=d_∞ doğrusuna komşu doğruların koordinatları

Aşağıdaki teorem, verilen bir lokal halka yardımıyla bir PK düzlemin nasıl elde edilebileceğine dair bir yöntemi de içinde bulundurmaktadır. Bu teoremin ayrıntılı ispatı (Baker 1991) de yer almaktadır.

Teorem 3.2.1. **H** bir lokal halka ve **I** tersi olmayan elemanlarının oluşturduğu ideal olsun. Noktalar ve doğrular kümesi sırasıyla,

$$\mathcal{N} = \{(x,y,1) | x,y \in \mathbf{H}\} \cup \{(1,y,z) | y \in \mathbf{H}, z \in \mathbf{I}\} \cup \{(w,1,z) | w,z \in \mathbf{I}\}$$

$$\mathcal{D} = \{[m,1,k] | m,k \in \mathbf{H}\} \cup \{[1,n,p] | p \in \mathbf{H}, n \in \mathbf{I}\} \cup \{[q,n,1] | q,n \in \mathbf{I}\}$$

olarak tanımlansın. Üzerinde olma bağıntısı $\in$;

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$$

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

$$(x, y, 1) \notin [q, n, 1]$$

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

$$(1, y, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn$$

$$(1, y, z) \notin [1, n, p]$$

$$(w, 1, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$$

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

$$(w, 1, z) \notin [m, 1, k]$$

biçiminde ve $\sim$ komşuluk bağıntısı;

$$(1, x_2, x_3) \sim (1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I} \;, i = 2,3$$

$$(x_1, 1, x_3) \sim (y_1, 1, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I} \;, i = 1,3$$

$$(x_1, x_2, 1) \sim (y_1, y_2, 1) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I} \;, i = 1,2$$

olarak tanımlanır. Benzer biçimde,

$$[1, a_2, a_3] \sim [1, b_2, b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3$$

$$[a_1, 1, a_3] \sim [b_1, 1, b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3$$

$$[a_1, a_2, 1] \sim [b_1, b_2, 1] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda $\mathbf{S}=(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in, \sim)$ geometrik yapısı bir Projektif-Klingenberg düzlemdir. (Yukarıdaki teoremin ifadesinde geçen komşuluk bağıntısının daha akılda kalıcı olması için, daha kısa bir form olarak

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow x_i - y_i \in \mathbf{I} \;, i = 1,2,3$$

$$[a_1, a_2, a_3] \sim [b_1, b_2, b_3] \Leftrightarrow a_i - b_i \in \mathbf{I}, i = 1,2,3$$

biçimindeki gösterim kullanılır.).

PK- düzlemde doğrular ve noktalar, yukarıda ifade edildiği gibi, bileşenlerinden en az biri 1 olmak üzere sıralı üçlülerle gösterilir. Bu gösterimdeki 1 rakamının bulunduğu bileşen yardımıyla nokta ve doğrulara tiplere ayrılır ve $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ biçimindeki doğrulara *2. tipten*, $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ biçimindeki doğrulara *1.tipten*, $[\mathrm{q}, \mathrm{n}, 1]$ biçimindeki doğrulara *3. tipten doğrular*, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ biçimindeki noktalara *3. tipten*, $(1, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ biçimindeki noktalara *1. tipten*, $(\mathrm{w}, 1, \mathrm{z})$ biçimindeki noktalara *2. tipten noktalar* denir. Burada $\mathrm{q}, \mathrm{n}, \mathrm{w}, \mathrm{z} \in \mathbf{I}$ ve $\mathrm{m}, \mathrm{k}, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in$ **H** olduğu unutulmamalıdır. Teorem 3.2.1. de verilen üzerinde olma bağıntısının tanımı gereği aynı tip nokta ve doğrunun birbiri üzerinde olamayacağı aşikârdır.

4. $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\boldsymbol{\varepsilon}$ DUAL LOKAL HALKASI İLE KOORDİNATLANAN PK-DÜZLEM

Bu bölümde Tanım 2.1.7. de verilen **R**(ε) reel dual sayılar halkasından esinlenerek **R** yerine $\mathbb{Z}_4$ halkası alınarak elde edilecek $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ cebirsel yapısının bir lokal halka olduğu gösterilecek ve bu lokal halka yardımıyla koordinatlanan PK-düzlemin bazı sayısal özellikleri incelenecektir.

4.1. $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\boldsymbol{\varepsilon}$ Dual Lokal Halkası

Bu kısımda $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerine kurulan dual lokal halka tanıtılacaktır.

$\mathbb{Z}_4$={0,1,2,3} halkası yardımıyla tanımlanan

$$\mathbb{Z}_4(\varepsilon) = \mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon = \{a + b\varepsilon |\ a, b \ \in \ \mathbb{Z}_4\}$$

$$= \{0, 1, 2, 3, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon, 3 + \varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$$

kümesinin aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir lokal halka olduğu gösterilecektir.

$a + b\varepsilon$ ve $c + d\varepsilon \in \ \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için toplama işlemi,

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

biçiminde, çarpma işlemi ise

$$(a + b\varepsilon) \cdot (c + d\varepsilon) = (ac) + (ad + bc)\varepsilon$$

biçiminde tanımlanır.

$a + b\varepsilon \in \ \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ elemanı için a ya ***gerçek kısım***, b ye ise ***sanal kısım*** denir.

$(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +)$ yapısının bir birimli halka olduğu aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir.

İlk olarak $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +)$ cebirsel yapısının değişmeli grup olduğu gösterilecektir.

i) $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +)$ cebirsel yapısının kapalılık özelliğini sağlandığı aşağıdaki Çizelge 4.1 den görülür.

Çizelge 4.1. $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +)$ cebirsel yapısının kapalılık özelliği

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**ε**	**2ε**	**3ε**	**1+ε**	**1+2ε**	**1+3ε**	**2+ε**	**2+2ε**	**2+3ε**	**3+ε**	**3+2ε**	**3+3ε**
0	0	1	2	3	ε	2ε	3ε	1+ε	1+2ε	1+3ε	2+ε	2+2ε	2+3ε	3+ε	3+2ε	3+3ε
1	1	2	3	0	1+ε	1+2ε	1+3ε	2+ε	2+2ε	2+3ε	3+ε	3+2ε	3+3ε	ε	2ε	3ε
2	2	3	0	1	2+ε	2+2ε	2+3ε	3+ε	3+2ε	3+3ε	ε	2ε	3ε	1+ε	1+2ε	1+3ε
3	3	0	1	2	3+ε	3+2ε	3+3ε	ε	2ε	3ε	1+ε	1+2ε	1+3ε	2+ε	2+2ε	2+3ε
ε	ε	1+ ε	2+ε	3+ε	2ε	3ε	0	1+2ε	1+3ε	1	2+2ε	2+3ε	2	3+2ε	3+3ε	3
2ε	2ε	1+2ε	2+2ε	3+2ε	3ε	0	ε	1+3ε	1	1+ε	2+3ε	2	2+ε	3+3ε	3	3+ε
3ε	3ε	1+3ε	2+3ε	3+3ε	0	ε	2ε	1	1+ε	1+2ε	2	2+ε	2+2ε	3	3+ε	3+2ε
1+ε	1+ε	2+ε	3+ε	ε	1+2ε	1+3ε	1	2+2ε	2+3ε	2	3+2ε	3+3ε	3	2ε	3ε	0
1+2ε	1+2ε	2+2ε	3+2ε	2ε	1+3ε	1	1+ε	2+3ε	2	2+ε	3+3ε	3	3+ε	3ε	0	ε
1+3ε	1+3ε	2+3ε	3+3ε	3+ε	1	1+ε	1+2ε	2	2+ε	2+2ε	3	3+ε	3+2ε	0	ε	2ε
2+ε	2+ ε	3+ε	ε	3ε	2+2ε	2+3ε	2	3+2ε	3+3ε	3	2ε	3ε	0	2+2ε	1+3ε	2
2+2ε	2+2ε	3+2ε	2ε	1+2ε	2+3ε	2	2+ε	3+3ε	3	3+ε	3ε	0	ε	1+3ε	1	1+ε
2+3ε	2+3ε	3+3ε	3ε	1+3ε	2	2+ε	2+2ε	3	3+ε	3+2ε	0	ε	2ε	1	1+ε	1+2ε
3+ε	3+ ε	ε	1+ε	2+ε	3+2ε	3+3ε	3	2ε	3ε	0	2+2ε	1+3ε	1	2+2ε	2+3ε	2
3+2ε	3+2ε	2ε	1+2ε	2+2ε	3+3ε	3	3+ε	3ε	0	ε	1+3ε	1	1+ε	2+3ε	2	2+ε
3+3ε	3+3ε	3ε	1+3ε	2+3ε	3	3+ε	3+2ε	0	ε	2ε	2	1+ε	1+2ε	2	2+ε	2+2ε

$\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesinde toplama işlemi tablosu gösterilmiştir.

ii) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_4$ olmak üzere,

$$\big((a_1 + b_1\varepsilon) + (a_2 + b_2\varepsilon)\big) + (a_3 + b_3\varepsilon) = \big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\varepsilon\big) + (a_3 + b_3\varepsilon)$$

$$= \big((a_1 + a_2) + a_3\big) + ((b_1 + b_2) + b_3)\varepsilon$$

olur. $\mathbb{Z}_4$ ün birleşme özelliği kullanılarak

$$\big((a_1 + a_2) + a_3\big) + \big((b_1 + b_2) + b_3\big)\varepsilon = (a_1 + (a_2 + a_3) + (b_1 + (b_2 + b_3))\varepsilon$$

yazılır. $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ daki toplama işlemi gereğince son eşitliğin sağ tarafının

$$(a_1 + b_1\varepsilon) + ((a_2 + a_3) + (b_1 + b_3)\varepsilon)$$

olduğu elde edilir. Tekrar $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ daki toplama işlemi tanımı parantez içine uygulandığında yukarıdaki ifadenin

$$(a_1 + b_1\varepsilon) + ((a_2 + b_2\varepsilon) + (a_3 + b_3\varepsilon))$$

olduğu elde edilir ki bu

$$\big((a_1 + b_1\varepsilon) + (a_2 + b_2\varepsilon)\big) + (a_3 + b_3\varepsilon) = (a_1 + b_1\varepsilon) + ((a_2 + b_2\varepsilon) + (a_3 + b_3\varepsilon))$$

eşitliğinin geçerli olduğunu, yani $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da $+$ işleminin birleşmeli olduğunu gösterir.

iii) $\mathbb{Z}_4$ halkasının etkisiz elemanı olan 0 elemanı yardımıyla bulunan $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ un $0 + 0\varepsilon$ elemanı kısaca 0 ile gösterilir. 0 elemanının $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ un etkisiz elemanı olduğu aşağıdaki işlemlerde gösterilmiştir:

$$0 + (a + b\varepsilon) = (0 + 0\varepsilon) + (a + b\varepsilon) = (0 + a) + (0 + b)\varepsilon = a + b\varepsilon$$

$$(a + b\varepsilon) + 0 = (a + b\varepsilon) + (0 + 0\varepsilon) = (a + 0) + (b + 0)\varepsilon = a + b\varepsilon$$

iv) $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ un tanımı ve $\mathbb{Z}_4$ ün halka olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}(a + b\varepsilon) \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon) &\Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}_4\\ &\Rightarrow -a, -b \in \mathbb{Z}_4\\ &\Rightarrow -a - b\varepsilon \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu durumda

$$(a + b\varepsilon) + (-a - b\varepsilon) = (a - a) + (b - b)\varepsilon = 0 + 0\varepsilon = 0$$

$$(-a - b\varepsilon) + (a + b\varepsilon) = (-a + a) + (-b + b)\varepsilon = 0 + 0\varepsilon = 0$$

eşitliklerinin geçerli olduğu aşikârdır. Bu $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesindeki her $a + b\varepsilon$ elemanın tersinin yine $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesindeki $-a - b\varepsilon$ elemanı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesindeki her elemanın toplama işlemine göre tersi vardır.

v) $(a + b\varepsilon), (c + d\varepsilon) \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ olmak üzere

$$(a + b\varepsilon) + (c + d\varepsilon) = (a + c) + (b + d)\varepsilon$$

olur, $\mathbb{Z}_4$ halkasında $+$ işleminin değişme özelliği kullanılarak,

$$(a + c) + (b + d)\varepsilon = (c + a) + (d + b)\varepsilon$$

olduğu elde edilir. $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ daki toplama işlemi tanımı gereğince son eşitliğin sağ tarafının

$$(c + d\varepsilon) + (a + b\varepsilon)$$

olduğu elde edilir. Bu nedenle $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da $+$ işlemi değişme özelliğini sağlar. Dolayısıyla $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +)$ değişmeli gruptur.

$\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da $\cdot$ ile gösterilen çarpma işleminin özelliklerini incelemek için öncelikle $\cdot$ için işlem çizelgesini oluşturalım.

Çizelge 4.2. $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon),\cdot)$ cebirsel yapısının kapalılık özelliği

·	**0**	**1**	**2**	**3**	**ε**	**2ε**	**3ε**	**1+ε**	**1+2ε**	**1+3ε**	**2+ε**	**2+2ε**	**2+3ε**	**3+ε**	**3+2ε**	**3+3ε**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	ε	2ε	3ε	1+ε	1+2ε	1+3ε	2+ε	2+2ε	2+3ε	3+ε	3+2ε	3+3ε
2	0	2	0	2	2ε	0	2ε	2+2ε	2	2+2ε	2ε	0	2ε	2+2ε	2	2+2ε
3	0	3	2	1	3ε	2ε	ε	3+3ε	3+2ε	3+ε	2+3ε	2+2ε	2+ε	1+3ε	1+2ε	1+ε
ε	0	ε	2ε	3ε	0	0	0	ε	ε	ε	2ε	2ε	2ε	3ε	3ε	3ε
2ε	0	2ε	0	2ε	0	0	0	2ε	2ε	2ε	0	0	0	2ε	2ε	2ε
3ε	0	3ε	2ε	ε	0	0	0	3ε	3ε	3ε	2ε	2ε	2ε	ε	ε	ε
1+ε	0	1+ε	2+2ε	3+3ε	ε	2ε	3ε	1+2ε	1+3ε	1	2+3ε	2	2+ε	3	3+ε	3+2ε
1+2ε	0	1+2ε	2	3+2ε	ε	2ε	3ε	1+3ε	1	1+ε	2+ε	2+2ε	2+3ε	3+3ε	3	3+ε
1+3ε	0	1+3ε	2+2ε	3+ε	ε	2ε	3ε	1	1+ε	1+2ε	2+3ε	2	2+ε	3+2ε	3+3ε	3
2+ε	0	2+ε	2ε	2+3ε	2ε	0	2ε	2+3ε	2+ε	2+3ε	0	2ε	0	2+ε	2+3ε	2+ε
2+2ε	0	2+2ε	0	2+2ε	2ε	0	2ε	2	2+2ε	2	2ε	0	2ε	2	2+2ε	2
2+3ε	0	2+3ε	2ε	2+ε	2ε	0	2ε	2+ε	2+3ε	2+ε	0	2ε	0	2+3ε	2+ε	2+3ε
3+ε	0	3+ε	2+2ε	1+3ε	3ε	2ε	ε	3	3+3ε	3+2ε	2+ε	2	2+3ε	1+2ε	1+ε	1
3+2ε	0	3+2ε	2	1+2ε	3ε	2ε	ε	3+ε	3	3+3ε	2+3ε	2+2ε	2+ε	1+ε	1	1+3ε
3+3ε	0	3+3ε	2+2ε	1+ε	3ε	2ε	ε	3+2ε	3+ε	3	2+ε	2	2+3ε	1	1+3ε	1+2ε

$\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesinde çarpma işleminin tablosu gösterilmiştir.

Şimdi $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesi üzerinde $\cdot$ işlemi için birleşme özelliğinin ve $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine ve dağılma özelliklerinin sağlandığı gösterilecektir:

Her $(a_1 + b_1\varepsilon), (a_2 + b_2\varepsilon), (a_3 + b_3\varepsilon) \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ elemanı için $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_4$ olup $\mathbb{Z}_4$ ün halka olmasından faydanılarak;

$(a_1 + b_1\varepsilon) \cdot \big((a_2 + b_2\varepsilon) \cdot (a_3 + b_3\varepsilon)\big)$

$$= (a_1 + b_1\varepsilon) \cdot (a_2.a_3 + (a_2.b_3 + b_2.a_3)\varepsilon)$$

$$= \big(a_1(a_2.a_3)\big) + (a_1(a_2.b_3 + b_2.a_3) + b_1(a_2.a_3))\varepsilon$$

$$= (a_1(a_2.a_3)) + ((a_1(a_2.b_3) + a_1(b_2.a_3)) + b_1(a_2.a_3))\varepsilon$$

$$= ((a_1.a_2)a_3) + ((a_1.a_2)b_3 + (a_1.b_2)a_3 + (b_1.a_2)a_3)\varepsilon$$

$$= ((a_1.a_2)a_3) + (((a_1.b_2 + b_1.a_2)a_3) + (a_1.a_2)b_3)\varepsilon$$

$$= ((a_1.a_2) + (a_1.b_2 + b_1.a_2)\varepsilon) \cdot (a_3 + b_3\varepsilon)$$

$$= ((a_1 + b_1\varepsilon) \cdot (a_2 + b_2\varepsilon)) \cdot (a_3 + b_3\varepsilon)$$

olduğu elde edilir. Bu $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da çarpma işleminin birleşme özelliğini sağladığını gösterir. Benzer düşünce ile $\mathbb{Z}_4$ ün halka özelliklerini sağladığı kullanılarak,

her $(a_1 + b_1\varepsilon), (a_2 + b_2\varepsilon), (a_3 + b_3\varepsilon) \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ elemanı için;

$(a_1 + b_1\varepsilon).\big((a_2 + b_2\varepsilon) + (a_3 + b_3\varepsilon)\big)$

$$= (a_1 + b_1\varepsilon).((a_2 + a_3) + (b_1 + b_3)\varepsilon)$$

$$= \big(a_1.(a_2 + a_3)\big) + (a_1.(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))\varepsilon$$

$$= (a_1.a_2 + a_1.a_3) + (a_1.b_2 + a_1.b_3 + b_1.a_2 + b_1.a_3)\varepsilon$$

$$= (a_1.a_2 + (a_1.b_2 + b_1.a_2)\varepsilon) + (a_1.a_3 + (a_1.b_3 + b_1.a_3)\varepsilon)$$

olduğu, yani çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağ dağılma özelliğinin sağlandığı görülür.

$\mathbb{Z}_4$ ün özdeşlik elemanı olan 1 ve etkisiz elemanı olan 0 elemanları yardımıyla bulunan $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için $1 + 0\varepsilon$ elemanı kısaca 1 ile gösterilir ve her $a + b\varepsilon \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için

$$(1 + 0\varepsilon) \cdot (a + b\varepsilon) = 1.a + 1 \cdot b\varepsilon = a + b\varepsilon$$

$$(a + b\varepsilon) \cdot (1 + 0\varepsilon) = a.1 + b\varepsilon \cdot 1 = a + b\varepsilon$$

olduğundan $1+0\varepsilon=1$ elemanı $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için özdeşlik elemandır.

Birimli halka şartlarının tümünün sağlandığı yukarıda gösterildiğinden $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon),+,\cdot)$ yapısı birimli halkadır. Üstelik,

$$\begin{aligned}(a+b\varepsilon)\cdot(c+d\varepsilon) &= ac+(ad+bc)\varepsilon \\ &= ca+(da+cb)\varepsilon \\ &= ca+(cb+da)\varepsilon \\ &= (c+d\varepsilon)\cdot(a+b\varepsilon)\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da $\cdot$ işlemi değişmelidir.

Şimdi $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ birimli halkasının tersi olmayan elemanlarını bulup, bu elemanların oluşturduğu kümenin ideal olduğu gösterilecektir:

Çizelge 4.2. den $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da tersi olmayan elemanlarının kümesinin $\mathbb{I}=\{0,2,\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğu görülür. Yani $\mathbb{I}$, gerçek kısmı 0 ya da 2 olan $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ un tüm elemanlarının kümesidir. $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ üzerinden indirgenmiş işlemlerle birlikte $\mathbb{I}$ nın bir ideal olduğunu göstermek için öncelikle $(\mathbb{I},+,\cdot)$ cebirsel yapısının halka olduğu gösterilecektir.

Çizelge 4.3. $(\mathbb{I},+)$ cebirsel yapısının kapalılık özelliği

+	**0**	**2**	**ε**	**2ε**	**3ε**	**2+ε**	**2+2ε**	**2+3ε**
0	0	2	ε	2ε	3ε	2+ ε	2+2ε	2+3ε
2	2	0	2+ ε	2+2ε	2+3ε	ε	2ε	3ε
ε	ε	2+ ε	2ε	3ε	0	2+2ε	2+3ε	2
2ε	2ε	2+2ε	3ε	0	ε	2+3ε	2	2+ ε
3ε	3ε	2+3ε	0	ε	2ε	2	2+ ε	2+2ε
2+ ε	2+ε	ε	2+2ε	2+3ε	2	2ε	3 ε	0
2+2 ε	2+2ε	2ε	2+3ε	2	2+ ε	3ε	0	ε
2+3 ε	2+3ε	3ε	2	2+ε	2+2ε	0	ε	2ε

Kapalılık özelliğinin sağlandığı yukarıdaki çizelgede açık bir şekilde görülmektedir.

Birleşme özelliği, etkisiz eleman özelliği ve dağılma özelliği, $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için sağlandığından $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ kümesinin alt kümesi olan $\mathbb{I}$ için de sağlanacaktır.

$\mathbb{I}$ nın $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ halkasının bir alt halkası olduğunu göstermek için Tanım 2.1.3 gereği, her $x, y \in \mathbb{I}$ için $x - y \in \mathbb{I}$ ve $x \cdot y \in \mathbb{I}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için aşağıdaki çizelgeler kullanılacaktır.

Çizelge 4.4. $\mathbb{I}$ halkasından alınan herhangi iki elemanının farkının $\mathbb{I}$ nın elamanı olması

−	**0**	**2**	**ε**	**2ε**	**3ε**	**2+ε**	**2+2ε**	**2+3ε**
0	0	2	3ε	2ε	ε	2+3ε	2+2ε	2+ε
2	2	0	2+3ε	2+2ε	2+ε	3ε	2ε	ε
ε	ε	2+ε	0	3ε	2ε	2	2+3ε	2+2ε
2ε	2ε	2+2ε	ε	0	3ε	2+ ε	2	2+ε
3ε	3ε	2+3ε	2ε	ε	0	2+2ε	2+ε	2
2+ε	2+ε	ε	2	2+3ε	2+2ε	0	3ε	2ε
2+2ε	2+2ε	2ε	2+ε	2	2+3ε	ε	0	3ε
2+3ε	2+3ε	3ε	2+2ε	2+ε	2	2ε	ε	0

Çizelge 4.5. $\mathbb{I}$ halkasından alınan herhangi iki elemanının çarpımının $\mathbb{I}$ nın elamanı olması

·	**0**	**2**	**ε**	**2ε**	**3ε**	**2+ε**	**2+2ε**	**2+3ε**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	2ε	0	2ε	2ε	0	2ε
ε	0	2ε	0	0	0	2ε	2ε	2ε
2ε	0	0	0	0	0	0	0	0
3ε	0	2ε	0	0	0	2ε	2ε	2ε
2+ε	0	2ε	2ε	0	2ε	0	2ε	0
2+2ε	0	0	2ε	0	2ε	2ε	0	2ε
2+3ε	0	2ε	2ε	0	2ε	0	2ε	0

Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5, $-$ ve $\cdot$ işlemlerinin $\mathbb{I}$ da kapalı olduğunu, yani her $x, y \in \mathbb{I}$ için $x - y \in \mathbb{I}$ ve $x \cdot y \in \mathbb{I}$ olduğunu, gösterir. Bu nedenle, Tanım 2.1.3 gereği $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$

halkasının bir alt halkasıdır. $\mathbb{I}$ nın ideal olduğunu göstermek için geriye her $a + b\varepsilon \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için

$$(a + b\varepsilon)\mathbb{I} \subset \mathbb{I} \text{ ve } \mathbb{I}(a + b\varepsilon) \subset \mathbb{I}$$

olduğu göstermek kalır. Fakat, $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ da çarpma işlemi değişmeli olduğundan sadece $(a + b\varepsilon)\mathbb{I} \subset \mathbb{I}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$(a + b\varepsilon)\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$$

$$= \{0, a\varepsilon, 2a\varepsilon, 3a\varepsilon, 2a + 2b\varepsilon, 2a + (2b + a)\varepsilon, 2a + (2a + 2b)\varepsilon, 2a + (3a + 2b)\varepsilon\} \subset \mathbb{I}$$

olup ve

$$2a = \begin{cases} 0, & a = 0 \text{ iken} \\ 2, & a = 1 \text{ iken} \\ 0, & a = 2 \text{ iken} \\ 2, & a = 3 \text{ iken} \end{cases}$$

olduğu göz önüne alındığında $(a + b\varepsilon)\mathbb{I}$ nın elemanlarının gerçek kısmının 0 ya da 2 olacağı elde edilir. Gerçek kısmı 0 ya da 2 olan tüm elemanlar $\mathbb{I}$ nın elamanı olduğundan her $a + b\varepsilon \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ için $(a + b\varepsilon)\mathbb{I} \subset \mathbb{I}$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylelikle $\mathbb{I}$ nın $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ nın bir ideali olduğu gösterilmiş olur. Bu tez boyunca $\mathbb{I}$ ile $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ nun ideali olan $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ kümesi gösterilecektir. $\mathbb{I}$ bir ideal olduğundan, $(\mathbb{Z}_4(\varepsilon), +, \cdot)$ bir lokal halkadır ve bu lokal halka tez boyunca $\mathbb{Z}_4$ ***üzerinde kurulan dual lokal halka*** olarak isimlendirilecektir.

Aşağıda verilecek yardımcı teoremde ilerideki pek çok işlemde kullanılacak bir özellik yer almaktadır.

Yardımcı Teorem 4.1.1 $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ lokal halkası ve onun $\mathbb{I}$ ideali için

$$x \in \mathbb{I} \Rightarrow 1 - x \notin \mathbb{I}$$

özelliği geçerlidir.

İspat. $x = a + b\varepsilon \in \mathbb{I}$ ise $a + b\varepsilon$ nun gerçek kısmı, yani a, 0 veya 2 olmak zorundadır. Bu nedenle

$$\mathrm{x} \in \mathbb{I} \Longrightarrow \mathrm{x} = 0 + \mathrm{b}\varepsilon = \mathrm{b}\varepsilon \text{ veya } \quad \mathrm{x} = 2 + \mathrm{b}\varepsilon$$

olması gerektiği bulunur. Bu durumda x= bε iken

$$1 - \mathrm{x} = 1 - (0 + \mathrm{b}\varepsilon) = 1 - \mathrm{b}\varepsilon \notin \mathbb{I}$$

ve $\mathrm{x} = 2 + \mathrm{b}\varepsilon$ iken

$$1 - \mathrm{x} = 1 - (2 + \mathrm{b}\varepsilon) = -1 - \mathrm{b}\varepsilon = 3 - \mathrm{b}\varepsilon \notin \mathbb{I}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.□

Sonuç 4.1.2. Farklı tipten noktalar ve farklı tipten doğrular aynı komşulukta olamaz.

İspat. Nokta ve doğruların gösterimleri ve komşuluk bağıntı tanımları benzer olduğundan ispat sadece noktalar için yapılacaktır.

$(1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ noktası için $\mathrm{x}_3 \in \mathbb{I}$ ve $(\mathrm{y}_1, 1, \mathrm{y}_3)$ noktası için $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_3 \in \mathbb{I}$ olacağı göz önüne alındığında

$1 - \mathrm{y}_1 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ ile $(\mathrm{y}_1, 1, \mathrm{y}_3)$ aynı komşulukta değildir.

$\mathrm{x}_3 - 1 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ ile $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, 1)$ aynı komşulukta değildir.

$\mathrm{y}_1 - 1 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(\mathrm{y}_1, 1, \mathrm{y}_3)$ ile $(1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ aynı komşulukta değildir.

$\mathrm{y}_3 - 1 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(\mathrm{y}_1, 1, \mathrm{y}_3)$ ile $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, 1)$ aynı komşulukta değildir.

$1 - \mathrm{x}_3 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, 1)$ ile $(1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3)$ aynı komşulukta değildir.

$1 - \mathrm{y}_3 \notin \mathbb{I}$ olduğundan $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, 1)$ ile $(\mathrm{y}_1, 1, \mathrm{y}_3)$ aynı komşulukta değildir.

Böylece farklı tipten noktaların aynı komşulukta olamayacağı gösterilmiş olur.

4.2. $\mathbb{Z}_4(\boldsymbol{\varepsilon})$ ile Koordinatlanan PK-düzlem.

Bu kısımda kısaca $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile gösterilen $\mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ dual lokal halkası yardımı ile koordinatlanan PK-düzlemin noktaları, doğruları, noktanın doğru üzerinde olması ve komşuluk bağıntısı Teorem 3.2.1 yardımıyla belirlenecek ve bunlar hakkında bazı özellikler verilecektir. $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile koordinatlanan $(\mathbf{N},\mathbf{D},\in,\sim)$ PK düzlemi kısaca $\mathrm{PK}_2(\mathbb{Z}_4(\varepsilon))$ biçiminde gösterilecektir.

Teorem 3.2.1 de kullanılan **H** lokal halkası yerine $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ lokal halkası alındığında elde edilen PK-düzlemin noktalar kümesi;

$$\mathbf{N} = \{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)\} \cup \{\{(1,y,z) \mid y \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon), z \in \mathbb{I}\}\} \cup \{\{(w,1,z) \mid w,z \in \mathbb{I}\}\}$$

doğrular kümesi;

$$\mathbf{D} = \{[m,1,k] \mid m,k \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)\} \cup \{[1,n,p] \mid p \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon), n \in \mathbb{I}\} \cup \{[q,n,1] \mid q,n \in \mathbb{I}\}$$

olur. Üzerinde olma ve komşuluk bağıntıları da Teorem 3.2.1 deki gibi tanımlanır ve böylece $\mathrm{PK}_2(\mathbb{Z}_4(\varepsilon)) = (\mathbf{N},\mathbf{D},\in,\sim)$ PK düzlemi belirlenmiş olur.

$|\mathbb{Z}_4(\varepsilon)|$ =16 , $|\mathbb{I}|$ =8 olduğu kullanılarak

$$|\mathbf{N}| = |\{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)\}| + |\{(1,y,z) \mid y \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon), z \in \mathbb{I}\}| + |\{(w,1,z) \mid w,z \in \mathbb{I}\}|$$

$$= 16^2 + 16 \cdot 8 + 8^2 = 448$$

ve

$$|\mathbf{D}| = |\{[m,1,k] \mid m,k \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)\}| + |\{[1,n,p] \mid p \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon), n \in \mathbb{I}\}| + |\{[q,n,1] \mid q,n \in \mathbb{I}\}|$$

$$= 16^2 + 16 \cdot 8 + 8^2 = 448$$

olduğu, yani $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile koordinatlanan projektif düzlemde 448 noktanın ve 448 doğrunun var olduğu bulunur. 448 noktanın tümü ve 448 doğrunun tümü için üzerinde olma ve komşuluk bağıntısını tek tek incelemek zaman alıcıdır. Bu nedenle aşağıda sırasıyla $(\varepsilon, 0,1)$ noktasının komşuluğundaki tüm noktaların, [0,1,0] doğrusunun komşuluğundaki tüm doğruların, $(0, \varepsilon, 1)$, $(1,0,0,)$, $(0,1,2\varepsilon)$ noktalarının her birinden geçen tüm doğrular ve $[1+\varepsilon, 1, 2+3\varepsilon]$, $[1,0,0]$, $[0,0,1]$ doğrularının her biri üzerindeki noktaların belirlendiği örnekler verilmiştir. Böylelikle tüm nokta ve doğru tipleri için birer örnek incelenmiştir.

Örnek 4.2.1. $(\varepsilon, 0,1)$ noktasının komşuluğundaki noktaları araştıralım. Sonuç 4.1.2 gereği bu noktalarının komşuluğundaki tüm noktalar 3. tipten olacaktır.

$$(\varepsilon, 0,1) \sim (a, b, 1) \Leftrightarrow \varepsilon - a \in \mathbb{I}, 0 - b \in \mathbb{I}$$

olmalıdır.

$$\varepsilon - a \in \mathbb{I} \Leftrightarrow a = a_1 + a_2\varepsilon, a_1 \in \{0,2\}, a_2 \in \mathbb{Z}_4$$

olduğundan a nın alabileceği değerler $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olur.

$$0 - b \in \mathbb{I} \Leftrightarrow b \in \mathbb{I}$$

olduğundan b nin alabileceği değerlerin de $\mathbb{I}$ daki tüm değerler olduğu elde edilir. Bu bilgiler ışığında $(\varepsilon, 0,1)$ noktasının komşuluğundaki noktaların aşağıdaki noktalar olduğu belirlenir:

$(0,0,1)$, $(0, \varepsilon, 1)$, $(0,2\varepsilon, 1)$, $(0,3\varepsilon, 1)$, $(0,2,1)$, $(0,2+\varepsilon, 1)$, $(0,2+2\varepsilon, 1)$, $(0,2+3\varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 0,1)$, $(\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 2,1)$, $(\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 0,1)$, $(2\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 2,1)$, $(2\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 0,1)$, $(3\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 2,1)$, $(3\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(3\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$, $(2,0,1)$, $(2, \varepsilon, 1)$, $(2,2\varepsilon, 1)$, $(2,3\varepsilon, 1)$, $(2,2,1)$, $(2,2+\varepsilon, 1)$, $(2,2+2\varepsilon, 1)$, $(2,2+3\varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 0,1)$, $(2+\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 2,1)$, $(2+\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(2+\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 0,1)$, $(2+2\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 2,1)$, $(2+2\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$, $(2+3\varepsilon, 0,1)$, $(2+3\varepsilon, \varepsilon, 1)$, $(2+3\varepsilon, 2\varepsilon, 1)$,$(2+3\varepsilon, 3\varepsilon, 1)$, $(2+3\varepsilon, 2,1)$, $(2+3\varepsilon, 2+\varepsilon, 1)$, $(2+3\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1)$, $(2+3\varepsilon, 2+3\varepsilon, 1)$

Bu bölümde verilecek olan Teorem 4.2.9 dan sonra (ε,0,1) noktasının komşuluğunda yukarıda verilenlerden başka bir nokta olmadığı dolayısıyla komşuluğunun sadece yukarıda verilen 64 noktadan ibaret olduğu ispatlanacaktır.

Örnek 4.2.2. [0,1,0] doğrusunun komşuluğundaki doğruları araştıralım. [0,1,0] doğrusu 2. tipten olduğundan Sonuç 4.1.2 gereği bu doğrunun komşuluğundaki doğrular 2. tiptendir. Bu durumda

$$[0,1,0] \sim [a, 1, c] \Leftrightarrow 0 - a \in \mathbb{I}\,, 0 - c \in \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow a \in \mathbb{I}, c \in \mathbb{I}$$

olduğu bulunur. $|\mathbb{I}| = 8$ olduğundan a ve c nin sekizer farklı değer alabileceği ve bu nedenle $[0,1,0]$ doğrusunun komşuluğundaki $[a, 1, c]$ doğrularının $8.8 = 64$ farklı doğru olabileceği belirlenir. Bu 64 doğrunun tümü aşağıda verilmiştir.

$[0,1,0]$, $[0,1,\varepsilon]$, $[0,1,2\varepsilon]$, $[0,1,3\varepsilon]$, $[0,1,2]$, $[0,1,2+\varepsilon]$, $[0,1,2+2\varepsilon]$, $[0,1,2+3\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,0]$, $[\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,2]$, $[\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,0]$, $[2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,2]$, $[2\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,0]$, $[3\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,2]$, $[3\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$,$[2,1,0]$, $[2,1,\varepsilon]$, $[2,1,2\varepsilon]$, $[2,1,3\varepsilon]$, $[2,1,2]$, $[2,1,2+\varepsilon]$, $[2,1,2+2\varepsilon]$, $[2,1,2+3\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,0]$, $[2+\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,2]$, $[2+\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,0]$, $[2+2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,2]$, $[2+2\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,0]$, $[2+3\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,2\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,3\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,2]$, $[2+3\varepsilon,1,2+\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,2+2\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,2+3\varepsilon]$

Teorem 4.2.9 dan sonra genel bir PK-düzlemde bir doğrunun komşuluğundaki doğruların sayısı ile bir noktanın komşuluğundaki noktaların sayısının birbirine eşit olduğu ispatlanacak ve bu nedenle bu örnekte ki $[0,1,0]$ doğrusunun komşuluğundaki doğruların sayısının 64 olması gerektiği bir kez daha vurgulanacaktır. Dolayısıyla $[0,1,0]$ doğrusunun komşuluğunda yukarıda verilen 64 doğrudan başka hiçbir doğru bulunmamaktadır.

Bundan sonraki üç örnekte noktalardan geçen doğruların bulunması ile ilgili her üç tip nokta için örnekler verilecektir.

Örnek 4.2.3. $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen doğruları araştıralım. Aynı tip noktanın aynı tip doğru üzerinde olmayacağı Teorem3.2.1 den dolayı aşikardır.

$$(0, \varepsilon, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow \varepsilon = k$$

olduğundan $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen 2. tip doğrular için 3. bileşen ε olmalıdır. Yani $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen doğrular $m \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ olmak üzere $[m, 1, \varepsilon]$ biçimindedir. Bu nedenle m yerine $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ halkasının 16 elemanın her biri yazılarak bulunan,

$[0,1,\varepsilon]$, $[\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[3\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2,1,\varepsilon]$, $[2+\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2+2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[2+3\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[1,1,\varepsilon]$, $[3,1,\varepsilon]$, $[1+\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[1+2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[1+3\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[3+\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[3+2\varepsilon,1,\varepsilon]$, $[3+3\varepsilon,1,\varepsilon]$

doğruları $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen 2. tip doğruların tümüdür.

$$(0, \varepsilon, 1) \in [1, n, p] \iff n\varepsilon = p$$

olduğu kullanılarak $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen 1. tip doğruların $n \in \mathbb{I}$ olmak üzere $[1, n, n\varepsilon]$ biçiminde olduğu elde edilir. Bu nedenle $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçen 1. tip doğruların tümü

$$[1,0,0], [1, \varepsilon, 0], [1,2\varepsilon, 0], [1,3\varepsilon, 0], [1,2,2\varepsilon], [1,2 + \varepsilon, 2\varepsilon], [1,2 + 2\varepsilon, 2\varepsilon], [1,2 + 3\varepsilon, 2\varepsilon]$$

olarak bulunur. O halde $(0,\varepsilon, 1)$ dan geçen 2. tipten 16, birinci tipten 8 olmak üzere, toplam 24 doğru vardır.

Örnek 4.2.4. (1,0,0) noktasından geçen doğruları araştıralım. (1,0,0) noktası 1.tip nokta olduğundan bu nokta üzerinden 1.tipten bir doğru geçemez.

$$(1,0,0) \in [m, 1, k] \iff 0 = m$$

olduğundan (1,0,0) noktasından geçen 2. tip doğruların tümü $k \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ olmak üzere $[0,1, k]$ formundadır. Bu nedenle

$$[0,1,0], [0,1,1], [0,1,2], [0,1,3], [0,1, \varepsilon], [0,1,2\varepsilon], [0,1,3\varepsilon], [0,1,1 + \varepsilon], [0,1,1 + 2\varepsilon],$$
$$[0,1,1 + 3\varepsilon], [0,1,2 + \varepsilon], [0,1,2 + 2\varepsilon], [0,1,2 + 3\varepsilon], [0,1,3 + \varepsilon], [0,1,3 + 2\varepsilon],$$
$$[0,1,3 + 3\varepsilon]$$

doğruları (1,0,0) noktasından geçen tüm 2. tip doğrular olup, bunlar 16 tanedir.

(1,0,0) noktasından geçen 3. tipten doğrular için

$$(1,0,0) \in [q, n, 1] \iff 0 = q$$

olduğu göz önüne alınarak (1,0,0) noktasından geçen 3. tip doğruların $n \in \mathbb{I}$ olmak üzere $[0, n, 1]$ formundan olduğu bulunur. Bu nedenle (1,0,0) noktasından geçen 3. tip tüm doğrular,

$$[0,0,1], [0, \varepsilon, 1], [0,2\varepsilon, 1], [0,3\varepsilon, 1], [0,2,1], [0,2 + \varepsilon, 1], [0,2 + 2\varepsilon, 1], [0,2 + 3\varepsilon, 1]$$

olduğu bulunur. (1,0,0) noktasından geçen doğrular da $(0, \varepsilon, 1)$ noktasından geçenler gibi 24 tanedir.

Örnek 4.2.5. $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen doğruları araştıralım.

$$(0,1,2\varepsilon) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow 2\varepsilon = n$$

olduğundan $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen 3. tip doğrular için 2. bileşen 2ε olmalıdır. Yani $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen doğrular $q \in \mathbb{I}$ olmak üzere $[q, 2\varepsilon, 1]$ biçimindedir. Bu nedenle q yerine $\mathbb{I}$ nın elemanları yazılarak bulunan,

$[0,2\varepsilon, 1]$, $[\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$, $[2\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$, $[3\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$, $[2,2\varepsilon, 1]$, $[2+\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$, $[2+2\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$, $[2+3\varepsilon, 2\varepsilon, 1]$,

doğruları $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen 3. tip doğrular

$$(0,1,2\varepsilon) \in [1, n, p] \Leftrightarrow 0 = n + 2p\varepsilon$$

olduğu kullanılarak $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen 1. tip doğruların $p \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ olmak üzere $[1,2p\varepsilon, p]$ formunda olduğu bulunur. Bu nedenle $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen 1. tip doğrular aşağıdaki gibidir:

$[1,0,0]$, $[1,2\varepsilon, 1]$, $[1,0,2]$, $[1,2\varepsilon, 3]$, $[1,0,\varepsilon]$, $[1,0,2\varepsilon]$, $[1,0,3\varepsilon]$, $[1,2\varepsilon, 1+\varepsilon]$,

$[1,2\varepsilon, 1+2\varepsilon]$, $[1,2\varepsilon, 1+3\varepsilon]$, $[1,0,2+\varepsilon]$, $[1,0,2+2\varepsilon]$, $[1,0,2+3\varepsilon]$,

$[1,2\varepsilon, 3+\varepsilon]$, $[1,2\varepsilon, 3+2\varepsilon]$, $[1,2\varepsilon, 3+3\varepsilon]$

O halde $(0,1,2\varepsilon)$ noktasından geçen birinci tipten 16, üçüncü tipten 8 olmak üzere, toplam 24 doğru vardır.

Bundan sonraki üç örnek ise doğrular üzerindeki noktaların belirlenmesi ile ilgili olacaktır.

Örnek 4.2.6. $[1+\varepsilon, 1,2+3\varepsilon]$ doğrusunun üzerinde olan noktaları araştıralım. $[1+\varepsilon, 1,2+3\varepsilon]$ doğrusu 2.tip bir doğru olduğundan bu doğru üzerinde 2.tipten bir nokta, tanımı gereği, olamaz. Bu nedenle 1.ve 3. tip noktaları araştıralım.

$$(x, y, 1) \in [1+\varepsilon, 1,2+3\varepsilon] \Leftrightarrow y = x(1+\varepsilon) + 2 + 3\varepsilon$$

olduğundan $[1+\varepsilon, 1{,}2+3\varepsilon]$doğrusunun üzerinde olan 3. tip noktalar $x \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ olmak üzere $(x,(x+2)+(x+3)\varepsilon, 1)$ biçimindedir. x yerine $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ halkasının elemanları yazılarak;

$(0{,}2+3\varepsilon, 1), (1{,}3{,}1), (2, \varepsilon, 1), (3{,}1+2\varepsilon, 1), (\varepsilon, 2{,}1), (2\varepsilon, 2+\varepsilon, 1), (3\varepsilon, 2+2\varepsilon, 1),$

$(1+\ \varepsilon, 3+\varepsilon, 1),\ (1+2\ \varepsilon, 3+2\varepsilon, 1), (1+3\ \varepsilon, 3+3\varepsilon, 1), (2+\varepsilon, 2\varepsilon, 1),$

$(2+2\varepsilon, 3\varepsilon, 1), (2+3\varepsilon, 0{,}1), (3+\ \varepsilon, 1+3\varepsilon, 1), (3+2\varepsilon, 1+\varepsilon, 1), (3+3\varepsilon, 1{,}1)$

noktalarının $[1+\varepsilon, 1{,}2+3\varepsilon]$ doğrusunun üzerindeki 3. tipten tüm noktalar olduğu elde edilir.

$$(1, y, z) \in [1+\varepsilon, 1{,}2+3\varepsilon] \Leftrightarrow y = (1+2z)+(1+3z)\varepsilon$$

olduğundan $[1+\varepsilon, 1{,}2+3\varepsilon]$ doğrusu üzerinde olan 1. tip noktalar $z \in \mathbb{I}$ olmak üzere $(1,(1+2z)+(1+3z)\varepsilon, z)$ biçimindedir. Bu nedenle z yerine $\mathbb{I}$ nın elemanları yazılarak bulunan,

$$(1{,}1+\varepsilon, 0), (1{,}1+3\varepsilon, \varepsilon), (1{,}1+\varepsilon, 2\varepsilon), (1{,}1+3\varepsilon, 3\varepsilon), (1{,}1+3\varepsilon, 2), (1{,}1+\varepsilon, 2 + \varepsilon), (1{,}1+3\varepsilon, 2+2\varepsilon), (1{,}1+\varepsilon, 2+3\varepsilon)$$

noktaları [0,1,0] doğrusunun üzerindeki 1. tipten tüm noktaları verir. O halde [0,1,0] doğrusunun üzerinde olan 3. tipten 16, 1. tipten 8 olmak üzere , toplam 24 nokta vardır.

Örnek 4.2.7. [1,0,0] doğrusunun üzerindeki noktaları araştıralım. [1,0,0] doğrusu 1.tip bir doğru olduğundan bu doğru üzerindeki nokta 1.tipten olamaz.

$$(x, y, 1) \in [1{,}0{,}0] \ \Leftrightarrow x = 0$$

olduğundan [1,0,0] doğrusunun üzerinde olan 3. tip noktalar y keyfi olmak üzere $(0, y, 1)$ biçimindedir. Bu nedenle bu noktaların,

$(0{,}0{,}1), (0{,}1{,}1), (0{,}2{,}1), (0{,}3{,}1), (0, \varepsilon, 1), (0{,}2\varepsilon, 1), (0{,}3\varepsilon, 1), (0{,}1+\varepsilon, 1),$

$(0{,}1+2\varepsilon, 1), (0{,}1+3\varepsilon, 1), (0{,}2+\ \varepsilon, 1), (0{,}2+2\varepsilon, 1), (0{,}2+3\varepsilon, 1), (0{,}3+\varepsilon, 1),$

$(0{,}3+2\varepsilon, 1), (0{,}3+3\varepsilon, 1),$

olduğu bulunur. [1,0,0] doğrusunun üzerindeki 3. tipten noktalar için

$$(w, 1, z) \in [1,0,0] \;\Leftrightarrow w = 0$$

olacağı ile birlikte $z \in \mathbb{I}$ olacağı da göz önüne alınarak

$$(0,1,0), (0,1,\varepsilon), (0,1,2\varepsilon), (0,1,3\varepsilon), (0,1,2), (0,1,2+\ \varepsilon), (0,1,2+2\varepsilon), (0,1,2+3\varepsilon)$$

noktalarının $[1,0,0]$ doğrusunun üzerindeki 2. tipten tüm noktaları verdiği elde edilir. $[1,0,0]$ doğrusunun üzerindeki noktaların sayısı da önceki iki örnekte verilen doğrularda olduğu gibi 24 tanedir.

Örnek 4.2.8 Önceki üç örnekte yapılana benzer işlemlerle $[0,0,1]$ doğrusunun üzerindeki 24 noktanın,

$(1,0,0), (1,1,0), (1,2,0), (1,3,0), (1,\varepsilon,0), (1,2\varepsilon,0), (1,3\varepsilon,0), (1,1+\varepsilon,0),$

$(1,1+2\varepsilon,0), (1,1+3\varepsilon,0), (1,2+\ \varepsilon,0), (1,2+2\varepsilon,0), (1,2+3\varepsilon,0), (1,3+\ \varepsilon,0),$

$(1,3+2\varepsilon,0), (1,3+3\varepsilon,0), (0,1,0), (\varepsilon,1,0), (2\varepsilon,1,0), (3\varepsilon,1,0), (2,1,0), (2+\varepsilon,1,0),$

$(2+2\varepsilon,1,0), (2+3\varepsilon,1,0)$

olduğu benzer işlemlerle elde edilir.

Aşağıda ispatsız olarak verilen teorem ve ispatı Jungnickel'de (1979) bulunmaktadır.

Teorem 4.2.9. S bir sonlu PK-düzlem olsun. Bu durumda

1) Her noktanın (doğrunun) komşuluğunda t^2 nokta (doğru) vardır.

2) $N \in d$ özelliğinde verilen bir N noktası ve bir d doğrusu için, d nin üzerinde olup N ye komşu olan tam olarak t nokta vardır (N den geçip d ye komşu olan tam olarak t doğru vardır).

3) r, PK3 şartında ifade edilen $\mathbf{S}^*$ projektif düzleminin mertebesidir . Eğer $t \neq 1$ ise $r \leq t$ dir ve bu durumda **S** ye has PK-düzlem denir (Eğer $t = 1$ ise **S** ile $\mathbf{S}^*$ aynıdır ve bu durumda **S** âdi projektif düzlemdir).

4) Her doğru tam olarak $t(r+1)$ adet noktadan oluşur ve her noktadan tam olarak $t(r+1)$ doğru geçer.

5) $|\mathcal{N}| = |\mathcal{D}| = t^2(r^2 + r + 1)$ dir.

özelliklerini sağlayan t ve r doğal sayıları vardır. Bu doğal sayılara **S** Projektif Klingenberg düzleminin ***parametreleri*** adı verilir.

Yukarıda verilen Örnek 4.2.1 ve 4.2.2 de sırasıyla, $(\varepsilon, 0,1)$ noktasının komşuluğunda 64 tane nokta ve aynı şekilde [0,1,0] doğrusunun komşuluğunda 64 tane doğru olduğu bulunmuştu. Teorem 4.2.9 da her noktanın (doğrunun) komşuluğunda t^2 tane nokta (doğru) var olduğu ifade edilmektedir. Bu, $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile koordinatlanan PK düzlemde $t = 8$ olacağını gösterir. Bu nedenle her bir komşuluktaki elemanların sayısının 64 olacağı elde edilir.

Ayrıca Teorem 4.2.9. dan ilgili t ve r parametreleri yardımıyla her doğru üzerinde tam olarak $t(r + 1)$ noktanın var olduğu (her noktadan tam olarak $t(r + 1)$ doğrunun geçtiği) bilinmektedir. Örnek 4.2.3 de $(0, \varepsilon, 1)$ den geçen doğruların sayısı 24 olduğu ve $24 = 8 \cdot 3 = 8 \cdot (2 + 1)$ eşitliği dikkate alındığında, Teorem 4.2.9 un 4. maddesi gereği $r = 2$ olacağı elde edilir.

4.3. $\mathbf{PK_2}(\mathbb{Z}_4(\boldsymbol{\varepsilon}))$ Düzleminde Doğruların Arakesitleri

Bu kısımda $\mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ile koordinatlanan PK-düzleminde verilen herhangi iki doğrunun arakesit noktaları araştırılacaktır. PK2 gereği aynı komşulukta olmayan doğruların arakesitleri tek bir noktadan oluşmalıdır fakat aynı komşuluktaki doğruların arakesitlerinin kaç noktadan oluşacağı belli değildir. Bu kısımda bu soruların cevapları üzerinde durulacaktır.

4.3.1. Farklı Tipten Doğruların Arakesitleri.

Bu kısımda lokal halkada işlemlerin tekliği kullanılarak farklı tipteki doğrular için PK2 nin geçerli olduğu, yani bir tek arakesit noktalarının var olduğu, üç alt başlık altında, gösterilecektir.

4.3.1.1. Birinci ve ikinci tip doğruların arakesiti.

$[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ ve $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ sırasıyla 1. ve 2. tip keyfi birer doğruyu göstersin. Birinci tip doğru tanımı gereği $\mathrm{n} \in \mathbb{I}$ olmak zorundadır. Bu durumda Teorem 4.1.1 gereği $1-\mathrm{n} \notin \mathbb{I}$ olacağından $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ ve $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ doğruları aynı komşulukta değildir. Teorem 3.2.1 gereği aynı tip nokta aynı tip doğru üzerinde değildir. Bu nedenle $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ üzerinde 1. tipten, $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ üzerinde 2. tipten nokta bulunamayacağından $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ ile $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ doğrularının arakesiti 1. ve 2. tipten bir nokta olamaz.

$[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ ve $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ doğrularının arakesitinin $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ biçiminde üçüncü tipten bir nokta olup olmayacağı araştıralacaktır.

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1) \in [\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}] \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{xm} + \mathrm{k}$$

ve

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1) \in [1, \mathrm{n}, \mathrm{p}] \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{yn} + \mathrm{p}$$

olup $\mathrm{y} = \mathrm{xm} + \mathrm{k}$ eşitliği $\mathrm{x} = \mathrm{yn} + \mathrm{p}$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\mathrm{x} = (\mathrm{xm} + \mathrm{k})\mathrm{n} + \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{xmn} + \mathrm{kn} + \mathrm{p}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}(1 - \mathrm{mn}) = \mathrm{kn} + \mathrm{p}$$

eşitliği elde edilir. 1. tip doğru tanımı gereği $\mathrm{n} \in \mathbb{I}$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.1. den $1 - \mathrm{mn} \notin \mathbb{I}$ olduğu bulunur. Bu nedenle $1 - \mathrm{mn}$ elemanının bir tek tersi vardır. Son eşitlik sağdan $1 - \mathrm{mn}$ elemanının tersi ile çarpıldığında

$$\mathrm{x} = (\mathrm{kn} + \mathrm{p})(1 - \mathrm{mn})^{-1}$$

sonucu elde edilir. Bulunan bu x değeri $\mathrm{y} = \mathrm{xm} + \mathrm{k}$ eşitliğinde yerine konularak, aranan arakesit noktasının

$$(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1) = ((\mathrm{kn} + \mathrm{p})(1 - \mathrm{mn})^{-1}, ((\mathrm{kn} + \mathrm{p})(1 - \mathrm{mn})^{-1})\mathrm{m} + \mathrm{k}, 1)$$

olduğu elde edilir.

Örnek 4.3.1.1.1. $[1,0,2 + \varepsilon]$ ve $[2 + 2\varepsilon, 1, 2\varepsilon]$ doğrularının arakesit noktasını araştıralım. 1. tip noktanın 1. tip doğru üzerinde olamayacağı ve 2. tip noktanın 2. tip doğru üzerinde olamayacağı Teorem 3.2.1. den bilindiğinden sadece $(x, y, 1)$ noktası için inceleme yapmak yeterli olur.

$$(x, y, 1) \in [1,0,2+\varepsilon] \Leftrightarrow x = 2 + \varepsilon$$

$$(x, y, 1) \in [2+2\varepsilon, 1,2\varepsilon] \Leftrightarrow y = x(2+2\varepsilon) + 2\varepsilon$$

$x = 2 + \varepsilon$ değeri $y = x(2+2\varepsilon) + 2\varepsilon$ eşitliğinde yerine yazılarak aranan arakesit noktasının, $(2+\varepsilon, 0,1)$ olduğu bulunur.

4.3.1.2. Birinci ve üçüncü tip doğruların arakesiti

$[1, n, p]$ ve $[q, t, 1]$ sırasıyla 1. ve 3. tip keyfi birer doğruyu göstersin. Üçüncü tip doğru tanımı gereği $q \in \mathbb{I}$ olmak zorundadır. Bu durumda $1 - q \notin \mathbb{I}$ olacağından $[1, n, p]$ ve $[q, t, 1]$ doğruları aynı komşulukta değildir. Teorem 3.2.1. gereği $[1, n, p]$ üzerinde 1. tipten, $[q, t, 1]$ üzerinde 3. tipten nokta olamayacağından $[1, n, p]$ ve $[q, t, 1]$ doğrularının arakesiti ancak 2. tipten bir nokta olmalıdır. Yani ilgili doğruların arakesit noktası $w, z \in \mathbb{I}$ olmak üzere $(w, 1, z)$ tipinden bir nokta olmalıdır. Bu durumda,

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

ve

$$(w, 1, z) \in [q, t, 1] \Leftrightarrow z = wq + t$$

olup $w = n + zp$ olduğu $z = wq + t$ eşitliğinde kullanıldığında

$$z = (n + zp)q + t \Rightarrow z(1 - pq) = nq + t$$

eşitliği elde edilir. 3. tip doğru tanımı gereği $q \in \mathbb{I}$ olduğundan $1 - pq$ elemanı $\mathbb{I}$ nın elemanı değildir ve bu nedenle tersi vardır. Son eşitlik sağdan $1 - pq$ elemanının tersi ile çarpıldığında

$$z = (nq + t)(1 - pq)^{-1}$$

sonucu elde edilir. Bulunan bu z değeri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine konularak, aranan arakesit noktasının

$$(w, 1, z) = (n + ((nq + t)(1 - pq)^{-1})p, 1, (nq + t)(1 - pq)^{-1})$$

olduğu bulunur.

Örnek 4.3.1.2.1. $[1,0,\varepsilon]$ ve $[2\varepsilon,0,1]$ doğrularının arakesit noktasını araştıralım. $[1,0,\varepsilon]$ üzerinde 1. tipten nokta, $[2\varepsilon,0,1]$ üzerinde 3. tipten nokta olamayacağından arakesit noktası ancak $(w,1,z)$ biçimindedir.

$$(w,1,z) \in [1,0,\varepsilon] \Leftrightarrow w = z\varepsilon$$

$$(w,1,z) \in [2\varepsilon,0,1] \Leftrightarrow z = 2w\varepsilon$$

$w = z\varepsilon$ eşitliği $z = 2w\varepsilon$ eşitliğinde yerine yazılarak aranan arakesit noktasının (0,1,0) olduğu bulunur.

4.3.1.3. İkinci ve üçüncü tip doğruların arakesiti.

$[m,1,k]$ ve $[q,t,1]$ sırasıyla 2. ve 3. tip keyfi birer doğruyu göstersin. Üçüncü tip doğru tanımı gereği $t \in \mathbb{I}$ olmak zorundadır. Bu durumda $1-t \notin \mathbb{I}$ olacağından $[m,1,k]$ ve $[q,t,1]$ doğruları aynı komşulukta değildir. $[m,1,k]$ üzerinde 2. tipten, $[q,t,1]$ üzerinde 3. tipten nokta var olamayacağından, $[m,1,k]$ ve $[q,t,1]$ doğrularının arakesitinin $(1,y,z)$ biçiminde 1.tipten bir nokta olması durumunu araştırmak yeterlidir. 1. tip nokta tanımı gereği $y \in \mathbb{Z}_4(\varepsilon)$ ve $z \in \mathbb{I}$ dır. Bu durumda

$$(1,y,z) \in [m,1,k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1,y,z) \in [q,t,1] \Leftrightarrow z = q + yt$$

olup $y = m + zk$ olduğu $z = q + yt$ eşitliğinde kullanıldığında

$$z = q + (m+zk)t \Rightarrow z = q + mt + zkt$$

$$\Rightarrow z(1-kt) = q + mt$$

eşitliği elde edilir. 3.tip doğru tanımı gereği $t \in \mathbb{I}$ olduğundan Teorem 4.1.1. gereği $1-kt$ elemanı $\mathbb{I}$ nın elemanı değildir ve bu nedenle tersi vardır. Son eşitlik sağdan $1-kt$ elemanının tersi ile çarpıldığında

$$z = (q+mt)(1-kt)^{-1}$$

sonucu elde edilir. Bulunan bu z değeri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, aranan arakesit noktasının

$$(1, y, z) = (1, m + ((q + mt)(1 - kt)^{-1})k, (q + mt)(1 - kt)^{-1})$$

olduğu görülür.

Örnek 4.3.1.3.1. $[2\varepsilon, 1,2]$ ve $[2\varepsilon, 0,1]$ doğrularının arakesit noktasını araştıralım. Aynı tip nokta ve doğrular birbiri üzerinde olamayacağından, incelemeyi $(1, y, z)$ noktası için yapmak yeterli olacaktır.

$$(1, y, z) \in [2\varepsilon, 1,2] \Leftrightarrow y = 2\varepsilon + 2z$$

$$(1, y, z) \in [2\varepsilon, 0,1] \Leftrightarrow z = 2\varepsilon$$

$z = 2\varepsilon$ eşitliği $y = 2\varepsilon + 2z$ eşitliğinde yerine yazılarak aranan arakesit noktasının, $(1,2\varepsilon, 2\varepsilon)$ olduğu bulunur.

4.3.2. Aynı Tipten Doğruların Arakesitleri

Aynı tipten doğruların arakesitleri hakkında PK-düzlem şartları bir şey belirtmemektedir. Yani aynı tipten doğruların arakesitleri birden çok nokta olabileceği gibi arakesitte hiçbir nokta olmayabilir de. Bu kısımda aynı tipten doğruların hangi durumlarda, arakesit noktalarının kaç tane olacağı araştırılacaktır.

4.3.2.1. İkinci tipten doğrularının arakesitleri

İkinci tipten doğruların üzerinde ikinci tipten nokta olamayacağından alınan keyfi $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesiti (w,1,z) biçiminde olamaz. Bu nedenle $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının sadece birinci ve üçüncü tip arakesit noktaları araştırılacaktır.

$$[m, 1, k] \sim [a, 1, b] \Leftrightarrow (m - a \in \mathbb{I} \text{ ve } k - b \in \mathbb{I})$$

şartı gereği $m - a$ ve $k - b$ elemanlarının ikisi de $\mathbb{I}$ da ise bu doğrular aynı komşuluktadırlar. Fakat $m - a$ ya da $k - b$ den en az biri $\mathbb{I}$ da değilse, bu doğrular aynı komşulukta değildirler. Aynı komşulukta olmayan doğruların PK2 gereği arakesit noktalarının bir tek olduğu gösterilmelidir. Bu nedenle aşağıda $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesitleri, bu doğruların aynı komşulukta olup olmamalarına göre ayrı ayrı incelenecektir.

1. Durum. $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğruları farklı komşulukta ise $m - a \notin \mathbb{I}$ ya da $k - b \notin \mathbb{I}$ olmalıdır.

1.1. Farklı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağını araştıralım.

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = a + zb$$

olup $y = m + zk$ ve $y = a + zb$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarıldığında,

$$0 = m - a + z(k - b) \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir.

Bu durumda inceleme $m - a$ nın $\mathbb{I}$ idealinin elemanı olup olmamasına göre iki ayrı durumda yapılır.

1.1.1. $m - a \notin \mathbb{I}$ ise (4.1) eşitliğinden

$$z(b - k) = m - a$$

olduğu bulunur. $z \in \mathbb{I}$ olduğundan bu eşitliğin sol tarafı $\mathbb{I}$ nın elemanı, sağ tarafı ise $\mathbb{I}$ nın elemanı olmadığından $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olması mümkün değildir.

1.1.2. $m - a \in \mathbb{I}$ ise $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğruları farklı komşuluklarda olduğu için $k - b \notin \mathbb{I}$ olmalıdır. Bu durumda (4.1) eşitliğinden

$$z(k - b) = -(m - a)$$

olduğu bulunur. $k - b \notin \mathbb{I}$ olduğundan $k - b$ elemanının tersi vardır. Son eşitlik sağdan $k - b$ elemanının tersi ile çarpıldığında,

$$z = -(m - a)(k - b)^{-1}$$

sonucu elde edilir. Bulunan z değeri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak aranan arakesit noktasının

$$(1, y, z) = (1, (m + -((m - a)(k - b)^{-1})k, -(m - a)(k - b)^{-1})$$

olduğu bulunur.

1.2. Farklı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(w, 1, z)$ tipinde olmayacağı Teorem 3.2.1. den aşikârdır.

1.3 Farklı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olup olmayacağını araştıralım.

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Rightarrow y = xm + k$$

ve

$$(x, y, 1) \in [a, 1, b] \Rightarrow y = xa + b$$

olup $y = xm + k$ ve $y = xa + b$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarıldığında

$$0 = x(m - a) + (k - b)$$

$$\Rightarrow x(m - a) = -(k - b) \tag{4.2}$$

eşitliği bulunur. Bu durumda inceleme, $m - a$ elemanının $\mathbb{I}$ idealinin elemanı olup olmamasına göre iki ayrı durumda yapılır.

1.3.1. $m - a \notin \mathbb{I}$ ise $m - a$ elemanının tersi vardır. (4.2) eşitliği sağdan $m - a$ elemanının tersi ile çarpıldığında

$$x = -(k - b)(m - a)^{-1}$$

olduğu elde edilir. Bulunan x değeri $y = xa + b$ eşitliğinde yerine yazılarak aranan arakesit noktasının

$$(x, y, 1) = (-(k - b)(m - a)^{-1}, (-(k - b)(m - a)^{-1})a + b, 1)$$

olduğu bulunur.

1.3.2. $m-a\in\mathbb{I}$ ise $[m,1,k]$ ve $[a,1,b]$ doğruları aynı komşulukta olmadığından $k-b\notin\mathbb{I}$ olmalıdır. (4.2) eşitliğinin sol tarafı $\mathbb{I}$ nın elemanı, sağ tarafı ise $\mathbb{I}$ nın elemanı olmadığından bu eşitliğin sağlanması mümkün değildir. Yani bu durumda $[m,1,k]$ ve $[a,1,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinde arakesit noktasının olması mümkün değildir.

2.Durum. $[m,1,k]$ ve $[a,1,b]$ doğruları aynı komşulukta ise $m-a\in\mathbb{I}$ ve $k-b\in\mathbb{I}$ olur. Bu durumda,

$m=m_1+m_2\varepsilon$, $a=a_1+a_2\varepsilon$ ve $k=k_1+k_2\varepsilon$, $b=b_1+b_2\varepsilon$ olmak üzere

$$m-a\in\mathbb{I}\Leftrightarrow m_1-a_1+(m_2-a_2)\varepsilon\in\mathbb{I}$$

$$k-b\in\mathbb{I}\Leftrightarrow k_1-b_1+(k_2-b_2)\varepsilon\in\mathbb{I} \tag{4.3}$$

olması gerektiği bulunur. Burada m_1-a_1 ile k_1-b_1 in alabileceği değerler kümesi $\{0,2\}$ ve m_2-a_2 ile k_2-b_2 nin alabileceği değerler kümesi $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ olacağından inceleme m_1-a_1 ve k_1-b_1 in alabileceği değerler üzerinden

$$m_1-a_1=0 \text{ ve } k_1-b_1=0$$

$$m_1-a_1=0 \text{ ve } k_1-b_1=2$$

$$m_1-a_1=2 \text{ ve } k_1-b_1=0$$

$$m_1-a_1=2 \text{ ve } k_1-b_1=2$$

durumları ayrı ayrı göz önüne alınarak yapılır.

2.1. $\mathbf{m_1-a_1=0}$ ve $\mathbf{k_1-b_1=0}$ iken

$m_1-a_1=0$ ve $k_1-b_1=0$ olduğundan $m_1=a_1$ ve $k_1=b_1$ dır ve (4.3.) den $m-a=(m_2-a_2)\varepsilon$, $k-b=(k_2-b_2)\varepsilon$ olduğu bulunur. $[m,1,k]$ ve $[a,1,b]$ doğrularının arakesitinin ikinci tip nokta olması mümkün değildir. Bu nedenle inceleme arakesit noktasının üçüncü ve birinci tipten olmasına göre iki alt durumda yapılır.

2.1.1. $[m,1,k]$ ve $[a,1,b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x,y,1)$ tipinden olup olmayacağını araştıralım.

$$(x,y,1)\in[m,1,k]\Leftrightarrow y=xm+k$$

$$(x, y, 1) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = xa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$x\big((m_2 - a_2)\varepsilon\big) = -(k_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.4) denklemi ve çözümleri Çizelge 4.6 da verilmiştir.

Çizelge 4.6. $\mathrm{m}_2 - \mathrm{a}_2$ ve $\mathrm{k}_2 - \mathrm{b}_2$ nin alacağı değerlere göre (4.4.) denklemin halleri ve varsa çözümler

m_2-a_2 / k_2-b_2	0	1	2	3
0	$[\mathbf{m}, \mathbf{1}, \mathbf{k}]$ $= [\mathbf{a}, \mathbf{1}, \mathbf{b}]$ (Doğrular farklı değildir.)	**Denklem:** $\boldsymbol{x\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$ $x = \varepsilon$ $x = 2\varepsilon$ $x = 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2x\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0,\ \ x = 2$ $x = \varepsilon,\ \ x = 2 + \varepsilon$ $x = 2\varepsilon, x = 2 + 2\varepsilon$ $x = 3\varepsilon, x = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{3x\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$ $x = \varepsilon$ $x = 2\varepsilon$ $x = 3\varepsilon$
1	**Denklem:** $\boldsymbol{-\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x\varepsilon = -\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 3$ $x = 3 + \varepsilon$ $x = 3 + 2\varepsilon$ $x = 3 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2x\varepsilon = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{3x\varepsilon = -\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1$ $x = 1 + \varepsilon$ $x = 1 + 2\varepsilon$ $x = 1 + 3\varepsilon$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{-2\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x\varepsilon = -2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 2$ $x = 2 + \varepsilon$ $x = 2 + 2\varepsilon$ $x = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2x\varepsilon = -2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1,\ \ \ \ x = 3 + 3\varepsilon$ $x = 1 + \varepsilon, x = 3 + \varepsilon$ $x = 1 + 2\varepsilon, x = 3 + 2\varepsilon$ $x = 1 + 3\varepsilon, x = 3$	**Denklem:** $\boldsymbol{3x\varepsilon = -2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 2$ $x = 2 + \varepsilon$ $x = 2 + 2\varepsilon$ $x = 2 + 3\varepsilon$
3	**Denklem:** $\boldsymbol{-3\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x\varepsilon = -3\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1$ $x = 1 + \varepsilon$ $x = 1 + 2\varepsilon$ $x = 1 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2\varepsilon = -3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{3x\varepsilon = -3\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 3$ $x = 3 + \varepsilon$ $x = 3 + 2\varepsilon$ $x = 3 + 3\varepsilon$

Yukarıdaki çizelgede (4.4) ün çözümünün olmadığı ve olduğu durumlar açık bir şekilde belirlenmiştir. Çizelgede çözümün var olduğu durumlarda elde edilir. x değerlerine göre $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ ve $[\mathrm{a}, 1, \mathrm{b}]$ doğrularının $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{\mathrm{m}_2 - \mathrm{a}_2 = 1 \ \text{ ve } \ \mathrm{k}_2 - \mathrm{b}_2 = 0 \ \text{ iken}}$ $\mathrm{x}\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $\mathrm{y} = \mathrm{xm} + \mathrm{k}$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ ve $[\mathrm{a}, 1, \mathrm{b}]$ doğrularının $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, \mathrm{k}, 1), (\varepsilon, \varepsilon\mathrm{m} + \mathrm{k}, 1), (2\varepsilon, 2\varepsilon\mathrm{m} + \mathrm{k}, 1), (3\varepsilon, 3\varepsilon\mathrm{m} + \mathrm{k}, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \ \text{ve} \ k_2 - b_2 = 1 \ \text{iken}}$ $x\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{3,3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3,3m+ k,1),(3+\varepsilon,(3+\varepsilon)m+k,1),(3+2\varepsilon,(3+2\varepsilon)m+k,1),\\ (3+3\varepsilon,(3+3\varepsilon)m+k,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \ \text{ve} \ k_2 - b_2 = 2 \ \text{iken}}$ $x\varepsilon = -2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{2,2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,2m+ k,1),(2+\varepsilon,(2+\varepsilon)m+k,1),(2+2\varepsilon,(2+2\varepsilon)m+k,1),\\ (2+3\varepsilon,(2+3\varepsilon)m+k,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \ \text{ve} \ k_2 - b_2 = 3 \ \text{iken}}$ $x\varepsilon = -3\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1,1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,m+k,1),(1+\varepsilon,(1+\varepsilon)m+k,1),(1+2\varepsilon,(1+2\varepsilon)m+k,1),\\ (1+3\varepsilon,(1+3\varepsilon)m+k,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \ \text{ve} \ k_2 - b_2 = 0 \ \text{iken}}$ $2x\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2, \ 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,m+k,1),(\varepsilon,\varepsilon m+k,1),(2\varepsilon,2m\varepsilon+k,1),(3\varepsilon,3m\varepsilon+k,1),(2,2m+k,1),\\ (2+\varepsilon,(2+\varepsilon)m+k,1),(2+2\varepsilon,(2+2\varepsilon)m+k,1),\\ (2+3\varepsilon,(2+3\varepsilon)m+k,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $2x\varepsilon = -2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1, 1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3, 3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k, 1), (1+\varepsilon, (1+\varepsilon)m+k, 1), (1+2\varepsilon, (1+2\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(1+3\varepsilon, (1+3\varepsilon)m+k, 1), (3, 3m+k, 1), (3+\varepsilon, (3+\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(3+2\varepsilon, (3+2\varepsilon)m+k, 1), (3+3\varepsilon, (3+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $3x\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, k, 1), (\varepsilon, \varepsilon m+k, 1), (2\varepsilon, 2m\varepsilon+k, 1), (3\varepsilon, 3m\varepsilon+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $3x\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1, 1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k, 1), (1+\varepsilon, (1+\varepsilon)m+k, 1), (1+2\varepsilon, (1+2\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(1+3\varepsilon, (1+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $3x\varepsilon = -2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{2, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2, 2m+k, 1), (2+\varepsilon, (2+\varepsilon)m+k, 1), (2+2\varepsilon, (2+2\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(2+3\varepsilon, (2+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $3x\varepsilon = -3\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{3, 3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3, 3m + k, 1), (3+\varepsilon, (3+\varepsilon)m + k, 1), (3+2\varepsilon, (3+2\varepsilon)m + k, 1),$$
$$(3+3\varepsilon, (3+3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

2.1.2 $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinden olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$[m, 1, k] = [m_1 + m_2\varepsilon, 1, k_1 + k_2\varepsilon], [a, 1, b] = [a_1 + a_2\varepsilon, 1, b_1 + b_2\varepsilon]$$

olduğu dikkate alınarak,

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = a + zb$$

ifadelerinden elde edilen $y = m + zk$ ve $y = a + zb$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarıldığında,

$$0 = (m_2 - a_2)\varepsilon + z(k_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.5) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.7. de verilmiştir.

Çizelge 4.7. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.5) denklemin hâlleri varsa çözümler

k_2-b_2 \ m_2-a_2	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$[\mathbf{m},\mathbf{1},\mathbf{k}]=[\mathbf{a},\mathbf{1},\mathbf{b}]$ (Doğrular farklı değildir.)	**Denklem:** $\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\mathbf{3}\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{0}$ **Çözümleri:** $z=0$ $z=\varepsilon$ $z=2\varepsilon$ $z=3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon}=-\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z=2$ $z=2+\varepsilon$ $z=2+2\varepsilon$ $z=2+3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\mathbf{2}\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{0}$ **Çözümleri:** $z=0$, $z=2$ $z=\varepsilon$, $z=2+\varepsilon$ $z=2\varepsilon$ $z=2+2\varepsilon$ $z=3$ $z=2+3\varepsilon$	**Denklem:** $\mathbf{2}\boldsymbol{z\varepsilon}=-\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\mathbf{2}\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\mathbf{2}\boldsymbol{z\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\mathbf{3}\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{0}$ **Çözümleri:** $z=0$ $z=\varepsilon$ $z=2\varepsilon$ $z=3\varepsilon$	**Denklem:** $\mathbf{3}\boldsymbol{z\varepsilon}=-\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\mathbf{3}\boldsymbol{z\varepsilon}=\mathbf{2}\boldsymbol{\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z=2$ $z=2+\varepsilon$ $z=2+2\varepsilon$ $z=2+3\varepsilon$	**Denklem:** $\mathbf{3}\boldsymbol{z\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede (4.5.) denkleminin çözümünün olmadığı ve olduğu durumlar açıkça belirtilmiş ve çözümün var olması durumunda mümkün bütün çözümler verilmiştir. Tabloda çözümlerin var olduğu hâller için bulunan z değerlerine göre $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $2z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon), (1, m + 2k, 2),$$
$$(1, m + (2 + \varepsilon)k, 2 + \varepsilon), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon), (1, m + (2 + 3\varepsilon)k, 2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $3z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan z in bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $z\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z in bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + 2k, 2), (1, m + (2 + \varepsilon)k, 2 + \varepsilon), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon),$$
$$(1, m + (2 + 3\varepsilon)k, 2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $3z\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, 2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z in bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + 2k, 2), (1, m + (2 + \varepsilon)k, 2 + \varepsilon), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon),$$
$$(1, m + (2 + 3\varepsilon)k, 2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

2.2. $\mathbf{m_1 - a_1 = 0}$ ve $\mathbf{k_1 - b_1 = 2}$

$m_1 - a_1 = 0,\ k_1 - b_1 = 2$ olduğu göz önüne alınarak (4.3) den

$$m - a = (m_1 - a_1) + (m_2 - a_2)\varepsilon$$
$$= (m_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$k - b = (k_1 - b_1) + (k_2 - b_2)\varepsilon$$
$$= 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$$

olduğu bulunur. Bundan sonraki inceleme arakesit noktasının 3. ve 1. tipten olmasına göre iki alt durumda yapılır.

2.2.1. Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$$

ve

$$(x, y, 1) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = xa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$0 = x(m - a) + (k - b) \tag{4.6}$$

elde edilir.

Burada $m - a = (m_2 - a_2)\varepsilon$ ve $k - b = 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$ olduğundan (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$0 = (x_1 + x_2\varepsilon)(m_2 - a_2)\varepsilon + 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$$
$$= x_1(m_2 - a_2)\varepsilon + 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$$
$$= 2 + (x_1(m_2 - a_2) + k_2 - b_2)\varepsilon$$

elde edilir. $0 \neq 2$ olduğundan bu son denklemin çözümü yoktur. Bu nedenle bu iki doğrunun arakesiti $(x, y, 1)$ tipinde olamaz.

2.2.2. Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında

$$0 = m - a + z(k - b)$$

$$\Rightarrow (m_2 - a_2)\varepsilon = -z(2 + (k_2 - b_2)\varepsilon) \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.7) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.8. de verilmiştir.

Çizelge 4.8. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.7) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

k_2-b_2 \ m_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0,$ $z = 2,$ $z = 2\varepsilon,$ $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = \varepsilon$ $z = 3\varepsilon$ $z = 2 + \varepsilon$ $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + \varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$ $z = 2\varepsilon$ $z = 2 + \varepsilon$ $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + \varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + \varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = 2$ $z = \varepsilon$ $z = 3\varepsilon$ $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + \varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$ $z = 2$ $z = 2\varepsilon$ $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = \varepsilon$ $z = 3\varepsilon$ $z = 2 + \varepsilon$ $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 2\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$ $z = 2\varepsilon$ $z = 2 + \varepsilon$ $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 3\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = 2$ $z = \varepsilon$ $z = 3\varepsilon$ $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{-z(2 + 3\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan z değerlerine göre $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $2z = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m + 2k, 2), (1, m + 2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $-z(2+\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2\varepsilon, \ 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m+2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m+(2+\varepsilon)k, 2+\varepsilon), (1, m+(2+3\varepsilon)k, 2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $-z(2+2\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m+2k, 2), (1, m+2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m+(2+2\varepsilon)k, 2+2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $-z(2+3\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2\varepsilon, \ 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m, 0), (1, m+2k\varepsilon, 2\varepsilon), (1, m+(2+\varepsilon)k, 2+\varepsilon), (1, m+(2+3\varepsilon)k, 2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $2z = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k\varepsilon, \varepsilon), (1, m+3k\varepsilon, 3\varepsilon), (1, m+(2+\varepsilon)k, 2+\varepsilon), (1, m+(2+3\varepsilon)k, 2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $-z(2+\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + 2k, 2), (1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $-z(2 + 2\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon), (1, m + (2 + \varepsilon)k, 2 + \varepsilon), (1, m + (2 + 3\varepsilon)k, 2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $-z(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $y = m + zk$ eşitliğinde yerine yazılarak, [m,1,k] ve [a,1,b] doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + k\varepsilon, \varepsilon), (1, m + 3k\varepsilon, 3\varepsilon), (1, m + 2k, 2), (1, m + (2 + 2\varepsilon)k, 2 + 2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

2.3. $\mathbf{m_1 - a_1 = 2}$ ve $\mathbf{k_1 - b_1 = 0}$ iken

$m_1 - a_1 = 2$ ve $k_1 - b_1 = 0$ olduğu (4.3) de kullanıldığında

$$\begin{aligned} m - a &= (m_1 - a_1) + (m_2 - a_2)\varepsilon \\ &= 2 + (m_2 - a_2)\varepsilon \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} k - b &= (k_1 - b_1) + (k_2 - b_2)\varepsilon \\ &= (k_2 - b_2)\varepsilon \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Bundan sonraki inceleme arakesit noktasının 3. ve 1. tipten olmasına göre iki alt durumda yapılır.

2.3.1 Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$$

ve

$$(x, y, 1) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = xa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında;

$$0 = x(2 + (m_2 - a_2)\varepsilon) + (k_2 - b_2)\varepsilon$$

$$\Longrightarrow x(2 + (m_2 - a_2)\varepsilon) = -(k_2 - b_2)\varepsilon) \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ ni alabileceği değerlere göre (4.8) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.9 da verilmiştir.

Çizelge 4.9. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.8) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

k_2-b_2 \ m_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\mathbf{2x = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$, $x = 2$, $x = 2\varepsilon$, $x = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$, $x = 2\varepsilon$, $x = 2 + \varepsilon$, $x = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$, $x = 2$, $x = 2\varepsilon$, $x = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $x = 0$, $x = 2\varepsilon$, $x = 2 + \varepsilon$, $x = 2 + 3\varepsilon$
1	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+2\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+3\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = \varepsilon$, $x = 3\varepsilon$, $x = 2 + \varepsilon$, $x = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 2$, $x = \varepsilon$, $x = 3\varepsilon$, $x = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = \varepsilon$, $x = 3\varepsilon$, $x = 2 + \varepsilon$, $x = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 2$, $x = \varepsilon$, $x = 3\varepsilon$, $x = 2 + 2\varepsilon$
3	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2+3\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan x değerlerine göre $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $2x = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, k, 1), (2, 2m + k, 1), (2\varepsilon, 2m\varepsilon + k, 1), (2 + 2\varepsilon, (2 + 2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $2x = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x nin bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(\varepsilon, m\varepsilon + k, 1), (3\varepsilon, 3m\varepsilon + k, 1), (2+\varepsilon, (2+\varepsilon)m + k, 1), (2+3\varepsilon, (2+3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $x(2+\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, k, 1), (2\varepsilon, 2m\varepsilon + k, 1), (2+\varepsilon, (2+\varepsilon)m + k, 1), (2+3\varepsilon, (2+3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $x(2+\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2, 2m + k, 1), (\varepsilon, m\varepsilon + k, 1), (3\varepsilon, 3m\varepsilon + k, 1), (2+2\varepsilon, (2+2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $x(2+2\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının (x,y,1) tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, k, 1), (2, 2m + k, 1), (2\varepsilon, 2m\varepsilon + k, 1), (2+2\varepsilon, (2+2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $x(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(\varepsilon, m\varepsilon + k, 1),\ (3\varepsilon, 3m\varepsilon + k, 1), (2 + \varepsilon, (2 + \varepsilon)m + k, 1)(2 + 3\varepsilon, (2 + 3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $x(2 + 3\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan x değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0, k, 1), (2\varepsilon, 2m\varepsilon + k, 1), (2 + \varepsilon, (2 + \varepsilon)m + k, 1)(2 + 3\varepsilon, (2 + 3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $x(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğ1rularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,2m + k, 1), (\varepsilon, m\varepsilon + k, 1), (3\varepsilon, 3m\varepsilon + k, 1), (2 + 2\varepsilon, (2 + 2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

2.3.2 Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$(m - a) + z(k - b) = 0$$

elde edilir. Burada $m - a = 2 + (m_2 - a_2)\varepsilon$ ve $k - b = (k_2 - b_2)\varepsilon$ olduğundan

$$2 + (m_2 - a_2)\varepsilon + z(k_2 - b_2)\varepsilon = 0$$

elde edilir. $2 \neq 0$ olduğundan bu son denklemin çözümü yoktur. Bu nedenle bu iki doğrunun arakesiti $(1, y, z)$ tipinde olamaz.

2.4. $\mathbf{m_1 - a_1 = 2}$ ve $\mathbf{k_1 - b_1 = 2}$ iken

$m_1 - a_1 = 2$ ve $k_1 - b_1 = 2$ olduğu (4.3) de kullanıldığında

$$m - a = (m_1 - a_1) + (m_2 - a_2)\varepsilon$$

$$= 2 + (m_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$k - b = (k_1 - b_1) + (k_2 - b_2)\varepsilon$$

$$= 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$$

eşitlikleri bulunur. Bundan sonraki inceleme arakesit noktasının 3. ve 1. tipten olmasına göre iki alt durumda yapılır.

2.4.1. Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = xm + k$$

ve

$$(x, y, 1) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = xa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında;

$$0 = x(m - a) + k - b$$

elde edilir. Bu durumda

$$x(2 + (m_2 - a_2)\varepsilon) = 2 - (k_2 - b_2)\varepsilon) \qquad (4.9)$$

eşitliği elde edilir. $m_2 - a_2$ ve $k_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.9) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.10 da verilmiştir.

Çizelge 4.10. $\mathrm{m}_2 - \mathrm{a}_2$ ve $\mathrm{k}_2 - \mathrm{b}_2$ nin alacağı değerlere göre (4.9) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

k_2-b_2 \ m_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\mathbf{2x = 2}$ **Çözümleri:** $x = 1,$ $x = 3,$ $x = 1 + 2\varepsilon,$ $x = 3 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + \varepsilon) = 2}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 2\varepsilon) = 2}$ **Çözümleri:** $x = 1 + \varepsilon,$ $x = 1 + 3\varepsilon,$ $x = 3 + \varepsilon,$ $x = 3 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 3\varepsilon) = 2}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = 2 - \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + \varepsilon) = 2 - \varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 3,$ $x = 1 + \varepsilon,$ $x = 1 + 3\varepsilon,$ $x = 3 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 2\varepsilon) = 2 - \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 3\varepsilon) = 2 - \varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1,$ $x = 1 + 2\varepsilon,$ $x = 3 + \varepsilon,$ $x = 3 + 3\varepsilon,$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = 2 + 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1 + \varepsilon,$ $x = 1 + 3\varepsilon,$ $x = 3 + \varepsilon,$ $x = 3 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + \varepsilon) = 2 - 2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 2\varepsilon) = 2 - 2}$ **Çözümleri:** $x = 1,$ $x = 3,$ $x = 1 + 2\varepsilon,$ $x = 3 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 3\varepsilon) = 2 - 2}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{2x = 2 + \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + \varepsilon) = 2 + \varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 1,$ $x = 1 + 2\varepsilon,$ $x = 3 + \varepsilon,$ $x = 3 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 2\varepsilon) = 2 + \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{x(2 + 3\varepsilon)}$ $\boldsymbol{= 2 + \varepsilon}$ **Çözümleri:** $x = 3,$ $x = 3 + 2\varepsilon,$ $x = 1 + \varepsilon,$ $x = 1 + 3\varepsilon,$

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan x değerlerine göre $[\mathrm{m}, 1, \mathrm{k}]$ ve $[\mathrm{a}, 1, \mathrm{b}]$ doğrularının $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $2x = 2$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1,3,1 + 2\varepsilon, 3 + 2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m + k, 1), (3,3m + k, 1), (1 + 2\varepsilon, (1 + 2\varepsilon)m + k, 1), (3 + 2\varepsilon, (3 + 2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 0 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $2x = 2 + 2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1 + \varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 3 + \varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1 + \varepsilon, (1 + \varepsilon)m + k, 1), (1 + 3\varepsilon, (1 + 3\varepsilon)m + k, 1), (3 + \varepsilon, (3 + \varepsilon)m + k, 1),$$
$$(3 + 3\varepsilon, (3 + 3\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $x(2 + \varepsilon) = 2 - \varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{3, 1 + \varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 3 + 2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3,3m + k, 1), (1 + \varepsilon, (1 + \varepsilon)m + k, 1), (1 + 3\varepsilon, (1 + 3\varepsilon)m + k, 1),$$
$$(3 + 2\varepsilon, (3 + 2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 1 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $x(2 + \varepsilon) = 2 + \varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1,1 + 2\varepsilon, 3 + \varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k, 1), (1+2\varepsilon, (1+2\varepsilon)m+k, 1), (3+\varepsilon, (3+\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(3+3\varepsilon, (3+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 0 \text{ iken}}$ $x(2+2\varepsilon) = 2$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1+\varepsilon, (1+\varepsilon)m+k, 1), (1+3\varepsilon, (1+3\varepsilon)m+k, 1), (3+\varepsilon, (3+\varepsilon)m+k, 1),$$
$$(3+3\varepsilon, (3+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 2 \text{ ve } k_2 - b_2 = 2 \text{ iken}}$ $x(2+2\varepsilon) = 2+2\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1, 3, 1+2\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k, 1), (3, 3m+k, 1), (1+2\varepsilon, (1+2\varepsilon)m+k, 1), (3+2\varepsilon, (3+2\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 1 \text{ iken}}$ $x(2+3\varepsilon) = 2-\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{1, 1+2\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, m+k, 1), (1+2\varepsilon, (1+2\varepsilon)m+k, 1), (3+\varepsilon, (3+\varepsilon)m+k),$$
$$(3+3\varepsilon, (3+3\varepsilon)m+k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{m_2 - a_2 = 3 \text{ ve } k_2 - b_2 = 3 \text{ iken}}$ $x(2+3\varepsilon) = 2+\varepsilon$ denklemini sağlayan x değerleri $\{3, 1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan x in bu değerleri $y = xm + k$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3, 3m + k, 1), (1 + \varepsilon, (1 + \varepsilon)m + k, 1), (1 + 3\varepsilon, (1 + 3\varepsilon)m + k),$$

$$(3 + 2\varepsilon, (3 + 2\varepsilon)m + k, 1)\}$$

olarak elde edilir.

2.4.2 Aynı komşulukta olan $[m, 1, k]$ ve $[a, 1, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1, y, z) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = m + zk$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, 1, b] \Leftrightarrow y = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$(m - a) + z(k - b) = 0$$

elde edilir. $m - a = 2 + (m_2 - a_2)\varepsilon$ ve $k - b = 2 + (k_2 - b_2)\varepsilon$ olduğundan son eşitlikten

$$2 + (m_2 - a_2)\varepsilon + z(2 + (k_2 - b_2)\varepsilon) = 0$$

elde edilir. Bu durumda $2 \neq 0$ olduğundan bu son denklemin çözümü yoktur. Yani bu iki doğrunun arakesiti $(1, y, z)$ tipinden bir nokta olamaz.

Son olarak bu kısım iki örnek verilerek tamamlanacaktır.

Örnek 2.4.2.1. $m_1 = 0$, $a_1 = 2$ ve $m_2 = 2, a_2 = 2$, $k_1 = 0, b_1 = 2$, $k_2 = 2$, $b_2 = 2$ olmak üzere $m_1 - a_1 = 2$, $k_1 - b_1 = 2$, $m_2 - a_2 = 0$, $k_2 - b_2 = 0$ dir.Yani $m - a$ ve $k - b$ elemanlarının ikisi de $\mathbb{I}$ nın elemanı olurlar ve bu nedenle doğrular aynı komşuluktadır. Bu durumda $[2\varepsilon, 1, 2\varepsilon]$ ve $[2 + 2\varepsilon, 1, 2 + 2\varepsilon]$ doğrularının arakesit noktalarının neler olduğunu tiplerine göre ayrı ayrı bulunacaktır.

$$(x, y, 1) \in [2\varepsilon, 1, 2\varepsilon] \Longrightarrow y = 2x\varepsilon + 2\varepsilon$$

$$(x, y, 1) \in [2+2\varepsilon, 1, 2+2\varepsilon] \Rightarrow y = x(2+2\varepsilon) + 2 + 2\varepsilon$$

eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında

$$0 = 2x\varepsilon + 2\varepsilon - 2x - 2x\varepsilon - 2 - 2\varepsilon$$

olup ve buradan

$0 = 2x + 2$

$\Rightarrow 2x = 2$

$\Rightarrow 2(x_1 + x_2\varepsilon) = 2$

$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2\varepsilon = 2$

bulunur. Bu denklemi sağlayan x in alacağı değerler $\{1,3,1+2\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan (ki bu Çizelge 4.10 da $m_2 - a_2 = 0$, $k_2 - b_2 = 0$ durumunda elde edilen çözümdür.) x in bu değerleri $y = 2x\varepsilon + 2\varepsilon$ denkleminde yerine yazılarak söz konusu doğruların 3. tipten arakesit noktalarının $(1,0,1), (3,0,1), (1+2\varepsilon, 0,1), (3+2\varepsilon, 0,1)$ olduğu bulunur.

$$(1, y, z) \in [2\varepsilon, 1, 2\varepsilon] \Rightarrow y = 2\varepsilon + 2z\varepsilon$$

$$(1, y, z) \in [2+2\varepsilon, 1, 2+2\varepsilon] \Rightarrow y = (2+2\varepsilon) + z(2+2\varepsilon)$$

olup bulunan eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında

$$2\varepsilon + 2z\varepsilon - 2 - 2\varepsilon - 2z - 2z\varepsilon = 0$$

olup, buradan

$$-2 - 2z = 0$$

eşitliği bulunur. $z \in \mathbb{I}$ olduğundan bu durumda çözüm olmadığı aşikardır.

Örnek 2.4.2.2. $m_1 = 2,\ a_1 = 2$ ve $m_2 = 3, a_2 = 1$, $k_1 = 1, b_1 = 1, k_2 = 3,\ \ b_2 = 1$ olmak üzere $m_1 - a_1 = 0$, $k_1 - b_1 = 0$, $m_2 - a_2 = 2$, $k_2 - b_2 = 2$ dir.Yani $m - a$ ve $k - b$ elemanlarının ikisi de $\mathbb{I}$ nın elemanı olduğundan bu doğrular aynı komşuluktadırlar. Bu durumda $[2+3\varepsilon, 1, 1+3\varepsilon]$ ve $[2+\varepsilon, 1, 1+\varepsilon]$ doğrularının arakesit noktalarını bulalım.

$$(x, y, 1) \in [2 + 3\varepsilon, 1, 1 + 3\varepsilon] \Leftrightarrow y = x(2 + 3\varepsilon) + 1 + 3\varepsilon$$

$$(x, y, 1) \in [2 + \varepsilon, 1, 1 + \varepsilon] \Leftrightarrow y = x(2 + \varepsilon) + 1 + \varepsilon$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarıldığında

$0 = 2x\varepsilon + 2\varepsilon$

$$\Longrightarrow 0 = 2\varepsilon(x_1 + x_2\varepsilon) + 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow 0 = 2x_1\varepsilon + 2\varepsilon$$

$$\Longrightarrow 0 = 2x_1 + 2$$

$$\Longrightarrow 2x_1 = 2$$

bulunur. Bu denklemi sağlayan x_1 değerleri $\{1,3\}$ olup $x_2 \in \mathbb{Z}_4$ olmak üzere x değerlerinin $\{1, 1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 3, 3 + \varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğu bulunur. Bu değerler Çizelge 4.6 da verilen değerlerle aynıdır. x in bu değerleri $y = x(2 + \varepsilon) + 1 + \varepsilon$ denkleminde yerine yazılarak alınan iki doğrunun arakesit noktalarının

$$(1, 3 + 2\varepsilon, 1), (3, 3, 1), (1 + \varepsilon, 3, 1), (1 + 2\varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 1), (1 + 3\varepsilon, 3, 1),$$

$$(3 + \varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 1), (3 + 2\varepsilon, 3, 1), (3 + 3\varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 1)$$

olduğu bulunur.

$$(1, y, z) \in [2 + 3\varepsilon, 1, 1 + 3\varepsilon] \Leftrightarrow y = 2\varepsilon + 2z\varepsilon$$

$$(1, y, z) \in [2 + \varepsilon, 1, 1 + \varepsilon] \Leftrightarrow y = 2 + 2\varepsilon + z(2 + 2\varepsilon)$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarıldığında $2z\varepsilon + 2\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değeri olmadığından, bu iki doğrunun arakesit noktası $(1, y, z)$ tipinde olamaz.

4.3.2.2. Birinci tipten doğrularının arakesitleri

Birinci tipten verilen keyfi $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğruları için, $n, a \in \mathbb{I}$ olduğundan $n - a \in \mathbb{I}$ olur ve bu nedenle

$$[1, n, p] \sim [1, a, b] \Leftrightarrow p - b \in \mathbb{I}$$

olduğu elde edilir. Aynı komşulukta olmayan doğruların PK2 gereği arakesit noktalarının bir tek olduğu gösterilmelidir. Bu nedenle aşağıda $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesitleri bu doğruların aynı komşulukta olup olmamalarına göre ayrı ayrı incelenecektir.

4.3.2.2.1 $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğruları farklı komşulukta ise $p - b \notin \mathbb{I}$ olmalıdır.

4.3.2.2.1.1. Farklı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Rightarrow x = yn + p$$

ve

$$(x, y, 1) \in [1, a, b] \Rightarrow x = ya + b$$

olup, bulunan eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y(n - a) = -(p - b)$$

denklemi elde edilir. $n - a \in \mathbb{I}$ olduğundan eşitliğin sol tarafı $\mathbb{I}$ nın elemanıdır. Doğrular aynı komşulukta olmadığından $p - b \notin \mathbb{I}$ dır ki bu son eşitliğin sağ tarafının $\mathbb{I}$ da olmadığını gösterir. Bu nedenle $y(n - a) = -(p - b)$ denkleminin çözümü yoktur. Bu $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının 3. tipten bir arakesit noktalarının olmayacağı anlamına gelir.

4.3.2.2.1.2. Farklı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının (w,1,z) tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Rightarrow w = n + zp$$

ve

$$(w, 1, z) \in [1, a, b] \Rightarrow w = a + zb$$

olup, bulunan eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$z(p - b) = -(n - a)$$

eşitliği elde edilir. $p-b$, $\mathbb{I}$ nın elemanı olmadığından $p-b$ nin bir tek tersi vardır. Son eşitlik sağdan $p-b$ elemanının tersi ile çarpıldığında

$$z=-(n-a)(p-b)^{-1}$$

olduğu elde edilir. Bulunan bu z değeri $w=n+zp$ eşitliğinde yerine yazılarak,

$$(w,1,z)=(n+(-(n-a)(p-b)^{-1})p,1,\ -(n-a)(p-b)^{-1})$$

olduğu görülür. Yani farklı komşuluklardaki $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının tek arakesit noktası bulunan bir noktadır.

4.3.2.2.2. $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğruları aynı komşulukta ise 1. tip doğru tanımı gereği $n-a=n_1-a_1+(n_2-a_2)\varepsilon\ \in\mathbb{I}$ dir. Bu nedenle n_1-a_1 için iki durum söz konusudur: $n_1-a_1=0$ ya da $n_1-a_1=2$.

$[1,n,p]\sim[1,a,b]$ olması için $n-a\in\mathbb{I}$ olması yeterli değildir, aynı zamanda $p-b\in\mathbb{I}$ olmalıdır.

$$p-b\in\mathbb{I}\ \Leftrightarrow\ p_1-b_1+(p_2-b_2)\varepsilon\ \ \in\mathbb{I}$$

olacağından $[1,n,p]\sim[1,a,b]$ olması ancak n_1-a_1 ve p_1-b_1 nin 0 ya da 2 olması durumlarında mümkündür. Bu nedenle inceleme aşağıda belirtilen dört durum göz önüne alınarak yapılacaktır.

$$n_1-a_1=0 \text{ ve } p_1-b_1=0$$

$$n_1-a_1=0 \text{ ve } p_1-b_1=2$$

$$n_1-a_1=2 \text{ ve } p_1-b_1=0$$

$$n_1-a_1=2 \text{ ve } p_1-b_1=2$$

olması gerektiği elde edilir.

4.3.2.2.2.1. $\mathbf{n_1 - a_1 = 0}$ ve $\mathbf{p_1 - b_1 = 0}$ olsun.

Bu durumda

$$n - a = (n_1 - a_1) + (n_2 - a_2)\varepsilon = (n_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$p - b = (p_1 - b_1) + (p_2 - b_2)\varepsilon = (p_2 - b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.2.2.1.1 Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olması durumunu araştıralım.

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

ve

$$(x, y, 1) \in [1, a, b] \Leftrightarrow x = ya + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y\big((n_2 - a_2)\varepsilon\big) = -(p_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.10)$$

eşitliği elde edilir. $n_2 - a_2$ ve $p_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.10) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.11 de verilmiştir.

Çizelge 4.11.$n_2 - a_2$ ve $p_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.10) denklemin hâlleri ve varsa çözümleri

p_2-b_2 / n_2-a_2	0	1	2	3
0	$[\mathbf{1}, \mathbf{n}, \mathbf{p}] = [\mathbf{1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (Doğrular farklı değildir.)	**Denklem:** $\boldsymbol{-\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = \varepsilon,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = -\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 3,$ $y = 3 + \varepsilon,$ $y = 3 + 2\varepsilon,$ $y = 3 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon,$ $y = 2 + 3$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = \varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1,$ $y = 1 + \varepsilon,$ $y = 1 + 2\varepsilon,$ $y = 1 + 3\varepsilon$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0, \; y = 3\varepsilon,$ $y = 2, \; y = 2 + \varepsilon,$ $y = \varepsilon, \; y = 2 + 2\varepsilon,$ $y = 2\varepsilon, y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1, \quad y = 3 + \varepsilon,$ $y = 3, \quad y = 3 + 2\varepsilon,$ $y = 1 + \varepsilon, y = 3 + 3\varepsilon$ $y = 1 + 2\varepsilon, y = 1 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = \varepsilon,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = -\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1,$ $y = 1 + \varepsilon,$ $y = 1 + 2\varepsilon,$ $y = 1 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = \varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 3,$ $y = 3 + \varepsilon,$ $y = 3 + 2\varepsilon,$ $y = 3 + 3\varepsilon,$

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan y değerlerine göre $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $p_2 - b_2 = 0$ ve $n_2 - a_2 = 1$ iken $y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(p, 0, 1), (n\varepsilon + p, \varepsilon, 1), (2n\varepsilon + p, 2\varepsilon, 1), (3n\varepsilon + p, 3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \;\text{ ve }\; n_2 - a_2 = 2 \;\text{ iken}}$ $2y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, \varepsilon, 2\varepsilon, \; 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(p, 0,1), (2n+p, 2,1), (n\varepsilon+p, \varepsilon, 1), (2n\varepsilon+p, 2\varepsilon, 1), (3n\varepsilon+p, 3\varepsilon, 1), ((2+\varepsilon)n+ p, 2+\varepsilon, 1), ((2+2\varepsilon)n+p, 2+2\varepsilon, 1), ((2+3\varepsilon)n+p, 2+3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \;\text{ ve }\; n_2 - a_2 = 3 \;\text{ iken}}$ $3y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(p, 0,1), (n\varepsilon+p, \varepsilon, 1), (2n\varepsilon+p, 2\varepsilon, 1), (3n\varepsilon+p, 3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \text{ ve } n_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+\; 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3n+p, 3,1), \big((3+\varepsilon)n+p, (3+\varepsilon), 1\big), \big((3+2\varepsilon)n+p, (3+2\varepsilon), 1\big),$$

$$((3+3\varepsilon)n+p, (3+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \;\text{ ve }\; n_2 - a_2 = 3 \;\text{ iken}}$ $3y\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+\; 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+p,1,1),\big((1+\varepsilon)n+p,(1+\varepsilon),1\big),\big((1+2\varepsilon)n+p,(1+2\varepsilon),1\big),$$

$$((1+3\varepsilon)n+p,(1+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=1 \text{ iken}}$ $y\varepsilon=2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2n+p,2,1),\big((2+\varepsilon)n+p,(2+\varepsilon),1\big),\big((2+2\varepsilon)n+p,(2+2\varepsilon),1\big),$$

$$((2+3\varepsilon)n+p,(2+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=2 \text{ iken}}$ $2y\varepsilon=2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,3,1+\varepsilon,1+2\varepsilon,1+3\varepsilon,3+\varepsilon,3+2\varepsilon,3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+p,1,1),(3n+p,3,1),\big((1+\varepsilon)n+p,(1+\varepsilon),1\big),$$

$$\big((1+2\varepsilon)n+p,(1+2\varepsilon),1\big),\big((1+3\varepsilon)n+p,1+3\varepsilon,1\big),$$

$$\big((3+\varepsilon)n+p,3+\varepsilon,1\big),\big((3+2\varepsilon)n+p,3+2\varepsilon,1\big),((3+3\varepsilon)n+p,3+3\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=3 \text{ iken}}$ $3y\varepsilon=2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2n+p,2{,}1),\big((2+\varepsilon)n+p,(2+\varepsilon),1\big),\big((2+2\varepsilon)n+p,(2+2\varepsilon),1\big),$$
$$((2+3\varepsilon)n+p,(2+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=1 \text{ iken}}$ $y\varepsilon=\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1{,}1+\varepsilon,1+2\varepsilon,1+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+p,1{,}1),\big((1+\varepsilon)n+p,(1+\varepsilon),1\big),\big((1+2\varepsilon)n+p,(1+2\varepsilon),1\big),$$
$$((1+3\varepsilon)n+p,(1+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=3 \text{ iken}}$ $3y\varepsilon=\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3,3+\varepsilon,3+2\varepsilon,3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının$(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(3n+p,3{,}1),\big((3+\varepsilon)n+p,(3+\varepsilon),1\big),\big((3+2\varepsilon)n+p,(3+2\varepsilon),1\big),$$
$$((3+3\varepsilon)n+p,(3+3\varepsilon),1)\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.2.2.1.2 Aynı komşulukta olan $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının arakesit noktasının $(w,1,z)$ tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(w,1,z)\in[1,n,p]\Leftrightarrow w=n+zp$$

ve

$$(w,1,z)\in[1,a,b]\Leftrightarrow w=a+zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$z\big((p_2-b_2)\varepsilon\big)=-(n_2-a_2)\varepsilon \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. $p_2 - b_2$ ve $n_2 - a_2$ nin alabileceği değerlere göre bu denklemin durumunu incelemek için aşağıdaki gibi bir çizelge hazırlanır.

Çizelge 4.12. $n_2 - a_2$ ve $p_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.11) denklemin hâlleri ve varsa çözümleri

p_2-b_2 / n_2-a_2	0	1	2	3
0	$[\mathbf{1},\mathbf{n},\mathbf{p}]=[\mathbf{1},\mathbf{a},\mathbf{b}]$ (Doğrular farklı değildir.)	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon=0}$ **Çözümleri:** $z=0,$ $z=\varepsilon,$ $z=2\varepsilon,$ $z=3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2z\varepsilon=0}$ **Çözümleri:** $z=0,\ \ z=2$ $z=\varepsilon,\ \ z=2+\varepsilon$ $z=2\varepsilon, z=2+2\varepsilon$ $z=3\varepsilon\ z=2+3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{3z\varepsilon=0}$ **Çözümleri:** $z=0,$ $z=\varepsilon,$ $z=2\varepsilon,$ $z=3\varepsilon$
1	**Denklem:** $\boldsymbol{-\varepsilon=0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon+\varepsilon=0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2z\varepsilon=3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{3z\varepsilon=3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2\varepsilon=0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon=2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z=2,$ $z=2+\varepsilon,$ $z=2+2\varepsilon,$ $z=2+3$	**Denklem:** $\boldsymbol{2z\varepsilon=2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{3z\varepsilon=2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z=2,$ $z=2+\varepsilon,$ $z=2+2\varepsilon,$ $z=2+3\varepsilon$
3	**Denklem:** $\boldsymbol{-3\varepsilon=0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z\varepsilon=\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2z\varepsilon=\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{3z\varepsilon=\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan z değerlerine göre $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- <u>$p_2 - b_2 = 1$ ve $n_2 - a_2 = 0$ iken</u> $z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n,1,0),(n+p\varepsilon,1,\varepsilon),(n+2p\varepsilon,1,2\varepsilon),(n+3p\varepsilon,1,3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \text{ ve } n_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $z\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+2p, 1,2), \big(n+(2+\varepsilon)p, 1, (2+\varepsilon)\big), (n+(2+2\varepsilon)p, 1,2+2\varepsilon),$$

$$(n+(2+3\varepsilon)p, 1,2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \text{ ve } n_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ 1eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi,

$$\{(n, 1,0), (n+2p, 1,2), (n+p\varepsilon, 1, \varepsilon), (n+2p\varepsilon, 1,2\varepsilon), (n+3p\varepsilon, 1,3\varepsilon),$$

$$(n+(2+\varepsilon)p, 1, (2+\varepsilon), (n+(2+2\varepsilon)p, 1, (2+2\varepsilon), (n+(2+3\varepsilon)p, 1, (2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 3 \text{ ve } n_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $3z\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n, 1,0), (n+p\varepsilon, 1, \varepsilon), (n+2p\varepsilon, 1,2\varepsilon), (n+3p\varepsilon, 1,3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 3 \text{ ve } n_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $3z\varepsilon + 2\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi,

$$\{(n+2p, 1,2), (n+(2+\varepsilon)p, 1,2+\varepsilon), (n+(2+2\varepsilon)p, 1,2+2\varepsilon),$$

$$(n+(2+3\varepsilon)p, 1,2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir

4.3.2.2.2.2. $\mathbf{n_1 - a_1 = 0}$ ve $\mathbf{p_1 - b_1 = 2}$ olsun.

Bu durumda

$$n - a = (n_1 - a_1) + (n_2 - a_2)\varepsilon = (n_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$p - b = (p_1 - b_1\,) + (p_2 - b_2\,)\varepsilon = 2 + (p_2 - b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.2.2.2.1. Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

ve

$$(x, y, 1) \in [1, a, b] \Leftrightarrow x = ya + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılıp $n - a = (n_2 - a_2)\varepsilon$ ve $p - b = 2 + (p_2 - b_2)\varepsilon$ olduğu kullanılırsa

$$y((n_2 - a_2)\varepsilon) = 2 - (p_2 - b_2)\varepsilon$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda $0 \neq 2$ olduğundan çözüm yoktur ve dolayısıyla bu iki doğrunun $(x, y, 1)$ tipinde bir arakesit noktası olamaz.

4.3.2.2.2.2.2. Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(w, 1, z)$ tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

$$(w, 1, z) \in [1, a, b] \Leftrightarrow w = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılıp $\mathrm{n} - \mathrm{a} = (\mathrm{n}_2 - \mathrm{a}_2)\varepsilon$ ve $\mathrm{p} - \mathrm{b} = 2 + (\mathrm{p}_2 - \mathrm{b}_2)\varepsilon$ olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{z}(2 + (\mathrm{p}_2 - \mathrm{b}_2)\varepsilon) = -(\mathrm{n}_2 - \mathrm{a}_2)\varepsilon \tag{4.12}$$

eşitliği elde edilir. $\mathrm{p}_2 - \mathrm{b}_2$ ve $\mathrm{n}_2 - \mathrm{a}_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.12) denkleminin durumunu incelemek için aşağıdaki çizelge kullanılacaktır.

Çizelge 4.13. $\mathrm{n}_2 - \mathrm{a}_2$ ve $\mathrm{p}_2 - \mathrm{b}_2$ nin alacağı değerlere göre (4.12) denklemin hâlleri ve varsa çözümleri

n_2-a_2 / n_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$, $z = 2$, $z = 2\varepsilon$, $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$, $z = 2\varepsilon$, $z = 2 + \varepsilon$, $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$, $z = 2$, $z = 2\varepsilon$, $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $z = 0$, $z = 2\varepsilon$, $z = 2 + \varepsilon$, $z = 2 + 3\varepsilon$
1	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+2\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+3\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = \varepsilon$ $z = 3\varepsilon$ $z = 2 + \varepsilon$, $z = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = 2$, $z = \varepsilon$, $z = 3\varepsilon$, $z = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = \varepsilon$, $z = 3\varepsilon$, $z = 2 + \varepsilon$, $z = 2 + 3\varepsilon$,	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $z = 2$, $z = \varepsilon$, $z = 3\varepsilon$, $z = 2 + 2\varepsilon$
3	**Denklem:** $\boldsymbol{2z = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+2\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{z(2+3\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan z değerlerine göre $[1, \mathrm{n}, \mathrm{p}]$ ve $[1, \mathrm{a}, \mathrm{b}]$ doğrularının $(\mathrm{w}, 1, \mathrm{z})$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \ \text{ve} \ n_2 - a_2 = 0 \ \text{iken}}$ $2z = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi,

$$\{(n, 1,0), (n + 2p, 1,2), (n + 2p\varepsilon, 1,2\varepsilon), (n + (2 + 2\varepsilon)p, 1,2 + 2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \ \text{ve} \ n_2 - a_2 = 2 \ \text{iken}}$ $2z = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n + \varepsilon p, 1, \varepsilon), (n + 3p\varepsilon, 1,3\varepsilon), (n + (2 + \varepsilon)p, 1,2 + \varepsilon), (n + (2 + 3\varepsilon)p, 1,2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \ \text{ve} \ n_2 - a_2 = 0 \ \text{iken}}$ $z(2 + \varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2\varepsilon, \ 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n, 1,0), (n + 2p\varepsilon, 1,2\varepsilon), (n + (2 + \varepsilon)p, 1,2 + \varepsilon), (n + (2 + 3\varepsilon)p, 1,2 + 3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \ \text{ve} \ n_2 - a_2 = 2 \ \text{iken}}$ $z(2 + \varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n + 2p, 1,2), (n + p\varepsilon, 1, \varepsilon), (n + 3p\varepsilon, 1,3\varepsilon), (n + (2 + 2\varepsilon)p, 1,2 + 2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \ \text{ve} \ n_2 - a_2 = 0 \ \text{iken}}$ $z(2 + 2\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w = n + zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n,1,0),(n+2p,1,2),(n+2p\varepsilon,1,2\varepsilon),(n+(2+2\varepsilon)p,1,2+2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=2 \text{ iken}}$ $z(2+2\varepsilon)=2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{\varepsilon,3\varepsilon,\ 2+\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w=n+zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+p\varepsilon,1,\varepsilon),(n+3p\varepsilon,1,3\varepsilon),(n+(2+\varepsilon)p,1,2+\varepsilon),(n+(2+3\varepsilon)p,1,2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=0 \text{ iken}}$ $z(2+3\varepsilon)=0$ denklemini sağlayan z değerleri $\{0,2\varepsilon,2+\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w=n+zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n,1,0),(n+2p\varepsilon,1,2\varepsilon),(n+(2+\varepsilon)p,1,2+\varepsilon),(n+(2+3\varepsilon)p,1,2+3\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=2 \text{ iken}}$ $z(2+3\varepsilon)=2\varepsilon$ denklemini sağlayan z değerleri $\{2,\varepsilon,3\varepsilon,2+2\varepsilon\}$ olduğundan z nin bu değerleri $w=n+zp$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n+2p,1,2)(n+p\varepsilon,1,\varepsilon),(n+3p\varepsilon,1,3\varepsilon),(n+(2+2\varepsilon)p,1,2+2\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.2.2.3. $\mathbf{n_1-a_1=2}$ ve $\mathbf{p_1-b_1=0}$ olsun.

Bu durumda

$$n-a=(n_1-a_1)+(n_2-a_2)\varepsilon=2+(n_2-a_2)\varepsilon$$

ve

$$p-b=(p_1-b_1)+(p_2-b_2)\varepsilon=(p_2-b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.2.2.3.1. Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

ve

$$(x, y, 1) \in [1, a, b] \Leftrightarrow x = ya + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y(n - a) + (p - b) = 0$$

elde edilir. Burada $n - a = 2 + (n_2 - a_2)\varepsilon$ ve $p - b = (p_2 - b_2)\varepsilon$ olduğundan

$$y(2 + (n_2 - a_2)\varepsilon) = -(p_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.13)$$

denklemi elde edilir. $p_2 - b_2$ ve $n_2 - a_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.13) denkleminin durumunu incelemek için aşağıdaki çizelge kullanılacaktır.

Çizelge 4.14. $n_2 - a_2$ ve $p_2 - b_2$ nin alacağı değerlere göre (4.13) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

n_2-a_2 / n_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = \varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = \varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = \varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = \varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan y değerlerine göre $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2y = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi
$$\{(p, 0,1), (2n + p, 2,1), (2n\varepsilon + p, 2\varepsilon, 1), ((2 + 2\varepsilon)n + p, 2 + 2\varepsilon, 1)\}$$
olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(p, 0,1), (2n\varepsilon + p, 2\varepsilon, 1), \big((2+\varepsilon)n + p, 2+\varepsilon, 1\big), ((2+3\varepsilon)n + p, 2+3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2+2\varepsilon,\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\big\{(p, 0,1), (2n + p, 2,1), (2n\varepsilon + p, 2\varepsilon, 1), \big((2+2\varepsilon)n + p, 2+2\varepsilon, 1\big)\big\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon,\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\big\{(p, 0,1), (2n\varepsilon + p, 2\varepsilon, 1), \big((2+\varepsilon)n + p, 2+\varepsilon, 1\big), \big((2+3\varepsilon)n + p, 2+3\varepsilon, 1\big)\big\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \text{ ve } n_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2y = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon,\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n\varepsilon + p, \varepsilon, 1), (3n\varepsilon + p, 3\varepsilon, 1), \big((2+\varepsilon)n + p, 2+\varepsilon, 1\big), ((2+3\varepsilon)n + p, 2+3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \text{ ve } n_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2n+p,2,1),(n\varepsilon+p,\varepsilon,1),(3n\varepsilon+p,3\varepsilon,1),((2+2\varepsilon)n+p,2+2\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \text{ ve } n_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n\varepsilon+p,\varepsilon,1),(3n\varepsilon+p,3\varepsilon,1),\big((2+\varepsilon)n+p,2+\varepsilon,1\big),((2+2\varepsilon)n+p,2+2\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 2 \text{ ve } n_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2n+p,2,1),(n\varepsilon+p,\varepsilon,1),(3n\varepsilon+p,3\varepsilon,1),((2+2\varepsilon)n+p,2+2\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.2.2.3.2. Aynı komşulukta olan $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının arakesit noktasının (w,1,z) tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(w,1,z) \in [1,n,p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

ve

$$(w,1,z) \in [1,a,b] \Leftrightarrow w = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$z\big((p_2 - b_2)\varepsilon\big) = 2 - (n_2 - a_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda $0 \neq 2$ olduğundan çözüm yoktur ve dolayısıyla bu iki doğrunun $(w,1,z)$ tipinde bir arakesit noktası olamaz.

4.3.2.2.2.4. $\mathbf{n_1 - a_1 = 2}$ ve $\mathbf{p_1 - b_1 = 2}$ olsun.

Bu durumda

$$n - a = (n_1 - a_1) + (n_2 - a_2)\varepsilon = 2 + (n_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$p - b = (p_1 - b_1) + (p_2 - b_2)\varepsilon = 2 + (p_2 - b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.2.2.4.1 Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının (w,1,z) tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [1, n, p] \Leftrightarrow w = n + zp$$

ve

$$(w, 1, z) \in [1, a, b] \Leftrightarrow w = a + zb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$z(2 + (p_2 - b_2)\varepsilon) = 2 - (n_2 - a_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda $2z = 2$ olduğundan çözüm yoktur ve dolayısıyla bu iki doğrunun $(w, 1, z)$ tipinde bir arakesit noktası olamaz.

4.3.2.2.2.4.2 Aynı komşulukta olan $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının arakesit noktasının $(x, y, 1)$ tipinde olması durumu araştırılacaktır.

$$(x, y, 1) \in [1, n, p] \Leftrightarrow x = yn + p$$

ve

$$(x, y, 1) \in [1, a, b] \Leftrightarrow x = ya + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y(n - a) + (p - b) = 0$$

elde edilir. Burada $\mathrm{n}-\mathrm{a}=2+(\mathrm{n}_2-\mathrm{a}_2)\varepsilon$ ve $\mathrm{p}-\mathrm{b}=2+(\mathrm{p}_2-\mathrm{b}_2)\varepsilon$ olduğundan

$$\mathrm{y}(2+(\mathrm{n}_2-\mathrm{a}_2)\varepsilon)=2-(\mathrm{p}_2-\mathrm{b}_2)\varepsilon \tag{4.14}$$

elde edilir. $\mathrm{n}_2-\mathrm{a}_2$ ve $\mathrm{p}_2-\mathrm{b}_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.14) denkleminin durumunu ve çözümlerini incelemek için aşağıdaki çizelge kullanılacaktır.

Çizelge 4.15. $\mathrm{n}_2-\mathrm{a}_2$ ve $\mathrm{p}_2-\mathrm{b}_2$ nin alacağı değerlere göre (4.14) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

p_2-b_2 / n_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2y=2}$ **Çözümleri:** $y=1$, $y=3$, $y=1+2\varepsilon$, $y=3+2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y=2-\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y=2-2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=1+\varepsilon$, $y=1+3\varepsilon$, $y=3+\varepsilon$, $y=3+3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y=2+\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+\varepsilon)=2}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+\varepsilon)=2-\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=3$, $y=1+\varepsilon$, $y=1+3\varepsilon$, $y=3+2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+\varepsilon)=2+2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+\varepsilon)=2+\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=1$ $y=1+2\varepsilon$ $y=3+\varepsilon$, $y=3+3\varepsilon$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+2\varepsilon)=2}$ **Çözümleri:** $y=1+\varepsilon$, $y=1+3\varepsilon$, $y=3+\varepsilon$, $y=3+3\varepsilon$,	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+2\varepsilon)=2-\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+2\varepsilon)=2+2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=1$, $y=3$, $y=1+2\varepsilon$, $y=3+2\varepsilon$,	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+2\varepsilon)=2+\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+3\varepsilon)=2}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+3\varepsilon)=2-\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=1$ $y=1+2\varepsilon$ $y=3+\varepsilon$, $y=3+3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+3\varepsilon)=2+2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2+3\varepsilon)=2+\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y=3$ $y=1+\varepsilon$ $y=1+3\varepsilon$, $y=3+2\varepsilon$

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan y değerlerine göre $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2y = 2$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 3, 1 + 2\varepsilon, 3 + 2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(n + p, 1,1), (3n + p, 3,1), \big((1 + 2\varepsilon)n + p, 1 + 2\varepsilon, 1\big), ((3 + 2\varepsilon)n + p, 3 + 2\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 0 \text{ ve } n_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2 + 2\varepsilon) = 2$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1 + \varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 3 + \varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{\big((1 + \varepsilon)n + p, 1 + \varepsilon, 1\big), \big((1 + 3\varepsilon)n + p, 1 + 3\varepsilon, 1\big), \big((3 + \varepsilon)n + p, 3 + \varepsilon, 1\big),$$

$$((3 + 3\varepsilon)n + p, 3 + 3\varepsilon, 1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \text{ ve } n_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y(2 + \varepsilon) = 2 - \varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 1 + \varepsilon, 1 + 3\varepsilon, 3 + 2\varepsilon, \}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{\big((3n + p, 3,1), (1 + \varepsilon)n + p, 1 + \varepsilon, 1\big), \big((1 + 3\varepsilon)n + p, 1 + 3\varepsilon, 1\big),$$

$$\big((3 + 2\varepsilon)n + p, 3 + 2\varepsilon, 1\big)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2 - b_2 = 1 \text{ ve } n_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y(2 + 3\varepsilon) = 2 - \varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,1 + 2\varepsilon, 3 + \varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x = yn + p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1, n, p]$ ve $[1, a, b]$ doğrularının $(x, y, 1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{((n+p,1,1),(1+2\varepsilon)n+p,1+2\varepsilon,1),((3+\varepsilon)n+p,3+\varepsilon,1),$$

$$((3+3\varepsilon)n+p,3+3\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=0 \text{ iken}}$ $2y=2+2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1+\varepsilon,1+3\varepsilon,3+\varepsilon,3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\left(((1+\varepsilon)n+p,1+\varepsilon,1),(1+3\varepsilon)n+p,1+3\varepsilon,1\right),((3+\varepsilon)n+p,3+\varepsilon,1)$$
$$((3+3\varepsilon)n+p,3+3\varepsilon,1)$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=2 \text{ ve } n_2-a_2=2 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon)=2+2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,3,1+2\varepsilon,3+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{((n+p,1,1),(3n+p,3,1),(1+2\varepsilon)n+p,1+2\varepsilon,1),((3+2\varepsilon)n+p,3+2\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=1 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon)=2+\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,1+2\varepsilon,3+\varepsilon,3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{((n+p,1,1),(1+2\varepsilon)n+p,1+2\varepsilon,1),((3+\varepsilon)n+p,(3+\varepsilon),1),$$

$$((3+3\varepsilon)n+p,3+3\varepsilon,1)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{p_2-b_2=3 \text{ ve } n_2-a_2=3 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon)=2+\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3,1+\varepsilon,1+3\varepsilon,3+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $x=yn+p$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğrularının $(x,y,1)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{\big((3n+p,3,1),(1+\varepsilon)n+p,1+\varepsilon,1\big),\big((1+3\varepsilon)n+p,(1+3\varepsilon),1\big),$$

$$\big((3+2\varepsilon)n+p,3+2\varepsilon,1\big)\}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.3.2.2.2.4.2.1. $n_1=2,\ n_2=0\ ,\ a_1=0,\ a_2=0$ ve $p_1=2,\ p_2=1,\ b_1=0,$ $b_2=1$ alındığında elde edilen $[1,n,p]$ ve $[1,a,b]$ doğruları sırasıyla $[1,2,2+\varepsilon]$ ve $[1,0,\varepsilon]$ olup bu doğruların aynı komşulukta oldukları aşikardır. Bu doğruların birinci tipten bir arakesiti olamayacağından inceleme ikinci ve üçüncü tipten noktalar için yapılmalıdır. Arakesit noktası üçüncü tipten bir nokta ise

$$(x,y,1)\in\ [1,0,\varepsilon]\Longrightarrow x=\varepsilon$$

$$(x,y,1)\in[1,2,2+\varepsilon]\Longrightarrow x=2y+2+\varepsilon$$

olur ve $x=\varepsilon$ olduğu $x=2y+2+\varepsilon$ eşitliğinde kullanılırsa y nin alacağı değerler $\{1,3,1+2\varepsilon,3+2\varepsilon\}$ olacağından bu iki doğrunun arakesit noktaları;

$$(\varepsilon,1,1),(\varepsilon,3,1),(\varepsilon,1+2\varepsilon,1),(\varepsilon,3+2\varepsilon,1)$$

olduğu bulunur. Arakesit noktası ikinci tipten bir nokta ise

$$(w,1,z)\in\ [1,0,\varepsilon]\Longrightarrow w=z\varepsilon$$

$$(w,1,z)\in[1,2,2+\varepsilon]\Longrightarrow w=2+2z+z\varepsilon$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında $2z=2$ eşitliği elde edilir ki bu çözümün olmadığını gösterir. Burada bulunan sonuçlar Çizelge 4.15 de genel durum için verilen hesaplamalarla uyumludur.

4.3.2.3. Üçüncü tipten doğrularının arakesitleri

$[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğruları için, 3. tip doğru tanımı gereği $q,n,a,b\in\mathbb{I}$ olduğundan $q-a$ ve $n-b$ elemanlarının ikisi de $\mathbb{I}$ nın elemanıdır. Dolayısıyla $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$

doğruları aynı komşuluktadır. Yani üçüncü tipten doğruların tümü aynı komşuluktadır, ikisi de üçüncü tipten olup farklı komşuluklarda olan doğrular yoktur. Bu durumda

$$\mathrm{q}-\mathrm{a} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1+(\mathrm{q}_2-\mathrm{a}_2)\varepsilon \in \mathbb{I}$$

$$\mathrm{n}-\mathrm{b} \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1+(\mathrm{n}_2-\mathrm{b}_2)\varepsilon \in \mathbb{I}$$

olup $\mathbb{I}$ nın elemanlarının gerçel kısımlarının 0 ya da 2 olacağı kullanıldığında inceleme-nin aşağıdaki dört durumda yapılması gerektiği elde edilir.

$$\mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1=0 \text{ ve } \mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1=0$$

$$\mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1=0 \text{ ve } \mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1=2$$

$$\mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1=2 \text{ ve } \mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1=0$$

$$\mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1=2 \text{ ve } \mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1=2$$

Aşağıda bu durumlar için inceleme ayrı ayrı başlıklar altında yapılacaktır.

4.3.2.3.1. $\mathbf{q_1-a_1=0}$ ve $\mathbf{n_1-b_1=0}$ olsun.

Bu durumda

$$\mathrm{q}-\mathrm{a}=(\mathrm{q}_1-\mathrm{a}_1)+(\mathrm{q}_2-\mathrm{a}_2)\varepsilon=(\mathrm{q}_2-\mathrm{a}_2)\varepsilon$$

ve

$$\mathrm{n}-\mathrm{b}=(\mathrm{n}_1-\mathrm{b}_1)+(\mathrm{n}_2-\mathrm{b}_2)\varepsilon=(\mathrm{n}_2-\mathrm{b}_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[\mathrm{q},\mathrm{n},1]$ ve $[\mathrm{a},\mathrm{b},1]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.3.1.1 Aynı komşulukta olan $[\mathrm{q},\mathrm{n},1]$ ve $[\mathrm{a},\mathrm{b},1]$ doğrularının arakesit noktasının $(1,\mathrm{y},\mathrm{z})$ tipinde olup olmayacağını araştırılacaktır.

$$(1,\mathrm{y},\mathrm{z}) \in [\mathrm{q},\mathrm{n},1] \Leftrightarrow \mathrm{z}=\mathrm{q}+\mathrm{yn}$$

ve

$$(1,\mathrm{y},\mathrm{z}) \in [\mathrm{a},\mathrm{b},1] \Leftrightarrow \mathrm{z}=\mathrm{a}+\mathrm{yb}$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında;

$$y\big((n_2 - b_2)\varepsilon\big) = -(q_2 - a_2)\varepsilon \tag{4.15}$$

denklemi elde edilir. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.15) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.16 da verilmiştir.

Çizelge 4.16. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alabilecekleri değerlere göre (4.15) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

q_2-a_2 / n_2-b_2	0	1	2	3
0	$[\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{1}] = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{1}]$ (Doğrular farklı değildir.)	**Denklem:** $\boldsymbol{-\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{-2\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0$, $y = \varepsilon$, $y = 2\varepsilon$, $y = 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = 3\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 3$, $y = 3 + \varepsilon$, $y = 3 + 2\varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2$, $y = 2 + \varepsilon$, $y = 2 + 2\varepsilon$, $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y\varepsilon = \varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1$ $y = 1 + \varepsilon$ $y = 1 + 2\varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0$, $y = 2$ $y = \varepsilon$, $y = 2 + \varepsilon$ $y = 2\varepsilon$, $y = 2 + 2\varepsilon$ $y = 3\varepsilon$, $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1$, $y = 3 + 2\varepsilon$ $y = 1 + 3\varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$ $y = 1 + \varepsilon$, $y = 3 + \varepsilon$ $y = 1 + 2\varepsilon$, $y = 3$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y\varepsilon = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0$, $y = \varepsilon$, $y = 2\varepsilon$, $y = 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = -\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1$ $y = 1 + \varepsilon$ $y = 1 + 2\varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2$, $y = 2 + \varepsilon$ $y = 2 + 2\varepsilon$, $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{3y\varepsilon = \varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 3$ $y = 3 + \varepsilon$ $y = 3 + 2\varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda elde edilen y değerlerine göre $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının (1,y,z) tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0,q), (1, \varepsilon, q + n\varepsilon), (1,2\varepsilon, q + 2n\varepsilon), (1,3\varepsilon, q + 3n\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 3 + \varepsilon, 3 + 2\varepsilon, 3 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının (1,y,z) tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,3, q + 3n), (1,3 + \varepsilon, q + (3 + \varepsilon)n), (1,3 + 2\varepsilon, q + (3 + 2\varepsilon)n,$$

$$(1,3 + 3\varepsilon, q + (3 + 3\varepsilon)n\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2,2 + \varepsilon, 2 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,2, q + 2n), (1,2 + \varepsilon, q + (2 + \varepsilon)n), (1,2 + 2\varepsilon, q + (2 + 2\varepsilon)n),$$

$$(1,2 + 3\varepsilon, q + (2 + 3\varepsilon)n\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y\varepsilon = \varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon, 1 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1, q + n), (1,1 + \varepsilon, q + (1 + \varepsilon)n), (1,1 + 2\varepsilon, q + (1 + 2\varepsilon)n),$$

$$(1,1 + 3\varepsilon, q + (1 + 3\varepsilon)n\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \;\text{ ve }\; q_2 - a_2 = 0 \;\text{ iken}}$ $2y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+\;3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0,q), (1,2,q+2n), (1,\varepsilon, q+n\varepsilon), (1,2\varepsilon, q+2n\varepsilon), (1,3\varepsilon, q+3n\varepsilon),$$

$$(1,2+\varepsilon, q+(2+\varepsilon)n), (1,2+2\varepsilon, q+(2+2\varepsilon)n), (1,2+3\varepsilon, q+(2+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \;\text{ ve }\; q_2 - a_2 = 2 \;\text{ iken}}$ $2y\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 3, 1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+\;3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1,q+n), (1,3,q+3n), (1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+2\varepsilon, q+(1+2\varepsilon)n,),$$

$$(1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n, (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n), (1,3+2\varepsilon, q+(3+2\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \;\text{ ve }\; q_2 - a_2 = 0 \;\text{ iken}}$ $3y\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının (1,y,z) tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0,q), (1,\varepsilon, q+n\varepsilon), (1,2\varepsilon, q+2n\varepsilon), (1,3\varepsilon, q+3n\varepsilon)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \;\text{ ve }\; q_2 - a_2 = 1 \;\text{ iken}}$ $3y\varepsilon = -\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 1+\varepsilon, 1+2\varepsilon, 1+\;3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1,q+n), (1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+2\varepsilon, q+(1+2\varepsilon)n),$$

$$\{(1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \;\text{ ve }\; q_2 - a_2 = 2 \;\text{ iken}}$ $3y\varepsilon = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2, 2+\varepsilon, 2+2\varepsilon, 2+\ 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,2, q+2n), (1,2+\varepsilon, q+(2+\varepsilon)n), (1,2+2\varepsilon, q+(2+2\varepsilon)n),$$

$$(1,2+3\varepsilon, q+(2+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $3y\varepsilon = \varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 3+\varepsilon, 3+2\varepsilon, 3+\ 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,3, q+3n), (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n), (1,3+2\varepsilon, q+(3+2\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.3.1.2 Aynı komşulukta olan $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının $(w, 1, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$$

ve

$$(w, 1, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = wa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$w\big((q_2 - a_2)\varepsilon\big) = -(n_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.16)$$

denklemi elde edilir. $q_2 - a_2$ ve $n_2 - b_2$) nin alabileceği değerlere göre (4.16) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.17 de verilmiştir.

Çizelge 4.17. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alacağı değerlere göre (4.16) denkleminin hâlleri ve varsa çözümleri

q_2-a_2 / n_2-b_2	0	1	2	3
0	Denklem: $\mathbf{0 = 0}$ $[q, n, 1] = [a, b, 1]$	Denklem: $\boldsymbol{w\varepsilon = 0}$ Çözümleri: $w = 0$, $w = \varepsilon$, $w = 2\varepsilon$, $w = 3\varepsilon$,	Denklem: $\boldsymbol{2w\varepsilon = 0}$ Çözümleri: $w = 0, w = 2$ $w = \varepsilon, w = 2 + \varepsilon$ $w = 2\varepsilon, w = 2 + 2\varepsilon$ $w = 3\varepsilon, w = 2 + 3\varepsilon$	Denklem: $\boldsymbol{3w\varepsilon = 0}$ Çözümleri: $w = 0$ $w = \varepsilon$ $w = 2\varepsilon$ $w = 3\varepsilon$
1	Denklem: $\boldsymbol{-\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{w\varepsilon = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{2w\varepsilon = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{3w\varepsilon = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	Denklem: $\boldsymbol{2\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{w\varepsilon = 2\varepsilon}$ Çözümleri: $w = 2$, $w = 2 + \varepsilon$ $w = 2 + 2\varepsilon$ $w = 2 + 3\varepsilon$	Denklem: $\boldsymbol{2w\varepsilon = 2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{3w\varepsilon = 2\varepsilon}$ Çözümleri: $w = 2$, $w = 2 + \varepsilon$ $w = 2 + 2\varepsilon$ $w = 2 + 3\varepsilon$
3	Denklem: $\boldsymbol{-3\varepsilon = 0}$ olur ve çözüm yoktur..	Denklem: $\boldsymbol{w\varepsilon = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{2w\varepsilon = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	Denklem: $\boldsymbol{3w\varepsilon = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda bulunan w değerlerine göre $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $w\varepsilon = 0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z = wq + n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(\varepsilon,1,q\varepsilon+n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(3\varepsilon,1,3q\varepsilon+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2-b_2=0 \ \text{ve} \ q_2-a_2=2 \ \text{iken}}$ $2w\varepsilon=0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0,2,\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(2,1,2q+n),(\varepsilon,1,q\varepsilon+n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(3\varepsilon,1,3q\varepsilon+n),$$

$$(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+2\varepsilon,1,(2+2\varepsilon)q+n),(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2-b_2=0 \ \text{ve} \ q_2-a_2=3 \ \text{iken}}$ $3w\varepsilon=0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0,\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(\varepsilon,1,q\varepsilon+n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(3\varepsilon,1,3q\varepsilon+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2-b_2=2 \ \text{ve} \ q_2-a_2=1 \ \text{iken}}$ $w\varepsilon=2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{2,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,1,2q+n),(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+2\varepsilon,1,(2+2\varepsilon)q+n),$$

$$(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2-b_2=2 \ \text{ve} \ q_2-a_2=3 \ \text{iken}}$ $3w\varepsilon=2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{2,2+\varepsilon,2+2\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,1,2q+n),(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+2\varepsilon,1,(2+2\varepsilon)q+n),$$

$$(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.3.2. $\mathbf{q_1 - a_1 = 0}$ ve $\mathbf{n_1 - b_1 = 2}$ olsun.

Bu durumda

$$q-a=(q_1-a_1)+(q_2-a_2)\varepsilon=(q_2-a_2)\varepsilon$$

ve

$$n-b=(n_1-b_1)+(n_2-b_2)\varepsilon=2+(n_2-b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.3.2.1 Aynı komşulukta olan $[q,n,1]$ ve [a,b,1] doğrularının arakesit noktasının $(w,1,z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w,1,z)\in[q,n,1]\Leftrightarrow z=wq+n$$

ve

$$(w,1,z)\in[a,b,1]\Leftrightarrow z=wa+b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$w\big((q_2-a_2)\varepsilon\big)=2-(n_2-a_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda $0\neq 2$ olduğundan çözüm yoktur. Bu nedenle bu iki doğrunun arakesiti $(w,1,z)$ tipinden olamaz.

4.3.2.3.2.2 Aynı komşulukta olan $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının arakesit noktasının $(1,y,z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1,y,z)\in[q,n,1]\Leftrightarrow z=q+yn$$

$$(1, y, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = a + yb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y(2 + (n_2 - b_2)\varepsilon) = -(q_2 - a_2)\varepsilon \qquad (4.17)$$

denklemi elde edilir. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.17) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.18 de verilmiştir.

Çizelge 4.18. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alacağı değerlere göre (4.17) denkleminin halleri ve varsa çözümleri

q_2-a_2 / n_2-b_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0$ $y = 2$ $y = 2\varepsilon$ $y = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = \varepsilon$ $y = 3\varepsilon$ $y = 2 + \varepsilon$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = \varepsilon,$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0$ $y = 2$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = \varepsilon$ $y = 3\varepsilon$ $y = 2 + \varepsilon$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $y = 0,$ $y = 2\varepsilon,$ $y = 2 + \varepsilon,$ $y = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = -\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 2,$ $y = \varepsilon$ $y = 3\varepsilon,$ $y = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda elde edilen y değerlerine göre $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2y = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0, q), (1,2, q + 2n), (1,2\varepsilon, q + 2n\varepsilon), (1,2 + 2\varepsilon, q + (2 + 2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $y(2 + \varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0, q), (1,2\varepsilon, q + 2n\varepsilon), (1,2 + \varepsilon, q + (2 + \varepsilon)n), (1,2 + 3\varepsilon, q + (2 + 3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $y(2 + 2\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0, q), (1,2, q + 2n), (1,2\varepsilon, q + 2n\varepsilon), (1,2 + 2\varepsilon, q + (2 + 2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $y(2 + 3\varepsilon) = 0$ denklemini sağlayan y değerleri $\{0, 2\varepsilon, 2 + \varepsilon, 2 + 3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,0, q), (1,2\varepsilon, q + 2n\varepsilon), (1,2 + \varepsilon, q + (2 + \varepsilon)n), (1,2 + 3\varepsilon, q + (2 + 3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $2y = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, \varepsilon, q + n\varepsilon), (1{,}3\varepsilon, q + 3n\varepsilon), (1{,}2+\varepsilon, q + (2+\varepsilon)n), (1{,}2+3\varepsilon, q + (2+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1{,}2, q + 2n), (1, \varepsilon, q + n\varepsilon), (1{,}3\varepsilon, q + 3n\varepsilon), (1{,}2+2\varepsilon, q + (2+2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1, \varepsilon, q + n\varepsilon), (1{,}3\varepsilon, q + 3n\varepsilon), (1{,}2+\varepsilon, q + (2+\varepsilon)n), (1{,}2+3\varepsilon, q + (2+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1{,}2, q + 2n), (1, \varepsilon, q + n\varepsilon), (1{,}3\varepsilon, q + 3n\varepsilon), (1{,}2+2\varepsilon, q + (2+2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

$4.3.2.3.3.\ \mathbf{q_1 - a_1 = 2}$ ve $\mathbf{n_1 - b_1 = 0}$ olsun.

Bu durumda

$$q - a = (q_1 - a_1) + (q_2 - a_2)\varepsilon = 2 + (q_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$n - b = (n_1 - b_1) + (n_2 - b_2)\varepsilon = (n_2 - b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.3.3.1 Aynı komşulukta olan $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1, y, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = a + yb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y\big((n_2 - b_2)\varepsilon\big) = 2 - (q_2 - a_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda $0 \neq 2$ olduğundan çözüm yoktur. Bu nedenle bu iki doğrunun arakesiti $(1, y, z)$ tipinden olamaz.

4.3.2.3.3.2 Aynı komşulukta olan $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının $(w, 1, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$$

ve

$$(w, 1, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = wa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında;

$$w(2 + (q_2 - a_2)\varepsilon) = -(n_2 - b_2)\varepsilon \qquad (4.18)$$

denklemi elde edilir. $q_2 - a_2$ ve $n_2 - b_2$ nin alabileceği değerlere göre (4.18) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.19 da verilmiştir.

Çizelge 4.19. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alacağı değerlere göre (4.18) denkleminin halleri ve varsa çözümleri

q_2-a_2 / n_2-b_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2w = 0}$ **Çözümleri:** $w = 0$ $w = 2$ $w = 2\varepsilon$ $w = 2 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + \varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $w = 0,$ $w = 2\varepsilon,$ $w = 2 + \varepsilon,$ $w = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 2\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $w = 0,$ $w = 2,$ $w = 2\varepsilon,$ $w = 2 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 3\varepsilon) = 0}$ **Çözümleri:** $w = 0,$ $w = 2\varepsilon,$ $w = 2 + \varepsilon,$ $w = 2 + 3\varepsilon,$
1	**Denklem:** $\boldsymbol{2w = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + \varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 2\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 3\varepsilon) = 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
2	**Denklem:** $\boldsymbol{2w = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $w = \varepsilon,$ $w = 3\varepsilon,$ $w = 2 + \varepsilon,$ $w = 2 + 3\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + \varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $w = 2,$ $w = \varepsilon,$ $w = 3\varepsilon,$ $w = 2 + 2\varepsilon,$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 2\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $w = \varepsilon$ $w = 3\varepsilon$ $w = 2 + \varepsilon$ $w = 2 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 3\varepsilon) = 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $w = 2$ $w = \varepsilon$ $w = 3\varepsilon$ $w = 2 + 2\varepsilon$
3	**Denklem:** $\boldsymbol{2w = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + \varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 2\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{w(2 + 3\varepsilon) = \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda w değerlerine göre $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- <u>$n_2 - b_2 = 0$ ve $q_2 - a_2 = 0$ iken</u> $2w = 0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0, 2, 2\varepsilon, 2 + 2\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z = wq + n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(2,1,2q+n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(2+2\varepsilon,1,(2+2\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $w(2+\varepsilon)=0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0,2\varepsilon,2+\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $w(2+2\varepsilon)=0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0,2,2\varepsilon,2+2\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(2,1,2q+n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(2+2\varepsilon,1,(2+2\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $w(2+3\varepsilon)=0$ denklemini sağlayan w değerleri $\{0,2\varepsilon,2+\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(0,1,n),(2\varepsilon,1,2q\varepsilon+n),(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $2w=2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{\varepsilon,3\varepsilon,2+\varepsilon,2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z=wq+n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(w,1,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(\varepsilon,1,q\varepsilon+n),(3\varepsilon,1,3q\varepsilon+n),(2+\varepsilon,1,(2+\varepsilon)q+n),(2+3\varepsilon,1,(2+3\varepsilon)q+n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $w(2+\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z = wq + n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,1,2q+n), (\varepsilon, 1, q\varepsilon + n), (3\varepsilon, 1, 3q\varepsilon + n), (2+2\varepsilon, 1, (2+2\varepsilon)q + n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $w(2+2\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{\varepsilon, 3\varepsilon, 2+\varepsilon, 2+3\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z = wq + n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(\varepsilon, 1, q\varepsilon + n), (3\varepsilon, 1, 3q\varepsilon + n), (2+\varepsilon, 1, (2+\varepsilon)q + n), (2+3\varepsilon, 1, (2+3\varepsilon)q + n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $w(2+3\varepsilon) = 2\varepsilon$ denklemini sağlayan w değerleri $\{2, \varepsilon, 3\varepsilon, 2+2\varepsilon\}$ olduğundan w nin bu değerleri $z = wq + n$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(w, 1, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(2,1,2q+n), (\varepsilon, 1, q\varepsilon + n), (3\varepsilon, 1, 3q\varepsilon + n), (2+2\varepsilon, 1, (2+2\varepsilon)q + n)\}$$

olarak elde edilir.

4.3.2.3.4. $q_1 - a_1 = 2$ ve $n_1 - b_1 = 2$ olsun.

Bu durumda

$$q - a = (q_1 - a_1) + (q_2 - a_2)\varepsilon = 2 + (q_2 - a_2)\varepsilon$$

ve

$$n - b = (n_1 - b_1) + (n_2 - b_2)\varepsilon = 2 + (n_2 - b_2)\varepsilon$$

olur. İnceleme $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının tipine göre iki alt durumda yapılır.

4.3.2.3.4.1 Aynı komşulukta olan $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının $(w, 1, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = wq + n$$

ve

$$(w, 1, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = wa + b$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$w(2 + (q_2 - a_2)\varepsilon) = 2 - (n_2 - b_2)\varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda $2w = 2$ olur. 2. tip nokta tanım gereği $w \in \mathbb{I}$ olduğundan $2w = 2$ denkleminin çözümü yoktur. Bu nedenle bu iki doğrunun $(w, 1, z)$ tipinden bir arakesiti noktası olamaz.

4.3.2.3.4.2 Aynı komşulukta olan $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının arakesit noktasının $(1, y, z)$ tipinde olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(1, y, z) \in [q, n, 1] \Leftrightarrow z = q + yn$$

ve

$$(1, y, z) \in [a, b, 1] \Leftrightarrow z = a + yb$$

olup, bu eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında ;

$$y(2 + (n_2 - b_2)\varepsilon) = 2 - (q_2 - a_2)\varepsilon \qquad (4.19)$$

denklemi elde edilir. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nın alabileceği değerlere göre (4.19) denklemi ve varsa çözümleri Çizelge 4.20 de verilmiştir.

Çizelge 4.20. $n_2 - b_2$ ve $q_2 - a_2$ nin alacağı değerlere göre (4.19) denkleminin halleri ve varsa çözümleri

n_2-b_2 \ q_2-a_2	0	1	2	3
0	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2}$ **Çözümleri:** $y = 1$, $y = 3$, $y = 1 + 2\varepsilon$ $y = 3 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2 + 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2 + 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$, $y = 3 + \varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{2y = 2 + \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
1	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2 + 3\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 3$, $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$ $y = 3 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2 + 2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + \varepsilon) = 2 + \varepsilon}$ **Çözümleri** $y = 1$, $y = 1 + 2\varepsilon$, $y = 3 + \varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$
2	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2}$ **Çözümleri:** $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$, $y = 3 + \varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$,	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2 + 2\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1$, $y = 3$, $y = 1 + 2\varepsilon$ $y = 3 + 2\varepsilon$	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 2\varepsilon) = 2 + \varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.
3	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1$, $y = 1 + 2\varepsilon$, $y = 3 + \varepsilon$, $y = 3 + 3\varepsilon$,	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2 + 2\varepsilon}$ olur ve çözüm yoktur.	**Denklem:** $\boldsymbol{y(2 + 3\varepsilon) = 2 + \varepsilon}$ **Çözümleri:** $y = 1 + \varepsilon$, $y = 1 + 3\varepsilon$, $y = 3$, $y = 3 + 2\varepsilon$,

Yukarıdaki çizelgede çözümün var olması durumunda y değerlerine göre $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları aşağıda bulunmuştur:

- <u>$n_2 - b_2 = 0$ ve $q_2 - a_2 = 0$ iken</u> $2y = 2$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 3, 1 + 2\varepsilon, 3 + 2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1, q + n), (1,3, q + 3n), (1,1 + 2\varepsilon, q + (1 + 2\varepsilon)n), (1,3 + 2\varepsilon, q + (3 + 2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 0 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $2y = 2 + 2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n), (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon =$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,3, q+3n), (1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n),$$

$$(1,3+2\varepsilon, q+(3+2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 1 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y(2+\varepsilon) = 2 + \varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1, 1+2\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1, q+n), (1,1+2\varepsilon, q+(1+2\varepsilon)n), (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 0 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon) = 2$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q, n, 1]$ ve $[a, b, 1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n), (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 2 \text{ ve } q_2 - a_2 = 2 \text{ iken}}$ $y(2+2\varepsilon) = 2+2\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,3,1+2\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(1,y,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1,q+n), (1,3,q+3n), (1,1+2\varepsilon, q+(1+2\varepsilon)n), (1,3+2\varepsilon, q+(3+2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \text{ ve } q_2 - a_2 = 1 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon) = 2+3\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{1,1+2\varepsilon, 3+\varepsilon, 3+3\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(1,y,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,1,q+n), (1,1+2\varepsilon, q+(1+2\varepsilon)n), (1,3+\varepsilon, q+(3+\varepsilon)n),$$

$$(1,3+3\varepsilon, q+(3+3\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

- $\underline{n_2 - b_2 = 3 \text{ ve } q_2 - a_2 = 3 \text{ iken}}$ $y(2+3\varepsilon) = 2+3\varepsilon$ denklemini sağlayan y değerleri $\{3, 1+\varepsilon, 1+3\varepsilon, 3+2\varepsilon\}$ olduğundan y nin bu değerleri $z = q + yn$ eşitliğinde yerine yazılarak, $[q,n,1]$ ve $[a,b,1]$ doğrularının $(1,y,z)$ tipinden arakesit noktalarının kümesi

$$\{(1,3,q+3n), (1,1+\varepsilon, q+(1+\varepsilon)n), (1,1+3\varepsilon, q+(1+3\varepsilon)n),$$

$$(1,3+2\varepsilon, q+(3+2\varepsilon)n)\}$$

olarak elde edilir.

Örnek4.3.2.3.4.2.1. $q = q_1 + q_2\varepsilon = 2+3\varepsilon$, $n = n_1 + n_2\varepsilon = 0$ ve $a = a_1 + a_2\varepsilon = 3\varepsilon$, $b = b_1 + b_2\varepsilon = 2$ olmak üzere $q_1 - a_1 = 2$, $n_1 - b_1 = 2$, $n_2 - b_2 = 0, q_2 - a_2 = 0$

dır.Yani $q - a$ ve $n - b$ elemanlarının ikisi de $\mathbb{I}$ nın elemanı olduğundan bu doğrular aynı komşuluktadırlar. Bu durumda $[2 + 3\varepsilon, 0,1]$ ve $[3\varepsilon, 2,1]$ doğrularının $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları

$$(1, y, z) \in [3\varepsilon, 2,1] \Longrightarrow z = 3\varepsilon + 2y$$

$$(1, y, z) \in [2 + 3\varepsilon, 0,1] \Longrightarrow z = 2 + 3\varepsilon$$

denklem sistemini sağlayan noktalar olacaktır. Bu sistemde bulunan $z = 2 + 3\varepsilon$ değeri $z = 3\varepsilon + 2y$ eşitliğinde yerine yazıldığında $2y = 2$ denklemi elde edilir. Bu denklemde y nin alacağı çözüm değerleri $\{1, 3, 1 + 2\varepsilon, 3 + 2\varepsilon\}$ olacağından bu değerler $z = 3\varepsilon + 2y$ eşitliğinde yerine yazılarak z değerleri bulunur. Bu nedenle bu iki doğrunun $(1, y, z)$ tipinden arakesit noktaları;

$$\{(1, 1, 2 + 3\varepsilon), (1, 3, 2 + 3\varepsilon), (1, 1 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon), (1, 3 + 2\varepsilon, 2 + 3\varepsilon)\}$$

şeklindedir. Son olarak $[2 + 3\varepsilon, 0,1]$ ve $[3\varepsilon, 2,1]$ doğruları üzerinde olan ortak noktanın $(w, 1, z)$ tipinden olup olmayacağı araştırılacaktır.

$$(w, 1, z) \in [3\varepsilon, 2,1] \Longrightarrow z = 3w\varepsilon + 2$$

$$(w, 1, z) \in [2 + 3\varepsilon, 0,1] \Longrightarrow z = w(2 + 3\varepsilon)$$

eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında $2 = 2w$ eşitliği bulunur. Bu denklem çözüldüğünde,

$$2w = 2 \Longrightarrow 2(w_1 + w_2\varepsilon) = 2$$

$$\Longrightarrow 2w_1 + 2w_2\varepsilon = 2$$

Son eşitlikten $2w_1 = 2$ ve $2w_2 = 2$ denklemleri elde edilir. $2w_1 = 2$ denkleminin çözümünden $w_1 = 1, 3$ ve $2w_2 = 0$ denkleminin çözümünden $w_2 = 0, 2$ bulunur ki bu da $w = w_1 + w_2\varepsilon \in \mathbb{I}$ olmasıyla çelişir. Yani bu iki doğrunun $(w, 1, z)$ tipinden bir arakesit noktasına sahip olması mümkün değildir.

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde Projektif Klingenberg düzlemleri tanıtılmış ve lokal halkalarla aralarındaki geçiş üzerinde durulmuştur. Özel bir lokal halka olan $\mathbb{Z}_4(\varepsilon) = \mathbb{Z}_4 + \mathbb{Z}_4\varepsilon$ lokal halkası tanıtılmış ve nokta ve doğruları bu lokal halka ile koordinatlanan Projektif Klingenberg düzlemi oluşturulmuştur. Oluşturulan bu düzlemde doğruların tipleri ve komşulukları dikkate alınarak arakesitleri belirlenmiştir. Bu arakesitleri bazı durumlarda doğrudan hesaplamak mümkün olmuştur. Bazı durumlarda ise çok sayıda alt durum ile karşılaşıldığından mümkün bütün durumları gösteren çizelgeler kullanılmıştır. Bu çizelgeler ilgili doğruların arakesit noktalarının bulunmasında kullanılacak denklemlerin çözümlerinin daha pratik olarak elde edilmesini sağlamıştır. Elde edilen bu sonuçların daha ileriye taşınıp üzerinde durulan tüm durumlar için doğruların arakesit noktalarını direkt olarak veren çizelgelerin yapılması mümkündür ve bu tezde yapılan çalışma bu çizelgeleri düzenleme yolunda gerekenlerin büyük bir kısmını yerine getirmiştir.

KAYNAKLAR

Akpınar, A. 2010. Bazı Sonlu Klingenberg Düzlemleri için Üzerinde Olma Matrisleri. *BAÜ FBE Dergisi*, 12(1):91-99.

Bakraktar, M. 1997. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. ISBN: 975-442-006-8, Bursa.

Baker, C.A., Lane, N.D., Lorimer, J.W. 1991. A coordinatization for Moufang-Klingenberg planes. *Simon Stevin*, 65: 3-22.

Çelik, B., Yıldız, H.E. 2010. Dual Kuaternionlar ve Projective Yapılar. *İstanbul Aydın Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, Year 2, Number 4, 14-49.

Çelik, B., Akpınar, A., Çiftçi, S., 2007. 4-Transitivity and 6-figures in some Moufang-Klingenberg planes. *Monatshefte für Mathematik*,152(4) DOI 10.1007/s00605-007-0477-.

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa, 430 s.

Dugas, M. 1978. Verallgemeinerte Andre-Ebenen mit epimorphismen auf Hjelmslev-Ebenen. *Geometriae Dedicata*. 8: 105-123

Dembowskı, P. 1997. Finite Geometries. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 375 pp.

Hacısalihoglu, H.H. 2000. Lineer Cebir I. Hacısalihoglu Yayınları, İstanbul, 480 s.

Jungnıckel, D. 1979. Regular Hjelmslev Planes, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 26: 20-37.

Kaya, R. 2005. Projektif Geometri. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 392 s.

Keppens, D. 1988. Coordinatization of Projective Klingenberg planes. *Simon Stevin*, (62): 63-90.

Klingenberg, W. l954. Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. *Math*. Z., (60): 384-406.

Klingenberg, W. 1955. Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. *Abh. Math. Sem.Univ*., Hamburg, (20): 97–111

Klingenberg, W. 1956. Projektive Geometrien mit Homomorphismus. *Math. Ann*, (132): 180–200.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif DEMİRCİ
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA/ Osmangazi, 16/09/1993
Yabancı Dil : İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yılı)
Lise : Çınar Lisesi, 2007-2011
Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2012-2016
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2016-...
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Venüs Kampüs Özel Öğretim Kursu 2016-2018
Özel Yedi Renkli Çınar Okulları 2018-
İletişim (e posta) : elifdemirci_93@hotmail.com
Yayınlar :

1. **Akpınar, A., Doğan, İ, Demirci, E., Gürel, Z.S., Boztemur, B.. 2018**. Some remarks on a class of finite Projective Klingenberg planes. Jounrnal of Advances in Mathematics., V.14-02.,7893-7902, ISSN: 2347-1921
2. **Çelik, B., Demirci, E., 2018.** Line ıntersections on some Projective Klingenberg planes. 16^{th} International Geometry Symposium, Manisa Celal Bayar University, Manisa, Turkey, 4-7 July 2018.