BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Aziz ATABAY

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Aziz ATABAY
0000-0002-1071-9831

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Aziz ATABAY tarafından hazırlanan "BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
0000-0002-2273-3243
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Dr.Öğretim Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN
0000-0003-4471-3291
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğabilimleri Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN Y.
Enstitü Müdürü
23../08/2019

Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

23/08/2019

Aziz ATABAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Aziz ATABAY

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde bu çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde konneksiyonlar işlendi.
Dördüncü bölüm iki Riemann manifold arasında tanımlı harmonik ve biharmonik dönüşümlere ayrılmıştır.
Beşinci bölümde biharmonik olma denklemi kullanılarak pozitif Ricci eğriliğe sahip olmayan bir Riemann manifoldda $\int_M \|H\|^2 v_g < \infty$ olma koşulunu sağlayan biharmonik yüzeylerin minimal olduğu gösterildi. Daha sonra biharmonik Riemann dönüşümlerin bir özel çeşidi olan ve 3 boyutlu bir Riemann manifolddan bir yüzeye tanımlı biharmonik Riemann submersiyonlar çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: Alt Manifoldlar; Harmonik Dönüşümler; Biharmonik Dönüşümler; Submersiyon.

2019, vi+52 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

Biharmonic Maps.

Aziz ATABAY

Bursa Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

In this thesis, there are five chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
Second chapter contains some well-known definitions and results which will be used in other chapters.
Connections are studied in the third chapter.
Harmonic and biharmonic maps between two Riemannian manifolds are introduced in section four.
In section five, using the biharmonicity equation, it is found that a biharmonic hypersurface which has $\int_M \|H\|^2 v_g < \infty$ condition in a Riemannian manifold of non-positive Ricci curvature is minimal, where H is the mean curvature of hypersurface.
Then, biharmonic submersions which are a kind of biharmonic Riemannian maps are studied from a three-dimensional Riemannian manifold onto a surface.

Key Words: Submanifold; Harmonic map; Biharmonic map; Submersion.

2019, vi+52 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca derin bilgisinden ve ilminden çokça faydalandığım, maddi ve manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla yanımda olduğunu her zaman hissettiren değerli hocam Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN' a çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteklerini gördüğüm, kendilerinden çok şey öğrendiğim sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a, Doç. Dr. Betül BULCA'ya ve Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN 'e ayrıca teşekkür ederim.

Bana bu süreç boyunca desteğini hep hissettiren değerli aileme gösterdikleri sevgiyle ve güvenle birçok zorluğu aşmamda yardımcı olduklarından dolayı sonsuz teşekkürler.

Aziz Atabay

...../..../.....

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid Uzayı
M^n	n-boyutu manifold
$\otimes$	Tensör ç-Çarpım
$\oplus$	Direk Toplam
$\odot$	Simetrik Tensör Alanı
M	Riemann Manifold
C^∞	Diferansiyellenebilme
∇	Levi-Civita Konneksiyonu, Riemann Konneksiyonu
$<,>$	İç Çarpım
S^2	Birim Küre
pr_1	Doğal İzdüşüm Fonksiyonu
$Vol(g)$	Hacim Elementi
$\Gamma(M)$	M nin Vektör Alan Uzayı
V^C	V Kümesinin Tümleyeni
τ^2	2(Bi) Tensiyon Alanı
$d\phi$	ϕ nin Türev Dönüşümü
Ric^N	N Manifoldunun Türev Dönüşümü
$H\xi$	İzometrik İmmersiyon
$\Vert\ ,\Vert$	Norm
H	H nin Ortalama Eğriliği
div	Divergens
$grad$	Gradient
ξ	Hiper Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı
ϕ	Harmonik Dönüşüm
φ	Diferansiyellenebilir Dönüşüm
δ_{ij}	Kronecker Deltası

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Varyasyonlar hesabı girdileri fonksiyon olan gerçek değerli fonksiyonları minimize veya maksimize etme ile ilgili bir matematik alanıdır. Varyasyonlar hesabı fizik, mühendislik, uygulamalı ve teorik matematikte geniş bir uygulama alanına sahiptir ve kısmi diferansiyel denklemlerle de yakından bir ilişki içindedir.

Örneğin, varyasyonlar hesabındaki klasik bir problem iki nokta arasındaki en kısa yolu bulmaktır. $\mathbb{R}^2$ de herhangi (a, A) ve (b, B) noktaları belirlensin. Doğal olarak bu iki noktadan geçen türevlenebilir eğriler arasında boyu en kısa hangi eğridir sorusunu sormak mümkündür. Bu iki noktadan geçen herhangi türevlenebilir eğri $f{:}[\,a, b] \to \mathbb{R}, x \to f(x) = y$ fonksiyonu ile belli olsun. O zaman f yardımıyla tanımlanan eğrinin uzunluğu

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\; dx$$

şeklinde olur. Ayrıca $h: [a, b] \to \mathbb{R},\ x \to h(x)$ türevlenebilir bir h fonksiyonu $h(a) = 0 = h(b)$ olacak şekilde tanımlanır. Böylece

$$F: [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , (x, t) \to F(x, t) = f(x) + th(x)$$

iki değişkenli F fonksiyonu yardımıyla f nin 1-parametre değişimli

$$f_t: [a, b] \to \mathbb{R}, x \to f_t(x) = f(x) + th(x)$$

fonksiyonu (eğrisi) tanımlansın (Walton ve ark. 2016**)** . Bu durumda f_t varyasyon eğrisinin uzunluğu

$$l(f_t) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df_t}{dx}\right)^2}\; dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} + t\frac{dh}{dx}\right)^2}\; dx$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi f fonksiyonu (a, A) ve (b, B) noktalarını birleştiren en kısa mesafeli eğri olduğu kabul edilirse $l(f_t)$ nin $\mathrm{t} = 0$ noktasındaki kritik noktası istenilen minimum uzunluktaki eğri olacaktır. Buna göre,

$$0 = \frac{d}{dt} l(f_t)_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} + t\frac{dh}{dx}\right)^2}\right)_{t=0} d\mathrm{x}$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}+t\frac{dh}{dx}\right)^2}\right)_{t=0} dx$$

$$=\int_a^b \frac{(f'(x)+th\prime(x))h\prime(x)}{\sqrt{1+(f\prime(x)+th\prime(x))^2}}_{t=0} dx$$

$$=\int_a^b \frac{f'(x)h\prime(x)}{\sqrt{1+(f\prime(x))^2}}\ dx$$

dir. Bu son denkleme kısmi integrasyon uygulanır ise

$$0=\int_a^b\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}\right)h(x)dx$$

eşitliği elde edilir. h fonksiyonu $h(a)=h(b)=0$ olacak şekilde keyfi türevlenebilir fonksiyon olduğundan

$$\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}\right)'=0$$

olmalıdır. Bu da f nin $f(x)=cx+d$ olması demektir (Walton ve ark. 2016**)**. Böylece (a,A) ve (b,B) noktalarını birleştiren en kısa uzunluktaki eğri parçasının doğru parçası olduğunu gösterir. Bu tip eğri (parçaları) uzayın geodezikleri olarak adlandırılır.

Akciğere bakıldığında alveollerin (bronşların) nefes aldığımızda genişleyen ve nefes verdiğimizde büzüşen küreler tarafından modellenir. Bunun nedeni ise sabit hacimli bir kapalı katı cismin yüzey alanını en aza indiren kapalı yüzey bir küredir. Bir sabun köpüğü sabit bir hacmi çevreleyen ve yüzey alanı minimum olanıdır. Fizik açısından ise her sabun köpüğü bir küredir sonucuna ulaşılır (Oprea 2016).
Bu gerçeklik aşağıdaki teoremden kaynaklanmaktadır.

Teorem 1.1 M bir kompakt Riemann manifold ve $\phi\colon M\ \to N$ η ortalama eğrilik vektör alanlı bir izometrik immersiyon olmak üzere $\phi_t, |t|<\varepsilon,\ \phi_0=\phi$ nin $\phi_{t\|\partial M}=\phi_{\|\partial M}$

özelliğinde bir 1-parametreli değişimi olsun. Bu durumda $V = \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \|_{t=0}$, ϕ boyunca değişim vektör alanı olmak üzere

$$\frac{d}{dt} vol(\phi_t M)_{\|t=0} - \int_M < n\eta, V > dvol$$

dır (Xin 2003).

Burada, $f: M \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere f nin Laplace'ına göre $\Delta f = 0$ ise f harmonik fonksiyon olarak adlandırılır. Hopf maksimum prensibi bir Riemann manifold üzerinde tanımlı bir harmonik fonksiyon f bir lokal maksimuma sahip ise f nin sabit bir fonksiyon olması gerekir.

Ayrıca, ϕ: M $^m \to \mathbb{R}^n$ η ortalama eğrilik vektör alanlı bir izometrik immersiyon olsun. O zaman kolay bir hesaplama ile

$$\Delta \phi = -m\eta$$

Beltrami formülü elde edilir. Burada $\Delta \phi = (\Delta \phi_1, \dots, \Delta \phi_n)$ dir (Chen 1991). Böylece ϕ izometrik immersiyonun minimal olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin her bileşeninin M üzerinde harmonik fonksiyon olmasıdır (Chen 1991, Xin 2003). Bu teorem $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayda altmanifoldların minimal olması için güzel bir karakterizasyondur. Bu karakterizasyonu kullanarak Hopf maksimum prensibi yardımıyla Öklid uzayında kompakt minimal altmanifold olamayacağı sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan M kompakt olmak üzere iki Riemann manifold arasında tanımlı $\phi: (M, g) \to (N, h)$ Riemann dönüşümünün $\mathrm{E}(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \mathrm{e}(\phi)\, v_g$ ile verilen enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise harmonik dönüşümü olarak adlandırılır. Bu da ϕ nin ikinci temel formunun izine karşılık gelen gerilim tensör alanının sıfır olması sonucunu doğurur (Eells ve Sampson 1964). ϕ nin izometrik immersiyon olması durumunda ϕ nin harmonik bir dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul ϕ nin ortalama vektör alanının sıfır olması yani minimal olmasıdır sonucu izometrik immersiyonların minimal olması için immersiyonların ne tip şekilde belirleneceğinde bir yol gösterici olur.

Bir ϕ dönüşümünün bienerjisi

$$E_2(\phi; M) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau(\phi)\|^2 \, v_g$$

eşitsizliği yardımıyla hesaplanır. Eğer ϕ bienerjinin kritik noktası ise ϕ biharmonik veya 2-harmonik dönüşüm olarak adlandırılır (Jiang 1986).

Jiang (1986) E_2 için aşağıda ifade edilen

$$\tau^2(\phi) = \left(-\tilde{\Delta}\tau(\phi) - \sum_{i=1}^{m} h(R^N\big(d\phi(e_i), \tau(\phi)\big)d\phi(e_i), V\ )\right)$$

Euler-Lagrange denklemini elde etmiştir. Ayrıca aynı çalışmada $\tau^2(\phi) = 0$ olması ϕ nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul olduğunu bir teoremle ifade etmiştir.

Açıkça harmonik dönüşümler biharmoniktir. Biharmonik olup harmonik olmayan dönüşümler has biharmonik dönüşümler olarak adlandırılırlar.

Jiang (1987), Chen ve Ishikawa (1998) 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$de biharmonik alt manifoldların minimal olduğunu, Dimitric (1992) n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ de her biharmonik eğrinin bir doğru olduğunu ve en fazla iki farklı asli eğriliklere sahip biharmonik hiperyüzeylerin minimal olması gerektiğini ve Hasanis ve Vlachos (1995) 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ biharmonik hiperyüzeylerin minmal olduğunu ispat ettiler. Chen (1991) de ispatı hala açık olan aşağıda ifade edilen önermeyi önerdi:

Chen Önermesi: Öklid uzayında her biharmonik altmanifold minimaldir.

Chen Önermesi Caddeo ve ark. (2002) tarafından hiperbolik 3 uzayı $\mathcal{H}^3(-1)$ de biharmonik altmanifoldların minimal olduğu ispat edildi. Balmus ve ark. (2008) n-boyutlu hiperbolik uzayı $\mathcal{H}^n$ nin en fazla farklı iki asli eğriliğe sahip hiperyüzeylerin minimal olduğunu gösterdiler.

Böylece Caddeo ve ark. (2001) Chen Önermesini aşağıda verilen önermeye genişlettiler.

Genişletilmiş Chen Önermesi: Pozitif olmayan Riemann eğriliğine sahip (N, h) Riemann manifoldun her biharmonik altmanifoldu minimaldir.

Bu yüksek lisans tez çalışmasında iki Riemann manifold arasında tanımlanan dönüşümlerin biharmonik olma koşulunu veren denklem tanıtılıp Nakauchi ve Urakawa (2011) tarafından verilen (N, h) pozitif Ricci eğriliğe sahip olmayan bir Riemann manifold ve (M, g) bu Riemann manifoldun bir biharmonik hiperyüzeyi için H, M nin ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere, $\int_M \|H\|^2 v_g < \infty$ olması durumunda (M, g) minimal hiperyüzey olmasına gerektiğine dair teorem tartışılıp ve daha sonra bir 3-

boyutlu bir Riemann manifoldda 1-boyutlu liflere sahip Riemann submersiyonların biharmonik olabilme koşullarını veren Wang ve Ou (2011) nın çalışması tanıtılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde bazı temel kavramlar tanıtılacaktır.

2.1 Vektör Uzayları

Tanım 2.1. $V \neq \emptyset$ bir küme, $\Gamma = (\Gamma, +.)$ bir cisim olsun.

$$\oplus: V \times V \rightarrow V$$

$$(v, w) \rightarrow v \oplus w$$

iç işlem ve

$$\odot: \Gamma \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, v) \rightarrow \lambda \odot v$$

dış işlemi ile birlikte

V1) Her $v, w \in V$ için $v \oplus w \in V$,

V2) Her $v, w, u \in V$ için $(v \oplus w) \oplus u = v \oplus (w \oplus u)$,

V3) Her $v, w \in V$ için $v \oplus w = w \oplus v$,

V4) Her $v \in V$ için $0 \oplus v = v$ olacak şekilde bir tek sıfır vektörü olarak adlandırılan $0 \in V$ var olsun,

V5) Her $v \in V$ için $v \oplus (-v) = 0$ olacak şekilde $\oplus$ işlemine göre v nin tersi olarak adlandırılacak $(-v)$ vektörü var olsun,

V6) Her $\lambda \in \Gamma$ ve her $v \in V$ için $\lambda \odot v \in V$,

V7) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$ ve her $v \in V$ için $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot v = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot v)$,

V8) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$ ve her $v \in V$ için $(\lambda_1 + \lambda_2) \oplus v = (\lambda_1 \oplus v) \oplus (\lambda_2 \oplus v)$,

V9) Her $\lambda \in \Gamma$ ve her $v, w \in V$ için $\lambda \odot (v \oplus w) = (\lambda \odot v) \oplus (\lambda \odot w)$,

V10) Her $v \in V$ için Γ cismindeki . işlemine göre birim elemanı 1 olmak üzere $1 \odot v = v$

aksiyomlarını sağlayan $(\mathrm{V}, (\,\Gamma, +, .\,), \oplus, \odot)$ dörtlüsüne Γ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Hacısalihoğlu 1985).

Eğer cisim, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ ise reel vektör uzayı, kompleks sayılar cismi $\mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır.

Bundan sonra kısalığın hatırına $(V, (\,\Gamma, +, .\,), \oplus, \odot)$ vektör uzayını aksini söylemedikçe sadece V ile gösterilecek ve Γ cisminin elemanları "skaler" olarak isimlendirilecektir.

Her cisim kendisi üzerindeki tanımlanan iç işlem ve dış işleme göre bir vektör uzayı olduğu sonucu kolayca elde edilebilir.

Tanım 2.2. $\mathrm{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V$ vektör uzayının sonlu alt kümesi olsun. Eğer her $s_1, s_2, \dots, s_n$ skalerleri için

$$s_1 v_1 + s_1 v_2 + \cdots + s_n v_n = 0$$

iken $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ ise S kümesine lineer bağımsız küme aksi halde lineer bağımlı küme denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.3. $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \mathrm{V}$ vektör uzayının sonlu alt kümesi olsun. Eğer V nin bütün elemanları S kümesinin elemanları tarafından yazılabiliyor ise $S,\ V$ vektör uzayını üretiyor veya geriyor denir , $S_p(S) = V$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.4. $\mathrm{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V$ vektör uzayının lineer bağımsız alt kümesi olsun. Eğer $\mathrm{Sp(S) = V}$ ise S kümesine V nin bir bazı denir ve S deki elemanların sayısına V nin boyutu denir ve bu boyutu $\mathrm{boy(V) = n}$ olarak ifade edilir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.5. $V = (V, (\,\Gamma, +, .\,), \oplus, \odot)$ bir vektör uzayı ve $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ olsun. Eğer V vektör uzaydan indirgenmiş

$$\oplus: \mathrm{W \times W \rightarrow W}$$

$$(\mathrm{u, w}) \rightarrow \mathrm{u} \oplus \mathrm{w}$$

iç işlem ve

$$\odot: \Gamma \mathrm{x\, W \rightarrow W}$$

$$(\lambda, w) \rightarrow \lambda \odot w$$

dış işlem ile birlikte W bir vektör uzay ise W ya V nin bir alt vektör uzayı denir (Hacısalihoğlu 1985).

Teorem 2.6. V bir vektör uzay ve $W \subset V$ olsun. Eğer

A1) Her $u, v \in W$ için $u + v$, $\lambda \in W$,

A2) Her $\lambda \in \Gamma$ ve her $u \in W$ için $\lambda u \in W$

ise W, V nin bir alt vektör uzayıdır (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.7. U ve W, V nin alt vektör uzayı olsunlar. Eğer $V = U + W$ ve $U \cap W = \{0\}$ ise V, U ile W nın direkt toplam uzayıdır denir ve $V = U \oplus W$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1985).

Teorem 2.8. U ve W, V nin alt vektör uzayı olsunlar. O zaman $V = U \oplus W$ ancak ve ancak her, $v \in W$ için $v = u + w$ olacak şekilde bir tek $u, v \in W$ vektörleri vardır (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.9. $W_1, \ldots, W_k$ V vektör uzayının alt vektör uzayı olsunlar. Eğer $v \in V, v = w_1 + \cdots + w_k$ olacak şekilde $w_1 \in W_1, \ldots, w_k \in W_k$ vektörleri varsa V'ye $W_1, \ldots, W_k$ alt uzaylarının direkt toplamı denir $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.10. $(V, (\Gamma, +, .), \oplus_1, \odot_1)$ ve $(W, (\Gamma, +, .), \oplus_2, \odot_2)$ vektör uzayları için. $\phi :$ V→ W bir dönüşüm olmak üzere her $v, w \in W$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$ için

$$\phi((\lambda_1 \odot_1 v) \oplus_1 (\lambda_2 \odot_1 w)) = \lambda_1 \odot_2 \phi(v) \oplus_2 \lambda_1 \odot_2 \phi(w)$$

şartı sağlanıyorsa ϕ dönüşüme bir lineer dönüşüm denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.11. V, Γ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$V^* = \{ \phi \mid \phi : V \rightarrow \Gamma, \text{lineer dönüşüm} \}$$

kümesi üzerinde

$\oplus$ iç işlem ve $\odot$ dış işlem sırasıyla

$\oplus: V^* \text{x} \, V^* \rightarrow V^*$

$(\phi, \psi) \rightarrow (\phi \oplus \psi): \mathrm{V} \rightarrow \Gamma \;\; ; \; \nu \rightarrow (\phi \oplus \psi)(\nu) = \phi(\nu) + \psi(\nu)$,

$\odot \; \Gamma \text{x} \, V^* \rightarrow V^*$

$(\lambda, \phi) \rightarrow \lambda \odot \phi: \mathrm{V} \rightarrow \Gamma \, ; \;\; \nu \rightarrow (\lambda \odot \phi)(\nu) = \lambda . \phi \, (\nu)$

şeklinde tanımlanmak üzere V^*, Γ cismi üzerinde bir vektör uzayı olup bu vektör uzayına V nin dual uzayı denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.12. V n-boyutlu bir vektör uzayının, bir bazı $S = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ ve dual vektör uzayı V^* olsun.

$$e_i{}^*: V \rightarrow \Gamma$$

lineer dönüşümü $e_i{}^*(e_j) = \delta_{ij}$ olacak şekilde tanımlanmak üzere

$$S^* = \{e_1{}^* e_2{}^* \dots e_n{}^*\}$$

V^* nin bir bazı olur, S^* kümesine V nin dual bazı denir (Hacısalihoğlu 1985).

Teorem 2.13. V ve W aynı Γ cismi üzerinde vektör uzayı ve dual uzayları sırasıyla V^* ve W^* olsun.

$$\Psi: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$$

bir lineer dönüşüm olmak üzere

$$\Psi^*: W^* \rightarrow V^*$$

$$\mathrm{T} \rightarrow \Psi^*(\mathrm{T}): \;\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$$

$$\mathrm{v} \rightarrow \Psi^*(\mathrm{T})(\mathrm{v}) = \mathrm{T}(\Psi(\mathrm{v}))$$

bir lineer dönüşümdür. Bu lineer dönüşüme Ψ geri (pull-back) çekme dönüşümü denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.14. $V_1, V_2, \dots, V_k$ ve W vektör uzayı olmak üzere

$$T: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k \to \mathrm{W}$$

dönüşümü her bileşene göre lineer ise T ye k-lineer dönüşüm denir (Hacısalihoğlu 1985).

Bu k-lineer dönüşümlerin kümesi L_k $(V_1, V_2, \ldots, V_k$; W) ile gösterilecektir. Özel olarak V ve W vektör uzayların arasında tanımlanan lineer dönüşümlerin cümlesi literatürde fazlasıyla yer bulan $Hom(V, W)$ gösterimi ile kullanılacaktır.

Tanım 2.15. V ve W iki reel vektör uzayı ve $\mathrm{T}: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $\mathrm{B}: \mathrm{W} \times \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ bir 2-lineer(bilineer) dönüşüm olmak üzere $T^*\mathrm{B}: \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$,

$$(T^*\mathrm{B})(v_1, v_2) = \mathrm{B}(\mathrm{T}(v_1), \mathrm{T}(v_2))$$

şeklinde tanımlı 2-liner dönüşüme T yardımıyla B nin geri dönüşümü denir (Mclnerney 2013).

Önerme 2.16. U, V ve W birer vektör uzayları olsun ve $T_1: \mathrm{U} \to \mathrm{V}, T_2: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ lineer dönüşümler tanımlansın. $\mathrm{B}: \mathrm{W} \times \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ 2-lineer dönüşüm olmak üzere

$$(T_2 \circ T_1)^* B = {T_1}^* ({T_2}^* B)$$

dir (Mclnerney 2013).

2.2 Tensör Çarpımları

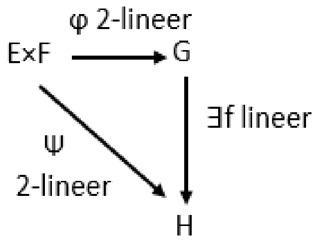
Tanım 2.17. E, F, G Γ cismi üzerinde üç vektör uzayı olsunlar. Bir $\varphi: E \times F \to \mathrm{G}$, 2-lineer dönüşümü verilsin. Eğer

$\otimes_1$) Eğer imφ $= \{\varphi\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}\} = \mathrm{G}$ ise ve

$\otimes_2$) Eğer keyfi bir H vektör uzayı için;

$$\psi = \mathrm{ExF} \to \mathrm{H}$$

bir 2-lineer dönüşümü verildiğinde en az bir $f: G \to H$ lineer dönüşümü $\psi = f \circ \varphi$ olacak şekilde var ise (G, φ) ikilisine E ve F nin bir tensör çarpımı denir ve $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ şeklinde gösterilir ve $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$ şeklinde yazılır (Greub 1967), (Bakınız Şekil 2.1.).



Şekil 2.1. $\otimes_2$ koşulu

Örnek 2.18. F, Γ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\phi : \Gamma \mathrm{x}\, F \to F$$

$$(\lambda, \mathrm{x}) \to \phi\,(\lambda, \mathrm{x}) = \lambda.\mathrm{x}$$

Her $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \Gamma$, her $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \Gamma$ ve her $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{F}$ için

$\phi(\mathrm{a}\lambda_1 + \mathrm{b}\lambda_2), \mathrm{x}) = (\mathrm{a}\lambda_1 + \mathrm{b}\lambda_2).\mathrm{x} = (\mathrm{a}\lambda_1).\mathrm{x} + (\mathrm{b}\lambda_2).\mathrm{x} = \mathrm{a}\,(\lambda_1.\mathrm{x}) + \mathrm{b}\,(\lambda_2.\mathrm{x}) = \mathrm{a}\phi\,(\lambda_1, \mathrm{x}) + \mathrm{b}\phi\,(\lambda_2, \mathrm{x})\,, \phi(\lambda, \mathrm{ax} + \mathrm{by}) = \lambda(\mathrm{ax} + \mathrm{by}) = \lambda(\mathrm{ax}) + \lambda(\mathrm{by}) = (\lambda\mathrm{a})\mathrm{x} + (\lambda\mathrm{b})\mathrm{y} = \mathrm{a}(\lambda\mathrm{x}) + \mathrm{b}(\lambda\mathrm{y}) = \mathrm{a}\,\phi(\lambda_1, \mathrm{x}) + \mathrm{b}\,\phi\,(\lambda_1, \mathrm{y})$

elde edilir. Sonuç olarak ϕ bir 2-lineer dönüşümdür.

$\otimes 1$) $\mathrm{im}\otimes = \mathrm{Sp}\{\,\phi(\lambda, \mathrm{x}) = \lambda.\mathrm{x} \mid (\lambda, \mathrm{x}) \in \Gamma \mathrm{x}\, \mathrm{F}\} = \mathrm{F}$ dir.

$\otimes 2$) $\psi : \Gamma \mathrm{x}\, \mathrm{F} \to \mathrm{H}$, 2-lineer dönüşümü verildiğinde $f : \mathrm{F} \to \mathrm{H}$ dönüşümünü $\psi(1, \mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$ olarak tanımlansın ψ, ikinci adrese göre lineer olacağından f nin bir lineer dönüşüm olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan;

$$\psi(\lambda, \mathrm{x}) = \psi(\lambda.1, \mathrm{x}) = \lambda\psi(1, \mathrm{x}) = \lambda \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\lambda\mathrm{x}) = f(\otimes(\lambda, \mathrm{x})) = (f \circ \otimes)(\lambda, \mathrm{x})$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\psi = \mathrm{f} \circ \otimes$ olur ki bu da $\otimes_2$ koşulunun sağlanması demektir. Sonuç olarak $\Gamma \otimes F = F$ dir (Greub 1967).

Örnek 2.18 in bir sonucu olarak $\Gamma \otimes \Gamma = \Gamma$ elde edilir.

Yardımcı Önerme 2.19. E ve F iki vektör uzayı ve tensör çarpımları E⊗F olsun. $\mathrm{u}\otimes\mathrm{v} \in \mathrm{E}\otimes\mathrm{F}$ olmak üzere $\mathrm{u}\otimes\mathrm{v} \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{u} \neq 0$ ve $\mathrm{v} \neq 0$ olmasıdır (Greub 1967).

Teorem 2.20. $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$, $(F_\beta)_{\beta\in J}$ vektör uzay aileleri için $(E_\alpha \otimes F_\beta)_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ tensör çarpımı ve $E = \oplus_\alpha E_\alpha$ ve $F = \oplus_\beta F_\beta$ direkt toplam uzayı verilsin. Bu durumda tensör çarpımların direkt toplam uzayı, direkt toplamların tensör çarpımıdır. Bir başka deyişle;

$$E\otimes \mathrm{F} = (\oplus_\alpha E_\alpha)\otimes\left(\oplus_\beta F_\beta\right) = \oplus_{(\alpha,\beta)\in I\times J} (E_\alpha \otimes F_\beta)$$

dir (Greub 1967).

Teorem 2.21. E vektör uzayının bir bazı $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$, F vektör uzayının bir bazı $(b_\beta)_{\beta\in J}$ olsun. Bu durumda E⊗F nin bir bazı $(E_\alpha \otimes F_\beta)_{(\alpha,\beta)\in I\times J}$ dir (Greub 1967).

Örnek 2.22. E vektör uzayının bir bazı $\{e_1, e_2\}$ ve F vektör uzayının bir bazı $\{f_1, f_2, f_3\}$ olsun. Bu durumda $E\otimes F$ tensör çarpımının bir bazı
$\{e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 , e_2 \otimes f_3\}$ olur.

Sonuç 2.23. E ve F sonlu vektör uzayı olsunlar. $E\otimes$F tensör çarpımını boyu,

$$\mathrm{boy}(E\otimes \mathrm{F}) = \mathrm{boy}(E).\mathrm{boy}(F)$$

dir (Greub 1967).

Teorem 2.24. E, F ve G aynı Γ cismi üzerinde vektör uzayı ve E ile F nin tensör çarpım uzayı $E\otimes$F olsun. Bu durumda;

$$\mathrm{L(E\otimes F, G)} = \{\Phi\colon \mathrm{E\otimes F} \to \mathrm{G, lineer}\}, \mathrm{L2(E, F; G)} = \{\Phi|\ \Phi\colon \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to G, 2 - \mathrm{lineer}\}$$

vektör uzayları arasında tanımlanan

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}(\mathrm{E}\otimes F, G) \to \mathrm{L}_2(E, F; G)$$

$$f \to \Psi (f) = f \circ \Psi$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir (Greub 1967).

Teorem 2.25. E ve F aynı Γ cismi üzerinde vektör uzayı ve E nin dual uzayı E^* olsun. Bu durumda $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{W}$ ve $\mathrm{Hom(V, W)}$ uzayları lineer izomorfiktirler (Greub 1967).

2.3 Vektör Demetleri

Tanım 2.26. E ve M diferensiyellenebilir manifoldlar olsunlar. $\pi: E \rightarrow M$ türevlenebilir ve türev dönüşümü örten olan bir dönüşüm olsun. Eğer;

VD1) Her $p \in M$ için $\pi^{-1}(p) = E_p \subset E$ aynı k- boyutlu bir vektör uzay yapısına sahip,

VD2) (Lokal aşikarlık) Her $p \in M$ noktasının bir U koordinat komşuluğu için,

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

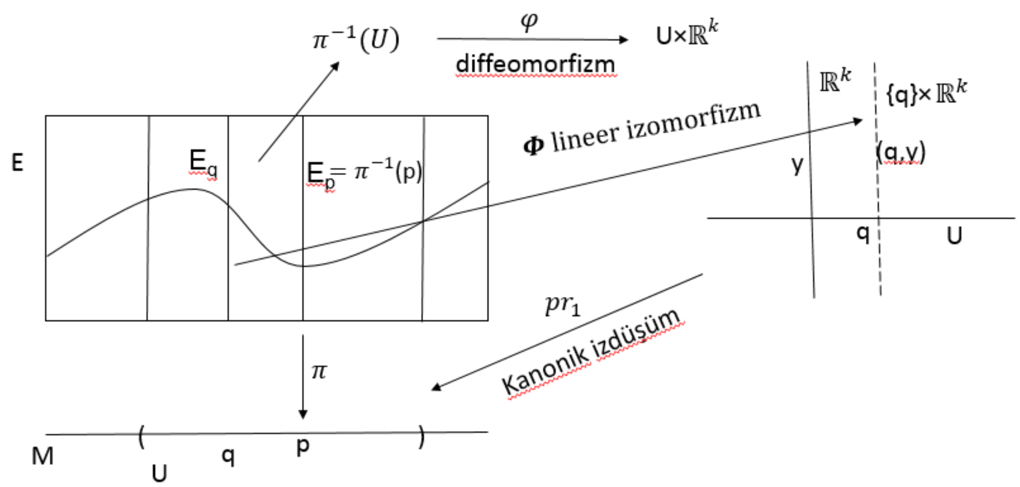
diffeomorfizmi var öyle ki her q$\in \pi^{-1}(U)$

$$pr_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U; (q, y) \rightarrow q$$

kanonik izdüşüm olmak üzere

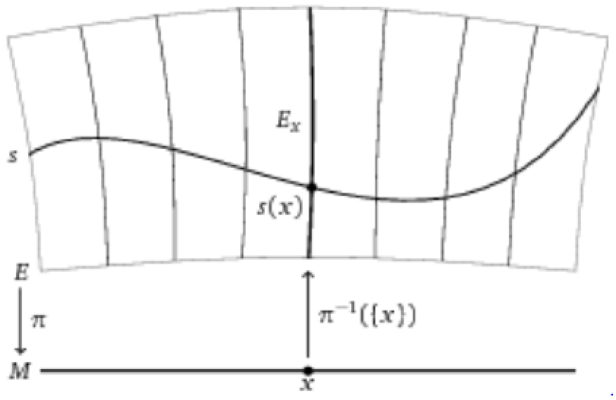
$$\varphi : \pi^{-1}(q) = E_q \rightarrow pr_1^{-1}(q) = \{q\} \times \mathbb{R}^k;$$

bir lineer izomorfizm var ise (E, M, π) ye bir vektör demeti ve E ye total uzayı, M ye taban uzayı denir (Xin 1996). (E, M, π) vektör demeti gösterimi yerine literatürde π: E→ M gösterimi ya da $E = (E, M, \pi)$ gösterimi de kullanılır (Bakınız Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Vektör demeti

Tanım 2.27. $E = (E, M, \pi)$, M üzerinde bir vektör demeti olsun. $s : M \rightarrow E$ bir türevlenebilir dönüşümü $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ olacak şekilde M üzerinde tanımlı bir özdeşlik dönüşümü var ise s ye E vektör demetinin bir kesiti denir. Bir kesitin resmi E de bir eğridir. E vektör demetinin bütün kesitleri $\Gamma(E) = \{s|s\colon M \rightarrow E \text{ kesit}\}$ şeklinde gösterilir (Xin 1996).



Şekil 2.3. Vektör demetin kesiti (Siemssen 2015)

E nin her E_x fibresi bir vektör uzay yapısına sahip olduğunda 0_x ile temsil edilen bir sıfır vektörüne sahip olmalıdır. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.28. Her fibre üzerinde değeri "0" olan kesite sıfır kesit denir (Xin 1996).

Örnek 2.29. (Aşikar vektör demeti)

$\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, n boyutlu reel vektör uzayı, M bir diferansiyellenebilir manifold ve $E = M \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ çarpım manifoldu olsun. Bu durumda

$$\pi = M \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow M$$

$$(p, x) \rightarrow \pi(p, x) = p$$

ve

$$\pi^{-1}(p)\colon \{p\}\, x\, \mathbb{R}^{\mathrm{n}} = E_P$$

olmak üzere;

VD1)

$$\oplus \ : \ E_P \times E_P \rightarrow E_P$$

$$((p, x), (p, y)) \rightarrow (p, x \oplus y) = (p, x + y)$$

iç işlemi ve

$$\odot : E_P \text{ x } E_P \ \rightarrow \ E_P$$

$$(\lambda, (p, x)) \ \rightarrow (p, \lambda \odot x) = (p, \lambda. x)$$

dış işlemi ile birlikte $(E_p, (\ \mathbb{R}, +, .\ ), \oplus, \odot)$ bir reel vektör uzay yapısına sahip olur.

VD2) $U, p \in M$ nin bir koordinat komşuluğu olsun. Bu durumda

$$\mathrm{id_u} = \phi_\mathrm{u}: \pi^{-1} \ \ (\mathrm{u}) = \mathrm{U} \times \ \mathbb{R}^\mathrm{n} \rightarrow \ \mathrm{U} \times \mathbb{R}^\mathrm{n}$$

bir diffeomorfizmdir. Böylece

$$\pi_1: \mathrm{U} \times \ \mathbb{R}^\mathrm{n} \rightarrow \ \mathrm{U}; (\mathrm{p}, \mathrm{x}) \rightarrow \mathrm{p}$$

kanonik izdüşüm ile birlikte,

$$\pi^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^\mathrm{n} = E_P \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^\mathrm{n}$$

lineer izomorfiktirler.

Sonuç olarak $E = (M \times \mathbb{R}^\mathrm{n}, M, \pi), M$ üzerinde vektör demeti olur. Bu vektör demet M üzerinde aşikar vektör demeti olarak adlandırılır (Xin 1996).

Örnek 2.30. (Tanjant Demeti) M diferansiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olsun.

$$\pi: E = TM = \bigcup_{p \in M} T_P M \rightarrow M$$

$$(\mathrm{p}, \mathrm{v}) \rightarrow \mathrm{p}$$

B1) $\pi^{-1}(p) = T_p M = E_p$ olmak üzere

$$+: T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

$$((\mathrm{p}, \mathrm{u}), (\mathrm{p}, \mathrm{v})) \rightarrow (\mathrm{p}, \mathrm{u} + \mathrm{v})$$

$$\mathbf{.}: \mathbb{R} \times T_p M \rightarrow T_p M$$

$$(\lambda,(\mathrm{p},\mathrm{u})) \rightarrow (\mathrm{p},\lambda.\mathrm{u})$$

işlemleri ile birlikte, $(T_pM,(\mathbb{R},+,.),+,.)$ bir reel vektör uzay yapısına sahip olur.

B2) $p \in M$ noktasındaki bir harita (U,x) olsun . Bu durumda bir

$\mathrm{x}: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{x}(\mathrm{p}) = (\mathrm{x}_1(\mathrm{p}), \mathrm{x}_2(\mathrm{p}), \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}(\mathrm{p}))$

koordinat fonksiyonu tanımlanabilir. $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$, $U \subset M$ nin i' ninci koordinat eğrisinin tanjant vektörü olsun. Böylece T_pM de bir v tanjant vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, \partial_i|_{\boldsymbol{p}}$$

olarak yazılabilir. Buna göre her $e = \sum_{i=1}^{n} e_i\, \partial_i|_{\boldsymbol{p}} \in T_pM$ tanjant vektörü için

$\Phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$

$\mathrm{e} \rightarrow \Phi_U(e) = (\pi(e), e_1, \ldots, e_n)$

bir diffeomorfizm olur ve de

$$\Phi: \pi^{-1}(p) = E_p = T_pM \rightarrow \pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{R}^n; v \rightarrow \Phi(v) = (p, v_1, \ldots, v_n)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

Böylece $TM = (TM, M, \pi)$ tanjant demeti M üzerinde bir vektör demetidir. Daha fazlası

$$s: M \rightarrow TM, p \rightarrow s(p) = (p, v)$$
$$\pi: TM \rightarrow M, (p, v) \rightarrow \pi(p, v) = p$$

olup $\pi o s = \mathrm{i}d_M$ dir. Böylece TM tanjant demetinin kesiti Γ(TM), M nin bir vektör alanı olarak adlandırılır (Xin 1996).

Örnek 2.31. (İndirgenmiş Vektör Demeti) $\pi: E \rightarrow N$ bir vektör demeti , M türevlenebilir bir manifold ve $f: M \rightarrow N$ bir türevlenebilir dönüşüm olsun. Şimdi N üzerine kurulan E vektör demetinden f dönüşümü yardımıyla M üzerine bir vektör demeti inşa edilmeye çalışılacaktır.

a) $\pi: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{N}$ vektör demeti için

$$E_1 = f^*E = f^{-1}(E) = \{(p,e) \in M \times E \mid f(p) = \pi(e)\}$$

şeklinde tanımlı bir çarpım manifoldu göz önüne alınsın.

b)

$$\pi_1 : E_1 \to M; (p,e) \to p$$

doğal izdüşüm dönüşümü yardımı ile, bir $\hat{f}$ dönüşümü

$$\hat{f} : E_1 \to E; (p,e) \to e$$

olarak tanımlanırsa aşağıdaki diyagram geçişlidir (Bakınız Şekil 2.4.).

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Şekil 2.4. Geçişli Diyagram (Xin 1996)

c) Öncelikle $\pi_1{}^{-1}(p) = E_{1\pi_1{}^{-1}(p)}$ fibresinin bir vektör uzay yapısına sahip olduğu gösterilecektir. $\pi_1{}^{-1}(p)$ fibresi üzerinde (p,e_1) ve (p,e_2) noktalarını seçilsin. O zaman

$$+ : E_{1\pi_1{}^{-1}(p)} \times E_{1\pi_1{}^{-1}(p)} \to E_{1\pi_1{}^{-1}(p)}$$

$$(+)((p,e_1),(p,e_2)) = (p, e_1 + e_2)$$

iç işlemi ve

$$. : \mathbb{R} \times E_{1\pi_1{}^{-1}(p)} \to E_{1\pi_1{}^{-1}(p)}$$

$$(.)(t,(p,e_1)) = (p, te_1)$$

dış işlemi ile birlikte $((E_{1\pi_1{}^{-1}(p)}, (\mathbb{R},+,.),+,.)$ bir reel vektör uzayına sahip olur.

Şimdi $(f^{-1}(E))_p$ fibresi ile $E_{f(p)}$ fibresinin lineer izomorfik olduğunu gösterilecektir.

Tekrar $\pi_1{}^{-1}(p)$ fibresi üzerinde keyfi (p,e_1) ve (p,e_2)noktaları seçilsin. Bu durumda

$$t_1(p,e_1) + t_2(p,e_2) = (p, t_1e_1 + t_2e_2) \in \pi_1{}^{-1}(p)$$

olması nedeniyle $\pi(t_1e_1 + t_2e_2) = f(p)$

olur. Bu tespit yardımıyla

$\hat{f}(t_1(p,e_1) + t_2(p,e_2)) = \hat{f}(p, t_1e_1 + t_2e_2) = t_1e_1 + t_2e_2 = t_1\hat{f}((p,e_1)) + t_2\hat{f}((p,e_2))$

eşitliği elde edilir. Böylece $\hat{f}: E_1 \to E; (p,e) \to e$

dönüşümü bir lineer dönüşüm olur. Açıkça $\hat{f}$ bir örten dönüşümdür. N üzerinde kurulan E vektör demeti üzerinde keyfi bir $e \in E$ vektör alanı seçilsin. e nin ters resmi, $\hat{f}^{-1}(e) = (p,e)$ ve $(q,e) \in E_1$ olsun. Fakat $\pi_1{}^{-1}(p)$ fibresi üzerinde $p = q$ olmak zorundadır. Bu da $\hat{f}$ nin birebir olması demektir. Sonuç olarak $\hat{f}$ bir lineer izomorfizm olur.

d) E, N üzerinde bir vektör demeti olduğundan VD2) (lokal aşikarlık) nedeniyle verilen her $p \in M$ için f(p) nin bir U koordinat komşuluğu

$$h: U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U);$$

$$(f(p), v) \to h(f(p), v)$$

diffeomorfizm olacak şekilde vardır. f: M $\to N$ bir türevlenebilir ve dolayısıyla sürekli bir dönüşüm olacağından f^{-1}(U)=U_1 , $p \in M$ nin bir lokal koordinat komşuluğu olacaktır. Böylece,

$$h_1: U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1{}^{-1}(U)$$

$$(p, v) \to h_1(p, v) = \big(p, h(f(p), v)\big) \in M \times \pi^{-1}(U) \subset M \times E$$

dönüşümü tanımlanabilir. Böylece h ve f diferensiyellenebilir dönüşüm olduklarından dolayı h_1 diferensiyellenebilir bir dönüşüm olur. h_1 in tersinin diferensiyellenebilir olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Bir $e_1 \in \pi_1^{-1}(U_1)$ noktası

$$e_1 = (p, e) \in M \times E, f(p) = \pi(e)$$

olacak şekilde belirlensin. O zaman $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(p) = (\pi \text{o}\, h)(f(p), v)$ ve $f(p) = \pi(e)$ nedeniyle $h^{-1}(e) = (f(p), v)$ dir. Böylece $h_1(p, v) = \big(p, h(f(p), v)\big) = (p, e) = e_1 \in \pi_1^{-1}(U_1) \subset E_1$ dir. Böylece bir

$$h_1^{-1}: \pi_1^{-1}(U_1) \to U_1 \times \mathbb{R}^n$$

$$h_1^{-1}(e_1) = (p, v)$$

şeklinde bir h_1^{-1} dönüşümü tanımlanabilir. Açık olarak

$$(\, h_1 \text{o} h_1^{-1})(e_1) = h_1(p, v) = \big(p, h(f(p), v)\big) = (p, (h \text{ o } h^{-1})(e)) = (p, e) = e_1$$

ve

$$(\, h_1^{-1} \text{o }h_1)(p, v) = h_1^{-1}\big(p, h(f(p), v)\big) = (p, v)$$

dir. Sonuç olarak h_1^{-1} , h_1 in tersi olan dönüşümdür. Böylece $h_1^{-1}(e_1) = h_1^{-1}(p, e) = (p, v) = (id_M(p), \Phi(e))$ dir. Burada

$$\Phi: \pi^{-1}(q) = E_q \ \to pr_1^{-1}(q) = \{q\} \times \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümdür. Sonuç olarak $h_1^{-1} = (id_M, \Phi)$ şeklinde olup diferensiyellenebilir bir dönüşümdür.

Böylece $h_1: U_1 \times \mathbb{R}^n \to {\pi_1}^{-1}(U)$ bir diffeomorfizmdir ve $(U_1, h_1), E_1$ in bir lokal koordinat komşuluğu olur.$E = (E, M, \pi)$ vektör demeti ve $f: M \to N$ bir türevlenebilir dönüşüm yardımıyla M baz uzayı üzerinde yeni bir $f^{-1}(E) = E_1 = (E_1, M, \pi_1)$ vektör demeti elde edilir (Xin 1996).

Tanım 2.32. $\Phi: M \to N$ bir türevlenebilir dönüşüm olsun. E, N üzerinde tanımlı bir vektör demeti ve E den M üzerine indirgenmiş (pull-back) vektör demeti E_1 olsun. E vektör demetinin bir kesiti "s∈Γ(E)" olmak üzere s nin indirgenmiş kesiti

$$s_1(y) = (y, s(\Phi(y)) \in E_1 \text{ ; her } y \in M$$

olarak tanımlanır (Friswell 2014).

Uyarı 2.33. s, E nin bir kesiti olsun. Bu durumda $\phi(\mathrm{y}) = \pi(s(\phi(y))$ olur. Böylece s_1 $(y) \in (E_1)_y$ dir. Bazen literatürde $s_1 = \phi^*(s) = \phi^{-1}(s)$ gösterimi de kullanılır (Friswell 2014).

3. KONNEKSİYONLAR

Vektör demetlerin temel özelliklerini tartışmak için konneksiyon teorisini inceleyeceğiz.

M bir Riemann manifoldu, (E, M, π) bir vektör demeti ve bu demetin bütün kesitleri cümlesi $\Gamma(E)$ olsun. Bu takdirde

$$\nabla: \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{E}) \to \Gamma(\mathrm{E}); \nabla(\mathrm{X}, \phi) = \nabla_X \phi$$

dönüşümü

(1) Herhangi bir f $\in C^\infty(M)$, her $X \in \Gamma(TM)$ ve $\phi \in \Gamma(\mathrm{E})$ ve $\phi \in \Gamma(\mathrm{E})$ için

$$\nabla_{fX}\phi = f\,\nabla_X \phi;$$

Herhangi bir $X, Y \in \Gamma(\mathrm{TM})$ ve her $\phi \in \Gamma(\mathrm{E})$ için

$$\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X \phi + \nabla_Y \phi;$$

(2) Herhangi bir $\phi, \psi \in \Gamma(\mathrm{E})$ için

$$\nabla_X(\phi + \psi) = \nabla_X \phi + \nabla_X \psi;$$

(3) Herhangi bir $f \in \Gamma(M \times \mathbb{R})$, her X $\in \Gamma(\mathrm{TM})$ ve $\phi \in \Gamma(\mathrm{E})$ için

$$\nabla_X f\phi = \mathrm{X}(f)\phi + f\,\nabla_X \phi$$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya E vektör demeti üzerinde bir lineer konneksiyonu ve $\nabla_X \phi$ ye ϕ nin X yönündeki kovaryant türevi (değişimi) denir (Xin 1996).

Tanım 3.1. (İndirgenmiş (pull-back) Konneksiyon) $\phi: M \to N$ bir türevlenebilir dönüşüm ve E, N üzerinde tanımlı bir vektör demeti ve E den M üzerine indirgenmiş (pull-back) vektör demeti E_1 olsun. ∇, E vektör demeti üzerinde bir lineer konneksiyon olmak üzere E_1 üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ∇^1

$$\nabla^1_Y s_1 = (y, \nabla_{d\phi(Y)} s); \forall s \in \Gamma(\mathrm{E})\ ve\ Y \in T_y M$$

şeklinde tanımlanır (Friswell 2014).

Bir başka deyişle E, N üzerinde tanımlı bir vektör demeti ve E den M üzerine indirgenmiş (pull-back) vektör demeti E_1 olmak üzere E_1 üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ∇^1

$$\nabla^1 : \Gamma(TM) \times \Gamma(\mathrm{E}_1) \to \Gamma(\mathrm{E}_1)$$

$$(X, s_1) \to \nabla^1_X(s_1) = \nabla_{d\phi(Y)} s$$

olarak da tanımlanır (Baird ve Wood 2003).

Uyarı 3.2. Genellikle, eğer $X \in \Gamma(TM)$ ise $\phi^{-1}(TN)$ nin bir kesiti olan $d\phi(X)$;

$$d\phi(X)(p) = (\mathrm{p}, \mathrm{d}\phi(\mathrm{X}(\mathrm{p}))), \forall\, \mathrm{p} \in M,$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Tanım 3.3. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı ve dejenere olmayan $(0,2)$ tipinde bir tensör alanı g ye M üzerinde bir metrik tensör denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.4. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun Eğer M nin her noktası bir g metrik tensör ile donatılıyor ise (M, g) 2-lisine Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

Teorem 3.5. (M, g) bir Riemann manifold olsun. O zaman:
(D4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$; (∇-lineer konneksiyonu simetrik yada torsiyonsuz)
(D5) $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$, her $V, W \in \Gamma(TM)$; (∇-lineer koneksiyonu g ile uyumlu)
özelliklerini sağlayan bir tek konneksiyon vardır ve bu konneksiyona Levi-Civita konneksiyon denir ve daha fazlası

$$2g(\nabla_V W, X) = Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]$$

Koszula formülü ile karakterize edilir (O'Neill 1983).

Tanım 3.6. (M, g) bir Riemann manifold ve ∇-Levi-Civita konneksiyonu olsun .

$$R: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z;\ \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{TM})$$

şeklinde tanımlı (1,3) tipindeki tensör alanına M üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı denir (O'Neill 1983).

Önerme 3.7. (M, g) Riemann manifoldu için**,** Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $R(X,Y) = -R(Y,X)$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$,

2. $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$, $\forall\, X,Y,V,W \in \Gamma(TM)$,

3. $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$, $\forall\, X,Y,Z \in \Gamma(TM)$,

4. $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$; $\forall\, X,Y,V,W \in \Gamma(TM)$

(O'Neill 1983).

Önerme 3.8. $(M\ , g)$ bir Riemann manifoldu, $p \in M$ olmak üzere $\pi = Sp\{V,W\} \subset T_pM$ dejenere olmayan 2 boyutlu alt uzay olsun. Bu durumda

$$K(V,W) = g(R(V,W)V,W)/Q(V,W)$$

değeri baz seçiminden bağımsızdır. Bu sayıya π nin kesit eğriliği denir ve $K(\pi)$ şeklinde gösterilir. Burada $Q(V,W) = g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2$ ve bu değer $\{V,W\}$ tarafından üretilen 2 boyutlu uzayın alan elementidir. (O'Neill 1983).

Önerme 3.9. (M,g) ve (N,h) Riemannian manifold ve $\phi : M \to N$ bir diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. ∇, TN üzerinde simetrik bir lineer konneksiyon ve $\phi^{-1}(TN)$ üzerindeki indirgenmiş (pull-back) konneksiyon $\widetilde{\nabla}$ olsun. O zaman

$$\widetilde{\nabla}_X d(\phi\,(Y) - \widetilde{\nabla}_Y d\big(\phi\,(X)\big) = d\phi\,([X,Y]); \forall X,Y \in \Gamma(TM\ )$$

dir (Baird ve Wood 2003).

Tanım 3.10. $(M\ , g)$ ve (N,h) Riemannian manifold ve $\phi: M \ \to N$ bir diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun $\nabla\ \ ve\ \nabla^N$ sırasıyla $TM\ ve\ TN$ üzerindeki (Levi-Civita) konneksiyonlar, $\overline{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla $\phi^{-1}(TN)$, ve $(T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$ üzerindeki indirgenmiş konneksiyonlar olmak üzere

$$B(\phi)(X,Y) = (\widetilde{\nabla}\, d\phi)(X,Y)$$

$$= (\widetilde{\nabla}_X d\phi)(Y) = \nabla^N$$

$$= \overline{\nabla}_X\big(d\phi(Y)\big) - d\phi(\nabla_X \mathrm{Y})$$

$$= \nabla^N_{\mathrm{d}\phi(X)}\mathrm{d}\phi(Y) - \mathrm{d}\phi(\nabla_X Y))\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlı $B(\phi)$ ye ϕ nin ikinci temel formu denir (Urakawa 2015).

4. HARMONİK VE BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, harmonik ve biharmonik dönüşümler tanıtılacaktır.

4.1 Birinci Varyasyon Hesapları

Tanım 4.1. (M^m, g) ve (N^n, h) diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. ϕ nin enerji yoğunluk fonksiyonu $e(\phi)$

$$\mathrm{e}(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h(d\,\phi(e_i), d\phi(e_i)) \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.2. (M^m, g) ve (N^n, h)diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. D, M nin bir kompakt bölgesi olsun. Bu durumda

$$\mathrm{E}(\phi) = \frac{1}{2}\int_D \mathrm{e}(\phi)\, v_g \tag{4.2}$$

integraline D üzerinde ϕ nin enerjisi denir (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.3. $I = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ ve her $t \in$ I için

$$\phi_t: M \to N,$$
$$F(\mathrm{t}, \mathrm{x}) = \phi_t(\mathrm{x}), \ x \in M\,, \,,$$
$$F(0, x) = \phi(x) = \phi_0(x)$$

şeklinde tanımlı $F: I \times M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşümüne $\phi: M \to N$ nin diferensiyellenebilir dönüşümünün bir 1-parametreli değişimi (varyasyonu) denir. D, M nin bir kompakt bölgesi olsun. Eğer her $x \in (M \backslash içD)$ ve her t $\in$ I için $\phi_t(x) = \phi(x)$ ise F, D üzerinde destekli varyasyon olarak adlandırılır (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.4. (M, g_M) ve (N, g_N) iki Riemann manifold ve $\phi: M \to N$ dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. D, M nin bir kompakt bölgesi olsun. F, D üzerinde destekli varyasyon olmak üzere kompakt bütün D bölgeleri için

$$\frac{d}{dt}\mathrm{E}(\phi_t; D)_{t=0} = 0$$

ise ϕ ye bir harmonik dönüşüm denir (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.5. (M, g_M) ve (N, g_N) iki Riemann manifold ve $\widetilde{M} = M \times N$ çarpım manifoldu üzerinde tanımlı Riemann metrik

$$<,> = g_M \oplus g_N$$

her $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T(M \times N))$ için

$$< \tilde{X}, \tilde{Y} >= g_M(pr_1(\tilde{X}), pr_1(\tilde{Y})) + g_N(pr_2(\tilde{X}), pr_2(\tilde{Y}))$$

değeri ile bellidir $(\widetilde{M}, <,>)$ bir Riemann manifolduna Riemann çarpım manifoldu olarak isimlendirilir (O'Neill 1983).

$(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ noktası için, $T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times M)$ tanjant uzayı

$$T_{(t,x)}(\mathbb{R} \times x) \oplus T_{(t,x)}(t \times M) \equiv T_t\mathbb{R} \oplus T_pM$$

direkt toplam tanjant uzayına izomorfiktir (O'Neill 1983).

Tanım 4.6. $\widetilde{M} = B \times F$ çarpım manifoldu verilsin.

1- $f \in C^\infty(B)$ ve $\pi: B \times F \to B$ doğal birinci izdüşüm dönüşümü olmak üzere $\tilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(B \times F)$ dönüşümüne f nin kaldırılmışı (lifti),

2- $V \in T_pB,\ q \in F$ ve $(p, q) \in B \times F$ noktasındaki tanjant uzay $T_{(p,q)}(B \times F)$ olmak üzere $d\pi(\tilde{V}) = V$ olacak şekilde tanımlı bir tek tanjant vektörü $\tilde{V} \in T_{(p,q)}(B \times F)$ ye V nin $T_{(p,q)}(B \times F)$ ye yatay kaldırılmışı,

3- $X \in \Gamma(TB)$ ve $\tilde{X} \in \Gamma(T(B \times F)$ olmak üzere X nin $p \in B$ noktasındaki tanjant vektörününün $T_{(p,q)}(B \times F)$ tanjant uzayına kaldırılmış tanjant vektörü $\tilde{X}_{(p,q)}$ ise $\tilde{X}$ ya X nin $B \times F$ ye yatay kaldırılmış vektör alanı denir (O'Neill 1983).

Böylece $L_H(B)$ ile B üzerindeki vektör alanlarının yatay kaldırılmış (lifti) vektör alanların cümlesi temsil edilirse ise $\tilde{X} \in L_H(B)$ iken $d\pi(\tilde{X}) = X$ dir (O'Neill 1983).

Böylece $\mathbb{R} \times M$ üzerinde keyfi bir $\widetilde{X}$ vektör alanı $\partial_t \in \Gamma(T\mathbb{R}), X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere şeklinde

$\tilde{X} = <\tilde{X}, \partial_t>\partial_t + X$ yazılabilir.

Önerme 4.7. $(\widetilde{M} = \mathbb{R} \times M, dt \otimes dt \oplus g_M)$ bir Riemann çarpım manifoldu ve Riemann konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$, $\mathbb{R}$ ve M üzerindeki Riemann konneksiyonları sırasıyla $\nabla^{\mathbb{R}}$ ve ∇ olsun. O zaman

a) $\widetilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = \nabla^{\mathbb{R}}{}_{\partial_t}\partial_t = 0,$

b) $\widetilde{\nabla}_{\partial_t} X = \widetilde{\nabla}_X \partial_t = 0,$

c) $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$

dir (O'Neill 1983).

Tanım 4.8. (M, g) bir Riemann manifold ve Y, M üzerinde bir vektör alanı olsun. $supp\, Y = \overline{\{x \in U \subset M : Y_x \neq 0\}}$ kompakt ise Y vektör alanına M üzerinde kompakt destekli vektör alanı denir (Baird ve Wood 2003).

Teorem 4.9. (M, g) bir Riemann manifold ve Y, M üzerinde kompakt destekli bir vektör alanı olsun. O zaman

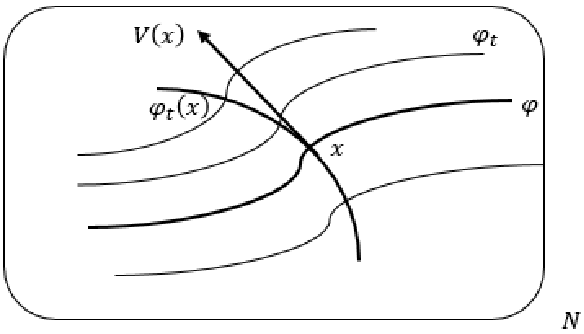
$$\int_M div(Y) vol(g) = 0 \tag{4.3}$$

dir (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.10. (M, g) ve (N, h) diferensiyellenebilir iki manifold ve $\varphi: M \to N$ dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. O zaman her $x \in M$ için φ nin 1-parametreli varyasyonu φ_t nin varyasyon alanı

$$V(x) = \frac{d}{dt}\,\Big|_{t=0} \varphi_t(x) \in T_{\varphi(x)} N$$

olarak tanımlanır. Burada $\varphi^{-1}(TN) = \bigcup_{x \in M} T_{\varphi(x)} N,\ v \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$ dir (Baird ve Wood 2003).



Şekil 4.1. Varyasyon Alanı (Urakawa 1991)

$(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ çarpım manifold ve bu çarpım manifold üzerinde Tanım 4.3 te tanımlı

$$F: I \times M \to N\,,$$

$$(t, x) \to F(t, x) = \phi_t(\mathrm{x}),$$

$$(0,x) \rightarrow F(0,x) = \phi_0(x) = \phi(x)$$

dönüşümü göz önüne alınsın.

$(-\,\varepsilon\,,\varepsilon\,) \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $\frac{\partial}{\partial t}$ vektör alanının $I \times M$ çarpım manifoldu üzerine kaldırılmış vektör alanı $(\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)}$ ve M üzerinde bir vektör alanı X, $I \times M$ çarpım manifoldu üzerine kaldırılmış vektör alanı $X_{(t,x)}$ olsun (Urakawa 1991).

Tanım 4.4 yardımıyla

$$dF(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(0,x)} = V(x), x \in M$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, her $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon\,)$ değeri için $t \rightarrow E(\phi_t)$ fonksiyonun türevi

$$\frac{d}{dt}E(\phi_t) = \frac{1}{2}\int_M \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt} h(d(\phi_t)e_i\,, d(\phi_t)e_i)v_g$$

için

$$\frac{d}{dt}h(d(\phi_t)e_i, d(\phi_t)e_i)$$

değeri aşağıdaki şekilde hesaplanırsa

$\frac{d}{dt}h(d(\phi_t)e_i, d(\phi_t)e_i) = \frac{d}{dt}h_{\phi_t(x)}(d\phi_t(e_{ix})\,, d\phi_t(e_{ix})) \quad ;(\phi_t\colon M \rightarrow N)$

$= \frac{d}{dt}h_{F(t,x)}(dF(e_{i(t,x)})\,, dF(e_{i(t,x)}) \quad ;(F\colon I \times M \rightarrow N)$

$= (\frac{\partial}{\partial t})_{(t,x)}h(dF(e_i)\,, dF(e_i)\,) \qquad ;(\frac{\partial}{\partial t}, I \times M$ üzerinde bir vektör alanı)

$= 2h\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}dF(e_i), dF(e_i\right); \quad (\overline{\nabla}, F^{-1}(TN)$ üzerine indirgenmiş konneksiyon ve $dF(e_i) \,\epsilon\, \Gamma(F^{-1}(TN))$ dir (Urakawa 1991).

Şimdi birinci varyasyon hesabı yapılacaktır.

$F\colon I \times M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümü için Önerme 3.8 ve Önerme 4.7 kullanılacak olunursa

$$\overline{\nabla}_X\big(dF(Y)\big) - \overline{\nabla}_Y\big(dF(X)\big) - dF([X,Y]) = 0; \forall X, Y \in \Gamma(T(I \times M))$$

denklemi bulunur. Eğer $X = \frac{\partial}{\partial t}$, $Y = e_i$ olarak seçilirse ve $I \times M$ nin bir çarpım manifoldu olmasından dolayı $\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right] = 0$ elde edilir. Böylece

$$2h\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(e_i), dF(e_i)\right) = 2h\left(\overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i)\right)$$

$$= 2\{e_i . h\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i)\right) - h(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{e_i} dF(e_i)\right)$$

eşitliği elde edilir. $X_t \in \Gamma(TM)$ kompakt destekli vektör alanını, her $Y \epsilon \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$g(X_t, Y), Y) = 2h\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(Y)\right)$$

olarak belirlenirse

$$\sum_{i=1}^{m} e_i . h(F\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i)) = \sum_{i=1}^{m} e_i . g(X_t, Y), Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \{g(\nabla_{e_i} X_t, e_i) + g(X_t, \nabla_{e_i} e_i)\}$$

$$= div(X_t) + \sum_{i=1}^{m} g(X_t, \nabla_{e_i} e_i)$$

$$= div(X_t) + \sum_{i=1}^{m} h(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(\nabla_{e_i} e_i))$$

eşitliği sahip olunur. Böylece,

$$\frac{d}{dt} e(\varphi_t) = \int_M div(X_t) v_g - \int_M h(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \sum_{i=1}^{m} \{\overline{\nabla}_{e_i} dF(e_i) - dF(\nabla_{e_i} e_i)\}) v_g$$

denklemi elde edilir (Urakawa 1991). Teorem 4.9 gereğince $\int_M div(X_t) v_g = 0$ dır. Böylece *t=0* için

$$dF \frac{\partial}{\partial t}(0, x) = V(x), \; dFe_i(0, x) = d\phi e_i(x), \quad dF\,(\nabla_{e_i} e_i(0, x)) = d\phi(\nabla_{e_i} e_i(x))$$

olduğundan dolayı

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t) = -\int_M h(V, \sum_{i=1}^{m} \{\overline{\nabla}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\}) v_g$$

elde edilir. Son denklemin sol tarafı $x \epsilon M$ için

$$\tau(\phi)(x) = \sum_{i=1}^{m} \{\overline{\nabla}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\}(x) \, \epsilon \, \Gamma(\phi^{-1}(TN))$$

$\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormal baz seçiminde bağımsızdır. $\tau(\phi)$ ye ϕ gerilim adı verilir (Urakawa 1991).

Sonuç olarak aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 4.11. (M,g) ve (N,h) diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin harmonik olması için gerek ve yeter koşulu

$\tau(\phi) = 0$ olmasıdır (Eells ve Sampson 1964).

4.2 İkinci varyasyon hesabı:

Tanım 4.12. (M,g) ve (N,h) iki Riemann manifold, $\phi: M \to N$bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve ϕ nin gerilimi $\tau(\phi)$olsun.

$$E_2(\phi; M) = \frac{1}{2}\int_M \|\tau(\phi)\|^2 \, v_g$$

fonksiyoneline ϕ nin bi-enerji fonksiyoneli denir (Baird ve Wood 2003).

Tanım 4.13. (M,g) ve $(N,h))$ iki Riemann manifold ve $\phi: M \to N$ dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. D, M nin bir kompakt bölgesi olsun. F, D üzerinde destekli varyasyon olmak üzere kompakt bütün D bölgeler için

$$\frac{d}{dt} E_2(\phi_t; D)_{t=0} = 0$$

ise ϕ ye bir biharmonik dönüşüm denir (Baird ve Wood 2003).

Şimdi, her $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ değeri için $t \to E_2(\phi_t)$ fonksiyonunun $t = 0$ da türevi

$$\frac{d}{dt} E_2(\phi_t)_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt} h\big(\tau(\phi_t), \tau(\phi_t)\big)_{t=0} dv_g = \int_M h(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t), \tau(\phi_t))_{t=0} \, dv_g$$

$$= \int_M h(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t)_{t=0}, \tau(\phi)) \, dv_g \qquad (4.4)$$

dir. $\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$ $x \in M$ noktasında ortonormal çatı alanı $\nabla_{e_i} e_j = 0$,$1 \leq j \leq m$ olacak şekilde seçilsin. O zaman $x \in M$ noktasında

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t) = \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} iz_g(\nabla dF) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \sum_{i=1}^{m} \nabla dF\,(e_i, e_i) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \sum_{i=1}^{m} \big(\overline{\nabla}_{e_i} dF\big)(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_i} dF(e_i) - \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(\nabla_{e_i} e_i) \qquad (4.5)$$

eşitliği elde edilir (Han ve Feng 2014, Jiang 2008). Verilen $\frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(\mathrm{T}\mathbb{R})$ ve $X \in \Gamma(\mathrm{T}M)$ vektör alanları için $I \times M$ bir çarpım manifold olmasından dolayı Önerme 4.7 gereğince $\left[\frac{\partial}{\partial t}, X\right] = 0$ olacaktır. Bu sonuç ile birlikte

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(X) = \overline{\nabla}_X dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + dF\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, X\right]\right) = \overline{\nabla}_X dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

eşitliğine sahip olunur. Böylece $x \in M$ noktasında (4.5) denklemi

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t) &= \sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_i} dF(e_i) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)) = \sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_i} dF(e_i)\, \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(e_i) - \overline{\nabla}_{\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right]} dF(e_i) + \bar{R}(\frac{\partial}{\partial t}, e_i) dF \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} dF(e_i) + R^N(dF(\frac{\partial}{\partial t}), dF(e_i)) dF(e_i)) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + R^N(dF(\frac{\partial}{\partial t}), dF(e_i)) dF(e_i))
\end{aligned}$$

durumuna getirilir,

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_t) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)) + \sum_{i=1}^{m} R^N(dF(\frac{\partial}{\partial t}), dF(e_i)) dF(e_i)) \qquad (4.6)$$

ve sonuç olarak denklemi elde edilir (Han ve Feng 2014, Jiang 2008).

M üzerinde

$g(X_t, Z) = h(\overline{\nabla}_Z dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tau(\phi_t))$ ve $g(Y_t, Z) = h(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_Z \tau(\phi_t))$ (her $Z \in \Gamma(\mathrm{T}M)$)

şeklinde tanımlı X_t ve Y_t , M kompakt destekli vektör alanları olsun. Bu durumda X_t ve Y_t nin divergensleri

$$\begin{aligned}
div(X_t) &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X_t, e_i) = \sum_{i=1}^{m} e_i g(X_t, e_i) - \sum_{i=1}^{m} g(X_t, \nabla_{e_i} e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m} e_i h(\overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tau(\phi_t)) - \sum_{i=1}^{m} g(\overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(\phi_t))
\end{aligned}$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{m} h(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \tau(\phi_t)) + \sum_{i=1}^{m} h(\overline{\nabla}_{e_i} dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{\nabla}_{e_i} \tau(\phi_t)) \qquad (4.7)$$

ve $div(Y_t) = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} Y_t, e_i) = \sum_{i=1}^{m} e_i g(Y_t, e_i) - \sum_{i=1}^{m} g(Y_t, \nabla_{e_i} e_i)$

$$= \sum_{i=1}^{m} e_i h(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{e_i} \tau(\phi_t)) - \sum_{i=1}^{m} h\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \tau(\phi_t)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} h\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\tau(\phi_t) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\tau(\phi_t)\right) + \sum_{i=1}^{m} h\left(\overline{\nabla}_{e_i}dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{e_i}\tau(\phi_t)\right) \quad (4.8)$$

şeklinde olur (Han ve Feng 2014, Jiang 2008). Böylece (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemleri yardımıyla

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\|\tau(\phi)\|}{2}\right)^2 = div(X_t) - div(Y_t) + \sum_{i=1}^{m} h\left(R^N\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF(e_i)\right)dF(e_i), \tau(\phi_t)\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} h\left(dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\tau(\phi_t) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\tau(\phi_t)\right) \quad (4.9)$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan Green’s teoremi yardımıyla

$$\int_M div(X_t) - div(Y_t)\; dv_g = 0 \quad (4.10)$$

dir. Böylece (4.9) ve (4.10) denklemleri ile birlikte

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t)_{t=0} = \int_M \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\|\tau(\phi)\|^2}{2}\right)_{t=0} dv_g$$
$$= \int_M h(-\tilde{\Delta}\tau(\phi) - \sum_{i=1}^{m} h\left(R^N\left(d\phi(e_i), \tau(\phi)\right)d\phi(e_i), V\right)\; dv_g$$
$$= \int_M h\left(\tau(\phi)^2\, V\right) dv_g \quad (4.11)$$

sonucuna ulaşılır (Han ve Feng 2014, Jiang 2008).

Burada $\tilde{\Delta} = -\sum_{i=1}^{m} \tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{e_i}$-$\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\; f^{-1}\Gamma(TN)$ üzerinde adi Laplace operatörüdür.

Sonuç olarak aşağıdaki teoreme ulaşılır.

Teorem 4.14. (M, g) ve (N, h) diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. ϕ nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul $\tau^2(\phi) =$ olmasıdır (Jiang 1986).

5. RIEMANN MANİFOLDLARDA POZİTİF OLMAYAN RİCCİ EĞRİLİĞE SAHİP BİHARMONİK HİPERYÜZEYLER

Nakauchi ve Urakawa (2011) tarafından ispatlanan (N, h) pozitif Ricci eğriliğe sahip olmayan bir Riemann manifold ve (M, g)bu Riemann manifoldun bir biharmonik hiperyüzeyi, H M nin ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere, eğer $\int_M \|H\|^2 v_g < \infty$ ise (M, g) minimal hiperyüzey olduğuna dair teoremin bir yorumu verilmiştir.
Bu tartışmadan önce Ou (2010) da verilen ve bölüm içerinde kullanılacak bir Riemann manifoldun hiperyüzeylerin biharmonik olma koşulları incelenmiştir.
Daha sonra 3-boyutlu bir Riemann manifolddan 2-boyutlu Rieamann manifolda tanımlı bir Riemann submersiyonun biharmonik olması için gerek ve yeter koşullar verildikten sonra biharmonik submersiyonlarla ilgili bir örnek verilmiştir (Wang ve Ou 2011**).**

5.1. Biharmonik Hiperyüzeyler

Jiang (1987), Chen ve Ishikawa (1998) 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^3$de biharmonik alt manifoldların minimal olduğunu, Dimitric (1992) n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ de her biharmonik eğrinin bir doğru olduğunu ve en fazla iki farklı asli eğriliklere sahip biharmonik hiperyüzeylerin minimal olması gerektiğini ve Hasanis ve Vlachos (1995) 4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^4$ biharmonik hiperyüzeylerin minimal olduğunu ispat ettiler. Chen (1991) de ispatı hala açık olan aşağıda ifade edilen aşağıdaki önermeyi önerdi:

Chen Önermesi: Öklid uzayında her biharmonik altmanifold minimaldir.
Chen Önermesi Caddeo ve ark. (2002) tarafından hiperbolik 3 uzayı $\mathcal{H}^3(-1)$ de biharmonik altmanifoldların minimal olduğu ispat edildi. Balmuş ve ark. (2008) n-boyutlu hiperbolik uzayı $\mathcal{H}^n$ nin enfazla farklı iki asli eğriliğe sahip hiperyüzeylerin minimal olduğunu gösterdiler.

Böylece Caddeo ve ark. (2001) Chen Önermesini aşağıda verilen önermeye genişlettiler.

Genişletilmiş Chen Önermesi: Pozitif olmayan Riemann eğriliğine sahip (N, h) Riemann manifoldun her biharmonik altmanifoldu minimaldir.
S^n Öklid küresi durumunda ise Balmuş ve ark. (2008) de aşağıdaki teoremi ispat ettiler.

Teorem 5.1. M^m, S^{m+1} hiperküresinin en fazla iki farklı asli eğriliğe sahip harmonik olmayan biharmonik hiperyüzey olsun. O zaman M, $S^m(\frac{1}{\sqrt{2}})$ veya $S^k(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^l(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $k + l = m$, k$\neq$ l, nın bir parçasıdır.

Daha sonraları Balmuş ve ark. (2010) isimli çalışmalarında 4-boyutlu S^4 Öklid küresinin harmonik olmayan biharmonik kompakt hiperyüzeylerin sadece $S^3(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ve $S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$ torus olduğunu göstermişlerdir.

Aynı çalışmada $\mathbb{R}^4(c)$ uzay formunda 3 boyutlu biharmonik hiperyüzeyin sabit ortalama eğrilikli manifolda sahip olduğunun sonucunu elde etmişlerdir.

$\phi: M \to (N, h)$ bir izometrik immersiyon olsun. O zaman $\phi^{-1}TN$ tanjant demeti $\phi^{-1}TN = tan(TM) \oplus nor(TM)$ ayrışımına sahiptir. O zaman her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için ∇ ve ∇^N sırasıyla $TM\ ve\ TN$ üzerindeki (Levi-Civita) konneksiyonlar, $\overline{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla $\phi^{-1}TN$, ve $(T^*M \otimes \phi^{-1}TN)$ üzerindeki indirgenmiş konneksiyonlar olmak üzere izometrik immersiyonun ikinci temel formu

$$\begin{aligned} B(\phi)(X,Y) &= (\widetilde{\nabla} d\phi)(X,Y) \\ &= (\widetilde{\nabla}_X d\phi)\,(Y) \\ &= \overline{\nabla}_X\big(d\phi(Y)\big) - d\phi(\nabla_X Y) \\ &= \nabla^N_{d\phi(X)} d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X Y) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $B(\phi)(X,Y)$ yerine kısalığın hatırına $B(X,Y)$ gösterimi kullanılacaktır. Böylece ϕ izometrik immersiyona karşılık gelen gerilim vektör alanı

$$\begin{aligned} \tau(\phi) &= \sum_{i=1}^m \{\overline{\nabla}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m \{\nabla^N_{d\phi(e_i)} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) \\ &= mH\xi \end{aligned}$$

dir. Burada ξ hiperyüzeyin birim normal vektör alanı ve H hiperyüzeyin ortalama değeridir.

Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.2. $\phi: M^m \to N^{m+1}$ ortalama vektör alanı $\mu = H\xi$ bir izometrik immersiyon olsun. O zaman ϕ nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} \Delta H - H\|A\|^2 + Ric^N(\xi,\xi) = 0, \\ 2A(gradH) + \frac{m}{2} gradH^2 - H((Ric^N(\xi))^{\intercal} = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

dir. Burada Ric^N, N nin Ricci operatörü; $Ric^N(.,.)$, N nin skaler eğriliği; A, M hiperyüzeyin normal vektör alanı ξ ya göre şekil operatörüdür (Ou 2010).

İspat: M hiperyüzeyinin bir lokal ortonormal çatı alanı $\{e_1, \ldots, e_m\}$ olsun. $\nabla\ ve\ \nabla^N$ sırasıyla $TM\ ve\ TN$ üzerindeki (Levi-Civita) konneksiyonlar olsun. $\overline{\nabla}$, $\phi^{-1}(TN)$ üzerindeki indirgenmiş konneksiyon olmak üzere her $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ için $\big(d\phi(Y)\big) = \nabla^N_{\mathrm{d}\phi(X)} \mathrm{d}\phi(Y) = \nabla^N_{\mathrm{X}} Y$ dir.

Burada $\mathrm{d}\phi(X) = X$ ile özdeşletilmiştir. ϕ nin gerilim (tensiyon) alanı $\tau(\phi) = mH\xi$ olup bigerilimi $\tau^2(\phi)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\begin{aligned}
\tau^2(\phi) &= -\Delta\tau(\phi) - \sum_{i=1}^{m} R^N\big(e_i, \tau(\phi)\big)(e_i) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^m \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} (m\, H\xi) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}(m\, H\xi) - R^N(e_i, m\, H\xi) e_i \\
&= m \textstyle\sum_{i=1}^m \overline{\nabla}_{e_i}\big(e_i(H)\xi + H\overline{\nabla}_{e_i}\xi\big) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}(H\xi) - R^N(e_i, H\xi) e_i \\
&= m \textstyle\sum_{i=1}^m \big(e_i e_i(H)\xi + e_i(H)\nabla^N_{e_i}\xi + e_i(H)\nabla^N_{e_i}\xi + H\nabla^N_{e_i}\nabla^N_{e_i}\xi \\
&\qquad -(\nabla_{e_i} e_i)(H)\xi - H\nabla^N_{\nabla_{e_i} e_i}\xi\big) - mH \textstyle\sum_{i=1}^m R^N(e_i,\xi)e_i \\
&= m \textstyle\sum_{i=1}^m e_i e_i(H)\xi - (\nabla_{e_i} e_i)(H)\xi + 2e_i(H)\nabla^N_{e_i}\xi + H\nabla^N_{e_i}\nabla^N_{e_i}\xi \\
&\qquad - H\nabla^N_{\nabla_{e_i} e_i}\xi - mH \textstyle\sum_{i=1}^m R^N(e_i,\xi)e_i \\
&= m(\Delta H)\xi - mH\tilde{\Delta}\xi + 2m \textstyle\sum_{i=1}^m h(d\phi(gradH), \mathrm{d}\phi(e_i))(-Ae_i) \\
&\qquad - mH \textstyle\sum_{i=1}^m R^N(e_i,\xi)e_i \\
&= m(\Delta H)\xi - mH\tilde{\Delta}\xi - 2m \textstyle\sum_{i=1}^m A(h(d\phi(e_i), d\phi(gradH)) e_i) \\
&\qquad - mH \textstyle\sum_{i=1}^m R^N(e_i,\xi)e_i
\end{aligned}$$

Böylece

$$\tau^2(\phi) = m(\Delta H)\xi - mH\tilde{\Delta}\xi - 2mA(gradH) - mH \textstyle\sum_{i=1}^m R^N(e_i,\xi)e_i \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (5.2) denklemindeki eğrilik tensör alanının teğet ve normal bileşenleri bulunursa

$$\sum_{i,k=1}^{m} h(R^N(d\phi(e_i),\xi)d\phi(e_i),d\phi(e_k))e_k = -\left(Ric^N(\,\xi, d\phi(e_k))\right)e_k = -\left(Ric(\xi)\right)^{\intercal}$$

ve

$$\sum_{i,k=1}^{m} h(R^N\left(d\phi(e_i),\tau(\phi)\right)d\phi(e_i),\xi) = -mHRic^N(\xi,\xi)$$

eşitliklerine elde edilir.

Diğer taraftan ξ birim normal vektör alanı olduğundan her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(\nabla_X^N\xi,\xi) = 0 \tag{5.3}$$

ve dolayısıyla

$$h(\nabla_Y^N\nabla_X^N\xi,\xi) + h(\nabla_X^N\xi,\nabla_Y^N\xi) = 0 \tag{5.4}$$

dır.

Böylece (5.3) ve (5.4) denklemlerinin yardımıyla

$$h\left(\tilde{\Delta}\xi,\xi\right) = \sum_{i=1}^{m} h(-\nabla_{e_i}^N\nabla_{e_i}^N\xi + \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}^N\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{m} h(\nabla_{e_i}^N\xi,\nabla_{e_i}^N\xi) \tag{5.5}$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan g hiperyüzey üzerine h dan indirgenmiş Riemann metriği olmak üzere bir hiperyüzeyin birim normal vektör alanı ξ ya göre şekil operatörü A ve ikinci temel formu B arasında aşağıda verilen denklemleri kullanarak

$$B(X,Y) = h(\nabla_X^N Y,\xi)\xi = -h(Y,\nabla_X^N\,\xi)\xi = g(AX,Y)\xi$$

ve

$$g(AX,Y) = h(B(X,Y),\xi)\xi = h(b(X,Y)\xi,\xi) = b(X,Y)$$

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g(Ae_i,e_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} h(\nabla_{e_i}^N\,\xi,e_j)^2 = \sum_{i=1}^{m} h(\nabla_{e_i}^N\,\xi,\sum_{j=1}^{m} h(\,\nabla_{e_i}^N\,\xi,e_j),e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} h(\,\nabla_{e_i}^N\,\xi,\nabla_{e_i}^N\,\xi) \tag{5.6}$$

eşitlikleri bulunur.

(5.5) ve (5.6) denklemlerini kullanarak $\tilde{\Delta}\xi$ nin normal bileşeni

$$(\tilde{\Delta}\xi)^{\perp} = h\left(\tilde{\Delta}\xi,\xi\right)\xi = \sum_{i=1}^{m} h(\,\nabla_{e_i}^N\,\xi,\nabla_{e_i}^N\,\xi)\xi = \;\|A\|^2\,\xi$$

olarak bulunur. Ayrıca $\tilde{\Delta}\xi$ tanjant bileşeni ise

$$\left(\tilde{\Delta}\xi\right)^{\intercal} = \sum_{i,k=1}^{m} h\left(-\nabla_{e_i}^N\nabla_{e_i}^N\xi + \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}^N\xi,e_k\right)e_k = \sum_{i,k=1}^{m} h\left(\nabla_{e_i}^N Ae_i - A(\nabla_{e_i}e_i),e_k\right)e_k$$

$$= \sum_{i,k=1}^{m} (\nabla_{e_i} b)(e_i, e_k)\, e_k \tag{5.7}$$

olarak elde edilir.

Hiperyüzeyler için

$(\nabla_{e_i} b)(e_k, e_i) - (\nabla_k b)(e_i, e_i) = h(R^N(e_i, e_k)e_i, \xi)$

şeklinde ifade edilen Codazz-Mainardi denklemini (5.7) de kullanılacak olunursa $\tilde{\Delta}\xi$ nin tanjant bileşeni

$$\begin{aligned}
(\tilde{\Delta}\xi)^{\top} &= \sum_{i,k=1}^{m} (\nabla_{e_i} b)(e_i, e_k)\, e_k \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{m} (\sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_k} b)(e_i, e_i) - Ric(\,\xi, e_k))e_k \\
&= m \textstyle\sum_{k=1}^{m} e_k(H)\, e_k - \sum_{k=1}^{m} Ric(\xi, e_k)\, e_k \\
&= mgrad(H) - \textstyle\sum_{k=1}^{m} Ric(\xi, e_k)\, e_k
\end{aligned} \tag{5.8}$$

şeklinde olur. Böylece $\tau^2(\phi)$ normal ve tanjant bileşenleri sırasıyla

$$(\tau^2(\phi))^{\perp} = h(\tau^2(\phi), \xi)\xi = m(\,\Delta H - H\|A\|^2 + HRic^N(\xi,\xi))\,\xi$$

$$(\tau^2(\phi))^{\top} = \sum_{k=1}^{m} h(\tau^2(\phi), e_k)e_k = -m(2A(gradH) + \frac{m}{2} gradH^2 - H((Ric^N(\xi))^{\top}$$

olup bu da teoremin ispatını tamamlar.

5.2. Pozitif Olmayan Ricci Eğriliğe Sahip Riemann Manifoldlarda Biharmonik Hiperyüzeyler

Öncelikle aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 5.3. $(\wp, d)$ bir lokal kompakt metrik uzay olsun. U ve V , $\wp$ üzerinde $U \subset \overline{U} \subset V$ özelliğinde açık cümleler olsun. $\wp$ üzerinde tanımlı reel değerli bir Ω fonksiyonu U üzerinde $\Omega = 1$ ve V nin tümleyeni V^C üzerinde $\Omega = 0$ ise Ω fonksiyonuna eşik değer (cut-off) fonksiyonu denir (Andres ve Barlow 2015).

Yardımcı Önerme 5.4. (M, g) kompakt olmayan bir tam Riemann manifold ve L, M üzerinde tanımlı negatif değerli olmayan bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve f, M üzerinde

$$\Delta_g f = Lf \tag{5.9}$$

Schrödringer tipi denklemini sağlayan, karesi integrallenebilir differensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman f, M üzerinde sabit bir fonksiyondur (Nakauchi ve Urukawa 2011).

İspat:

M üzerinde herhangi bir x_0 noktası ve her $r > 0$ reel sayısı için

$$\begin{cases} 0 \leq \tau(x) \leq 1 & (x \in M), \\ \tau(x) = 1 & \left(x \in B_r(x_0)\right), \\ \tau(x) = 0 & \left(x \notin B_{2r}(x_0)\right), \\ |\nabla_\tau| \leq \frac{2}{r} & (M\ \ddot{u}zerinde) \end{cases} \qquad (5.10)$$

şeklinde tanımlı $\tau: M \to \mathbb{R}$ eşik değer fonksiyonu tanımlansın. Burada $B_r(x_0) = \{x \in M: d(x_0, x) < r\}$ ve d, (M,g) üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonudur.

(5.9) denklemin her iki tarafını $\tau^2 f$ ile çarpılıp M üzerinden integre edilirse

$$\int_M ((\tau^2 f)\Delta_g f)\vartheta_g = \int L\tau^2 f^2 \vartheta_g \qquad (5.11)$$

denklemine ulaşılır.

Diğer taraftan 1954 de Gaffney, ünlü Stokes Teoremini tam Riemann manifoldlara genişletmiştir. Bir başka deyişle eğer M tam bir Riemann manifold ve X, M üzerinde bir vektör alanı ise $\int_M divX\, \vartheta_g = 0$ dır (Gaffney 1954).

Böylece f $\in C^\infty(M)$ diferensiyellenebilir ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$div(\text{f}\, X) = \text{f}\, divX + g(grad\, \text{f}, X)$$

dir. Eğer h $\in C^\infty(M)$ diferensiyellenebilir olarak seçilirse

$$div(\text{f}\, gradh) = f\Delta h + g(grad\, h, grad\, f)$$

denklemi elde edilir. M tam olmayan bir Riemann manifold için Stokes Teoremi kullanılırsa

$$0=\int_M div(\mathrm{f}\, gradh)\,\vartheta_g=\int_M \mathrm{f}\Delta h\,\vartheta_g+\int_M \mathrm{g(grad\,h,grad\,f)}\vartheta_g \tag{5.12}$$

denklemine ulaşılır. (5.11) denklemi (5.12) denklemi için uyarlanırsa

$$\int_M ((\tau^2 f)\Delta_g f)\vartheta_g=-\int (g(grad(\tau^2 f),gradf))\vartheta_g=-\int g(\nabla(\tau^2 f),\nabla f)\,\vartheta_g \tag{5.13}$$

denklemi elde edilir. Basit bir hesaplama ile

$$g(\nabla(\tau^2 f),\nabla f)=2\tau f.\,g(\nabla\tau,\nabla f)+\tau^2.\,g(\nabla f,\nabla f)=2\tau f.\,g(\nabla\tau,\nabla f)+\tau^2\|\nabla f\|^2 \tag{5.14}$$

Eşitliği elde edilir. Ayrıca (5.14) denklemi (5.13) denkleminde kullanılır ise

$$\int_M (\tau^2 f(\Delta_g f))\vartheta_g=-\int_M \big(2\tau f g(\nabla\tau,\nabla f)\big)\vartheta_g-\int_M \tau^2\|\nabla f\|^2\,\vartheta_g$$

$$=-2\int \big(g(f\nabla\tau,\tau\nabla f)\big)\,\vartheta_g\int_M \tau^2|\nabla f|^2\vartheta_g. \tag{5.15}$$

denklemi elde edilir.

X ve Y M üzerinde vektör alanları olmak üzere her $\varepsilon>0$ reel sayısı için

$$\pm 2g(X,Y)\le\varepsilon\|\mathrm{X}\|^2+\frac{1}{\epsilon}\|\mathrm{Y}\|^2 \tag{5.16}$$

olarak ifade edilen Young eşitsizliğini (5.15) denkleminin ilk terimi için uygulanacak olunursa

$$-2\int \big(g(f\nabla\tau,\tau\nabla f)\big)\,\vartheta_g\le\varepsilon\int_M |\tau\nabla f|^2\,\vartheta_g+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |f\nabla\tau|^2\vartheta_g \tag{5.17}$$

denklemine sahip olunur. (5.17) denklemi (5.15) denkleminde kullanılır ise

$$\int_M (\tau^2 f(\Delta_g f))\vartheta_g\le\varepsilon\int_M |\tau\nabla f|^2\,\vartheta_g+\frac{1}{\varepsilon}\int_M |f\nabla\tau|^2\vartheta_g-\int_M \tau^2|\nabla f|^2\vartheta_g$$

$$=-(1-\varepsilon)\int_M \tau^2|\nabla f|^2\,\vartheta_g+\frac{1}{\varepsilon}\int_M f^2|\nabla f|^2\,\vartheta_g \tag{5.18}$$

denklemine ulaşılır. (5.9) denkleminin her iki tarafı M üzerinde integre edilirse

$$\int_M ((\tau^2 f)\Delta_g f)\,\vartheta_g = \int_M L\tau^2 f^2 \vartheta_g \tag{5.19}$$

denklemi elde edilir. Böylece (5.18) ve (5.19) dan

$$\int_M L\tau^2 f^2\,\vartheta_g \leq -(1-\varepsilon)\int_M \tau^2|\nabla f|^2\vartheta_g + \frac{1}{\varepsilon}\int_M f^2|\nabla\tau|^2 \quad \vartheta_g$$

denklemi elde edilir. Bir başka deyişle

$$\int_M L\tau^2 f^2\,\vartheta_g + (1-\varepsilon)\int_M \tau^2|\nabla f|^2\vartheta_g \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_M f^2|\nabla\tau|^2 \quad \vartheta_g \tag{5.20}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Şimdi $\varepsilon = \frac{1}{2}$ seçilirse (5.20) denklemi

$$\int_M L\tau^2 f^2\,\vartheta_g + \frac{1}{2}\int_M \tau^2|\nabla f|^2\vartheta_g \leq 2\,.\int_M f^2|\nabla\tau|^2\vartheta_g \tag{5.21}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.20) yardımıyla;

$\mathrm{B_r(x_0)}$ üzerinde $\tau = 1$, $\mathrm{L} \geq 0$ ve $|\nabla\tau| \leq \frac{2}{\mathrm{r}}$ olması nedeniyle (5.21) denkleminden

$$0 \leq \int_{B_r(x_0)} Lf^2\vartheta_g + \frac{1}{2}\int_{B_r(x_0)}|\nabla f|^2\,\vartheta_g \leq \frac{8}{r^2}\int_M f^2\vartheta_g \tag{5.22}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (M,g) kompakt olmayan ve tam manifold olduğundan r sonsuza giderken $B_r(x_0)$ M ye gider. O zaman

$$0 \leq \int_M Lf^2\vartheta_g + \frac{1}{2}\int_M |\nabla f|^2\,\vartheta_g \leq 0 \tag{5.23}$$

eşitsizliği elde edilir. f karesi integrallenebilir diferensiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan $\int_M f^2\,\vartheta_g < \infty$ dir. Bu özelliği (5.23) kullanılacak olunur ise $Lf^2 = 0$ ve $|\nabla f|^2 = 0$ dir. L, M üzerinde tanımlı negatif değerli olmayan bir diferensiyellenebilir fonksiyon olduğundan $\nabla f = 0$ veya $f = 0$ dır. Her iki durumda da f bir sabit fonksiyon olur, bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.5. $\phi\colon (M^m, g) \to (N^{m+1}, h)$ ortalama vektör alanı $\mu = H\xi$ bir izometrik immersiyon olsun. (M,g) tam ve (N,h) nın Ricci tensörü Ric^N

$$Ric^N(\xi,\xi) \leq \quad \|A\|^2 \tag{5.24}$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer ϕ biharmonik ve

$$\int_M H^2\, \vartheta_g < \infty \tag{5.25}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise M sabit H ortalama eğriliğe sahiptir (Nakauchi ve Urukawa 2011).

İspat: (5.24) denklemi yardımı ile $L = \ \|A\|^2 - Ric^N(\xi,\xi) \geq 0$ dir. (5.1) denklemi ϕ nin biharmonik izometrik immersiyon olması nedeniyle Schröndinger tipi $\Delta_g H = LH$ denklemine indirgenir.

M nin kompakt olduğu farz edilsin. O zaman Green's teoremi gereğince $\Delta_g H = LH$ eşitliğinin her iki tarafı integre edilirse

$$0 \ \leq \int_M LH^2 \vartheta_g = \int_M H(\Delta_g H)\, \vartheta_g = -\int_M g(\nabla H, \nabla H)\, \vartheta_g \leq 0 \tag{5.26}$$

denkleminden $\int_M g(\nabla H, \nabla H)\, \vartheta_g = 0$ elde edilir. Bu da $\nabla H = 0$ sonucunu verir ve böylece H sabit olur.

Eğer M kompakt değil ise Yardımcı Önerme 5.4 yardımıyla H tekrar sabit olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

5.3 Biharmonik Submersiyonlar

Bu bölümde (Wang ve Ou 2011**)** çalışmasında ifade edilen submersiyonların biharmonik olma koşulu tanıtılacaktır.

Tanım 5.6. (M, g) ve (N, h) sırasıyla m ve n boyutlu iki diferensiyellenebilir Riemann manifold olsunlar. $F: M \to N$ bir örten diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere M nin her noktasında maksimal ranka sahipse yani $rank(F) = rank(d\,F) = boy\ N = n$ ise F ye bir submersiyon denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Kapalı fonksiyon teoremi gereğince her x∈ N için $F^{-1}(x)$ fibresi M nin $r = m - n$ boyutlu bir kapalı alt manifoldu olur. M nin bu r boyutlu altmanifoldunun $p \in F^{-1}(x)$

noktasındaki tanjant uzayı $T_p F^{-1}(x) = çek\big(dF(p)\big) = \mathcal{V}_p$ dir ve $\mathcal{V}_p$ uzayına p ∈ $F^{-1}(x)$ noktasındaki dikey olarak adlandırılır (Falcitelli ve ark. 2004).

Dikey uzayın $p \in F^{-1}(x)$ dik tümleyeni, yatay uzay olarak adlandırılır ve $(\mathcal{V}_p)^{\perp} = \mathcal{H}_p$ ile temsil edilir (Falcitelli ve ark. 2004).

Böylece $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p$ şeklinde bir parçalanmaya sahip olur.

Tanım 5.7. (M, g) ve (N, h) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldu ve $F: M \to N$ bir submersiyon olsun. Eğer her $u, v \in \mathcal{H}_p$için

$$g_p(u, v) = h_{F(p)}(dF(u), dF(v)) \tag{5.27}$$

koşulu sağlanıyor, bir başka şekilde F nin türev dönüşümü dF altında yatay uzaydaki tanjant vektörlerin uzaklığını koruyor ise F ye bir Riemann submersiyon denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Eğer bir vektör alanı daima fibrelere teğet ise dikey vektör alanı ve daima dikey vektör alanlar dik oluyorsa yatay vektör alanı olarak adlandırılır. Böylece M nin vektör alanları için

$$\Gamma(TM) = \Gamma(\mathcal{V}) \oplus \Gamma(\mathcal{H})$$

ise dikey parçalanma söz konusu olur. Böylece M nin bir $E \in \Gamma(TM)$ vektör alanı için

$$E = dik(E) \oplus yat(E) = E^v \oplus E^h$$

yazılımı mümkün olur (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 5.8. (M, g) ve (N, h) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldu ve $F: M \to N$ bir Riemann submersiyon olsun. $X \in \Gamma(\mathcal{H}), X' \in \Gamma(TN)$ olmak üzere $dF(X) = X'$ ise X vektör alanına temel vektör alanı denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Yardımcı Önerme 5.9. $F: (M, g) \to (N, h)$ bir Riemann submersiyon olsun . Eğer $X\ ve\ Y\ \ M$ üzerinde temel vektör alanları ise

i) $g(X, Y) = h(X', Y') \circ F,$

ii) $yat[X,Y]$ temel vektör alanı $[X',Y']$ vektör alanına F bağlıdır,

iii) $yat(\nabla_X Y)$ vektör alanı $\nabla^N{}_{X'}Y'$ ye F bağlıdır,

iv) Her dikey vektör alanı V için $[X,V]$ Lie braketi dikeydir

(Falcitelli ve ark. 2004).

O'Neill (1966) da bir submersiyon aşağıda ifade edilen (1,2)-tipindeki tensör alanları tanıtıldı. Her $E,G \in \Gamma(TM)$ için

$$T(E,G) = T_E G = yat(\nabla_{verE} verG) + ver(\nabla_{verE} yatF) \tag{5.28}$$

$$A(E,G) = A_E G = ver\big(\nabla_{yatE} yatG\big) + yat\big(\nabla_{yatE} verG\big) \tag{5.29}$$

(O'Neill 1966).

Yardımcı Önerme 5.10. $F:(M,g) \to (N,h)$ bir Riemann submersiyon olsun. $U,V \in \Gamma(\mathcal{V})$ vektör alanları ve $X,Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

$$i) T_U V = T_V U \tag{5.30}$$

$$ii) A_X Y = -A_Y X = \frac{1}{2} ver[X,Y] \tag{5.31}$$

dir (O'Neill 1966).

Yardımcı Önerme 5.11. $F(M,g) \to (N,h)$ bir Riemann submersiyon olsun. ∇, M üzerinde Riemann konneksiyon olmak üzere $U,V \in \Gamma(\mathcal{V})$ vektör alanları ve $X,Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için

i) $\nabla_U V = T_U V + \hat{\nabla}_U V,$ (5.32)

ii) $\nabla_U X = yat(\nabla_U X) + T_U X,$ (5.33)

iii) $\nabla_X U = A_X U + ver(\nabla_X U),$ (5.34)

iv) $\nabla_X Y = yat(\nabla_X Y) + A_X Y$ (5.35)

ve daha fazlası eğer X temel vektör alanı ise $[X,U]$ dikey olacağından

$$yat(\nabla_U X) = yat(\nabla_X U) = A_X U \tag{5.36}$$

dir (O’Neill 1966).

$F:(M^3,g)\to(N^2,h)$ bir Riemann submersiyon olsun. M^3 ün bir yerel ortonormal çatı alanı $\{e_1,e_2,e_3\}, e_1, e_2$ temel ve e_3 dikey olacak şekilde belli olsun.

Bu durumda Yardımcı Önerme 5.9 iii) gereğince $[e_1,e_3]$ ve $[e_2,e_3]$ dikey olurlar ve ii) gereğince $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ N^2 nin lokal ortonormal çatı alanı olmak üzere

$$dF([e_1,e_2])=[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$$

dir. N^2 2-boyutlu olduğundan

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2]=L_1\varepsilon_1+L_2\varepsilon_2$$

olur. Burada L_1, L_2 N^2 üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır.

Böylece $[e_1,e_2]$, $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ ile F bağlantılı olduğundan $i=1,2$ için $l_i=L_i\circ F$ olarak belirlenirse

$$[e_1,e_3]=\lambda e_3, \tag{5.37}$$

$$[e_2,e_3]=\mu e_3, \tag{5.38}$$

$$[e_1,e_2]=l_1e_1+l_2e_2-2\sigma e_3 \tag{5.39}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada l_1, l_2, λ, μ ve σ M üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Kolaylık açısından $\{e_1,e_2,e_3\}$ yerel çatı alanı uyumlu çatı alanı olarak isimlendirilecektir (Wang ve Ou 2011). (5.37), (5.38) ve (5.39) denklemleri ve

$$2g(\nabla_E G,B)=Eg(G,B)+Gg(B,E)-Bg(E,G)$$
$$-g(E,[G,B])+g(G,[B,E])+g(B,[E,G]),$$

Koszul formülü yardımıyla,

$$\nabla_{e_1}e_1=-l_1e_2,\ \nabla_{e_1}e_2=l_1e_1-\sigma e_3,\ \nabla_{e_1}e_3=\sigma e_2, \tag{5.40}$$

$$\nabla_{e_2}e_1=-l_2e_2+\sigma e_3,\ \nabla_{e_2}e_2=l_2e_1,\ \nabla_{e_2}e_3=-\sigma e_1, \tag{5.41}$$

$$\nabla_{e_3}e_1=\sigma e_2-\lambda e_3,\ \nabla_{e_3}e_2=-\sigma e_1-\mu e_3,\ \nabla_{e_3}e_3=\lambda e_1+\mu e_2 \tag{5.42}$$

denklemleri elde edilir (Wang ve Ou 2011).

F nin gerilim alanı

$$\tau(F) = \sum_{i=1}^{3}\{\overline{\nabla}_{e_i} d\mathrm{F}(e_i) - d\mathrm{F}(\nabla_{e_i} e_i)\}$$
$$=\overline{\nabla}_{e_1} d\mathrm{F}(e_1) + \overline{\nabla}_{e_2} d\mathrm{F}(e_2) + \overline{\nabla}_{e_3} d\mathrm{F}(e_3) \; - d\mathrm{F}(\nabla_{e_1} e_1) - d\mathrm{F}(\nabla_{e_2} e_2) - d\mathrm{F}(\nabla_{e_3} e_3)$$
$$=\nabla^N_{dF(e_1)} d\mathrm{F}(e_1) + \nabla^N_{dF(e_2)} d\mathrm{F}(e_2) + \nabla^N_{dF(e_3)} d\mathrm{F}(e_3)$$
$$-d\mathrm{F}(\nabla_{e_1} e_1) - d\mathrm{F}(\nabla_{e_2} e_2) - d\mathrm{F}(\nabla_{e_3} e_3) \tag{5.43}$$

dür.

Diğer taraftan $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$=$L_1\varepsilon_1 + L_2\varepsilon_2$ yardımıyla

$$\nabla^N_{\varepsilon_1}\varepsilon_1 = -L_1\varepsilon_2, \nabla^N_{\varepsilon_1}\varepsilon_2 = L_1\varepsilon_1 \tag{5.44}$$
$$\nabla^N_{\varepsilon_2}\varepsilon_1 = -L_2\varepsilon_2, \nabla^N_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 = L_2\varepsilon_1 \tag{5.45}$$

denklemleri elde edilir. (5.44) ve (5.45) denklemlerini (5.43) de kullanılırsa

$$\tau(F) = -l_1\varepsilon_2 + l_2\varepsilon_1 + l_1\varepsilon_2 - l_2\varepsilon_1 - \lambda\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2 = -\lambda\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2 \tag{5.46}$$

denklemine ulaşılır.

Şimdi bigerilim hesaplanırsa,

$$\tau^2(\mathrm{F}) = \sum_{i=1}^{3} \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\tau(F) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\tau(F) - R^N(d\mathrm{F}(e_i), \tau(F))d\mathrm{F}(e_i) \tag{5.47}$$

(5.46) denkleminde (5.39), (5.40), (5.41) ve (5.42) denklemleri kullanılırsa

$$\tau^2(\mathrm{F}) = \big[-\Delta^M\lambda - l_1 e_1(\mu) - e_1(l_1\mu) - l_2 e_2(\mu) - e_2(l_2\mu) + \lambda\mu l_1 + \mu^2 l_2 + \lambda(-K^N + {l_1}^2 + {l_2}^2)\big]\varepsilon_1 + \big[-\Delta^M\mu + l_1 e_1(\lambda) + e_1(l_1\lambda) + l_2 e_2(\lambda) + e_2(l_2\lambda) - \lambda\mu l_2 - \lambda^2 l_1 + \mu(-K^N + {l_1}^2 + {l_2}^2)\big]\varepsilon_2$$

denklemi elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 5.12. $F: (M^3, g) \to (N^2, h)$ bir Riemann submersiyon olsun. M^3 ün uyumlu yerel ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere F nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$-\Delta^M\lambda - l_1 e_1(\mu) - e_1(l_1\mu) - l_2 e_2(\mu) - e_2(l_2\mu) + \lambda\mu l_1 + \mu^2 l_2 + \lambda(-K^N + {l_1}^2 + {l_2}^2) = 0$$

ve

$$-\Delta^M \mu + l_1 e_1(\lambda) + e_1(l_1 \lambda) + l_2 e_2(\lambda) + e_2(l_2 \lambda) - \lambda\mu l_2 - \lambda^2 l_1 + \mu\left(-K^N + {l_1}^2 + {l_2}^2\right) = 0$$

olmasıdır (Wang ve Ou 2011).

Şimdi Wang ve Ou (2011) tarafından verilen örneği aşağıdaki şekilde tanıtalım.

Örnek 5.13. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ üzerindeki Riemann metriği $g = dx^2 + dy^2 + \beta(x,y)^{-2} dz^2$, $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Riemann metriği $h = dx^2 + dy^2$ olmak üzere,

$$F:(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, g) \to (\mathbb{R}^2, h); F(x,y,z) = (x,y)$$

örten diferensiyellenebilir bir dönüşümü olur. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ nin bir yerel ortonormal çatı alanları sırasıyla $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, e_3 = \beta \frac{\partial}{\partial z}\}$ ve $\{\varepsilon_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \varepsilon_2 = \frac{\partial}{\partial y},\}$ dır. F nin türev dönüşüm matrisi

$$dF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece rank F=rankdF=2=boy$\mathbb{R}^2$ olup F bir submersiyon olur.

$dF(e_1) = \varepsilon_1, dF(e_2) = \varepsilon_2, dF(e_3) = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayının bir F submersiyona göre parçalanışı

$$\Gamma(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) = \Gamma(\mathcal{V}) \oplus \Gamma(\mathcal{H}) = sp\{e_3\} \oplus sp\{e_1, e_2\}$$

şeklinde olur.

$$g(e_1, e_1) = h\big(dF(e_1), dF(e_1)\big) = 1,$$

$$g(e_1, e_2) = h\big(dF(e_1), dF(e_2)\big) = 0,$$

$$g(e_2, e_2) = h\big(dF(e_2), dF(e_2)\big) = 1$$

olmasından dolayı da F bir Riemann submersiyon olur.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \beta\frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - \beta\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}\,\beta\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(ln\beta)\right)\beta\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(ln\beta)e_3,$$

ve benzer şekilde

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}, \beta\frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(ln\beta)e_3,$$

eşitlikleri elde edilir. Koszul formülü yardımıyla,

$\nabla_{e_1}e_1 = 0, \nabla_{e_1}e_2 = 0, \nabla_{e_1}e_3 = 0,$

$\nabla_{e_2}e_1 = 0, \nabla_{e_2}e_2 = 0, \nabla_{e_2}e_3 = 0,$

$\nabla_{e_3}e_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(ln\beta)e_3, \nabla_{e_3}e_2 = -\frac{\partial}{\partial y}(ln\beta)e_3, \nabla_{e_3}e_3 = \frac{\partial}{\partial x}(ln\beta)e_1 + \frac{\partial}{\partial y}(ln\beta)e_2$

denklemleri elde edilir (Wang ve Ou. 2011**).** Böylece

$$\nabla^{\mathbb{R}^2}_{\varepsilon_1}\varepsilon_1 = 0, \nabla^{\mathbb{R}^2}_{\varepsilon_1}\varepsilon_2 = 0$$
$$\nabla^{\mathbb{R}^2}_{\varepsilon_2}\varepsilon_1 = 0, \nabla^{\mathbb{R}^2}_{\varepsilon_2}\varepsilon_2 = 0$$

olduğundan $\mathbb{R}^2$ düzlemsel, bir başka deyişle $K^{\mathbb{R}^2} = 0$ olur. Yukarıda ifade edilen denklemleri Sonuç 5.12 de kullanılırsa, F submersiyonun biharmonik olması için gerek ve yeter koşullar

$\Delta(\frac{\partial}{\partial x}(ln\beta))$=0

$\Delta(\frac{\partial}{\partial y}(ln\beta))$=0

denklemlerinin sağlanması olacaktır. Özel olarak $ln\beta = \int \varkappa(x)dx + \int \ell(y)dy$ olarak seçilirse (5.54) ve (5.55) denklemlerinden

$$\varkappa(x)\frac{d}{dx}\varkappa(x) - \frac{d^2}{dx^2}\varkappa(x) = 0,$$
$$\ell(y)\frac{d}{dy}\ell(y) - \frac{d^2}{dy^2}\ell(y) = 0$$

diferensiyel denklemleri elde edilir. Diferansiyel denklemlerin çözümünden sırasıyla $\varkappa(x)$ ve $\ell(y)$

$$\varkappa(x) = \frac{c_1(1+e^x)}{1-e^{c_1x}}, \ell(y) = \frac{b_1(1+e^y)}{1-e^{c_1y}}$$

şeklinde bulunur (Wang ve Ou 2011**).**

6. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde birinci varyasyon ve ikinci varyasyon hesaplamaları yapılarak bir Riemann dönüşümünün harmonik ve biharmonik olma koşulları verildi. Daha sonra pozitif Ricci eğriliğine sahip olmayan bir Riemann manifoldunun, bir biharmonik hiperyüzeyinin ortalama eğriliğinin $\int_M \|H\|^2 v_g < \infty$ olma koşulu altında minimal olması gerektiği elde edildi. Daha sonra ise 3 boyutlu bir Riemann manifolddan bir Riemann yüzeye tanımlı biharmonik submersiyonlar örnekle tanıtılmışdı.

KAYNAKLAR

Andres, S., Barlow, M.T. 2015. Energy inequalities for cutoff functions and some applications. *J.reine angew Math*. 699: 183-215.

Baird, P.,Wood, J. C. 2003. Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds. Clarendon Press, Oxford, 520 pp.

Balmus, A.,Montaldo, S., Oniciuc, C. 2008. Classification results for biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math,* 168: 201–220.

Balmus, A., **Montaldo, S.**, **Oniciuc, C**. **2010.** Biharmonic hypersurfaces in 4-dimensional space forms. *Math. Nachr.* 283 , no. 12, 1696–1705.

Caddeo, R.,Montaldo, S., Oniciuc, C. 2001. Biharmonic submanifolds of S^3. *Internat. J. Math*. 12(8): 867–876 .

Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc ,C. 2002. Biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J.Math*.130: 109-123.

Chen, B.Y. 1991. Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type. *Soochow J. Math.,* 17: 169–188.

Chen, B.Y., Ishikawa, S. 1998. Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces. *Kyushu J. Math*. 52: 167-185.

Dimitric, I. 1992. Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector. *Bull,Inst. Math. Acad. Sinica*, 20: 53-65.

Eells, J., Sampson, J. H. 1964. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer.J. Math*. 86: 109-160.

Falcitelli, M.,Ianus, S., Pastore, A. M. 2004. Riemannian Submersions and Related Topics.World Scientific, Singapore, 277 pp.

Friswell, R.M. **2014.** Harmonic Vector Fields on Pseudo-Riemannian Manifolds. *PhD thesis,* University of York, Mathematics, England.

Gaffney, M. P. 1954. A special stokes's theorem for complete Riemannian manifolds. *Ann. of Math*. 60: 140-145.

Greub, W.H. 1967. Multilinear Algebra. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 224 pp.

Hacısalihoğlu, H. H. 1985. Lineer Cebir. Gazi Üniversitesi, Ankara, 765 s.

Han, Y., Feng, S. 2014. Some results of F-biharmonic maps. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S)*. no.1: 47-66.

Hasanis, T. Vlachos, T. 1995. Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field. *Math. Nachr.*, 172: 145-169.

Jiang, G. 2008. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas. *Note di Matematica.*, n.1: 209-232.

Jiang, G. Y. 1986. 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, *Chinese Ann. Math. Ser*., A 7: 389-402.

Jiang, G. Y. 1987. Some non-existence theorems of 2-harmonic isometric immersions into Euclidean spaces. *Chin. Ann. Math. Ser*. 8A: 376-383.

Mclerney, A. 2013. Firt steps in differential geometry: Riemannian, contact symplectic. Springer, New York, 407 pp.

Nakauchi, N., Urakawa, H. 2011. Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature. *Ann. Global Anal. Geom*. 40: 125-131.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry. Accademic Press, Inc. New York, USA. 468 pp.

O'Neill, B. 1966. The Fundamental Equations of a Submersions. *Michigan Math. J.*, 13: 458-469.

Ou, Y.L. 2010. Biharmonic hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Pacific J. Math*. 248(1): 217-232.

Oprea, J. 2016. Mathematics and Soap Films, Cleveland State University https://academic.csuohio.edu/oprea_j/soap/Soap%20Films%20and%20Mathematics.pdf - (Erişim tarihi: 26.07.2019).

Siemssen, D. 2015. The semiclassical Einstein equation on cosmological spacetimes. *Ph.D.Thesis,* Dipartimento di Matematica Universita degli Studi di Genova, Genova.

Urakawa, H. 2015. Harmonic Maps and Biharmonic Maps. *Symmetry* 7: 651-674.

Urakawa, H. 1991. Calculus of Variations and Harmonic Map. Translations of Mathematical Monographs, The American Mathematical Society, Rhode Island, USA. 249 pp.

Xin, Y. 1996. Geometry of Harmonic Maps (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications). Birkhäuser; Publishers, Boston, 246 pp.

Xin, Y., 2003. Minimal Submanifolds and Related Works. World Scientific, https://doi.org/10.1142/5417, 272 pp.

Walton, H., Keynes, M. 2016. Introduction to the calculus of variations. Open University module https://www.open.edu/openlearn/ocw/pluginfile.php/1118521/mod_resource/content/3/Introduction%20to%20the%20calculus%20of%20variations_ms327.pdf- (Erişim tarihi: 26.07.2019).

Wang, Z. P. , Ou Y. L. 2011. Biharmonic Riemannian submersions from 3-manifolds. *Math Z*. 269, 917-925.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Aziz ATABAY
Doğum Yeri ve Tarihi	: İSTANBUL, 10.08.1979
Yabancı Dili	: İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Yakacık Lisesi, 1993-1996
Lisans	: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi 1996-2000

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl	: Ünye Anadolu İmam-Hatip Lisesi, 2016-
İletişim (e-posta)	: zztby@hotmail.com