



**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANO  
ÖLÇEKTEKİ KİRİŞİN FARKLI SINIR KOŞULLARINDA  
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE TİTREŞİM  
ANALİZİ**

**Büşra UZUN**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANO ÖLÇEKTEKİ KİRİŞİN  
FARKLI SINIR KOŞULLARINDA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE  
TİTREŞİM ANALİZİ**

**Büşra UZUN**  
**0000-0002-7636-7170**

Doç. Dr. M. Özgür YAYLI  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

## TEZ ONAYI

Büşra UZUN tarafından hazırlanan "FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANO ÖLÇEKTEKİ KİRİŞİN FARKLI SINIR KOŞULLARINDA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE TİTREŞİM ANALİZİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. M. Özgür YAYLI

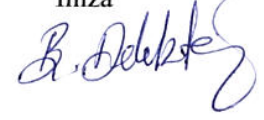
**Başkan** : Doç. Dr. M. Özgür YAYLI  
0000-0003-2231-170X  
Bursa Uludağ Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



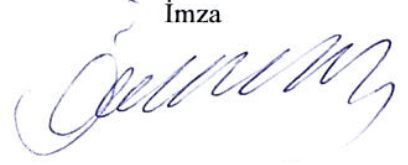
**Üye** : Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ  
0000-0002-4035-4642  
Bursa Uludağ Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



**Üye** : Prof. Dr. Ömer CİVALEK  
0000-0003-1907-9479  
Akdeniz Üniversitesi,  
Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN  
Enstitü Müdürü

..../..../...

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

**04/09/2019**

**İmza**

**Büşra UZUN**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANO ÖLÇEKTEKİ KİRİŞİN FARKLI SINIR KOŞULLARINDA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE TİTREŞİM ANALİZİ

**Büşra UZUN**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. M. Özgür YAYLI

Bu tez çalışmasında, fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Nano ölçek seviyesinde önemli hale gelen boyut etkisi, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi temelinde ele alınmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin malzeme özelliklerinin, kirişin yüksekliği boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Nanokiriş, Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre modellenmiş ve hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak türetilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemindeki matrisleri oluşturmak için interpolasyon fonksiyonları elde edilmiştir. Söz konusu interpolasyon fonksiyonları ve fonksiyonel derecelendirmeyi temsil eden formülasyon kullanılarak rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulmuştur. Sonuç olarak bir özdeğer problemi kurularak problemin çözümü gerçekleştirilmiştir.

Sunulan sonuçların doğruluğu, bu tez ile literatürdeki mevcut çalışmalar arasındaki iyi bir uyum ile ispatlanmıştır. Bu tez çalışmasında, boyut parametresinin, kuvvet kuralı üssünün, sınır şartlarının ve zemin parametrelerinin fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin frekansları üzerindeki etkileri sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Boyut parametresi ve kuvvet kuralı üssünün frekansları düşürdüğü gözlenmiştir. Zemin etkilerinin hesaba katılmasıyla frekansların arttığı sonucuna ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokiriş, interpolasyon fonksiyonu, sonlu elemanlar yöntemi, titreşim

**2019, viii + 84 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

VIBRATION ANALYSIS OF A FUNCTIONALLY GRADED NANOBEAM WITH  
DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS USING FINITE ELEMENT METHOD

**Büşra UZUN**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering

**Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. M. Özgür YAYLI

In this thesis, vibration analysis of functionally graded nanobeam is investigated using finite element method. The size effect, which became important at the nanoscale level, is handled on the basis of the Eringen's nonlocal elasticity theory. The material properties of functionally graded nanobeams are assumed to vary through the beam height according to power law. The nanobeam is modeled in accordance with Euler–Bernoulli beam theory and its equations of motion are derived using Hamilton's principle. Interpolation functions are obtained to form matrices in finite element method. Stiffness and mass matrices are formed using the interpolation functions and the formulation representing functional grading. As a result, an eigenvalue problem is set up and the solution of the problem is implemented.

The accuracy of the presented results are proved by a good agreement between this thesis and those available studies in literature. In this thesis, the effects of small-scale parameter, power law exponent, boundary conditions and foundation parameters on frequencies of functionally graded nanobeam are investigated using finite element method. It is observed that small-scale parameter and power law exponent decrease the frequencies. By taking into account the foundation effects, it is reached that there is an increment in frequencies.

**Key words:** Finite element method, functionally graded nanobeam, interpolation function, vibration

**2019, viii + 84 pages.**

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarında, bilgisini, desteğini ve emeğini ortaya koyan; hoşgörüsü ve anlayışıyla çalışmalarımızı daha kolay hale getiren danışman hocam sayın Doç. Dr. M. Özgür YAYLI'ya,

Bu tez çalışmasını Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı (1001) bünyesinde 117M495 No'lu "Nano/Mikro Boyutlu Yapılar İçin Boyut Etkisine Bağlı Sonlu Elemanlar Formülasyonunun Geliştirilmesi" başlıklı araştırma projesi kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a,

Manevi destekleriyle bana güç veren değerli dostlarıma,

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmalarında bana yol gösteren, lisans öğrenimimden bu yana örnek aldığım ve kendisiyle çalışmaktan büyük onur duyduğum saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ömer CİVALEK'e,

Maddi, manevi desteklerini benden bir an olsun esirgemeyen, hayatım boyunca aldığım kararlarda saygı ve sevgileriyle yanımda olan, varlıklarıyla kendimi şanslı hissettiren sevgili annem, babam ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

Büşra UZUN  
04/09/2019

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Nanoteknoloji.....	1
1.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler .....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI .....	3
2.1. Kuramsal Temeller.....	3
2.1.1. Euler-Bernoulli giriş teorisi .....	3
2.1.2. Yerel olmayan elastisite teorisi .....	5
2.2. Kaynak Araştırması.....	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM .....	11
3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Nanokiriş.....	11
3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi .....	15
3.2.1. Uzama elemanına ait şekil fonksiyonu .....	16
3.2.2. Eğilme elemanına ait şekil fonksiyonu .....	18
3.3. Hamilton Prensibi ile Hareket Denklemlerinin Çıkarılması .....	21
3.4. Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Elde Edilmesi .....	26
3.4.1. FD klasik kirişe ait matrislerin elde edilmesi.....	26
3.4.2. FD nanokirişe ait matrislerin elde edilmesi .....	31
4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....	38
5. SONUÇ .....	69
KAYNAKLAR .....	70
EKLER .....	73
EK 1: $A_I, B_I, D_I$ Rijitliklerinin Çıkarılışı.....	74
EK 2: $I_0, I_1, I_2$ Kütle Atalet Momentlerinin Çıkarılışı.....	79
ÖZGEÇMİŞ .....	84



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$Al_2O_3$	Alümina
$I$	Atalet momenti
$I_0, I_1, I_2$	Atalet momentleri
$\bar{\omega}$	Boyutsuz frekans
$KG$	Boyutsuz Pasternak zemin parametresi
$KW$	Boyutsuz Winkler zemin parametresi
$W$	Dış kuvvetlerin yaptığı iş
$\theta$	Dönme
$C_{ijkl}$	Dördüncü dereceden elastisite modül tensörü
$M$	Eğilme momenti
$E$	Elastisite modülü
$N_E$	Eleman sayısı
$\omega$	Frekans
$\sigma_{ij}$	Gerilme tensörü bileşenleri
$V$	Hacim
$G$	Kayma modülü
$T$	Kinetik enerji
$V_A$	Kiriş alt bileşenine ait hacim oranı
$P_A$	Kiriş alt bileşenine ait malzeme özellik parametresi
$A$	Kiriş en kesit alanı
$b$	Kiriş genişliği
$L$	Kiriş uzunluğu
$V_U$	Kiriş üst bileşenine ait hacim oranı
$P_U$	Kiriş üst bileşenine ait malzeme özellik parametresi
$h$	Kiriş yüksekliği
$k$	Kuvvet kuralı üssü
$f_j$	Kütlesel kuvvet
$\rho$	Kütle yoğunluğu
$\lambda, \mu$	Lame sabitleri
$l$	Malzeme karakteristik dış uzunluğu
$a$	Malzeme karakteristik iç uzunluğu
$P$	Malzeme özellik parametresi
$e_0$	Malzeme türüne bağlı deneysel olarak belirlenmiş olan katsayı
$N$	Normal kuvvet
$ x' - x $	Öklidyen formda uzaklık
$\nu$	Poisson oranı
$k_g$	Pasternak zemin parametresi
$A_1, B_1, D_1$	Rijitlikler
$S$	Şekil değiştirme enerjisi
$\varepsilon_{ij}$	Şekil değiştirme tensörü bileşenleri
$\phi_u, \phi_w$	Şekil fonksiyonu vektörleri
$u$	Tarafsız eksen üzerindeki bir noktanın boyuna yer değiştirmesi
$w$	Tarafsız eksen üzerindeki bir noktanın enine yer değiştirmesi

$M_T$	Toplam kütle matrisi
$K_T$	Toplam rijitlik matrisi
$\delta$	Varyasyon
$k_w$	Winkler zemin parametresi
$u_i, u_j$	Yer değiştirme vektörü bileşenleri
$u_x, u_y, u_z$	Yer değiştirme vektörünün sırasıyla $x, y$ ve $z$ bileşenleri
$\sigma_{ij,i}^{nl}$	Yerel olmayan gerilme
$H( x' - x , \tau)$	Yerel olmayan Kernel
$t$	Zaman

### Kısaltmalar

### Açıklama

A - A	Ankastre - Ankastre
A - B	Ankastre - Basit
A - S	Ankastre - Serbest
B - B	Basit - Basit
BNNT	Bor nitrür nanotüp
DTM	Diferansiyel Transformasyon Metodu
FD	Fonksiyonel Derecelendirilmiş
FDM	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
Gpa	Gigapascal
KNT	Karbon nanotüp
kg	Kilogram
MATLAB	Matrix Laboratory
MHz	Megahertz
m	Metre
MEMS	Mikro elektro-mekanik sistemler
NEMS	Nano elektro-mekanik sistemler
nm	Nanometre
rad	Radyan
sn	Saniye

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin gösterimi.....	2
Şekil 2.1. Euler-Bernoulli kirişi.....	3
Şekil 3.1. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokiriş .....	11
Şekil 3.2. $V_U$ 'nun $z/h$ 'ye göre değişimi .....	12
Şekil 3.3. Uzama elemanı için deplasman parametrelerinin gösterimi .....	16
Şekil 3.4. Uzama elemanına ait interpolasyon fonksiyonlarının $x/L$ oranına göre değişimi .....	18
Şekil 3.5. Eğilme elemanı için deplasman parametrelerinin gösterimi .....	18
Şekil 3.6. Eğilme elemanına ait interpolasyon fonksiyonlarının $x/L$ oranına göre değişimi .....	21
Şekil 3.7. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki FD kiriş.....	26
Şekil 4.1. Alümina/Çelik FD nanokirişinin elastisite modülü ve yoğunluğunun $z/h$ ile değişimi .....	39
Şekil 4.2. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi .....	42
Şekil 4.3. A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $e_{0a}/L$ 'ye göre değişimi .....	43
Şekil 4.4. A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $e_{0a}/L$ 'ye göre değişimi .....	44
Şekil 4.5. B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $e_{0a}/L$ 'ye göre değişimi .....	45
Şekil 4.6. A – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi .....	46
Şekil 4.7. A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $k$ 'ye göre değişimi .....	48
Şekil 4.8. A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $k$ 'ye göre değişimi .....	49
Şekil 4.9. B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $k$ 'ye göre değişimi .....	50
Şekil 4.10. A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi .....	51
Şekil 4.11. Çeşitli sınır şartlarına sahip FD nanokirişlerin frekanslarının $e_{0a}/L$ 'ye göre değişimi (1. mod) .....	53
Şekil 4.12. Çeşitli sınır şartlarına sahip FD nanokirişlerin frekanslarının mod numarasına göre değişimi .....	54
Şekil 4.13. Winkler zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi .....	55
Şekil 4.14. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekanslarının $KW$ 'ye göre değişimi ( $k=5$ ).....	57
Şekil 4.15. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin farklı $e_{0a}/L$ için frekanslarının $KW$ 'ye göre değişimi ( $k=5$ ).....	58
Şekil 4.16. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi .....	59
Şekil 4.17. B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının $KG$ 'ye göre değişimi ( $KW=200, k=5$ ) .....	60
Şekil 4.18. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekanslarının $KW$ ve $KG$ 'ye göre değişimi ( $k=5, e_{0a}/L=0,2$ ) .....	62
Şekil 4.19. Zemin üzerine oturan ve oturmeyan FD nanokirişin çeşitli $k$ değerleri için frekanslarının mod numarasına göre değişimi ( $e_{0a}/L=0,2$ ) .....	64
Şekil 4.20. FD nanokirişin boyutsuz frekanslarının eleman sayısına bağlı olarak hata yüzdeleri .....	66

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Çizelge 4.1. Alümina/Çelik FD nanokirişini oluşturan malzemelerin mekanik özellikleri (Eltaher ve ark. 2012).....	39
Çizelge 4.2. Alümina/Çelik FD nanokirişinin geometrik özellikleri.....	39
Çizelge 4.3. B – B sınır şartına sahip homojen kirişin ilk üç moddaki frekanslarının karşılaştırılması.....	40
Çizelge 4.4. B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması .....	40
Çizelge 4.5. Zemin üzerine oturan homojen nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (B – B) .....	41
Çizelge 4.6. Zemin üzerine oturan homojen nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (A - A).....	41
Çizelge 4.7. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli $k$ ve $e_{0a}/L$ değerlerindeki frekansları .....	42
Çizelge 4.8. A – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli $e_{0a}/L$ ve $k$ değerlerindeki frekansları .....	47
Çizelge 4.9. A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli $e_{0a}/L$ ve $k$ değerlerindeki frekansları.....	51
Çizelge 4.10. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli $KW$ ve $e_{0a}/L$ değerlerindeki frekansları ( $k=5$ ) .....	55
Çizelge 4.11. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli $KG$ ve $e_{0a}/L$ değerlerindeki frekansları ( $KW=200, k=5$ ).....	59
Çizelge 4.12. Zemin üzerine oturan ve oturmayan B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin çeşitli $k$ değerlerindeki frekansları ( $e_{0a}/L=0,2$ ).....	63
Çizelge 4.13. FD nanokirişin eleman sayısına bağlı olarak boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması .....	65
Çizelge 4.14. FD nanokirişin eleman sayısına bağlı olarak boyutsuz frekanslarının hata yüzdeleri .....	66

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Nanoteknoloji

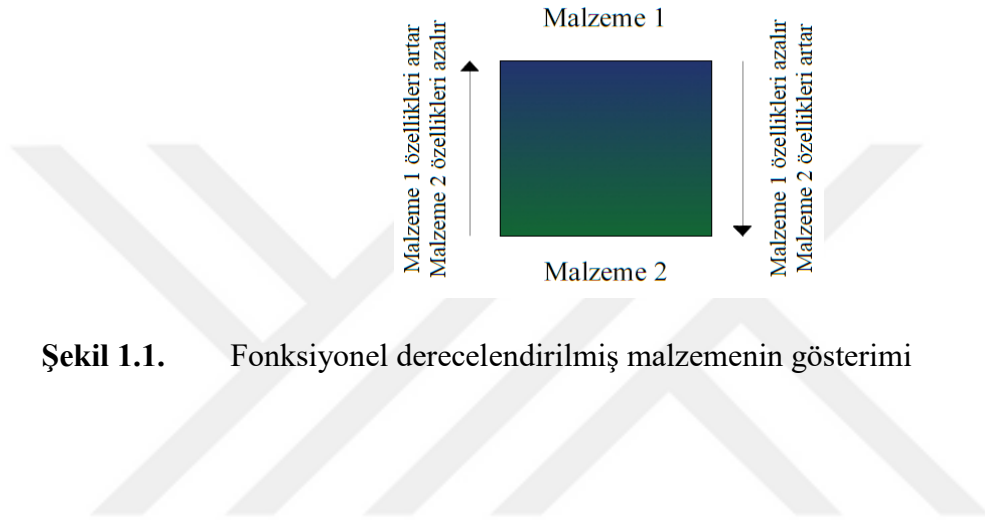
*Nano* kelimesi herhangi bir birimin milyarda birini ifade eder. Örneğin; uzunluk ölçü birimi olarak kullanıldığında 1 nanometre (nm)  $10^{-9}$  metreye (m) eşittir. Boyutları nano mertebelerine inen yapılar, makro büyüklükteki yapılardan çok daha üstün olan sıradışı mekanik, fiziksel, termal, kimyasal, elektriksel özelliklere sahiptirler (Chakraverty ve Behera 2016, Karličić ve ark. 2016). Nanoyapıların ilgi görmesine Iijima (1991) tarafından keşfedilen karbon nanotüp (KNT) büyük katkı sağlamıştır ve KNT üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Zhang ve ark. 2005, Tounsi ve ark. 2008, 2013, Reddy ve Pang 2008, Murmu ve Pradhan 2009a, b, Civalek ve Demir 2011a, Akgöz ve Civalek 2011, 2016, Pradhan 2012, Chemi ve ark. 2015, Hosseini ve ark. 2017, Yaylı 2015, 2016, 2017, 2018).

Gelişen teknoloji sayesinde nano ölçekli yapılar ile çalışma olanakları artmış ve nanoteknoloji günümüzde önemli bir yer edinmeye başlamıştır. Nanoteknolojideki hızlı gelişmeler ve nano ölçekli yapıların daha önce bahsedilen benzersiz özellikleri, bu yapısal elemanların atomik kuvvet mikroskopları, anahtarlar, sensörler gibi mikro ve nano elektro-mekanik sistemlerin (MEMS ve NEMS) tasarımında kullanılmasını sağlamıştır. Nanoteknoloji uygulamalı fizik, malzeme bilimi, cihaz fiziği, kimya mühendisliği, makine mühendisliği, elektrik mühendisliği gibi çeşitli disiplinlere yayılmış geniş bir alandır (Gopalakrishnan ve Narendar 2013).

## 1.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), malzeme özellikleri en az bir doğrultusu boyunca belirli bir matematiksel düzende sürekli olarak değişim gösteren özel kompozitlerdir. FDM'ler ilk olarak 1980'li yıllarda Japon bilim adamları tarafından keşfedilmiştir (Chen and Liew 2004). Geleneksel tabakalı kompozitlerde malzeme özelliklerinin aniden değişim göstermesi, katmanların ara yüzeylerinde yüksek gerilme yığılmalarına ve çeşitli ara yüz sorunlarının oluşmasına neden olur. FDM'lerde malzeme özelliklerinin değişimi sürekli olduğu için gerilme yığılmaları en aza indirilir veya ortadan kalkar ve iki farklı malzemenin bağlanma mukavemetinde artış sağlanır. FDM'ler

çoğunlukla seramik ve metal karışımından oluşurlar. Böylece seramik, termal ortamlarda yüksek sıcaklığa karşı koyarken metal de soğutmanın ilk aşamalarında seramik yüzeyde meydana gelecek gerilmelerin azalmasını sağlar. Birçok disiplinde uygulama alanı bulan FDM'ler mekanik, elektronik, optik, kimya, mikro elektronik, biyomedikal, otomotiv endüstrisi, havacılık, nükleer ve inşaat mühendisliğinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Alshorbagy ve ark. 2011, Thai ve Vo 2012, Pradhan ve Chakraverty 2013, Akgöz ve Civalek 2015, 2017, Ebrahimi ve ark. 2015).

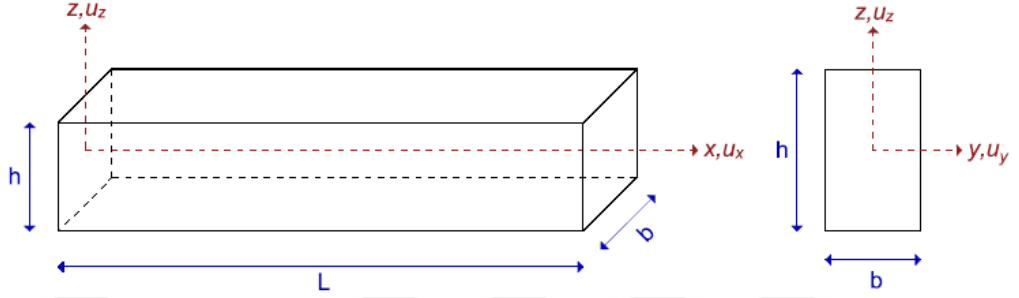


**Şekil 1.1.** Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin gösterimi

## 2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Kuramsal Temeller

#### 2.1.1. Euler-Bernoulli kiriş teorisi



Şekil 2.1. Euler-Bernoulli kirişi

$u_x, u_y, u_z$  sırasıyla kirişin  $x, y, z$  yönlerindeki yer değiştirmeleri olmak üzere, küçük deformasyonların da olduğu varsayılarak aşağıdaki gibi ifade edilirler (Reddy ve Pang 2008, Ebrahimi ve ark. 2015, Togun ve Bağdatlı 2016).

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$u_y(x, z, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \quad (2.3)$$

Yukarıdaki ifadelerde  $t$  zamanı temsil ederken  $u$  ve  $w$  tarafsız eksen üzerindeki herhangi bir noktanın sırasıyla boyuna ve enine yer değiştirmelerini belirtmektedir.

$\varepsilon_{ij}$  şekil değiştirme tensörü olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

(2.4) Denkleminde  $u_{i,j}$  ve  $u_{j,i}$  ile gösterilen alt indisli ifadeler, virgülden önceki indisli fonksiyonun virgülden sonraki indis olarak verilen parametreye göre bir kez türevinin alınması anlamına gelir. Yani,

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial j} \quad (2.5)$$

(2.4) Denkleminden Euler–Bernoulli kirişinin şekil değiştirmeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, z, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y(x, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, z, t)}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Görüldüğü üzere sadece  $\varepsilon_{xx}$  sıfırdan farklı bir değere sahiptir.  $E$  elastisite modülü ve  $\sigma$  gerilme olmak üzere, Hooke kanununa göre lineer elastik malzemeler için gerilme ifadesi aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.12)$$

Sıfırdan farklı tek şekil değiştirme ifadesi olan  $\varepsilon_{xx}$  Denklem (2.6)'da elde edildiği şekilde yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa sıfırdan farklı olan tek gerilme ifadesi  $\sigma_{xx}$  elde edilir.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (2.13)$$

Kirişin yüzeyinde oluşan gerilme ve kuvvetlerin dengesi yazıldığında normal kuvvet  $N$  ve eğilme momenti  $M$  ifadeleri Euler-Bernoulli kirişi için aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.



$$N = \int_A \sigma_{xx} dA \quad (2.14)$$

$$M = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (2.15)$$

### 2.1.2. Yerel olmayan elastisite teorisi

Nano ölçekli yapıların mekanik özellikleri ve davranışlarını anlamak ve doğru yorumlamak için elastisite teorilerine dayalı modellerin kullanılması, pahalı ve uzun süreler gerektiren deneylerden ve atomistik modellemeden daha iyi bir alternatif sunmaktadır. Ancak bu özellik ve davranışlar klasik elastisite teorisine dayandırıldığında doğru bir şekilde bilinemez. Çünkü klasik elastisite teorisi, nano mertebelerinde önemli hale gelen boyut etkisini göz ardı etmekte ve sonuç olarak nano yapıların analizleri için yeterli olmamaktadır. Nano yapıların analizinde daha iyi ve doğru sonuçlar alabilmek için boyut etkisini de hesaplara dahil eden yerel olmayan elastisite teorisi (Eringen 1972, 1983) kullanılmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisinin farkı, gerilme tanımında çevre atomların etkisini de göz önünde bulundurmasıdır. Yerel olmayan elastisite teorisine göre, bir referans noktasındaki gerilme sadece o noktadaki şekil değiştirmeye bağlı olmayıp diğer noktadaki şekil değiştirmelerden de etkilenir.

Yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri aşağıdaki gibidir (Eringen 1983).

$$\sigma_{ij,i}^{nl} + \rho(f_j - \ddot{u}_j) = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma_{ij}^{nl} = \int_V H(|x' - x|, \tau) \sigma_{ij}(x') dV(x') \quad (2.17)$$

$$\sigma_{ij}(x') = \lambda \varepsilon_{rr}(x') \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(x') \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{ij}(x') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(x')}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j(x')}{\partial x'_i} \right) \quad (2.19)$$

Yukarıdaki ifadelerde  $\sigma_{ij,i}^{nl}$  yerel olmayan gerilme,  $\rho$  kütle yoğunluğu,  $f_j$  kütleli kuvvet,  $u_j$  referans noktası  $x$ 'teki yer değiştirme vektörüdür.  $\sigma_{ij}$  klasik gerilme tensörü,  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé sabitleridir.  $H(|x' - x|, \tau)$  yerel olmayan Kernel,  $|x' - x|$  öklidyen formda uzaklık olarak nitelendirilir. Denklemlerde görülen  $\tau$  ise,

$$\tau = \frac{e_0 a}{l} \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $e_0$  malzemenin türüne bağlı deneysel olarak belirlenen bir katsayı,  $a$  malzemenin karakteristik iç uzunluğu ve  $l$  malzemenin karakteristik dış uzunluğudur.

Eringen tarafından kurucu denklem aşağıdaki bağıntı ile verilmiştir (Eringen 1983).

$$\left[1 - \tau^2 l^2 \nabla^2\right] \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.21)$$

Burada  $C_{ijkl}$  dördüncü dereceden elastisite modül tensörüdür. Bir boyutlu durum için, yerel olmayan kurucu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilir (Eringen 1983, Phadikar ve Pradhan 2010).

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.22)$$

## 2.2. Kaynak Araştırması

Tez çalışması kapsamında konuyla ilgili literatürde bulunan bazı çalışmaların özet bilgileri kronolojik olarak aşağıda sunulmuştur:

Aydoğdu ve Taşkın (2007) B – B sınır şartına sahip fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) kirişin serbest titreşim analizini çeşitli yüksek dereceli kayma deformasyon teorileri ve klasik kiriş teorisiyle sunmuşlardır. Frekans değerlerini elde etmek için Navier çözümünü kullanmışlardır.

Aydoğdu (2009), Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ile nanokirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşimini incelemiştir. Bu çalışmasında Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy, Aydoğdu kiriş teorilerine ait sonuçları çeşitli  $L/h$  ve yerel olmayan parametre değerleri ile sunmuştur.

Murmu ve Pradhan (2009b) elastik zemin üzerindeki tek katmanlı KNT'ün burkulma analizini yerel olmayan elastisite teorisi ve Timoshenko kiriş teorisi ile sunmuşlardır.

Diferansiyel kuadratür yöntemini kullandıkları bu çalışmalarında zemin parametrelerinin ve yerel olmayan davranışın kritik burkulma yükleri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Alshorbagy ve ark. (2011) malzeme özellikleri kuvvet kuralına göre değişen FD kirişlerin dinamik davranışlarını göstermişlerdir. FD kirişin serbest titreşim analizini Euler-Bernoulli kiriş teorisi varsayımı altında sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yapmışlardır. Analiz sonuçları doğrultusunda sınır şartlarının, kuvvet kuralı üssünün ve kiriş narinlik oranının FD kirişin dinamik davranışı üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Civalek ve Demir (2011b) mikrotüpüklerin eğilme analizi için Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisine dayanan bir kiriş modeli geliştirmişlerdir. Diferansiyel kuadratür yöntemi ile gerçekleştirdikleri analiz sonuçları ile mikrotüpüklerin statik davranışını sunmuşlardır.

Thai ve Vo (2012) malzeme özellikleri kuvvet kuralına göre değişen FD kirişlerin eğilme ve serbest titreşimini yüksek dereceli kayma deformasyon teorileri ile göstermişlerdir. Bu çalışmalarında kuvvet kuralı üssü ve kayma deformasyonunun FD kirişin eğilme ve serbest titreşim davranışlarını nasıl etkilediklerini araştırmışlardır.

Eltaher ve ark. (2013a) Euler-Bernoulli nanokirişinin titreşimini sonlu elemanlar yöntemi ile sunmuşlardır. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak yaptıkları bu çalışmada yerel olmayan parametre, narinlik oranı, dönel atalet ve sınır şartlarının nanokirişin dinamik davranışları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.

Eltaher ve ark. (2013b) malzeme özellikleri kalınlığı doğrultusunda değişen FD nanokirişlerin statik burkulma analizini boyut etkisine bağlı olarak çalışmışlardır. Kirişin yerel olmayan davranışı, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ile sağlanmıştır. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre küçük deformasyonlar ile modelledikleri FD nanokirişin eğilme ve burkulma davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile sunmuşlardır.

Pradhan ve Chakraverty (2013) FD Euler ve Timoshenko kirişlerinin titreşim davranışlarını sunmuşlardır. Bu çalışmalarında farklı  $L/h$  oranları ve sınır şartları için frekans değerlerini Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak elde etmişlerdir.

Ebrahimi ve ark. (2015) FD nanokirişin titreşim davranışlarını Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak sunmuşlardır. Bu çalışmalarında FD nanokirişin frekans değerlerini Navier çözümü ve diferansiyel transformasyon metodu (DTM) ile elde etmişlerdir.

Demir (2016), Winkler zeminine oturan nanokirişlerin yerel olmayan titreşim analizini DTM ile yapmıştır. Bu çalışmasında boyutsuz yerel olmayan parametre, boyutsuz Winkler zemin parametresi ve sınır şartlarının etkilerini incelemiştir.

Nejad ve Hadi (2016), malzeme özellikleri hem ekseni hem de kalınlığı doğrultusunda değişen FD nanokirişlerin eğilmesini Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak sunmuşlardır.

Togun ve Bağdatlı (2016) Pasternak zeminine oturan nanokirişin lineer olmayan titreşim analizini sunmuşlardır. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre modelledikleri nanokirişlerin titreşimlerinin değişimini, Winkler ve Pasternak zemin parametreleri, yerel olmayan parametre, B – B ve A – A sınır şartlarına göre incelemişlerdir.

Avcar ve Mohammed (2017) Winkler zeminine oturan A – B sınır şartına sahip FD bir kirişin titreşimini incelemişlerdir. Kirişin malzeme özelliklerinin kiriş kalınlığı doğrultusunda kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Malzeme özelliklerinin değişimi ve Winkler zemin parametresinin FD kirişin boyutsuz frekans değerleri üzerindeki etkilerini göstermişlerdir.

Demir ve Civalek (2017) termal ortamların etkisi altında elastik zemine oturan nanokirişlerin sonlu elemanlar formülasyonunu titreşim analizi için göstermişlerdir. Sonlu elemanlar formülasyonunu Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi çerçevesinde geliştirmişlerdir. A – A ve B – B olmak üzere iki farklı sınır şartına sahip silisyum karbür nanotel için boyutsuz frekans değerleri elde etmişlerdir. Bu çalışmalarında Winkler ve Pasternak zemin parametreleri, yerel olmayan parametre ve sıcaklık etkilerinin homojen nanokirişin frekanslarını ne yönde değiştirdiklerini incelemişlerdir.

Avcar ve Mohammed (2018) Winkler-Pasternak zeminine oturan, malzeme özellikleri kalınlığı doğrultusunda değişen FD kirişin serbest titreşimini çalışmışlardır. Bu çalışmalarında FD kirişi klasik kiriş teorisine göre modellemişlerdir. Boyutsuz frekans değerlerini farklı sınır şartları, hacim fraksiyonu ve zemin parametre değerleri için elde etmişlerdir.

Uzun ve ark. (2018) farklı kesit geometrileri ve sınır şartlarına sahip KNT ve bor nitür nanotüplerin (BNNT) titreşim davranışlarını yerel olmayan sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir. Kesit geometrisi, sınır şartları ve boyutsuz yerel olmayan parametrenin frekanslar üzerindeki etkilerini göstermişlerdir.

Uzun ve Civalek (2019a) Winkler zemini üzerindeki çeşitli nanotellerin titreşim davranışlarını Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile incelemişlerdir. Bu çalışmalarında silisyum karbür nanotel, gümüş nanotel ve altın nanotelin frekanslarını sonlu elemanlar yöntemi ile elde etmişler ve sınır şartları, zemin parametresi ve boyut parametresinin frekanslar üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Bunlara ek olarak, sıcaklık değişiminin nanotellerin frekanslarına etkisini de sunmuşlardır.

Uzun ve Civalek (2019b) Winkler-Pasternak zeminine oturan silikon nanotelin titreşimini sonlu elemanlar yöntemiyle sunmuşlardır. Sonlu elemanlar formülasyonunu Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak elde etmişlerdir. Silikon nanotellerin frekanslarının değişimini boyutsuz yerel olmayan parametre, zemin parametreleri, B – B ve A – S sınır şartları için incelemişlerdir.

Görüldüğü üzere FD klasik kirişlerin analizleri ve homojen nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan analizleri ile ilgili literatürde analitik veya sayısal yöntemlerle sunulan çalışmalar bulunmaktadır. Ancak FD nanokirişlerin yerel olmayan elastisite teorisine dayanan titreşim analizine ait çalışmalar kısıtlı olmakla birlikte özellikle yerel olmayan sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü içeren çalışmalarda boşluk olduğu söylenebilir.

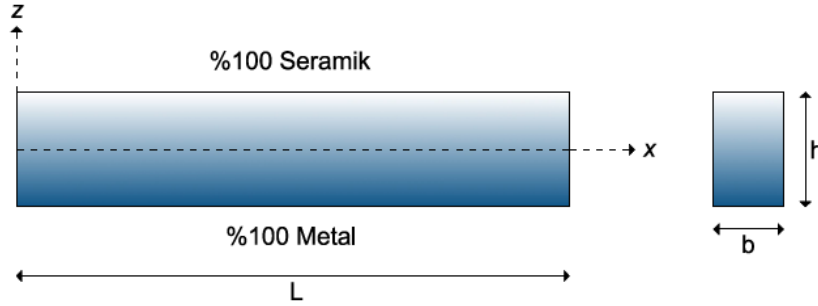
Bu tez çalışmasının amacı, gerçek sonuca pratik bir şekilde yakınsama sağlayan ve en çok kullanılan sayısal yöntemlerden olan sonlu elemanlar yönteminin FD nanokirişe yerel

olmayan elastisite teorisi çerçevesinde uygulanmasıdır. Bu tez çalışmasında sınır şartları, kuvvet kuralı üssü  $k$ , boyutsuz yerel olmayan parametre  $e_0a/L$  ve zemin parametrelerinin FD nanokirişin titreşim frekanslarına etkileri sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla detaylı bir şekilde ele alınmıştır.



### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Nanokiriş



**Şekil 3.1.** Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokiriş

Uzunluğu  $L$ , genişliği  $b$ , yüksekliği  $h$  olan fonksiyonel derecelendirilmiş bir nanokiriş Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Görüldüğü üzere kirişin malzeme özellikleri  $P$ , yükseklik boyunca değişmektedir ve bu yüzden  $z$ ’nin bir fonksiyonu olacaktır. Karışım kuralına göre etkili malzeme özelliği aşağıdaki gibi ifade edilir (Anandrao ve ark. 2012, Avcar ve Mohammed 2017).

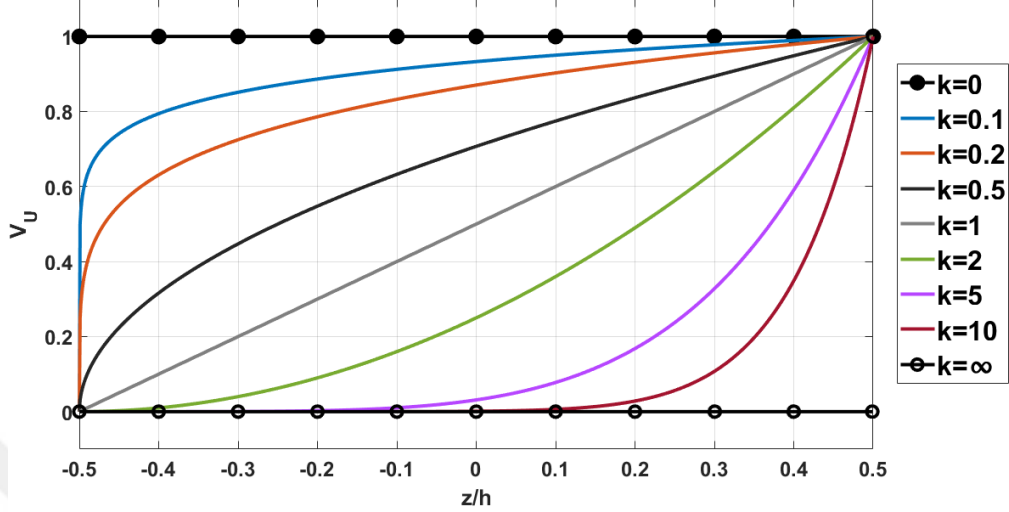
$$P(z) = P_A V_A + P_U V_U \quad (3.1)$$

Burada  $P_A, V_A, P_U$  ve  $V_U$  sırasıyla kirişin alt yüzey malzeme özelliği, alt malzemenin hacim oranı, üst yüzey malzeme özelliği ve üst malzemenin hacim oranını temsil etmektedir. Kuvvet kuralına göre kirişin üst malzeme bileşeninin hacim oranı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$V_U = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3.2)$$

Yukarıdaki ifadede  $k$ , negatif olmayan ( $0 \leq k \leq \infty$ ) bir değişkendir ve yükseklik boyunca malzeme dağılımını niteler. Kuvvet kuralı üssü denilen  $k$  değişkenini yorumlamak gerekirse;  $k = 0$  olduğunda kirişin tamamen üst malzemeye,  $k = \infty$  olduğunda tamamen alt malzemeye dönüştüğü görülür.  $k = 1$  olduğunda ise değişim

doğrusal olmaktadır. Şekil 3.2,  $k$  değişkeninin çeşitli değerleri için  $V_U$ 'nun  $z/h$ 'ye göre değişimini göstermektedir.



Şekil 3.2.  $V_U$ 'nun  $z/h$ 'ye göre değişimi

Kiriş elemanındaki hacim oranları toplamı 1, yani

$$V_U + V_A = 1 \quad (3.3)$$

olduğuna göre alt malzeme bileşeninin hacim oranı aşağıdaki şekilde olur.

$$V_A = 1 - \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3.4)$$

Alt ve üst malzemelerin hacim oranları, malzeme özelliklerini ifade eden (3.1) Denkleminde yerlerine yazılıp denklem düzenlendiğinde FD bir kiriş için malzeme özelliklerinin yükseklik boyunca değişimini ifade eden fonksiyonun son hali aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$P(z) = (P_U - P_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_A \quad (3.5)$$



Malzeme özelliği  $P(z)$ , fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin Elastisite modülü, kayma modülü ( $G$ ), Poisson oranı ( $\nu$ ), yoğunluk ( $\rho$ ) vb. gibi özelliklerini ifade eder ve aşağıdaki formlara dönüşebilir.

$$E(z) = (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \quad (3.6)$$

$$G(z) = (G_U - G_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + G_A \quad (3.7)$$

$$\nu(z) = (\nu_U - \nu_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \nu_A \quad (3.8)$$

$$\rho(z) = (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \quad (3.9)$$

Malzeme özelliklerini ifade eden denklemde  $z$  yerine kirişin en alt ve üst koordinatlarını yazıp çıkarım yapmak gerekirse,

Kirişin en üst noktası ( $z = h/2$ ) için;

$$P(h/2) = (P_U - P_A) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + P_A \quad (3.10)$$

$$P(h/2) = P_U \quad (3.11)$$

olur. Yani  $z = h/2$  olduğunda kirişin özellikleri tamamen üst bileşenin özelliklerini taşımaktadır. Bu da  $E = E_U$ ,  $G = G_U$ ,  $\nu = \nu_U$ ,  $\rho = \rho_U$  olduğu anlamına gelmektedir.

Kirişin en alt noktası ( $z = -h/2$ ) için;

$$P(-h/2) = (P_U - P_A) \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)^k + P_A \quad (3.12)$$

$$P(-h/2) = P_A \quad (3.13)$$

olur. Yani  $z = -h/2$  olduğunda kirişin özellikleri tamamen alt bileşenin özelliklerini taşımaktadır. Bu da  $E = E_A$ ,  $G = G_A$ ,  $\nu = \nu_A$ ,  $\rho = \rho_A$  olduğu anlamına gelmektedir.

Gerilme ve şekil değiştirme arasındaki bağıntı Denklem (2.12)'de verilmişti. Bu bağıntı FD kiriş için yeniden yazılırsa

$$\sigma_{xx} = E(z)\varepsilon_{xx} \quad (3.14)$$

olur. O halde FD kiriş için sıfır olmayan tek gerilme ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{xx} = E(z) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \quad (3.15)$$

Elde edilen gerilme ifadesi Denklem (2.14) ve Denklem (2.15)'te yerine yazıldığında FD kiriş için normal kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} N &= \int_A E(z) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) dA \\ &= \int_A E(z) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dA - \int_A E(z) z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dA \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} M &= \int_A E(z) z \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) dA \\ &= \int_A E(z) z \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dA - \int_A E(z) z^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dA \end{aligned} \quad (3.17)$$

$A_1, B_1$  ve  $D_1$  sırasıyla uzama, uzama-eğilme birleşik ve eğilme rijitliği olmak üzere aşağıdaki şekillerde ifade edilirler.

$$A_1 = \int_A E(z) dA \quad (3.18)$$

$$B_1 = \int_A E(z) z dA \quad (3.19)$$

$$D_1 = \int_A E(z) z^2 dA \quad (3.20)$$

$A_1, B_1$  ve  $D_1$  rijitlikleri, Denklem (3.16) ve (3.17)'de yerlerine yazıldığında normal kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$N = A_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.21)$$

$$M = B_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

$A_1, B_1$  ve  $D_1$  rijitlikleri gerekli integrasyon işlemleri (Ek 1) yapıldığında son halleriyle aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$A_1 = b \left( \frac{(E_U - E_A)}{k+1} h + E_A h \right) \quad (3.23)$$

$$B_1 = (E_U - E_A) \frac{bh}{k+1} \left( \frac{h}{2} - \frac{h}{k+2} \right) \quad (3.24)$$

$$D_1 = bh^3 \left( (E_U - E_A) \left( \frac{1}{4(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{E_A}{12} \right) \quad (3.25)$$

Denklem (2.22)'de verilen yerel olmayan gerilme ifadesi FD nanokiriş için yeniden yazıldığında,

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E(z) \varepsilon_{xx} \quad (3.26)$$

olur. Denklem (3.26)'nın kesit alanına göre integrali alınırsa normal kuvvet – şekil değiştirme ilişkisi Denklem (3.27)'deki gibi,  $z$  ile çarpılıp kesit alanına göre integrali alınırsa moment – eğrilik ilişkisi Denklem (3.28)'deki gibi elde edilir.

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

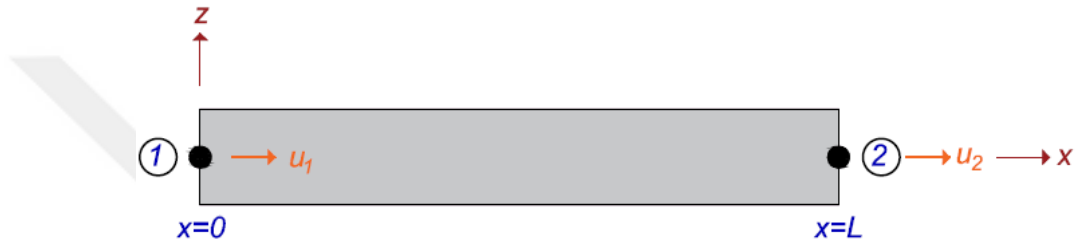
$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = B_1 \frac{\partial u}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

### 3.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Bir problemin çözümünde en doğru sonucu analitik çözüm verir. Ancak karmaşık bir geometri veya farklı sınır koşullarına sahip sistemlere analitik çözümü uygulamak çok zordur ve hatta bazen mümkün olmayabilir. Sonlu elemanlar yöntemi bu gibi durumlar

da dahil olmak üzere pratik çözümler yapmayı sağlayan yaklaşık bir yöntemdir. Sonlu elemanlar yöntemi çok geniş kullanım alanlarına sahiptir ve yapıların mekanik tepkilerini analiz etmek için sayısal yöntemlerin güçlü araçlarından biridir. Bu yöntem ile çok karmaşık yapıya sahip olan sistemleri, çözümünü bilinen alt parçalara yani sonlu elemanlara bölüp gerçek sonuca çok küçük farklarla yaklaşmak mümkündür. Sistem ne kadar hassas çözülürse yani eleman sayısı ne kadar büyük olursa, elde edilen sonuç gerçek sonuca o kadar yakın olur. Hatta gerçek sonucu elde etmek mümkündür.

### 3.2.1. Uzama elemanına ait şekil fonksiyonu



**Şekil 3.3.** Uzama elemanı için deplasman parametrelerinin gösterimi

Şekil 3.3'te iki düğüm noktasına ve  $L$  uzunluğuna sahip bir uzama elemanı gösterilmiştir. Uzama elemanının her bir düğüm noktası sadece ötelenme (uzama veya kısılma) hareketi yapabilmektedir. Bu yüzden uzama elemanının her bir düğüm noktası bir serbestlik derecesine sahiptir. Yukarıda gösterilen elemanın serbestlik derecesi, iki ucunda da birer tane olmak üzere toplam iki tanedir. Yer değiştirme ifadesi  $u$ 'nun çubuk eksenini boyunca lineer değiştiği kabul edilirse uzama elemanının yapacağı yer değiştirmeyi ifade eden fonksiyon aşağıdaki gibi olur.

$$u = c_0 + c_1 x \quad (3.29)$$

$$\{u\} = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Elemanda toplam iki tane serbestlik olması nedeniyle fonksiyon, yukarıdaki gibi iki sabite ( $c_0$  ve  $c_1$ ) bağlı olarak ifade edilmiştir. (3.29) Denkleminde uzama elemanının 1 ( $x=0$ ) ve 2 ( $x=L$ ) düğümlerindeki yer değiştirmeleri bulunacak olursa,

$$u_1 = u(x=0) = c_0 \quad (3.31)$$

$$u_2 = u(x=L) = c_0 + c_1 L \quad (3.32)$$

olur. Elde edilen uzama ifadeleri matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Yukarıdaki denklemden  $c_0$  ve  $c_1$  çekilirse

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$c_0 = u_1 \quad (3.35)$$

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.36)$$

olur. Elde edilen  $c_0$  ve  $c_1$  ifadeleri (3.29) Denkleminde yerlerine yazıldığında

$$u = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)x}{L} \quad (3.37)$$

$$u = u_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \left(\frac{x}{L}\right) \quad (3.38)$$

elde edilir. Bu ifade de matris formunda yazıldığında  $u$  aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\{u\} = [\phi_u] \{q_u\} \quad (3.40)$$

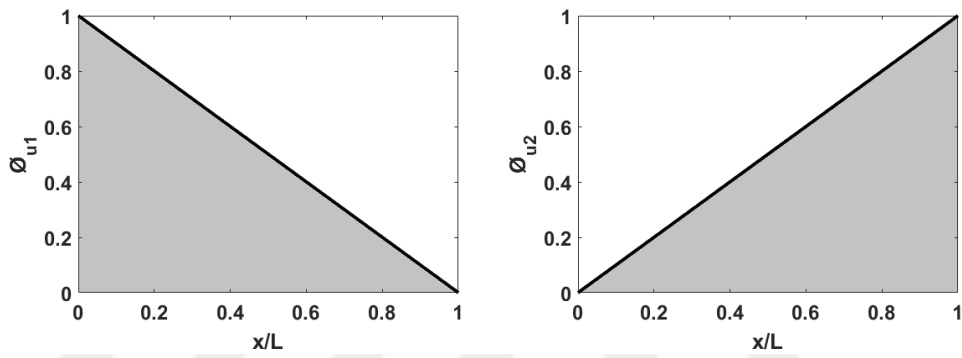
Yukarıdaki ifadede  $\phi_u$  aksenal serbestlikler için şekil fonksiyonu vektörü,  $q_u$  ise serbestlik derecesi vektörüdür. Uzama elamanı için şekil fonksiyonu vektörü aşağıdaki şekildedir.

$$[\phi_u] = [\phi_{u1} \quad \phi_{u2}] \quad (3.41)$$

Burada  $\phi_{u1}, \phi_{u2}$  interpolasyon fonksiyonu olarak da adlandırılan şekil fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\phi_{u1} = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.42)$$

$$\phi_{u2} = \frac{x}{L} \quad (3.43)$$



**Şekil 3.4.** Uzama elemanına ait interpolasyon fonksiyonlarının  $x/L$  oranına göre değişimi

### 3.2.2. Eğilme elemanına ait şekil fonksiyonu



**Şekil 3.5.** Eğilme elemanı için deplasman parametrelerinin gösterimi

Şekil 3.5'te iki düğüm noktasına ve  $L$  uzunluğuna sahip bir eğilme elemanı gösterilmiştir. Eğilme elemanının her bir düğüm noktası çökme ( $w_1, w_2$ ) ve dönme ( $\theta_1, \theta_2$ ) hareketi

yapabilmektedir, yani iki serbestlik derecesine sahiptir. Yukarıdaki eğilme elemanının yapacağı yer değiştirmeyi ifade eden fonksiyon, elemanın her iki ucunda da ikişer tane olmak üzere toplam dört tane serbestlik olması nedeniyle aşağıdaki gibi dört sabite ( $c_0, c_1, c_2, c_3$ ) bağlı olarak ifade edilir (Reddy 1993).

$$w = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (3.44)$$

$$\{w\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

Dönme ifadesi  $\theta = \frac{dw}{dx}$  biçiminde ifade edildiğinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\theta = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (3.46)$$

Yukarıdaki iki denklemden eğilme elemanının 1 ( $x=0$ ) ve 2 ( $x=L$ ) düğümlerindeki çökme ve dönmeleri bulunursa,

1 ( $x=0$ ) düğümü için;

$$w_1 = w(x=0) = c_0 \quad (3.47)$$

$$\theta_1 = \theta(x=0) = c_1 \quad (3.48)$$

2 ( $x=L$ ) düğümü için;

$$w_2 = w(x=L) = c_0 + c_1L + c_2L^2 + c_3L^3 \quad (3.49)$$

$$\theta_2 = \theta(x=L) = c_1 + 2c_2L + 3c_3L^2 \quad (3.50)$$

olur. Elde edilen çökme ve dönme ifadeleri matris formunda yazılırsa

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

olur. Elde edilen bu denklemden de  $c_0, c_1, c_2, c_3$  katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ \frac{L^2}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

Bulunan  $c_0, c_1, c_2, c_3$  katsayıları çökme ifadesinde yerine yazıldığında, çökme ifadesi aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$w = \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}\right)w_1 + \left(x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}\right)w_2 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_2 \quad (3.53)$$

$$\{w\} = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\{w\} = [\phi_w] \{q_w\} \quad (3.55)$$

Yukarıdaki ifadede  $\phi_w$  enine serbestlik dereceleri için şekil fonksiyonu vektörü,  $q_w$  serbestlik derecesi vektörüdür. Eğilme elamanı için şekil fonksiyonu vektörü

$$[\phi_w] = [\phi_{w1} \quad \phi_{w2} \quad \phi_{w3} \quad \phi_{w4}] \quad (3.56)$$



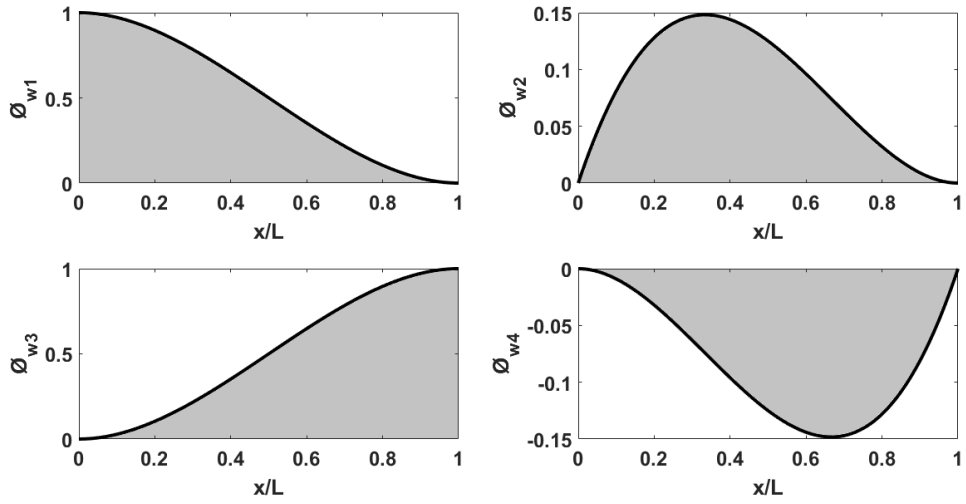
şeklinde. Burada  $\phi_{w1}, \phi_{w2}, \phi_{w3}, \phi_{w4}$  interpolasyon fonksiyonu olarak da adlandırılan şekil fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\phi_{w1} = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad (3.57)$$

$$\phi_{w2} = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.58)$$

$$\phi_{w3} = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (3.59)$$

$$\phi_{w4} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (3.60)$$



**Şekil 3.6.** Eğilme elemanına ait interpolasyon fonksiyonlarının  $x/L$  oranına göre değişimi

### 3.3. Hamilton Prensibi ile Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Hamilton prensibine göre (Reddy 2002)

$$\int_0^T (\delta T - (\delta S - \delta W)) dt = 0 \quad (3.61)$$

Burada  $S, T$  ve  $W$  sırasıyla şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış kuvvelerin yaptığı iştir. Hacmi  $V$ , uzunluğu  $L$  olan bir eleman için şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dV \quad (3.62)$$

Yukarıda ifadede (2.6), (2.14) ve (2.15) Denklemleri sırasıyla yerlerine yazıldığında şekil değiştirme enerjisinin son hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma(z) \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) dA dx \\ S &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3.63)$$

Toplam şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\delta \int_0^T S dt = \int_0^T \int_0^L \left( N \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - M \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dx dt \quad (3.64)$$

(3.64) Denklemindeki ifadelerin varyasyonları alınır

$$\int_0^T \int_0^L N \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left( N \delta u dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx dt \right) \quad (3.65)$$

$$\int_0^T \int_0^L M \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dt = \int_0^T \left( M \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt \Big|_0^L - \frac{\partial M}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.66)$$

elde edilir. Elde edilen ifadeler (3.64) Denkleminde yerine yazıldığında şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\delta \int_0^T S dt = \int_0^T \left( N \delta u dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \delta u dx dt - M \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt \Big|_0^L + \frac{\partial M}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.67)$$

Kirişin kinetik enerjisi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left( \left( \frac{\partial u_x(x, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y(x, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z(x, z, t)}{\partial t} \right)^2 \right) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V \rho(z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dV \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dA dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \left( \rho(z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - 2\rho(z)z \left( \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \rho(z)z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right) dA dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left( I_0 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) - 2I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right) dx \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde  $I_0$ ,  $I_1$  ve  $I_2$  kütle atalet momentleridir ve aşağıdaki gibi ifade edilirler.

$$I_0 = \int_A \rho(z) dA \tag{3.69}$$

$$I_1 = \int_A \rho(z) z dA \tag{3.70}$$

$$I_2 = \int_A \rho(z) z^2 dA \tag{3.71}$$

$I_0, I_1$  ve  $I_2$  atalet momentleri gerekli integrasyon işlemleri (Ek 2) yapıldığında son halleriyle aşağıdaki gibi yazılırlar.

$$I_0 = b \left( \frac{(\rho_U - \rho_A)}{k+1} h + \rho_A h \right) \tag{3.72}$$

$$I_1 = (\rho_U - \rho_A) \frac{bh}{k+1} \left( \frac{h}{2} - \frac{h}{k+2} \right) \tag{3.73}$$

$$I_2 = bh^3 \left( (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{1}{4(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{\rho_A}{12} \right) \tag{3.74}$$

Kinetik enerjinin birinci varyasyonu

$$\delta \int_0^T T dt = \int_0^T \int_0^L \left( \begin{aligned} & I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) - \dots \\ & \dots - I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) + \dots \\ & \dots + I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \end{aligned} \right) dx dt \quad (3.75)$$

olmak üzere, denklemdaki ifadelerin varyasyonları alınırsa

$$\int_0^T \int_0^L I_0 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx dt \right) \quad (3.76)$$

$$\int_0^T \int_0^L I_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx dt = \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.77)$$

$$\int_0^T \int_0^L I_1 \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx dt = \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.78)$$

$$\int_0^T \int_0^L I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta u dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta u dx dt \right) \quad (3.79)$$

$$\int_0^T \int_0^L I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) dx dt = \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.80)$$

elde edilir ve kinetik enerjinin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\delta \int_0^T T dt = \int_0^L \left( \begin{aligned} & I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dx dt + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dt \right) - \dots \\ & \dots - I_1 \left( \begin{aligned} & \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \dots \right. \\ & \left. \dots + \int_0^T \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta w dx dt + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta u dx \Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta u dx dt \right) \end{aligned} \right) + \dots \\ & \dots + I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \int_0^T \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w dx dt \right) \end{aligned} \right) \quad (3.81)$$

Dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left( -k_g \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_w w^2 \right) dx \quad (3.82)$$

Burada  $k_g$  Pasternak zemin parametresi,  $k_w$  ise Winkler zemin parametresidir. Dış kuvvetlerin birinci varyasyonu

$$\delta \int_0^T W dt = \int_0^T \int_0^L \left( -k_g \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - k_w w \delta w \right) dx dt \quad (3.83)$$

olmak üzere, denklemdaki ifadelerin varyasyonları alınır

$$\int_0^T \int_0^L k_g \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T k_g \left( \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dt \right) \quad (3.84)$$

elde edilir ve dış kuvvetlerin yaptığı işin birinci varyasyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\delta \int_0^T W dt = \int_0^T \left( -k_g \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L + k_g \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dx dt - \int_0^L k_w w \delta w dx dt \right) \quad (3.85)$$

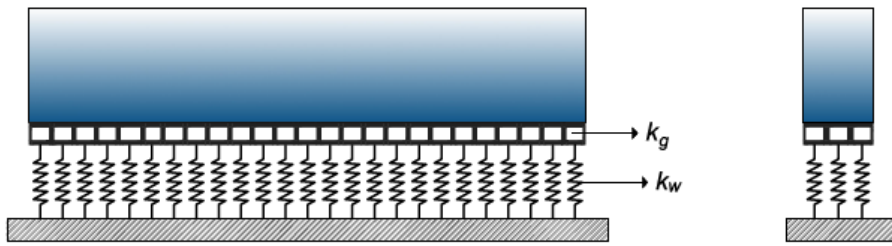
Yukarıda elde edilen varyasyonlar (3.61) Denkleminde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^L \left( \left( \frac{\partial N}{\partial x} - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right) \delta u + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_w w \right) \delta w \right) dx dt + \dots \\ & \dots + \int_0^L \left( I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta u dx \Big|_0^T + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \Big|_0^T \right) - I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \dots \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta u dx \Big|_0^T \right) + \dots \right. \\ & \left. \dots + I_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \Big|_0^T - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \delta w dx \Big|_0^T \right) \right) + \dots \\ & \dots + \int_0^T \left( -N \delta u dt \Big|_0^L - M \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dt \Big|_0^L - \frac{\partial M}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L - k_g \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dt \Big|_0^L \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

elde edilir. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki FD kiriş için elde edilen Denklem (3.86)'da birinci kısım Euler-Lagrange denklemidir. Buradan denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta u: \frac{\partial N}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \quad (3.87)$$

$$\delta w: \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - k_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w \quad (3.88)$$



Şekil 3.7. Winkler-Pasternak zemini üzerindeki FD kiriş

### 3.4. Rijitlik ve Kütle Matrislerinin Elde Edilmesi

#### 3.4.1. FD klasik kirişe ait matrislerin elde edilmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş klasik kiriş için normal kuvvet  $N$  ve eğilme momenti  $M$  ifadeleri Denklem (3.21) – (3.22)'de elde edilmişti. Bu ifadeler tekrar yazılırsa,

$$N = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.89)$$

$$M = B_1 \frac{\partial u}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.90)$$

olur. Yukarıda tekrar yazılan  $N$  ve  $M$  ifadeleri, şekil değiştirme enerjisinin varyasyonu ifadesinde yerlerine yazıldıktan sonra Denklemler (3.61), (3.64), (3.75) ve (3.83)'ten FD klasik kirişe ait titreşim denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\int_0^T \int_0^L \left( \begin{array}{l} I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) - I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) + \dots \\ \dots + I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \\ \dots - \left( A_1 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - B_1 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots - \left( \dots + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \left( -k_s \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - k_w w \delta w \right) \right) \right) \end{array} \right) dx dt \quad (3.91)$$

(3.91) Denkleminde ve şekil fonksiyonlarından fonksiyonel derecelendirilmiş klasik kirişe ait rijitlik ve kütle matrisleri aşağıdaki formüllerle bulunur. Klasik rijitlik matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} K_u &= \int_0^L A_1 \left( \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} dx \\ &= \int_0^L A_1 \begin{bmatrix} \phi'_{u1} \phi'_{u1} & \phi'_{u1} \phi'_{u2} \\ \phi'_{u2} \phi'_{u1} & \phi'_{u2} \phi'_{u2} \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$K_u = A_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} K_w &= \int_0^L D_1 \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx \\ &= \int_0^L D_1 \begin{bmatrix} \phi''_{w1} \phi''_{w1} & \phi''_{w1} \phi''_{w2} & \phi''_{w1} \phi''_{w3} & \phi''_{w1} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w2} \phi''_{w1} & \phi''_{w2} \phi''_{w2} & \phi''_{w2} \phi''_{w3} & \phi''_{w2} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w3} \phi''_{w1} & \phi''_{w3} \phi''_{w2} & \phi''_{w3} \phi''_{w3} & \phi''_{w3} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w4} \phi''_{w1} & \phi''_{w4} \phi''_{w2} & \phi''_{w4} \phi''_{w3} & \phi''_{w4} \phi''_{w4} \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$K_w = \frac{D_1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned}
K_{uw1} &= -\int_0^L B_1 \left( \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} dx \\
&= -\int_0^L B_1 \begin{bmatrix} \phi'_{u1}\phi''_{w1} & \phi'_{u1}\phi''_{w2} & \phi'_{u1}\phi''_{w3} & \phi'_{u1}\phi''_{w4} \\ \phi'_{u2}\phi''_{w1} & \phi'_{u2}\phi''_{w2} & \phi'_{u2}\phi''_{w3} & \phi'_{u2}\phi''_{w4} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$K_{uw1} = -B_1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
K_{uw2} &= -\int_0^L B_1 \left( \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} dx \\
&= -\int_0^L B_1 \begin{bmatrix} \phi''_{w1}\phi'_{u1} & \phi''_{w1}\phi'_{u2} \\ \phi''_{w2}\phi'_{u1} & \phi''_{w2}\phi'_{u2} \\ \phi''_{w3}\phi'_{u1} & \phi''_{w3}\phi'_{u2} \\ \phi''_{w4}\phi'_{u1} & \phi''_{w4}\phi'_{u2} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$K_{uw2} = -B_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
K_{Winkler}^k &= \int_0^L k_w [\phi_w]^T [\phi_w] dx \\
&= \int_0^L k_w \begin{bmatrix} \phi_{w1}\phi_{w1} & \phi_{w1}\phi_{w2} & \phi_{w1}\phi_{w3} & \phi_{w1}\phi_{w4} \\ \phi_{w2}\phi_{w1} & \phi_{w2}\phi_{w2} & \phi_{w2}\phi_{w3} & \phi_{w2}\phi_{w4} \\ \phi_{w3}\phi_{w1} & \phi_{w3}\phi_{w2} & \phi_{w3}\phi_{w3} & \phi_{w3}\phi_{w4} \\ \phi_{w4}\phi_{w1} & \phi_{w4}\phi_{w2} & \phi_{w4}\phi_{w3} & \phi_{w4}\phi_{w4} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.100}$$



$$K_{Winkler}^k = k_w \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} \\ \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} & \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$K_{Pasternak}^k = \int_0^L k_g \left( \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx$$

$$= \int_0^L k_g \begin{bmatrix} \phi'_{w1}\phi'_{w1} & \phi'_{w1}\phi'_{w2} & \phi'_{w1}\phi'_{w3} & \phi'_{w1}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w2}\phi'_{w1} & \phi'_{w2}\phi'_{w2} & \phi'_{w2}\phi'_{w3} & \phi'_{w2}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w3}\phi'_{w1} & \phi'_{w3}\phi'_{w2} & \phi'_{w3}\phi'_{w3} & \phi'_{w3}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w4}\phi'_{w1} & \phi'_{w4}\phi'_{w2} & \phi'_{w4}\phi'_{w3} & \phi'_{w4}\phi'_{w4} \end{bmatrix} dx \quad (3.102)$$

$$K_{Pasternak}^k = k_g \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{-1}{10} & \frac{-L}{30} \\ \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-L}{30} & \frac{-1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Klasik kütle matrisleri ise aşağıdaki şekildedir.

$$M_u^k = \int_0^L I_0 [\phi_u]^T [\phi_u] dx$$

$$= \int_0^L I_0 \begin{bmatrix} \phi_{u1}\phi_{u1} & \phi_{u1}\phi_{u2} \\ \phi_{u2}\phi_{u1} & \phi_{u2}\phi_{u2} \end{bmatrix} dx \quad (3.104)$$

$$M_u^k = I_0 L \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned}
M_{w1}^k &= \int_0^L I_0 [\phi_w]^T [\phi_w] dx \\
&= \int_0^L I_0 \begin{bmatrix} \phi_{w1}\phi_{w1} & \phi_{w1}\phi_{w2} & \phi_{w1}\phi_{w3} & \phi_{w1}\phi_{w4} \\ \phi_{w2}\phi_{w1} & \phi_{w2}\phi_{w2} & \phi_{w2}\phi_{w3} & \phi_{w2}\phi_{w4} \\ \phi_{w3}\phi_{w1} & \phi_{w3}\phi_{w2} & \phi_{w3}\phi_{w3} & \phi_{w3}\phi_{w4} \\ \phi_{w4}\phi_{w1} & \phi_{w4}\phi_{w2} & \phi_{w4}\phi_{w3} & \phi_{w4}\phi_{w4} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.106}$$

$$M_{w1}^k = I_0 \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & \frac{-13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} \\ \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & \frac{13L}{35} & \frac{-11L^2}{210} \\ \frac{-13L^2}{420} & \frac{-L^3}{140} & \frac{-11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}
M_{w2}^k &= \int_0^L I_2 \left( \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx \\
&= \int_0^L I_2 \begin{bmatrix} \phi'_{w1}\phi'_{w1} & \phi'_{w1}\phi'_{w2} & \phi'_{w1}\phi'_{w3} & \phi'_{w1}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w2}\phi'_{w1} & \phi'_{w2}\phi'_{w2} & \phi'_{w2}\phi'_{w3} & \phi'_{w2}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w3}\phi'_{w1} & \phi'_{w3}\phi'_{w2} & \phi'_{w3}\phi'_{w3} & \phi'_{w3}\phi'_{w4} \\ \phi'_{w4}\phi'_{w1} & \phi'_{w4}\phi'_{w2} & \phi'_{w4}\phi'_{w3} & \phi'_{w4}\phi'_{w4} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$M_{w2}^k = I_2 \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{-1}{10} & \frac{-L}{30} \\ \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{-L}{30} & \frac{-1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
M_{uw1}^k &= -\int_0^L I_1 [\phi_u]^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx \\
&= -\int_0^L I_1 \begin{bmatrix} \phi_{u1}\phi'_{w1} & \phi_{u1}\phi'_{w2} & \phi_{u1}\phi'_{w3} & \phi_{u1}\phi'_{w4} \\ \phi_{u2}\phi'_{w1} & \phi_{u2}\phi'_{w2} & \phi_{u2}\phi'_{w3} & \phi_{u2}\phi'_{w4} \end{bmatrix} dx
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$M_{uw1}^k = -I_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{L}{12} & \frac{1}{2} & -\frac{L}{12} \\ -1 & -L & 1 & L \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{12} & \frac{1}{2} & \frac{L}{12} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} M_{uw2}^k &= -\int_0^L I_1 \left( \frac{\partial [\phi_w]}{\partial x} \right)^T [\phi_u] dx \\ &= -\int_0^L I_1 \begin{bmatrix} \phi'_{w1} \phi_{u1} & \phi'_{w1} \phi_{u2} \\ \phi'_{w2} \phi_{u1} & \phi'_{w2} \phi_{u2} \\ \phi'_{w3} \phi_{u1} & \phi'_{w3} \phi_{u2} \\ \phi'_{w4} \phi_{u1} & \phi'_{w4} \phi_{u2} \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$M_{uw2}^k = -I_1 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{L}{12} & -\frac{L}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{L}{12} & \frac{L}{12} \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

### 3.4.2. FD nanokirişe ait matrislerin elde dilmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş bir nanokiriş için yerel olmayan normal kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki şekildedir.

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.114)$$

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = B_1 \frac{\partial u}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.115)$$

Denklem (3.87)'nin bir kez türevi alınarak Denklem (3.114)'te, Denklem (3.88) aynı haliyle Denklem (3.115)'te yerlerine yazılırsa FD nanokiriş için normal kuvvet ve moment ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$N = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \left( I_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \quad (3.116)$$

$$M = B_1 \frac{\partial u}{\partial x} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (e_0 a)^2 \left( I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w \right) \quad (3.117)$$

Nanokiriş için elde edilen  $N$  ve  $M$  ifadeleri, şekil değiştirme enerjisinin varyasyonu ifadesinde yerlerine yazıldıktan sonra Denklemler (3.61), (3.64), (3.75) ve (3.83)'ten FD nanokiriş ait titreşim denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\int_0^T \int_0^L \left( \begin{array}{l} \left( I_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) - I_1 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) + \dots \\ \dots + I_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \end{array} \right) - \dots \\ \left( \begin{array}{l} A_1 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \\ \dots + (e_0 a)^2 \left( \begin{array}{l} I_0 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \dots \\ \dots - I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{array} \right) - \dots \\ \dots - \dots - B_1 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \dots \\ \left( \begin{array}{l} I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + I_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \dots \\ \dots - (e_0 a)^2 \left( \begin{array}{l} \dots - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \dots \\ \dots - k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + k_w w \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{array} \right) - \dots \\ \dots - \left( -k_g \frac{\partial w}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - k_w w \delta w \right) \end{array} \right) \end{array} \right) dxdt \quad (3.118)$$

Yukarıdaki denklemden ve şekil fonksiyonlarından rijitlik ve kütle matrisleri aşağıdaki formüllerle ifade edilir.

$$K_u = \int_0^L A_1 \left( \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} dx \quad (3.119)$$

$$K_{uw1} = - \int_0^L B_1 \left( \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.120)$$

$$K_{uw2} = - \int_0^L B_1 \left( \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} dx \quad (3.121)$$

$$K_w = \int_0^L D_1 \left( \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.122)$$

$$K_{Winkler}^k = \int_0^L k_w [\phi_w]^T [\phi_w] dx \quad (3.123)$$

$$K_{Pasternak}^k = \int_0^L k_g \left( \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx \quad (3.124)$$

$$M_u^k = \int_0^L I_0 [\phi_u]^T [\phi_u] dx \quad (3.125)$$

$$M_{w1}^k = \int_0^L I_0 [\phi_w]^T [\phi_w] dx \quad (3.126)$$

$$M_{w2}^k = \int_0^L I_2 \left( \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx \quad (3.127)$$

$$M_{uw1}^k = - \int_0^L I_1 [\phi_u]^T \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} dx \quad (3.128)$$

$$M_{uw2}^k = - \int_0^L I_1 \left( \frac{\partial[\phi_w]}{\partial x} \right)^T [\phi_u] dx \quad (3.129)$$

$$M_u^{nl} = (e_0 a)^2 \int_0^L I_0 \left( \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial[\phi_u]}{\partial x} dx \quad (3.130)$$

$$M_{w1}^{nl} = - (e_0 a)^2 \int_0^L I_0 [\phi_w]^T \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.131)$$

$$M_{w2}^{nl} = (e_0 a)^2 \int_0^L I_2 \left( \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2[\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.132)$$

$$M_{uw1}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \left( \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.133)$$

$$M_{uw2}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} dx \quad (3.134)$$

$$K_{winkler}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L k_w ([\phi_w])^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.135)$$

$$K_{pasternak}^{nl} = (e_0 a)^2 \int_0^L k_g \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx \quad (3.136)$$

Görüldüğü üzere klasik rijitlik matrisleri ve klasik kütle matrisleri aynıdır, bunlara ek olarak yerel olmayan boyut parametresini  $((e_0 a)^2)$  içeren rijitlik ve kütle matrisleri gelmektedir. Yerel olmayan matrisler ise şu şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} M_u^{nl} &= (e_0 a)^2 \int_0^L I_0 \left( \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} dx \\ &= (e_0 a)^2 \int_0^L I_0 \begin{bmatrix} \phi'_{u1} \phi'_{u1} & \phi'_{u1} \phi'_{u2} \\ \phi'_{u2} \phi'_{u1} & \phi'_{u2} \phi'_{u2} \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$M_u^{nl} = (e_0 a)^2 \begin{bmatrix} \frac{I_0}{L} & \frac{-I_0}{L} \\ \frac{-I_0}{L} & \frac{I_0}{L} \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} M_{w1}^{nl} &= -(e_0 a)^2 \int_0^L I_0 [\phi_w]^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx \\ &= -(e_0 a)^2 \int_0^L I_0 \begin{bmatrix} \phi_{w1} \phi''_{w1} & \phi_{w1} \phi''_{w2} & \phi_{w1} \phi''_{w3} & \phi_{w1} \phi''_{w4} \\ \phi_{w2} \phi''_{w1} & \phi_{w2} \phi''_{w2} & \phi_{w2} \phi''_{w3} & \phi_{w2} \phi''_{w4} \\ \phi_{w3} \phi''_{w1} & \phi_{w3} \phi''_{w2} & \phi_{w3} \phi''_{w3} & \phi_{w3} \phi''_{w4} \\ \phi_{w4} \phi''_{w1} & \phi_{w4} \phi''_{w2} & \phi_{w4} \phi''_{w3} & \phi_{w4} \phi''_{w4} \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$M_{w1}^{nl} = -(e_0 a)^2 I_0 \begin{bmatrix} \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{-2L}{15} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$M_{w2}^{nl} = (e_0 a)^2 \int_0^L I_2 \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx$$

$$= (e_0 a)^2 \int_0^L I_2 \begin{bmatrix} \phi_{w1}'' \phi_{w1}'' & \phi_{w1}'' \phi_{w2}'' & \phi_{w1}'' \phi_{w3}'' & \phi_{w1}'' \phi_{w4}'' \\ \phi_{w2}'' \phi_{w1}'' & \phi_{w2}'' \phi_{w2}'' & \phi_{w2}'' \phi_{w3}'' & \phi_{w2}'' \phi_{w4}'' \\ \phi_{w3}'' \phi_{w1}'' & \phi_{w3}'' \phi_{w2}'' & \phi_{w3}'' \phi_{w3}'' & \phi_{w3}'' \phi_{w4}'' \\ \phi_{w4}'' \phi_{w1}'' & \phi_{w4}'' \phi_{w2}'' & \phi_{w4}'' \phi_{w3}'' & \phi_{w4}'' \phi_{w4}'' \end{bmatrix} dx \quad (3.141)$$

$$M_{w2}^{nl} = (e_0 a)^2 \frac{I_2}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$M_{uw1}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \left( \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} dx$$

$$= -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \begin{bmatrix} \phi_{u1}' \phi_{w1}'' & \phi_{u1}' \phi_{w2}'' & \phi_{u1}' \phi_{w3}'' & \phi_{u1}' \phi_{w4}'' \\ \phi_{u2}' \phi_{w1}'' & \phi_{u2}' \phi_{w2}'' & \phi_{u2}' \phi_{w3}'' & \phi_{u2}' \phi_{w4}'' \end{bmatrix} dx \quad (3.143)$$

$$M_{uw1}^{nl} = -(e_0 a)^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{I_1}{L} & 0 & \frac{-I_1}{L} \\ 0 & \frac{-I_1}{L} & 0 & \frac{I_1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$M_{uw2}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial [\phi_u]}{\partial x} dx$$

$$= -(e_0 a)^2 \int_0^L I_1 \begin{bmatrix} \phi''_{w1} \phi'_{u1} & \phi''_{w1} \phi'_{u2} \\ \phi''_{w2} \phi'_{u1} & \phi''_{w2} \phi'_{u2} \\ \phi''_{w3} \phi'_{u1} & \phi''_{w3} \phi'_{u2} \\ \phi''_{w4} \phi'_{u1} & \phi''_{w4} \phi'_{u2} \end{bmatrix} dx \quad (3.145)$$

$$M_{uw2}^{nl} = -(e_0 a)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{I_1}{L} & \frac{-I_1}{L} \\ 0 & 0 \\ \frac{-I_1}{L} & \frac{I_1}{L} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

$$K_{winkler}^{nl} = -(e_0 a)^2 \int_0^L k_w ([\phi_w])^T \left[ \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right] dx$$

$$= -(e_0 a)^2 \int_0^L k_w \begin{bmatrix} \phi_{w1} \phi''_{w1} & \phi_{w1} \phi''_{w2} & \phi_{w1} \phi''_{w3} & \phi_{w1} \phi''_{w4} \\ \phi_{w2} \phi''_{w1} & \phi_{w2} \phi''_{w2} & \phi_{w2} \phi''_{w3} & \phi_{w2} \phi''_{w4} \\ \phi_{w3} \phi''_{w1} & \phi_{w3} \phi''_{w2} & \phi_{w3} \phi''_{w3} & \phi_{w3} \phi''_{w4} \\ \phi_{w4} \phi''_{w1} & \phi_{w4} \phi''_{w2} & \phi_{w4} \phi''_{w3} & \phi_{w4} \phi''_{w4} \end{bmatrix} dx \quad (3.147)$$

$$K_{Winkler}^{nl} = -(e_0 a)^2 k_w \begin{bmatrix} \frac{-6}{5L} & \frac{-1}{10} & \frac{6}{5L} & \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-2L}{15} & \frac{1}{10} & \frac{L}{30} \\ \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{L}{30} & \frac{1}{10} & \frac{-2L}{15} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$K_{pasternak}^{nl} = (e_0 a)^2 \int_0^L k_g \left( \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right)^T \left[ \frac{\partial^2 [\phi_w]}{\partial x^2} \right] dx$$



$$= (e_0 a)^2 \int_0^L k_g \begin{bmatrix} \phi''_{w1} \phi''_{w1} & \phi''_{w1} \phi''_{w2} & \phi''_{w1} \phi''_{w3} & \phi''_{w1} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w2} \phi''_{w1} & \phi''_{w2} \phi''_{w2} & \phi''_{w2} \phi''_{w3} & \phi''_{w2} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w3} \phi''_{w1} & \phi''_{w3} \phi''_{w2} & \phi''_{w3} \phi''_{w3} & \phi''_{w3} \phi''_{w4} \\ \phi''_{w4} \phi''_{w1} & \phi''_{w4} \phi''_{w2} & \phi''_{w4} \phi''_{w3} & \phi''_{w4} \phi''_{w4} \end{bmatrix} dx \quad (3.149)$$

$$K_{Pasternak}^{nl} = (e_0 a)^2 \frac{k_g}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Nanokirişin titreşimini bulmak için aşağıdaki özdeğer probleminin çözülmesi gerekmektedir.

$$\left| K_T - \omega^2 M_T \right| = 0 \quad (3.151)$$

Burada  $K_T$  toplam rijitlik matrisini,  $M_T$  toplam kütle matrisini ve  $\omega$  açısal frekansı ifade etmektedir.

#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde farklı sınır koşullarındaki FD nanokirişlerin frekans değerleri önceki bölümlerde elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri yardımıyla ve sonuçta oluşturulan özdeğer problemi ile bulunmuştur. Bu tez çalışması kapsamında Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2’de mekanik ve geometrik özellikleri verilen FD nanokirişin titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. 50 eşit parçaya ayrılan FD nanokirişin titreşim analizi MATLAB’de yazılan program ile gerçekleştirilmiştir. FD nanokirişin alümina ( $Al_2O_3$ ) ve çelikten oluştuğu varsayılmıştır. Nanokirişin en üst yüzeyi tamamen seramik, en alt yüzeyi tamamen metal özellikleri taşımaktadır. Frekans değerleri elde edilirken Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve yerel olmayan elastisite teorisi temel alınmıştır. Küçük deformasyonlar ihmal edilmiştir. İncelenen FD nanokirişin çökme ve dönme deformasyonlarının olduğu, boyuna yerdeğiştirme yapmadığı varsayılmıştır. Ayrıca dönel atalet momenti de Euler-Bernoulli kiriş teorisi içerisinde yer almadığından hesaplara dahil edilmemiştir. Boyutsuz yerel olmayan parametre ( $e_0a/L$ ), kuvvet kuralı üssü ( $k$ ), sınır şartları, boyutsuz Winkler zemin parametresi ( $KW$ ) ve boyutsuz Pasternak zemin parametresinin ( $KG$ ) FD nanokirişin frekansları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Çözümlerde kullanılan boyutsuz Winkler ve Pasternak zemin parametreleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$KW = \frac{k_w L^4}{E_A I} \quad (4.1)$$

$$KG = \frac{k_g L^2}{E_A I} \quad (4.2)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (4.3)$$

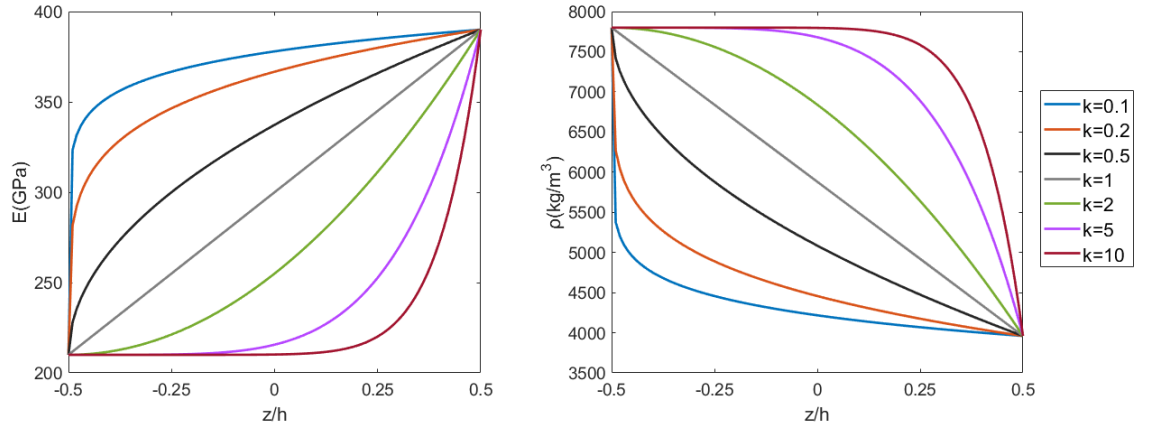
**Çizelge 4.1.** Alümina/Çelik FD nanokirişini oluşturan malzemelerin mekanik özellikleri (Eltaher ve ark. 2012)

Alümina ( $Al_2O_3$ )	
Malzeme Türü	Seramik
E (GPa)	390
$\rho$ ( $kg/cm^3$ )	3960
Çelik	
Malzeme Türü	Metal
E (GPa)	210
$\rho$ ( $kg/cm^3$ )	7800

**Çizelge 4.2.** Alümina/Çelik FD nanokirişinin geometrik özellikleri

$b$ (genişlik)	100 nm
$h=2b$ (yükseklik)	200 nm
$L=100h$ (uzunluk)	20000 nm
$eo/L$ (boyutsuz yerel olmayan parametre)	0 – 0,5

Şekil 4.1’de Alümina/Çelik FD nanokirişinin elastisite modülü ve yoğunluğunun  $z/h$  ile değişimi gösterilmiştir.



**Şekil 4.1.** Alümina/Çelik FD nanokirişinin elastisite modülü ve yoğunluğunun  $z/h$  ile değişimi

İlk olarak, yapılan çözümlerin doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için literatürde mevcut çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır ve bu karşılaştırmalar Çizelgeler 4.3 – 4.6’da gösterilmiştir. Bu tez çalışmasında kurulan model ile bulunan sonuçlar ve önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlar arasında çok iyi bir uyum sağlanmıştır.

Çizelge 4.3’te Rao (2007) tarafından B - B sınır şartına sahip homojen bir Euler–Bernoulli kirişi için bulunan sonuçlarla bu çalışmada bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**Çizelge 4.3.** B – B sınır şartına sahip homojen kirişin ilk üç moddaki frekanslarının karşılaştırılması

$\omega$ (rad/sn)	Rao (2007)	Bu çalışma
$\omega_1$	703,0149	702,992
$\omega_2$	2812,0598	2811,9973
$\omega_3$	6327,1348	6326,9984

Çizelge 4.4’te Eltaher ve ark. (2012) ve Ebrahimi ve ark. (2015) tarafından yapılan çalışmalardaki boyutsuz frekans değerleri, bu çalışmada bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. FD nanokirişin en üst yüzeyi tamamen seramik en alt yüzeyi ise tamamen metal özelliklerini taşımaktadır. B - B sınır şartı için gösterilen sonuçlarda kirişin atalet momenti  $I = bh^3/12$  olmak üzere boyutsuz frekans ( $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho_U A / E_U I}$ ) değerleri sunulmuştur.

**Çizelge 4.4.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması

$k = 0,1$				
$(e_0 a/L)^2$ (* $10^{-2}$ )	Eltaher ve ark. (2012)	Ebrahimi ve ark. (2015)		Bu çalışma
		DTM	Analitik	
0	9,2045	9,1968	9,1968	9,2045
1	8,7815	8,7740	8,7740	8,7814
2	8,4116	8,4047	8,4047	8,4117
3	8,0848	8,0783	8,0783	8,0851
4	7,7934	7,7873	7,7873	7,7938
5	7,5313	7,5256	7,5256	7,5318

Çizelge 4.5 - 4.6’da Demir ve Civalek (2017) tarafından yapılan çalışmadaki sonuçlarla bu çalışmada bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır. Zemin üzerine oturan B – B ve A – A sınır şartlarına sahip nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekans ( $\bar{\omega}^4 = \rho AL^4 \omega^2 / EI$ ) değerleri bu çalışmada elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır.

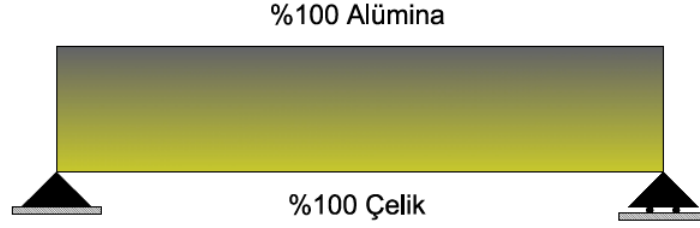
**Çizelge 4.5.** Zemin üzerine oturan homojen nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (B – B)

B - B		KW-KG			
		0-0	0-5	100-0	100-5
$e_0a/L = 0$	Demir ve Civalek (2017)	3,1416	3,4806	3,7484	3,9634
	Bu çalışma	3,1416	3,4806	3,7484	3,9634
$e_0a/L = 0,1$	Demir ve Civalek (2017)	3,0685	3,4275	3,7061	3,9278
	Bu çalışma	3,0685	3,4275	3,7061	3,9278
$e_0a/L = 0,2$	Demir ve Civalek (2017)	2,8908	3,3041	3,6100	3,8477
	Bu çalışma	2,8908	3,3041	3,6100	3,8477

**Çizelge 4.6.** Zemin üzerine oturan homojen nanokirişin birinci moddaki boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (A - A)

A - A		KW-KG			
		0-0	0-5	100-0	100-5
$e_0a/L = 0$	Demir ve Civalek (2017)	4,7300	4,8687	4,9504	5,0722
	Bu çalışma	4,7300	4,8687	4,9504	5,0722
$e_0a/L = 0,1$	Demir ve Civalek (2017)	4,5945	4,7817	4,8330	4,9956
	Bu çalışma	4,5945	4,7817	4,8330	4,9956
$e_0a/L = 0,2$	Demir ve Civalek (2017)	4,2766	4,5880	4,5656	4,8274
	Bu çalışma	4,2766	4,5880	4,5656	4,8274

Çizelge 4.7’de zemin üzerine oturmayan B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli yerel olmayan boyutsuz parametre  $e_0a/L$  ve kuvvet kuralı üssü  $k$  değerlerindeki ilk 5 moda ait frekansları verilmiştir. Frekanslar,  $k$  için 0’den 10’a kadar çeşitli değerler alınırken  $e_0a/L$  için 0’dan 0,5’e kadar çeşitli değerler alınarak hesaplanmıştır.



**Şekil 4.2.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi

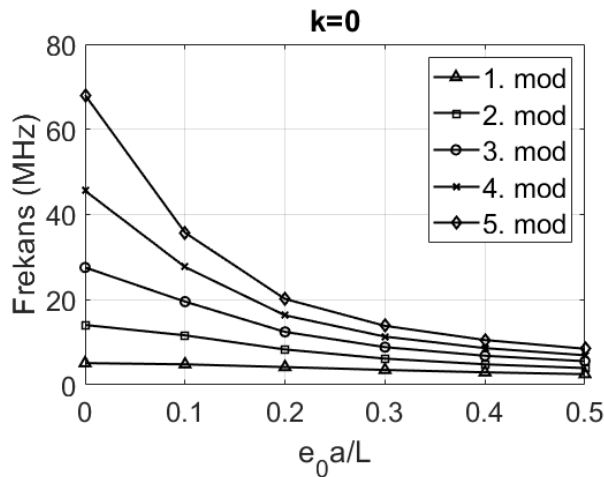
**Çizelge 4.7.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $k$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0	$i = 1$	2,2500	1,9866	1,4911	1,3700	1,3008
	$i = 2$	9,0000	7,9466	5,9643	5,4800	5,2030
	$i = 3$	20,2501	17,8798	13,4197	12,3300	11,7068
	$i = 4$	36,0002	31,7864	23,8573	21,9200	20,8121
	$i = 5$	56,2506	49,6664	37,2772	34,2501	32,5190
0,1	$i = 1$	2,1466	1,8953	1,4225	1,3070	1,2410
	$i = 2$	7,6206	6,7286	5,0502	4,6401	4,4056
	$i = 3$	14,7365	13,0116	9,7659	8,9729	8,5193
	$i = 4$	22,4165	19,7926	14,8554	13,6491	12,9592
	$i = 5$	30,2082	26,6723	20,0189	18,3933	17,4637
0,2	$i = 1$	1,9052	1,6822	1,2625	1,1600	1,1014
	$i = 2$	5,6041	4,9481	3,7138	3,4123	3,2398
	$i = 3$	9,4902	8,3794	6,2891	5,7784	5,4864
	$i = 4$	13,3092	11,7513	8,8200	8,1038	7,6942
	$i = 5$	17,0616	15,0645	11,3067	10,3886	9,8635
0,3	$i = 1$	1,6374	1,4457	1,0851	0,9970	0,9466
	$i = 2$	4,2179	3,7242	2,7952	2,5682	2,4384
	$i = 3$	6,7521	5,9618	4,4746	4,1113	3,9035
	$i = 4$	9,2301	8,1497	6,1168	5,6201	5,3360
	$i = 5$	11,6767	10,3100	7,7381	7,1098	6,7504
0,4	$i = 1$	1,4010	1,2370	0,9285	0,8531	0,8099

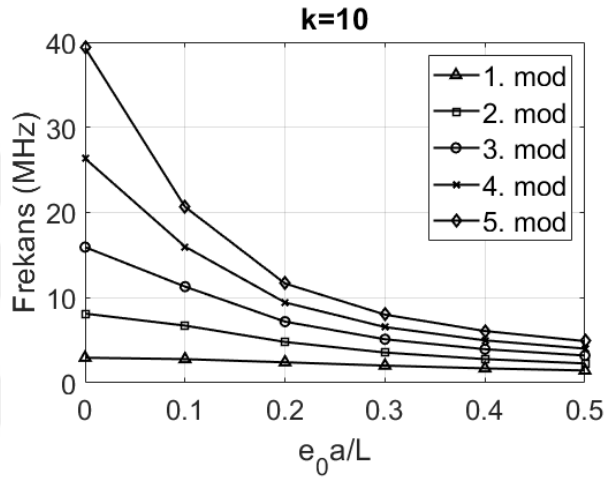
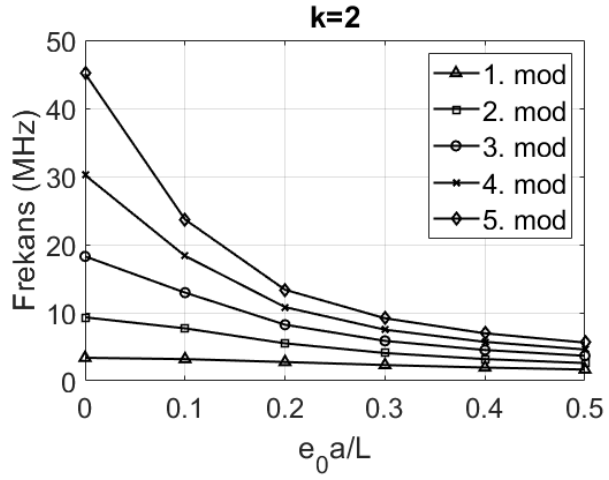
**Çizelge 4.7.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $k$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları (devamı)

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0,4	$i = 2$	3,3273	2,9378	2,2050	2,0259	1,9235
	$i = 3$	5,1919	4,5842	3,4407	3,1613	3,0015
	$i = 4$	7,0244	6,2021	4,6550	4,2770	4,0609
	$i = 5$	8,8413	7,8064	5,8591	5,3833	5,1112
0,5	$i = 1$	1,2083	1,0669	0,8008	0,7357	0,6985
	$i = 2$	2,7298	2,4103	1,8091	1,6622	1,5781
	$i = 3$	4,2036	3,7116	2,7857	2,5595	2,4301
	$i = 4$	5,6584	4,9961	3,7498	3,4453	3,2712
	$i = 5$	7,1047	6,2731	4,7083	4,3259	4,1073

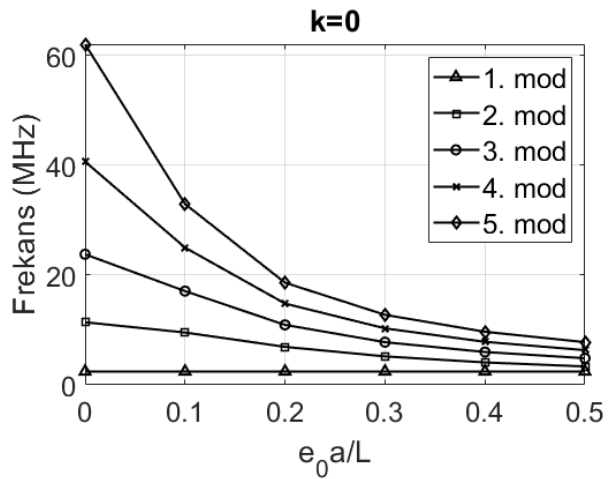
Boyutsuz yerel olmayan parametrenin Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekansları üzerindeki etkileri Şekiller 4.3 – 4.5'te gösterilmiştir. Frekansların  $e_0a/L=0$  değerinde yani klasik durumda en yüksek olduğu,  $e_0a/L=0,5$  değerinde ise en düşük olduğu görülmektedir. Her sınır şartı için  $e_0a/L$ 'nin artmasıyla birlikte frekanslar ilk 5 modun hepsinde giderek azalmaktadır. Ayrıca  $e_0a/L$ 'nin etkisinin 5. modda daha belirgin olduğu, mod numarası azaldıkça  $e_0a/L$ 'nin etkisinin de azaldığı açıkça görülmektedir. Bunlara ek olarak  $e_0a/L$ 'nin artmasıyla modlar arasındaki frekans farkları kapanmaya başlamaktadır.



**Şekil 4.3.** A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0a/L$ 'ye göre değişimi

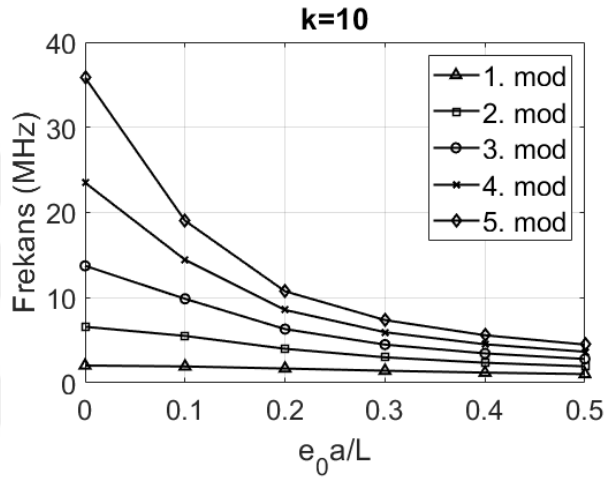
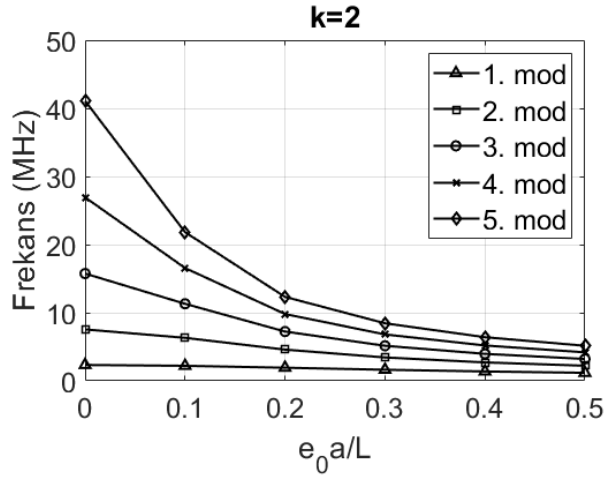


**Şekil 4.3.** A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0a/L$ 'ye göre değişimi (devamı)

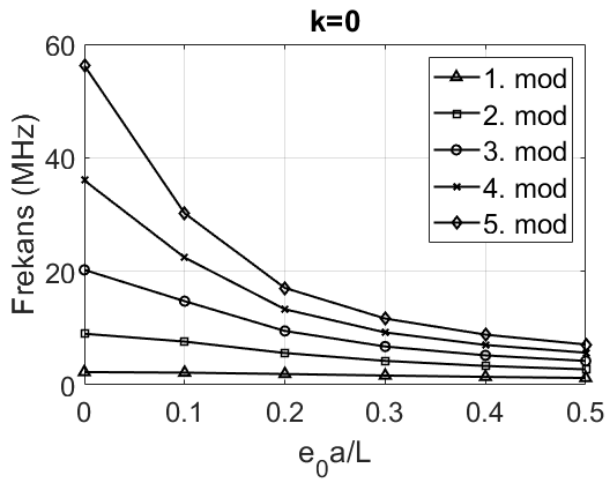


**Şekil 4.4.** A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0a/L$ 'ye göre değişimi

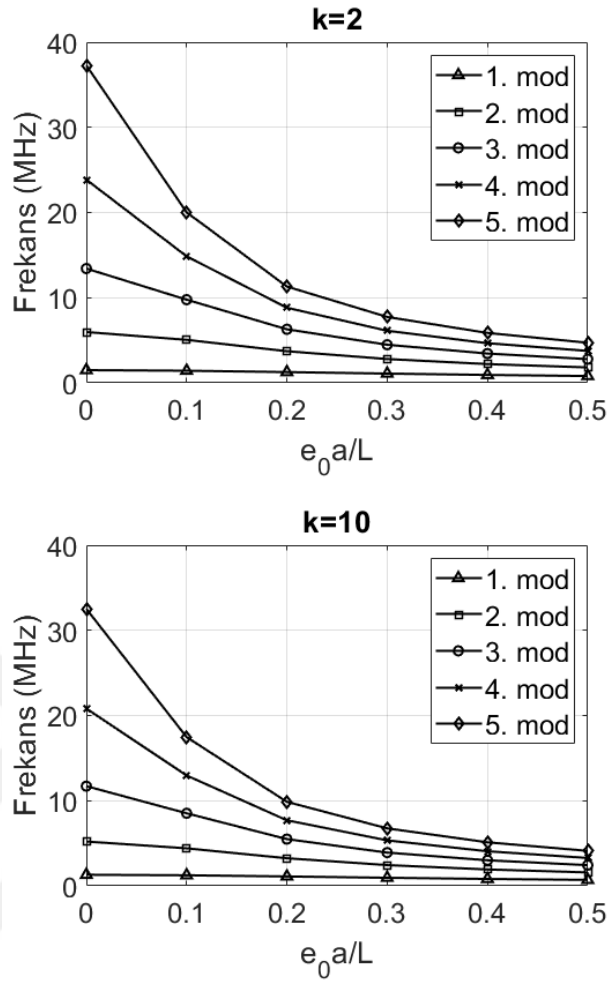




Şekil 4.4. A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0 a/L$ 'ye göre değişimi (devamı)

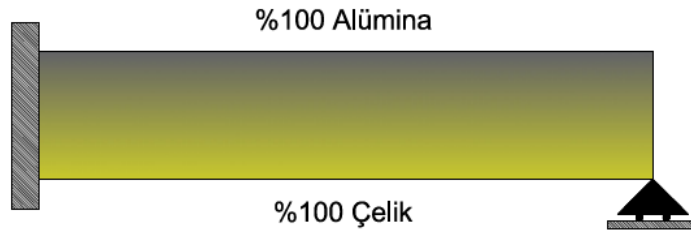


Şekil 4.5. B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0 a/L$ 'ye göre değişimi



**Şekil 4.5.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $e_0a/L$ 'ye göre değişimi (devamı)

Çizelge 4.8'de zemin üzerine oturmayan A – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin aynı şekilde  $k$  için 0'dan 10'a kadar çeşitli değerler alınırken  $e_0a/L$  için 0'dan 0,5'e kadar çeşitli değerler alınarak hesaplanan ilk 5 moda ait frekansları verilmiştir.

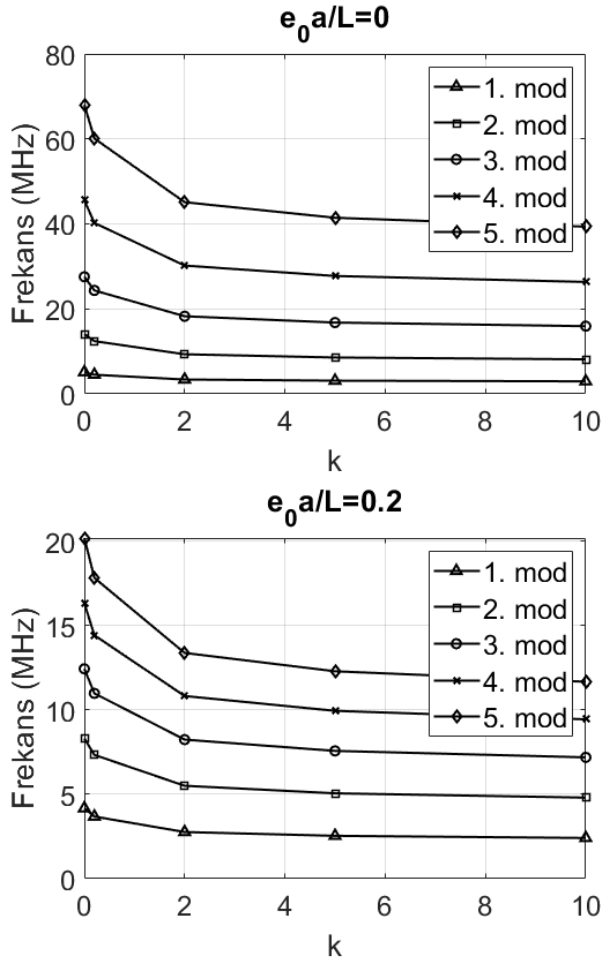


**Şekil 4.6.** A – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi

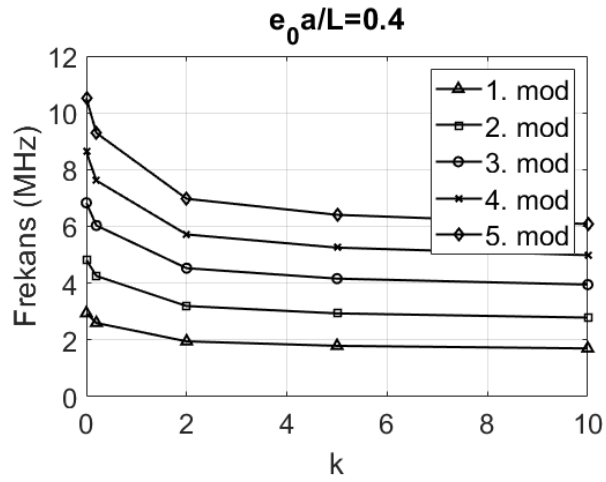
**Çizelge 4.8.** A – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $e_0a/L$  ve  $k$  değerlerindeki frekansları

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0	$i = 1$	3,5149	3,1035	2,3293	2,1402	2,0320
	$i = 2$	11,3907	10,0574	7,5486	6,9356	6,5851
	$i = 3$	23,7657	20,9839	15,7495	14,4706	13,7392
	$i = 4$	40,6409	35,8838	26,9327	24,7456	23,4949
	$i = 5$	62,0163	54,7573	41,0981	37,7608	35,8523
0,1	$i = 1$	3,3282	2,9387	2,2056	2,0265	1,9241
	$i = 2$	9,5281	8,4128	6,3143	5,8015	5,5083
	$i = 3$	17,0642	15,0668	11,3084	10,3902	9,8650
	$i = 4$	24,9848	22,0603	16,5574	15,2129	14,4440
	$i = 5$	32,9258	29,0718	21,8199	20,0480	19,0347
0,2	$i = 1$	2,9057	2,5656	1,9256	1,7692	1,6798
	$i = 2$	6,9160	6,1065	4,5832	4,2111	3,9982
	$i = 3$	10,9182	9,6402	7,2355	6,6479	6,3119
	$i = 4$	14,8001	13,0678	9,8080	9,0116	8,5561
	$i = 5$	18,5949	16,4184	12,3228	11,3222	10,7499
0,3	$i = 1$	2,4569	2,1693	1,6282	1,4960	1,4203
	$i = 2$	5,1800	4,5737	3,4328	3,1540	2,9946
	$i = 3$	7,7676	6,8584	5,1476	4,7296	4,4905
	$i = 4$	10,2774	9,0744	6,8108	6,2578	5,9415
	$i = 5$	12,7461	11,2541	8,4468	7,7609	7,3686
0,4	$i = 1$	2,0759	1,8329	1,3757	1,2640	1,2001
	$i = 2$	4,0814	3,6037	2,7048	2,4851	2,3595
	$i = 3$	5,9791	5,2793	3,9624	3,6406	3,4566
	$i = 4$	7,8318	6,9151	5,1901	4,7687	4,5277
	$i = 5$	9,6626	8,5316	6,4034	5,8834	5,5861
0,5	$i = 1$	1,7745	1,5668	1,1759	1,0805	1,0258
	$i = 2$	3,3485	2,9565	2,2190	2,0388	1,9358
	$i = 3$	4,8459	4,2787	3,2114	2,9506	2,8015
	$i = 4$	6,3151	5,5759	4,1850	3,8452	3,6508
	$i = 5$	7,7711	6,8615	5,1499	4,7317	4,4926

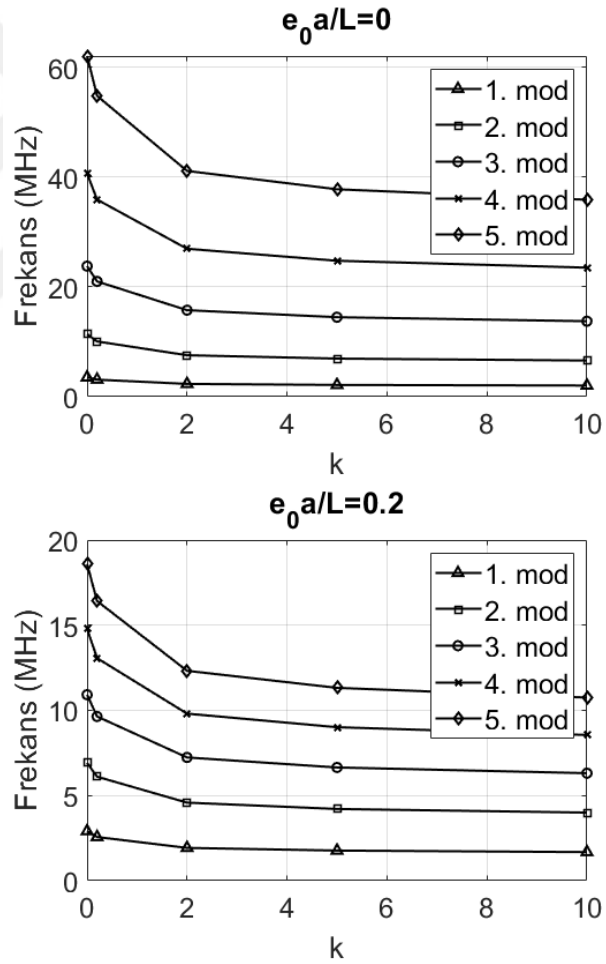
Kuvvet kuralı üssünün Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekansları üzerindeki etkileri Şekiller 4.7 – 4.9’da gösterilmiştir. Frekansların  $k=0$  değerinde en yüksek olduğu,  $k=10$  değerinde ise en düşük olduğu görülmektedir. Her sınır şartı için  $k$ 'nin artmasıyla yani nanokiriş özelliklerinin seramikten metale doğru geçiş göstermesiyle birlikte frekanslar giderek azalmaktadır. Ayrıca, frekansların düşüşünün kabaca  $k$  0’dan 2’ye giderken daha belirgin olduğu, 2 ile 10 arasında ise daha az olduğu söylenebilir.



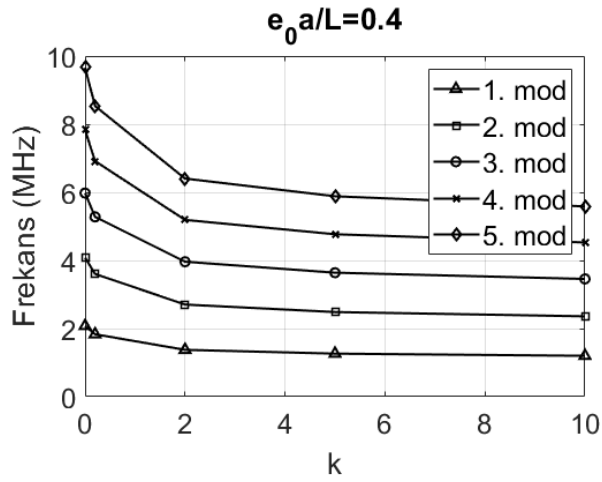
Şekil 4.7. A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi



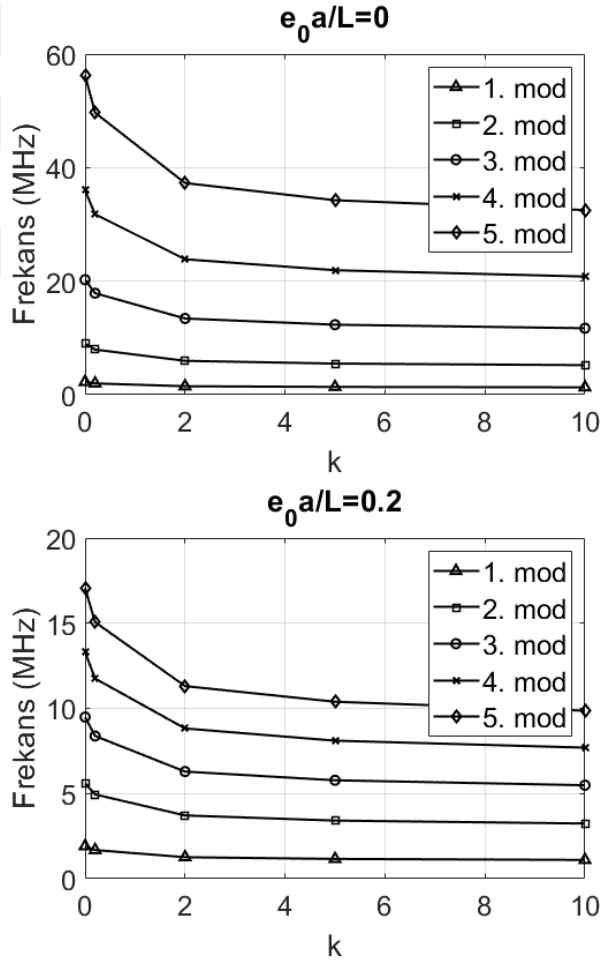
**Şekil 4.7.** A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi (devamı)



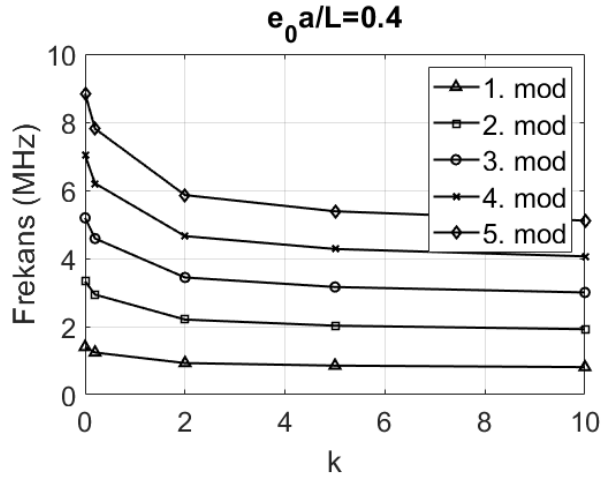
**Şekil 4.8.** A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi



**Şekil 4.8.** A – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi (devamı)

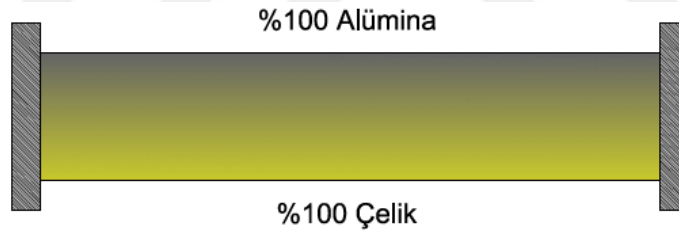


**Şekil 4.9.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi



**Şekil 4.9.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $k$ 'ye göre değişimi (devamı)

Çizelge 4.9'da zemin üzerine oturmayan A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin diğer sınır şartlarında olduğu gibi  $k$  için 0'dan 10'a kadar çeşitli değerler alınırken  $e_0 a/L$  için 0'dan 0,5'e kadar çeşitli değerler alınarak hesaplanan ilk 5 moda ait frekansları verilmiştir.



**Şekil 4.10.** A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişi

**Çizelge 4.9.** A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $e_0 a/L$  ve  $k$  değerlerindeki frekansları

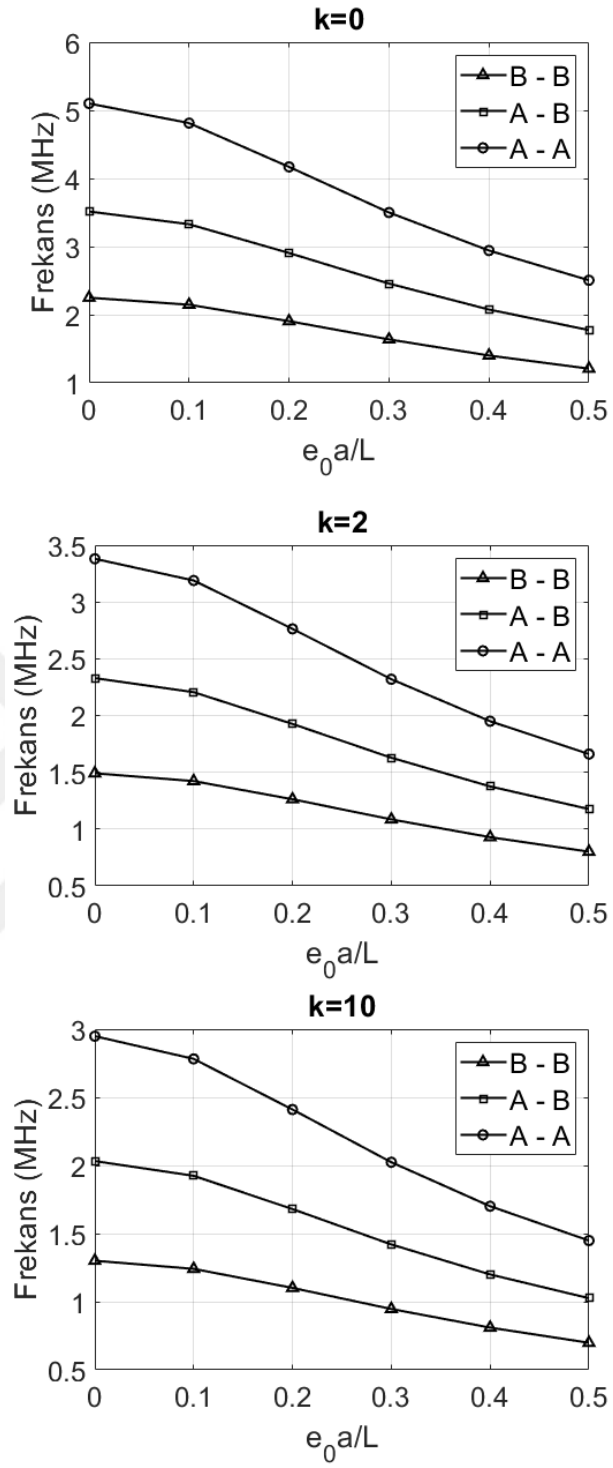
$e_0 a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0	$i = 1$	5,1005	4,5035	3,3801	3,1056	2,9487
	$i = 2$	14,0598	12,4141	9,3174	8,5608	8,1281
	$i = 3$	27,5628	24,3365	18,2658	16,7826	15,9343
	$i = 4$	45,5628	40,2297	30,1944	27,7425	26,3403
	$i = 5$	68,0634	60,0965	45,1055	41,4428	39,3481
0,1	$i = 1$	4,8123	4,2490	3,1891	2,9301	2,7820

**Çizelge 4.9.** A – A sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $e_0a/L$  ve  $k$  değerlerindeki frekanları (devamı)

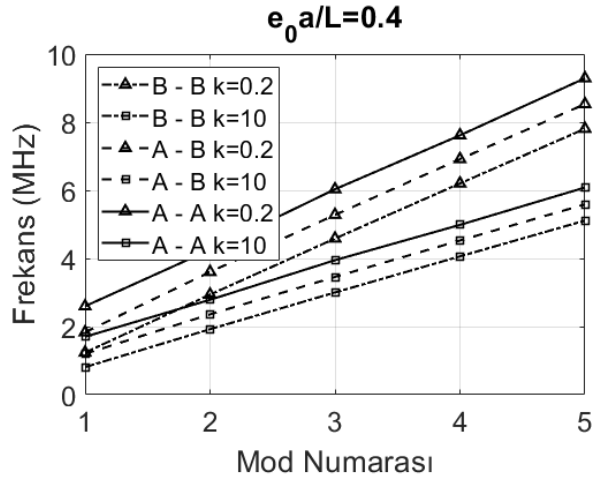
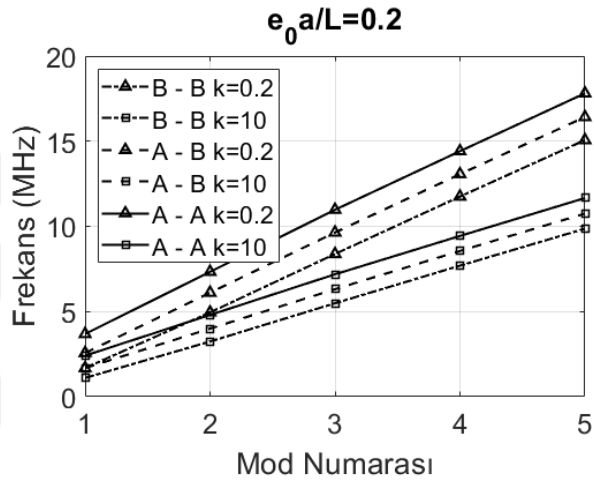
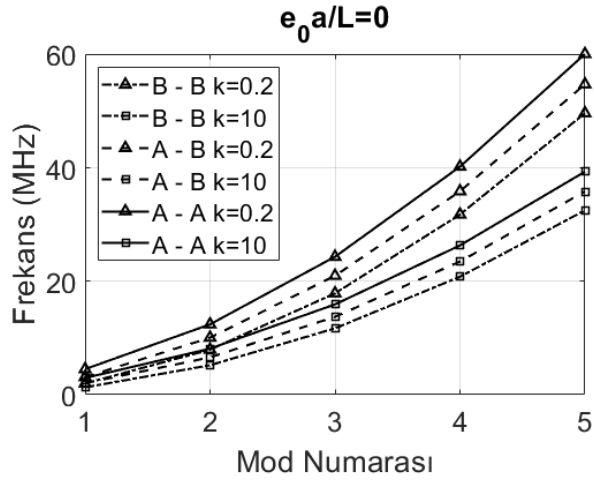
$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
0,1	$i = 2$	11,6228	10,2623	7,7024	7,0770	6,7193
	$i = 3$	19,5411	17,2538	12,9499	11,8983	11,2969
	$i = 4$	27,6642	24,4261	18,3330	16,8443	15,9930
	$i = 5$	35,7331	31,5505	23,6802	21,7573	20,6576
0,2	$i = 1$	4,1695	3,6815	2,7631	2,5387	2,4104
	$i = 2$	8,3037	7,3317	5,5028	5,0560	4,8004
	$i = 3$	12,4300	10,9751	8,2374	7,5685	7,1859
	$i = 4$	16,3259	14,4149	10,8191	9,9406	9,4381
	$i = 5$	20,1729	17,8117	13,3686	12,2830	11,6622
0,3	$i = 1$	3,5002	3,0905	2,3196	2,1312	2,0235
	$i = 2$	6,1557	5,4351	4,0793	3,7481	3,5587
	$i = 3$	8,8531	7,8169	5,8670	5,3905	5,1181
	$i = 4$	11,3251	9,9995	7,5051	6,8957	6,5471
	$i = 5$	13,8542	12,2326	9,1812	8,4356	8,0093
0,4	$i = 1$	2,9419	2,5976	1,9496	1,7913	1,7008
	$i = 2$	4,8193	4,2552	3,1938	2,9344	2,7861
	$i = 3$	6,8307	6,0311	4,5267	4,1591	3,9489
	$i = 4$	8,6238	7,6143	5,7150	5,2509	4,9855
	$i = 5$	10,5212	9,2897	6,9724	6,4062	6,0824
0,5	$i = 1$	2,5057	2,2124	1,6606	1,5257	1,4486
	$i = 2$	3,9378	3,4769	2,6096	2,3977	2,2765
	$i = 3$	5,5472	4,8979	3,6761	3,3776	3,2069
	$i = 4$	6,9497	6,1362	4,6056	4,2316	4,0177
	$i = 5$	8,4726	7,4809	5,6148	5,1589	4,8981

Şekiller 4.11 – 4.12’de Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekanslarının  $e_0a/L$ ’ye göre ve mod numarasına göre değişimleri farklı sınır şartları için sunulmuştur. A – A sınır şartına sahip FD nanokirişin frekansları en yüksek değerlere sahipken B – B sınır şartındaki frekansları en düşük değerlere sahiptir.

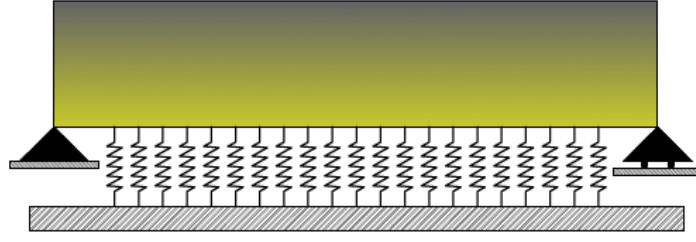




**Şekil 4.11.** Çeşitli sınır şartlarına sahip FD nanokirişlerin frekanslarının  $e_0 a/L$ 'ye göre değişimi (1. mod)



**Şekil 4.12.** Çeşitli sınır şartlarına sahip FD nanokirişlerin frekanslarının mod numarasına göre değişimi



**Şekil 4.13.** Winkler zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi

Zeminin frekanslar üzerindeki etkisi B – B sınır şartı ile gösterilmiştir. Sadece  $KW$  değerinin olduğu durumlar Winkler zemin modeli, hem  $KW$  hem de  $KG$  değerlerinin olduğu durumlar ise Winkler-Pasternak zemin modeline ait sonuçları vermektedir.

Şekil 4.13'te Winkler zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi gösterilmiştir. Çizelge 4.10'da Winkler zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KW$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları verilmiştir. Frekanslar,  $KW$  için 200'den 800'e kadar çeşitli değerler alınırken  $e_0a/L$  için 0'dan 0,5'e kadar çeşitli değerler alınarak hesaplanmıştır.

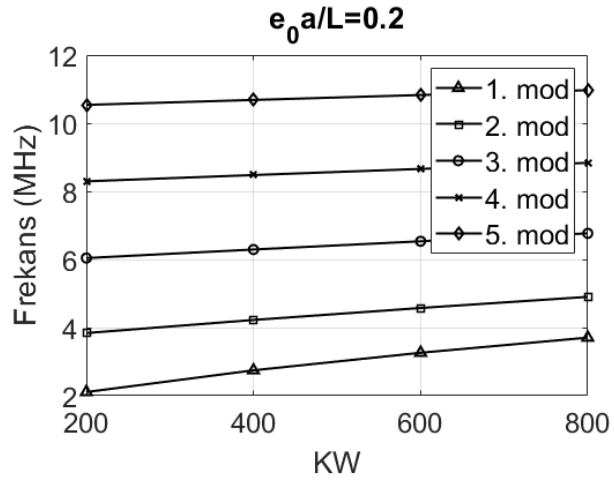
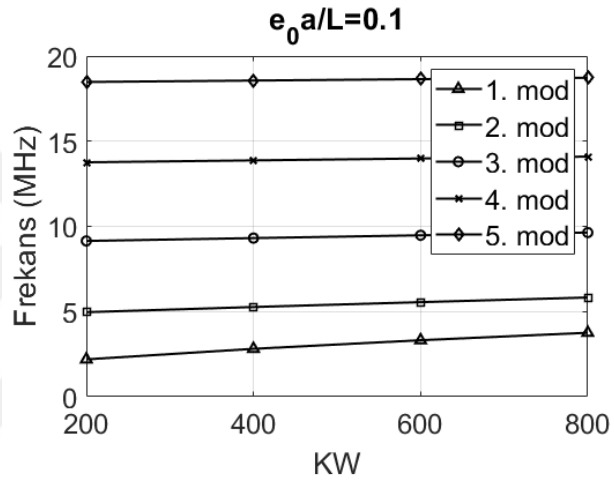
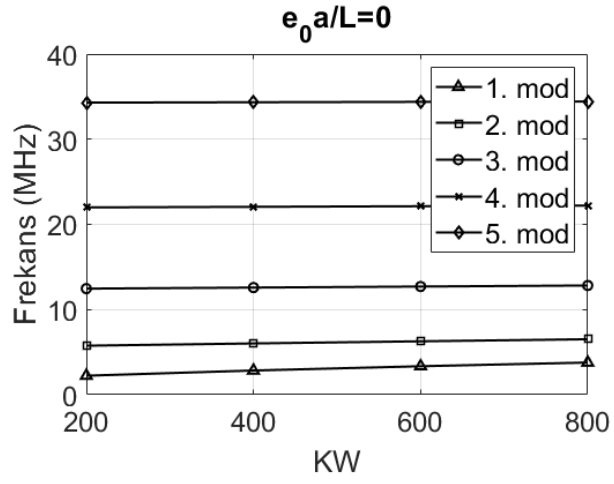
**Çizelge 4.10.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KW$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları ( $k=5$ )

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$KW = 200$	$KW = 400$	$KW = 600$	$KW = 800$
0	$i = 1$	2,2299	2,8404	3,3412	3,7761
	$i = 2$	5,7555	6,0184	6,2703	6,5125
	$i = 3$	12,4549	12,5785	12,7010	12,8223
	$i = 4$	21,9905	22,0608	22,1308	22,2006
	$i = 5$	34,2953	34,3404	34,3854	34,4304
0,1	$i = 1$	2,1918	2,8106	3,3159	3,7537
	$i = 2$	4,9625	5,2651	5,5513	5,8234
	$i = 3$	9,1437	9,3115	9,4762	9,6382
	$i = 4$	13,7620	13,8740	13,9851	14,0954
	$i = 5$	18,4773	18,5609	18,6441	18,7269
0,2	$i = 1$	2,1074	2,7453	3,2607	3,7051
	$i = 2$	3,8391	4,2231	4,5749	4,9016

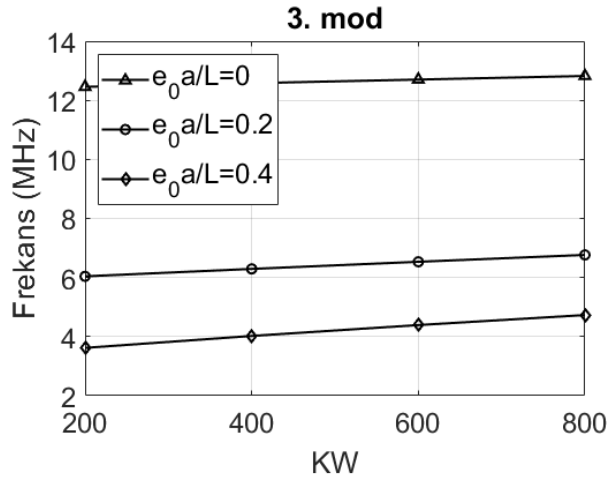
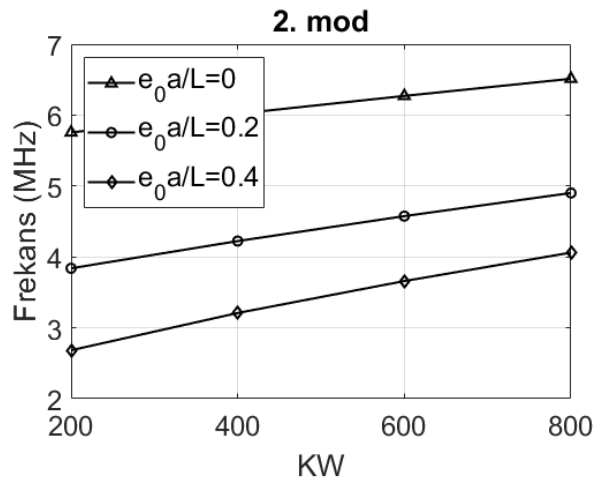
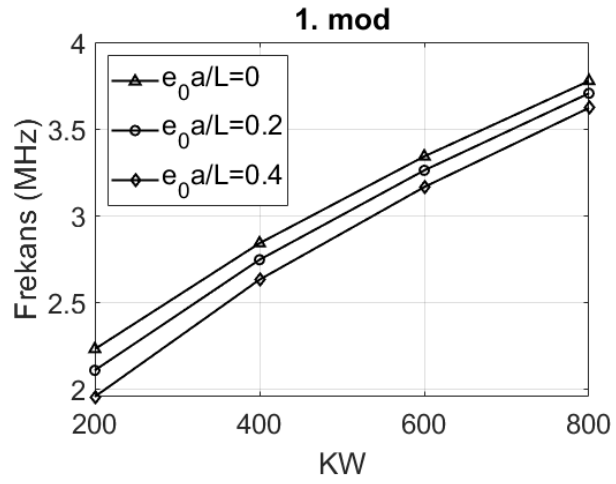
**Çizelge 4.10.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KW$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları ( $k=5$ ) (devamı)

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$KW = 200$	$KW = 400$	$KW = 600$	$KW = 800$
0,2	$i = 3$	6,0404	6,2914	6,5328	6,7655
	$i = 4$	8,2926	8,4772	8,6578	8,8348
	$i = 5$	10,5365	10,6824	10,8263	10,9683
0,3	$i = 1$	2,0223	2,6805	3,2063	3,6573
	$i = 2$	3,1131	3,5758	3,9852	4,3563
	$i = 3$	4,4719	4,8056	5,1175	5,4115
	$i = 4$	5,8891	6,1463	6,3931	6,6308
	$i = 5$	7,3242	7,5326	7,7353	7,9329
0,4	$i = 1$	1,9553	2,6304	3,1645	3,6208
	$i = 2$	2,6833	3,2087	3,6594	4,0604
	$i = 3$	3,6179	4,0230	4,3909	4,7303
	$i = 4$	4,6248	4,9481	5,2516	5,5385
	$i = 5$	5,6635	5,9305	6,1860	6,4314
0,5	$i = 1$	1,9070	2,5947	3,1349	3,5949
	$i = 2$	2,4204	2,9923	3,4712	3,8916
	$i = 3$	3,1059	3,5696	3,9797	4,3512
	$i = 4$	3,8686	4,2499	4,5996	4,9247
	$i = 5$	4,6700	4,9905	5,2915	5,5764

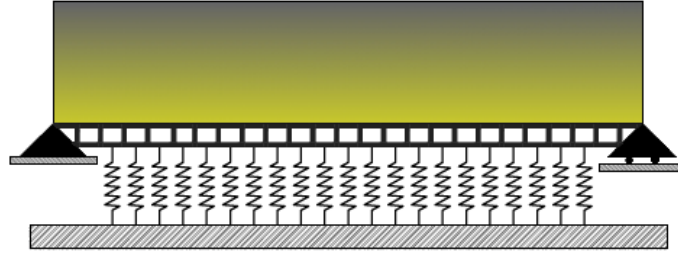
Boyutsuz Winkler zemin parametresinin Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekansları üzerindeki etkisi Şekil 4.14 – 4.15'te gösterilmiştir.  $KW$ 'nin artmasıyla birlikte frekanslar da giderek artmaktadır. Frekanslardaki bu artış ilk 5 modun hepsi için geçerlidir. Şekil 4.14'ten  $KW$ 'nin etkisinin 1. modda daha belirgin olduğu, mod sayısı arttıkça  $KW$ 'nin etkisinin de azaldığı açıkça görülmektedir. Sonuçlardan ayrıca  $KW$ 'nin etkisinin  $e_0a/L=0$  değerinde yani klasik durumda daha az olduğu,  $e_0a/L$  değerinin artmasıyla  $KW$ 'nin frekanslar üzerindeki etkisinin de arttığı görülmektedir.



**Şekil 4.14.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekanslarının  $KW$ 'ye göre değişimi ( $k=5$ )



**Şekil 4.15.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin farklı  $e_0 a/L$  için frekanslarının  $KW$ 'ye göre değişimi ( $k=5$ )



**Şekil 4.16.** Winkler-Pasternak zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi

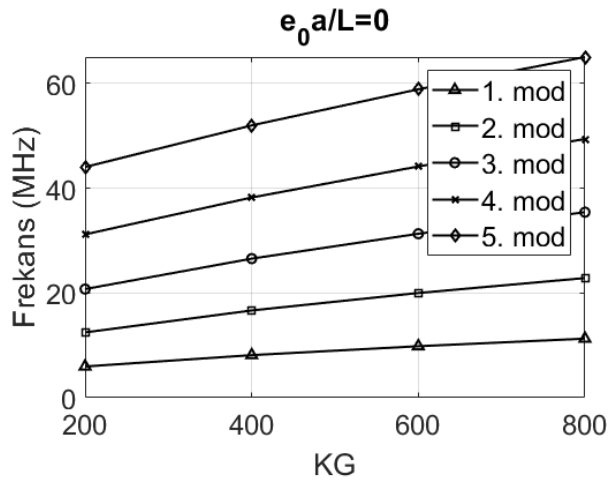
Şekil 4.16’da Winkler-Pasternak zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişi gösterilmiştir. Çizelge 4.11’de Winkler-Pasternak zemini üzerindeki Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KG$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları verilmiştir. Frekanslar,  $KW=200$  sabit değerinde olmak üzere  $KG$  için 200’den 800’e kadar çeşitli değerler alınırken  $e_0a/L$  için 0’dan 0,5’e kadar çeşitli değerler alınarak hesaplanmıştır. Boyutsuz Pasternak zemin parametresinin Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekansları üzerindeki etkisi Şekil 4.17’de gösterilmiştir.  $KG$ ’nin artmasıyla birlikte frekanslar da giderek artmaktadır. Frekanslardaki bu artış ilk 5 modun hepsi için geçerlidir.

**Çizelge 4.11. B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KG$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları ( $KW=200$ ,  $k=5$ )**

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$KG = 200$	$KG = 400$	$KG = 600$	$KG = 800$
0	$i = 1$	5,9602	8,1287	9,8299	11,2774
	$i = 2$	12,4632	16,6595	19,9936	22,8463
	$i = 3$	20,7386	26,5529	31,3053	35,4258
	$i = 4$	31,1835	38,2261	44,1595	49,3851
	$i = 5$	44,0450	51,9976	58,8858	65,0487
0,1	$i = 1$	5,9460	8,1183	9,8213	11,2699
	$i = 2$	12,1175	16,4024	19,7799	22,6595
	$i = 3$	18,9360	25,1702	30,1414	34,4016
	$i = 4$	26,0427	34,1621	40,6925	46,3110
	$i = 5$	33,2447	43,2320	51,3109	58,2804
0,2	$i = 1$	5,9155	8,0960	9,8029	11,2538
	$i = 2$	11,7024	16,0982	19,5284	22,4403
	$i = 3$	17,6480	24,2160	29,3493	33,7098

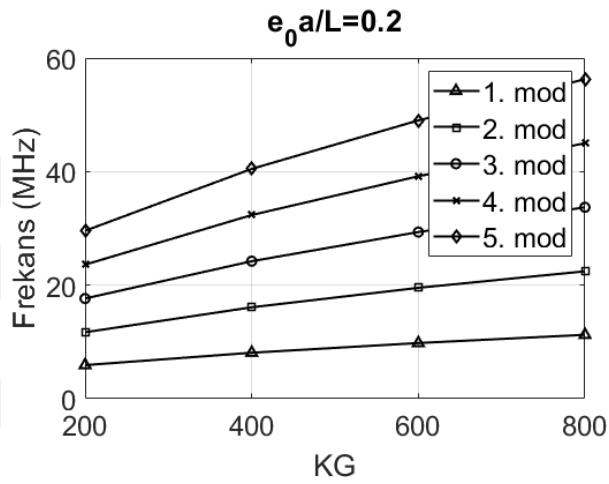
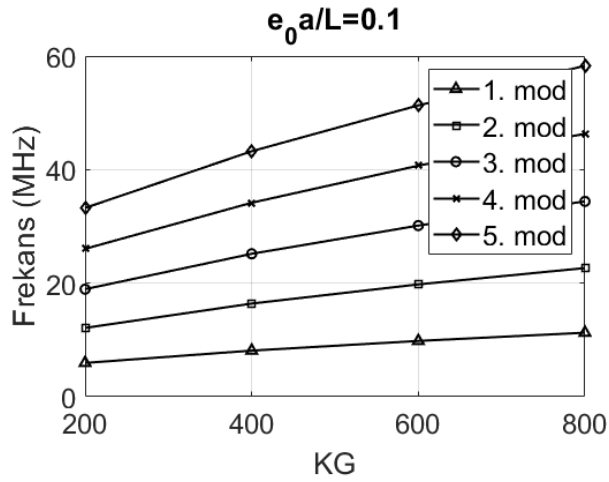
**Çizelge 4.11.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $KG$  ve  $e_0a/L$  değerlerindeki frekansları ( $KW=200$ ,  $k=5$ ) (devamı)

$e_0a/L$	$\omega_i$ (MHz)	$KG = 200$	$KG = 400$	$KG = 600$	$KG = 800$
0,2	$i = 4$	23,6135	32,3485	39,1823	44,9898
	$i = 5$	29,5773	40,4799	49,0145	56,2692
0,3	$i = 1$	5,8857	8,0742	9,7849	11,2382
	$i = 2$	11,4847	15,9407	19,3987	22,3275
	$i = 3$	17,1745	23,8732	29,0671	33,4643
	$i = 4$	22,8803	31,8173	38,7449	44,6094
	$i = 5$	28,5910	39,7649	48,4257	55,7571
0,4	$i = 1$	5,8630	8,0577	9,7713	11,2263
	$i = 2$	11,3757	15,8623	19,3344	22,2717
	$i = 3$	16,9722	23,7281	28,9480	33,3609
	$i = 4$	22,5880	31,6077	38,5730	44,4602
	$i = 5$	28,2113	39,4928	48,2025	55,5633
0,5	$i = 1$	5,8471	8,0461	9,7618	11,2180
	$i = 2$	11,3166	15,8200	19,2997	22,2415
	$i = 3$	16,8705	23,6554	28,8885	33,3093
	$i = 4$	22,4454	31,5059	38,4897	44,3879
	$i = 5$	28,0288	39,3626	48,0959	55,4709



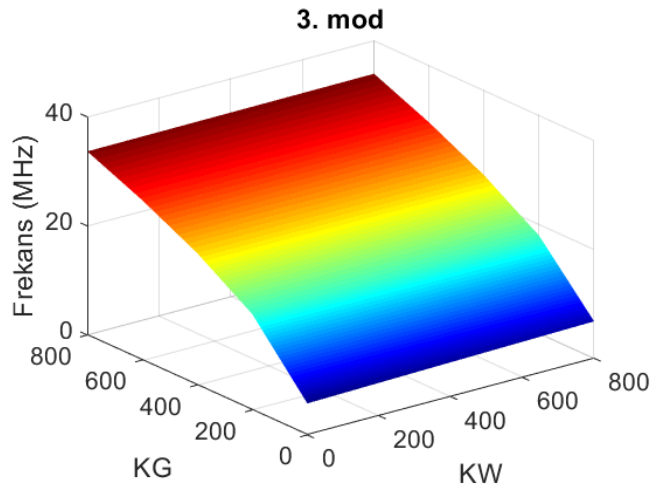
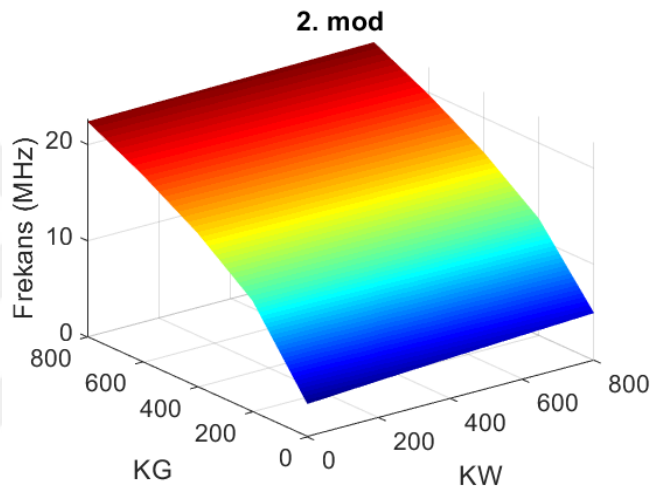
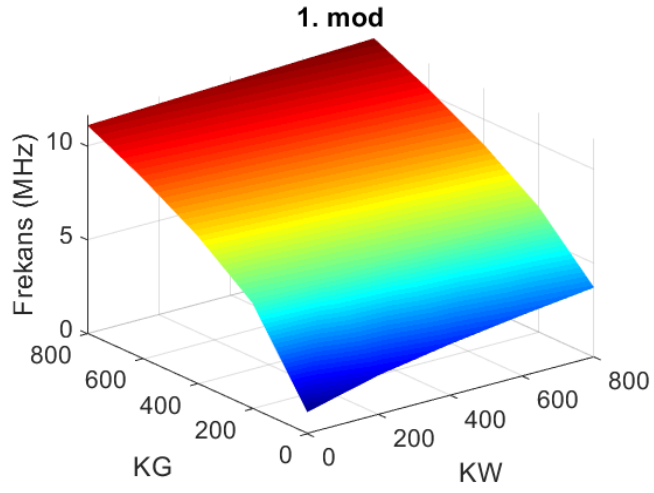
**Şekil 4.17.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişinin frekanslarının  $KG$ 'ye göre değişimi ( $KW=200$ ,  $k=5$ )





**Şekil 4.17.** B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin frekanslarının  $KG$ 'ye göre değişimi ( $KW=200, k=5$ ) (devamı)

B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekans değerlerinin  $KW$  ve  $KG$ 'ye bağlı olarak değişimi Şekil 4.18'de gösterilmiştir. Daha önce de ifade edildiği gibi  $KW$  ve  $KG$  değerlerinin frekansları arttırdığı burada da rahatça görülmektedir. Burada asıl vurgulanması gereken nokta,  $KG$ 'nin frekanslar üzerindeki etkisinin  $KW$ 'den çok daha büyük olduğudur.

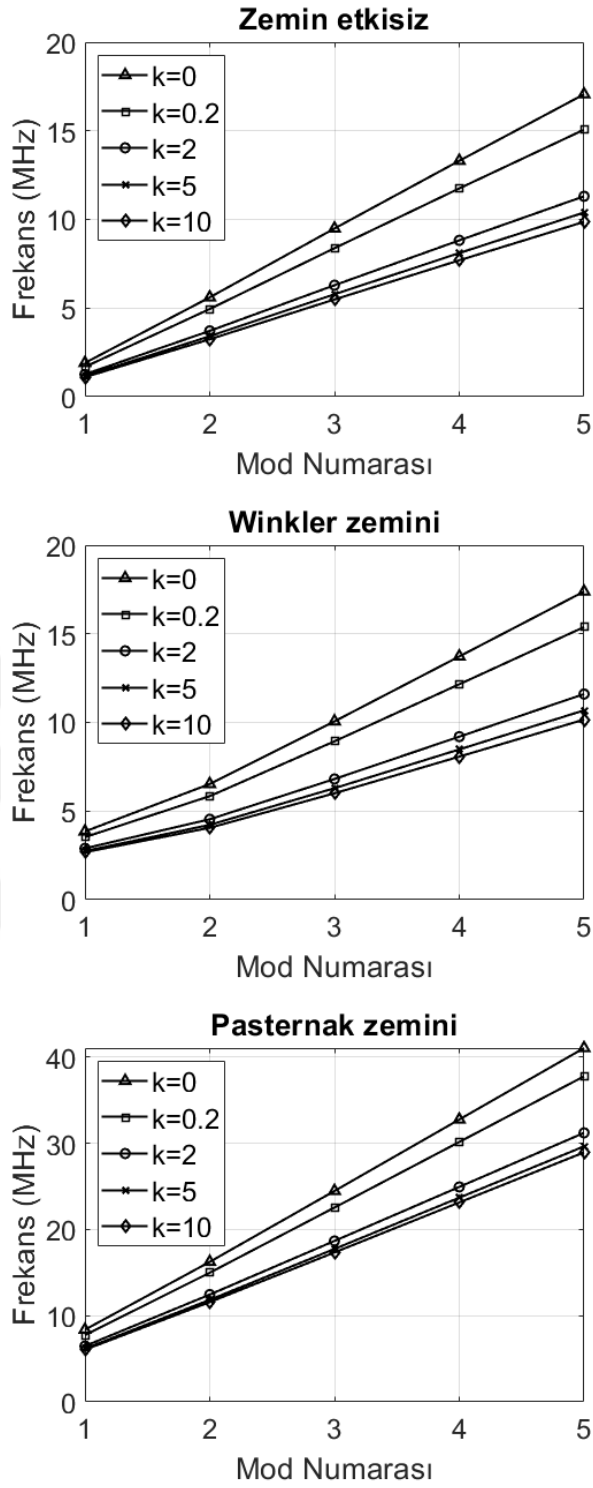


**Şekil 4.18.** B – B sınır şartına sahip Alümina/Çelik FD nanokirişinin frekanslarınının  $KW$  ve  $KG$ 'ye göre değişimi ( $k=5$ ,  $eo/L=0,2$ )

Çizelge 4.12’de elastik zemin üzerine oturan ve oturmayan Alümina/Çelik FD nanokirişinin çeşitli  $k$  değerlerindeki frekansları verilmiştir. Bu çizelgedeki verilerle frekansların mod numarasına göre değişimi FD nanokirişin zeminsiz, Winkler zemini üzerindeki ve Winkler-Pasternak zemini üzerindeki durumları için Şekil 4.19’da grafiksel olarak sunulmuştur. Buradan anlaşılan FD nanokirişin zemin üzerinde olduğu durumlarda  $k$ ’nin etkisinin zeminsiz duruma göre daha az olduğudur.  $k$  frekanslar üzerinde en fazla etkiyi zeminsiz durumda, en az ise Winkler-Pasternak zemini üzerinde göstermektedir.

**Çizelge 4.12.** Zemin üzerine oturan ve oturmayan B – B sınır şartına sahip FD nanokirişin çeşitli  $k$  değerlerindeki frekansları ( $e_{0a}/L=0,2$ )

$\omega_i$ (MHz)	Zeminsiz (KW=KG=0)				
	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
$i = 1$	1,9052	1,6822	1,2625	1,1600	1,1014
$i = 2$	5,6041	4,9481	3,7138	3,4123	3,2398
$i = 3$	9,4902	8,3794	6,2891	5,7784	5,4864
$i = 4$	13,3092	11,7513	8,8200	8,1038	7,6942
$i = 5$	17,0616	15,0645	11,3067	10,3886	9,8635
$\omega_i$ (MHz)	Winkler Zemini (KW=400, KG=0)				
	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
$i = 1$	3,8501	3,5307	2,8970	2,7453	2,6763
$i = 2$	6,5269	5,8413	4,5378	4,2231	4,0553
$i = 3$	10,0627	8,9359	6,8082	6,2914	6,0041
$i = 4$	13,7233	12,1545	9,1973	8,4772	8,0715
$i = 5$	17,3866	15,3810	11,6035	10,6824	10,1606
$\omega_i$ (MHz)	Pasternak Zemini (KW=400, KG=200)				
	$k = 0$	$k = 0,2$	$k = 2$	$k = 5$	$k = 10$
$i = 1$	8,3704	7,7473	6,4764	6,1716	6,0433
$i = 2$	16,2345	14,9779	12,4416	11,8339	11,5707
$i = 3$	24,4626	22,5353	18,6630	17,7355	17,3286
$i = 4$	32,7440	30,1431	24,9280	23,6789	23,1278
$i = 5$	41,0281	37,7551	31,1996	29,6296	28,9347



**Şekil 4.19.** Zemin üzerine oturan ve oturmayan FD nanokirişin çeşitli  $k$  değerleri için frekanslarının mod numarasına göre değişimi ( $e_0a/L=0,2$ )

Çizelge 4.13'te Ebrahimi ve ark. (2015) tarafından analitik çözüm ile bulunan boyutsuz frekans değerleri ve bu çalışmada farklı eleman sayısına ( $N_E$ ) bağlı olarak bulunan değerlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Eleman sayısının artırılması ile elde edilen sonuçlar gerçek sonuca yaklaşımaktadır.

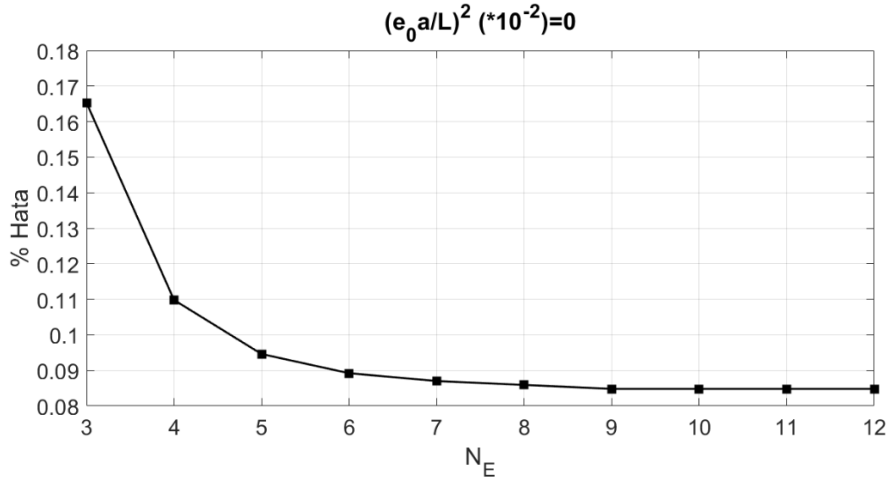
**Çizelge 4.13.** FD nanokirişin eleman sayısına bağlı olarak boyutsuz frekanslarının yakınsama çalışması

$N_E$	$(e_0a/L)^2 (* 10^{-2})$					
	0	1	2	3	4	5
3	9,2120	8,7885	8,4185	8,0916	7,8000	7,5379
4	9,2069	8,7837	8,4139	8,0872	7,7958	7,5338
5	9,2055	8,7823	8,4126	8,0859	7,7946	7,5327
6	9,2050	8,7818	8,4121	8,0855	7,7942	7,5322
7	9,2048	8,7816	8,4119	8,0853	7,7940	7,5321
8	9,2047	8,7815	8,4118	8,0852	7,7939	7,5320
9	9,2046	8,7815	8,4118	8,0852	7,7939	7,5319
10	9,2046	8,7814	8,4117	8,0851	7,7938	7,5319
11	9,2046	8,7814	8,4117	8,0851	7,7938	7,5319
12	9,2046	8,7814	8,4117	8,0851	7,7938	7,5319
Ebrahimi ve ark. (2015) Analitik	9,1968	8,7740	8,4047	8,0783	7,7873	7,5256

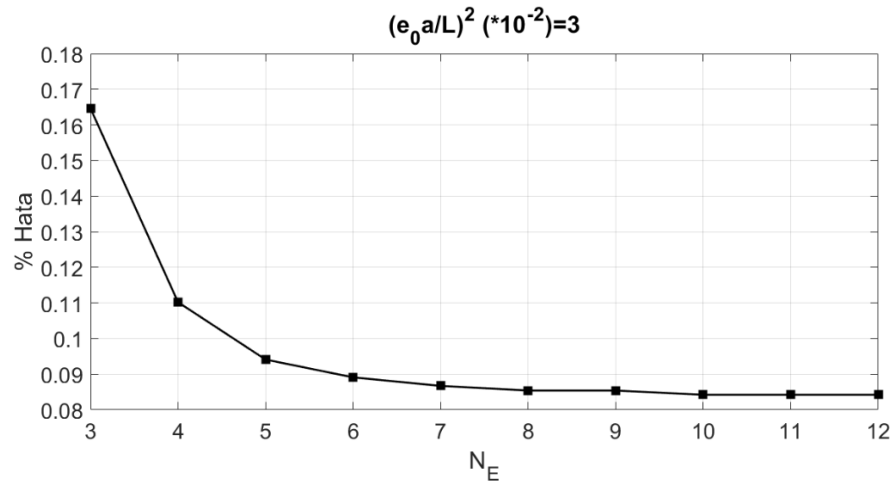
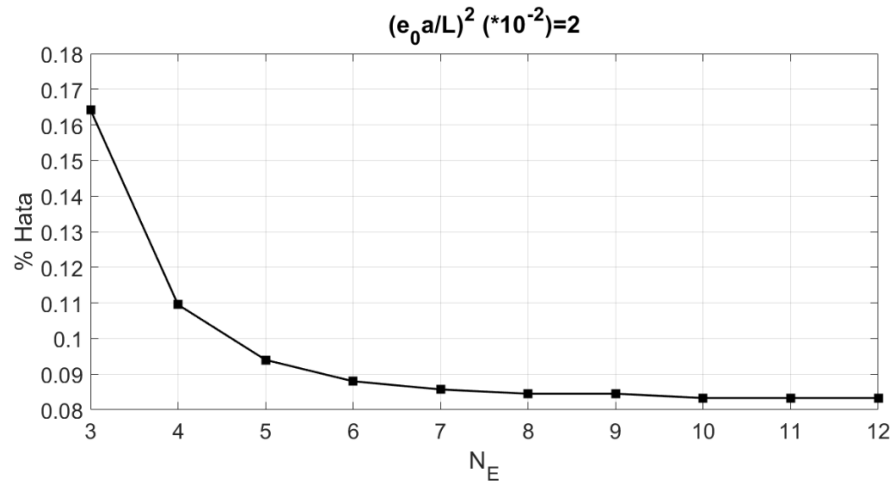
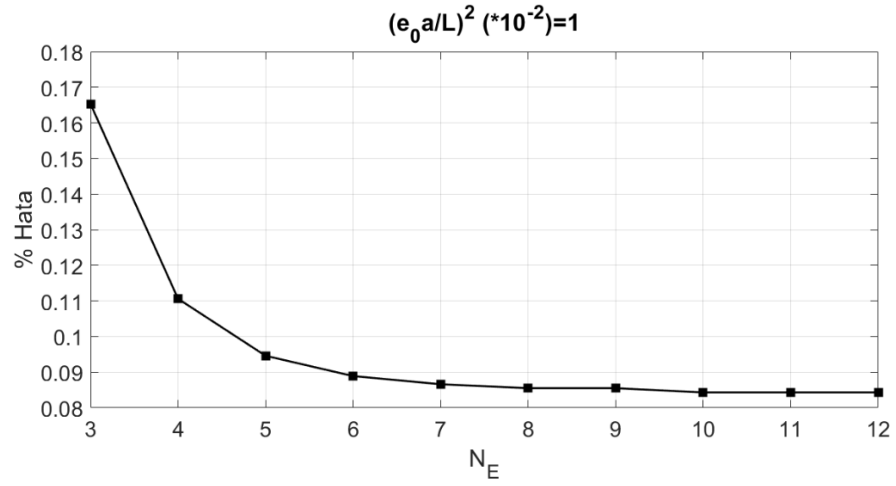
Çizelge 4.14'te ise Çizelge 4.13'te verilen değerler ile hesaplanan hata yüzdeleri sunulmuştur. Çizelge 4.14'te bulunan sonuçlar Şekil 4.20'de grafiksel olarak gösterilmiştir. Çizelge ve grafiklerden açıkça anlaşılacağı üzere eleman sayısının artması hata yüzdesini azaltmakta ve gerçek sonuca daha çok yakınsama sağlamaktadır.

**Çizelge 4.14.** FD nanokirişin eleman sayısına bağlı olarak boyutsuz frekanslarının hata yüzdeleri

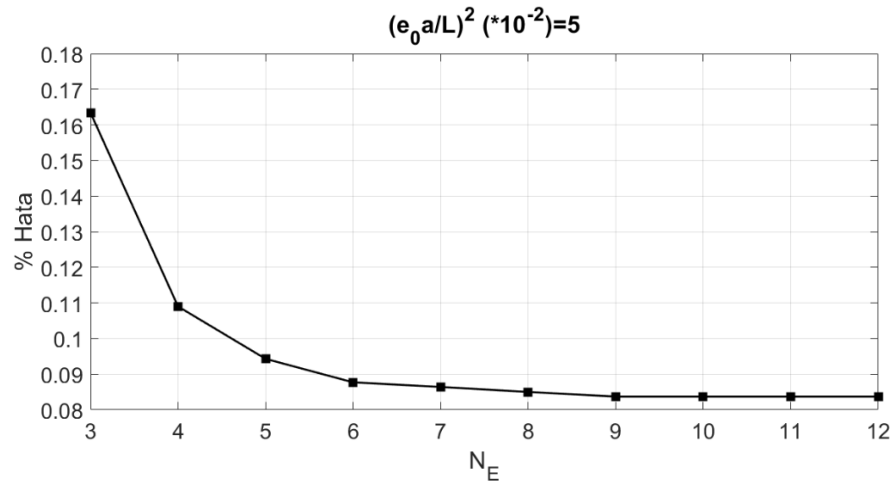
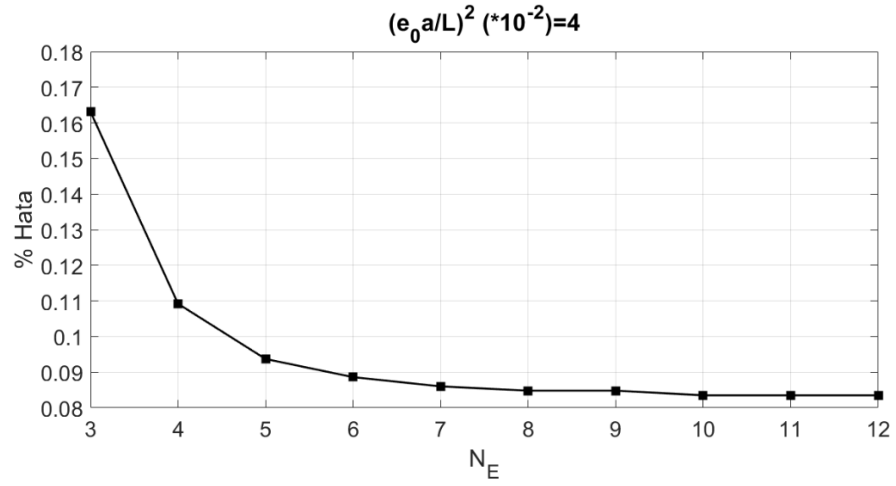
$N_E$	$(e_0 a/L)^2 (* 10^{-2})$					
	0	1	2	3	4	5
3	0,1653	0,1653	0,1642	0,1646	0,1631	0,1634
4	0,1098	0,1106	0,1095	0,1102	0,1092	0,1090
5	0,0946	0,0946	0,0940	0,0941	0,0937	0,0943
6	0,0892	0,0889	0,0880	0,0891	0,0886	0,0877
7	0,0870	0,0866	0,0857	0,0867	0,0860	0,0864
8	0,0859	0,0855	0,0845	0,0854	0,0848	0,0850
9	0,0848	0,0855	0,0845	0,0854	0,0848	0,0837
10	0,0848	0,0843	0,0833	0,0842	0,0835	0,0837
11	0,0848	0,0843	0,0833	0,0842	0,0835	0,0837
12	0,0848	0,0843	0,0833	0,0842	0,0835	0,0837



**Şekil 4.20.** FD nanokirişin boyutsuz frekanslarının eleman sayısına bağlı olarak hata yüzdeleri



**Şekil 4.20.** FD nanokirişin boyutsuz frekanslarının eleman sayısına bağlı olarak hata yüzdeleri (devamı)



**Şekil 4.20.** FD nanokirişin boyutsuz frekanslarının eleman sayısına bağlı olarak hata yüzdeleri (devamı)



## 5. SONUÇ

Bu tez çalışması kapsamında, fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin titreşim analizi sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanokirişin alümina ve çelikten oluştuğu ve malzeme özelliklerinin, kirişin yüksekliği boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği varsayılmıştır. Nanokirişin modellenmesinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi ve Eringen tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisi kullanılmıştır. İnterpolasyon fonksiyonları kullanılarak rijitlik ve kütle matrisleri oluşturulmuş ve bir özdeğer problemi kurularak problemin çözümü gerçekleştirilmiştir.

Bu tez çalışması kapsamında elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

Boyutsuz yerel olmayan parametre, incelenen tüm sınır şartları ve modlarda frekansların düşmesine neden olmaktadır. Boyutsuz yerel olmayan parametrenin etkisi mod sayısının artmasıyla birlikte artmaktadır. Kuvvet kuralı üssü de boyutsuz yerel olmayan parametre gibi frekansların düşmesine neden olmaktadır. Kuvvet kuralı üssünün artması yani nanokirişin özelliklerinin seramikten metale doğru gitmesi ile birlikte frekanslar, incelenen tüm sınır şartları ve modlarda düşüş göstermektedir. İncelenen sınır şartları arasında en yüksek frekans değerleri A – A sınır şartında gözlenirken, en düşük frekans değerleri B – B sınır şartında gözlenmiştir. Boyutsuz Winkler zemin parametresinin frekanslar üzerinde arttırıcı bir etki oluşturduğu görülmüştür. Ayrıca,  $KW$ 'nin etkisinin mod sayısının artmasıyla azaldığı,  $e_0a/L$  değerinin artması ile birlikte arttığı sonucuna varılmıştır. Boyutsuz Pasternak zemin parametresinin de frekanslar üzerinde arttırıcı bir etki oluşturduğu görülmüştür. Ancak,  $KG$ 'nin etkisinin  $KW$ 'ye kıyasla çok daha belirgin olduğu gözlenmiştir. Çözüm yapılırken eleman sayısının, elde edilen sonucun gerçek sonuca yakınsaması açısından önemli olduğu görülmüştür. Eleman sayısının yüksek tutulması ile gerçek sonuca daha yakın sonuçlar elde edilebilmektedir.

## KAYNAKLAR

- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2011.** Buckling analysis of cantilever carbon nanotubes using the strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 8(9): 1821-1827.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2015.** Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity. *Composite Structures*, 134: 294-301.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2016.** Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory. *Acta Astronautica*, 119: 1-12.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2017.** Effects of thermal and shear deformation on vibration response of functionally graded thick composite microbeams. *Composites Part B: Engineering*, 129: 77-87.
- Alshorbagy, A.E., Eltahir, M.A., Mahmoud, F.F. 2011.** Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 35(1): 412-425.
- Anandrao, K.S., Gupta, R.K., Ramachandran, P., Rao, G.V. 2012.** Free vibration analysis of functionally graded beams. *Defence Science Journal*, 62(3): 139-146.
- Avcar, M., Mohammed, W.K.M. 2017.** Winkler zemin ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özelliklerinin kirişin frekans parametrelerine etkilerinin incelenmesi.. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 5(3): 573-580.
- Avcar, M., Mohammed, W.K.M. 2018.** Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10): 232.
- Aydogdu, M. 2009.** A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(9): 1651-1655.
- Aydogdu, M., Taskin, V. 2007.** Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials & design*, 28(5): 1651-1656.
- Chakraverty, S., Behera, L. 2016.** Static and Dynamic problems of nanobeams and nanoplates. World Scientific Publishing Co., Singapore, 212 pp.
- Chemi, A., Heireche, H., Zidour, M., Rakrak, K., Bousahla, A.A. 2015.** Critical buckling load of chiral double-walled carbon nanotube using non-local theory elasticity. *Advances in nano research*, 3(4): 193-206.
- Chen, X.L., Liew, K.M. 2004.** Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads. *Smart Materials and Structures*, 13(6): 1430.
- Civalek, Ö., Demir, C. 2011a.** Buckling and bending analyses of cantilever carbon nanotubes using the euler-bernoulli beam theory based on non-local continuum model. *Asian Journal of Civil Engineering*, 12(5): 651-661.
- Civalek, Ö., Demir, Ç. 2011b.** Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5): 2053-2067.
- Demir, Ç. 2016.** Nonlocal Vibration Analysis for Micro/Nano Beam on Winkler Foundation via DTM. *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 8(4): 108-118.
- Demir, Ç., Civalek, Ö. 2017.** A new nonlocal FEM via Hermitian cubic shape functions for thermal vibration of nano beams surrounded by an elastic matrix. *Composite Structures*, 168: 872-884.

- Ebrahimi, F., Ghadiri, M., Salari, E., Hoseini, S.A.H., Shaghghi, G.R. 2015.** Application of the differential transformation method for nonlocal vibration analysis of functionally graded nanobeams. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(3): 1207-1215.
- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E., Mahmoud, F.F. 2013a.** Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37(7): 4787-4797.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. 2012.** Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams. *Applied Mathematics and Computation*, 218(14): 7406-7420.
- Eltaher, M.A., Emam, S.A., Mahmoud, F.F. 2013b.** Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams. *Composite Structures*, 96: 82-88.
- Eringen, A.C. 1972.** Nonlocal polar elastic continua. *International journal of engineering science*, 10(1): 1-16.
- Eringen, A.C. 1983.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of applied physics*, 54(9): 4703-4710.
- Gopalakrishnan, S., Narendar, S. 2013.** Wave propagation in nanostructures: nonlocal continuum mechanics formulations. Springer Verlag, London Ltd, 359 pp.
- Hosseini, M., Gorgani, H.H., Shishesaz, M., Hadi, A. 2017.** Size-dependent stress analysis of single-wall carbon nanotube based on strain gradient theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 9(06): 1750087.
- Iijima, S. 1991.** Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354(6348): 56.
- Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S., McCarthy, M. 2016.** Non-local structural mechanics. Wiley–ISTE, London, 372 pp.
- Murmu, T., Pradhan, S.C. 2009a.** Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory. *Computational Materials Science*, 46(4): 854-859.
- Murmu, T., Pradhan, S.C. 2009b.** Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(7): 1232-1239.
- Nejad, M.Z., Hadi, A. 2016.** Eringen's non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler–Bernoulli nano-beams. *International Journal of Engineering Science*, 106: 1-9.
- Phadikar, J.K., Pradhan, S.C. 2010.** Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational materials science*, 49(3): 492-499.
- Pradhan, S.C. 2012.** Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50: 8-20.
- Pradhan, K.K., Chakraverty, S. 2013.** Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, 51: 175-184.
- Rao, S.S. 2007.** Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 720 pp.
- Reddy, J.N. 1993.** An introduction to the finite element method (2nd ed.). McGraw-Hill, New York, 684 pp.
- Reddy, J.N. 2002.** Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics (2nd ed.). John Wiley & Sons, New York.

- Reddy, J.N., Pang, S.D. 2008.** Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2): 023511.
- Thai, H.T., Vo, T.P. 2012.** Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories. *International Journal of Mechanical Sciences*, 62(1): 57-66.
- Togun, N., Bağdatlı, S. 2016.** Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on non-local Euler-Bernoulli beam theory. *Mathematical and Computational Applications*, 21(1): 3.
- Tounsi, A., Benguediab, S., Adda, B., Semmah, A., Zidour, M. 2013.** Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes. *Advances in nano research*, 1(1): 1-11.
- Tounsi, A., Heireche, H., Berrabah, H.M., Benzair, A., Boumia, L. 2008.** Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field. *Journal of Applied Physics*, 104(10): 104301.
- Uzun, B., Civalek, Ö. 2019a.** Nonlocal FEM Formulation for Vibration Analysis of Nanowires on Elastic Matrix with Different Materials. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2): 38.
- Uzun, B., Civalek, O. 2019b.** Free vibration analysis Silicon nanowires surrounded by elastic matrix by nonlocal finite element method. *Advances in Nano Research*, 7(2): 99-108.
- Uzun, B., Numanoglu, H., Civalek, O. 2018.** Free vibration analysis of BNNT with different cross-Sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2): 252-260.
- Yayli, M.Ö. 2015.** Buckling analysis of a rotationally restrained single walled carbon nanotube. *Acta Physica Polonica A*, 127(3): 678-683.
- Yayli, M.Ö. 2016.** Buckling Analysis of a Rotationally Restrained Single Walled Carbon Nanotube Embedded In An Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 8(2): 40-50.
- Yayli, M.Ö. 2017.** Buckling analysis of a cantilever single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium with an attached spring. *Micro & Nano Letters*, 12(4): 255-259.
- Yayli, M.Ö. 2018.** On the torsional vibrations of restrained nanotubes embedded in an elastic medium. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(9): 419.
- Zhang, Y.Q., Liu, G. R., Xie, X.Y. 2005.** Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity. *Physical Review B*, 71(19): 195404.

## EKLER

- EK 1**  $A_1, B_1, D_1$  Rijitliklerinin Çıkarılışı  
**EK 2**  $I_0, I_1, I_2$  Kütle Atalet Momentlerinin Çıkarılışı



### EK 1: $A_I, B_I, D_I$ Rijitliklerinin Çıkarılışı

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_A E(z) dA = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \right) dz \\ &= b \left( (E_U - E_A) \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h + E_A z \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= b \left( (E_U - E_A) \frac{(1)^{k+1}}{k+1} h + E_A \frac{h}{2} \right) - b \left( (E_U - E_A) \frac{(0)^{k+1}}{k+1} h + E_A \left( \frac{-h}{2} \right) \right) \\ A_1 &= b \left( \frac{(E_U - E_A)}{k+1} h + E_A h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_A E(z) z dA = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \right) z dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( z (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A z \right) dz \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin ilk kısmı kısmi integrasyon ile çözülür. Kısmi integrasyon formülü  $uv - \int v du$  'dur. Eşitlikte

$$z(E_U - E_A) = u$$

$$\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = dv$$

denilirse

$$(E_U - E_A) = du$$

$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = z(E_U - E_A) \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) (E_U - E_A)$$

elde edilir. Burada da

$$\int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) (E_U - E_A) = \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 (E_U - E_A)$$

olduğuna göre, elde edilenler yerlerine konulduğunda ifade aşağıdaki şekli alır.

$$b \left( z(E_U - E_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h - \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 (E_U - E_A) + \frac{E_A z^2}{2} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b(E_U - E_A) \frac{h}{k+1} \left( \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1} z - \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+2)} h \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} + \frac{E_A z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b \left( \left( (E_U - E_A) \frac{h}{k+1} \left( (1)^{k+1} \frac{h}{2} - \frac{(1)^{k+2}}{(k+2)} h \right) + \frac{E_A h^2}{8} \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( (E_U - E_A) \frac{h}{k+1} \left( (0)^{k+1} \frac{h}{2} - \frac{(0)^{k+2}}{(k+2)} h \right) + \frac{E_A h^2}{8} \right) \right)$$

$$B_1 = (E_U - E_A) \frac{bh}{k+1} \left( \frac{h}{2} - \frac{h}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= \int_A E(z) z^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) z^2 dz \\
&= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A \right) z^2 dz \\
&= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( z^2 (E_U - E_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_A z^2 \right) dz
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin ilk kısmı kısmi integrasyon ile çözülür.

$$z^2 (E_U - E_A) = u$$

$$\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = dv$$

denirse

$$2z(E_U - E_A) = du$$

$$\frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = z^2 (E_U - E_A) \left( \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \int \left( \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h \right) 2z(E_U - E_A)$$

elde edilir. Burada da ikinci kısım için yine kısmi integrasyon kullanılır.

$$2z(E_U - E_A) = u$$



$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h = dv$$

denirse

$$2(E_U - E_A) = du$$

$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = 2z(E_U - E_A) \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) - \int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) 2(E_U - E_A)$$

elde edilir. Burada da

$$\int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) 2(E_U - E_A) = \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 2(E_U - E_A)$$

olduğuna göre, elde edilenler yerlerine konulduğunda ifade aşağıdaki şeklini alır.

$$= b \left( \left( z^2 (E_U - E_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( 2z (E_U - E_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(E_U - E_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) + \frac{E_A z^3}{3} \right) \Bigg|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b \left( \left( \frac{h^2}{4} (E_U - E_A) \frac{(1)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( h (E_U - E_A) \frac{(1)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(E_U - E_A) \frac{(1)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) + \frac{E_A h^3}{24} \right) - \dots \\ \dots - b \left( \left( \frac{h^2}{4} (E_U - E_A) \frac{(0)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( h (E_U - E_A) \frac{(0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(E_U - E_A) \frac{(0)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) - \frac{E_A h^3}{24} \right)$$

$$= b \left( \left( \frac{h^3}{4} \frac{(E_U - E_A)}{k+1} \right) - \left( h^3 \frac{(E_U - E_A)}{(k+1)(k+2)} - 2h^3 \frac{(E_U - E_A)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{E_A h^3}{24} \right) - \dots \\ \dots - b \left( (0) - (0 - 0) - \frac{E_A h^3}{24} \right)$$

$$= bh^3 \left( \frac{(E_U - E_A)}{4(k+1)} - \frac{(E_U - E_A)}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(E_U - E_A)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{E_A}{12} \right)$$

$$D_1 = bh^3 \left( (E_U - E_A) \left( \frac{1}{4(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{E_A}{12} \right)$$

## EK 2: $I_0, I_1, I_2$ Kütle Atalet Momentlerinin Çıkarılışı

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A \rho(z) dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \right) dz \\ &= b \left( (\rho_U - \rho_A) \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h + \rho_A z \right) \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= b \left( (\rho_U - \rho_A) \frac{(1)^{k+1}}{k+1} h + \rho_A \frac{h}{2} \right) - b \left( (\rho_U - \rho_A) \frac{(0)^{k+1}}{k+1} h + \rho_A \left( \frac{-h}{2} \right) \right) \\ I_0 &= b \left( \frac{(\rho_U - \rho_A)}{k+1} h + \rho_A h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_A \rho(z) z dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \right) z dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( z (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A z \right) dz \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin ilk kısmı kısmi integrasyon ile çözülür. Kısmi integrasyon formülü  $uv - \int v du$  'dur. Eşitlikte

$$z(\rho_U - \rho_A) = u$$

$$\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = dv$$

denilirse

$$(\rho_U - \rho_A) = du$$

$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = z(\rho_U - \rho_A) \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) (\rho_U - \rho_A)$$

elde edilir. Burada da

$$\int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) (\rho_U - \rho_A) = \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 (\rho_U - \rho_A)$$

olduğuna göre, elde edilenler yerlerine konulduğunda ifade aşağıdaki şeklini alır.

$$b \left( z(\rho_U - \rho_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h - \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 (\rho_U - \rho_A) + \frac{\rho_A z^2}{2} \right) \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b(\rho_U - \rho_A) \frac{h}{k+1} \left( \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1} z - \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+2)} h \right) + \frac{\rho_A z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b \left( \left( (\rho_U - \rho_A) \frac{h}{k+1} \left( (1)^{k+1} \frac{h}{2} - \frac{(1)^{k+2}}{(k+2)} h \right) + \frac{\rho_A h^2}{8} \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( (\rho_U - \rho_A) \frac{h}{k+1} \left( (0)^{k+1} \frac{h}{2} - \frac{(0)^{k+2}}{(k+2)} h \right) + \frac{\rho_A h^2}{8} \right) \right)$$

$$I_1 = (\rho_U - \rho_A) \frac{bh}{k+1} \left( \frac{h}{2} - \frac{h}{k+2} \right)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_A \rho(z) z^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A \right) z^2 dz \\ &= b \int_{-h/2}^{h/2} \left( z^2 (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_A z^2 \right) dz \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin ilk kısmı kısmi integrasyon ile çözülür.

$$z^2 (\rho_U - \rho_A) = u$$

$$\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = dv$$

denirse

$$2z (\rho_U - \rho_A) = du$$

$$\frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = z^2 (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \int \left( \frac{\left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^{k+1}}{k+1} h \right) 2z (\rho_U - \rho_A)$$

elde edilir. Burada da ikinci kısım için yine kısmi integrasyon kullanılır.

$$2z(\rho_U - \rho_A) = u$$

$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h = dv$$

denirse

$$2(\rho_U - \rho_A) = du$$

$$\frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 = v$$

olur. O halde

$$uv - \int v du = 2z(\rho_U - \rho_A) \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) - \int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) 2(\rho_U - \rho_A)$$

elde edilir. Burada da

$$\int \left( \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 \right) 2(\rho_U - \rho_A) = \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 2(\rho_U - \rho_A)$$

olduğuna göre, elde edilenler yerlerine konursa ifade aşağıdaki şekli alır.

$$= b \left( \left( z^2 (\rho_U - \rho_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( 2z (\rho_U - \rho_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(\rho_U - \rho_A) \frac{\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) + \frac{\rho_A z^3}{3} \right) \Bigg|_{-h/2}^{h/2}$$

$$= b \left( \left( \frac{h^2}{4} (\rho_U - \rho_A) \frac{(1)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( h (\rho_U - \rho_A) \frac{(1)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(\rho_U - \rho_A) \frac{(1)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) + \frac{\rho_A h^3}{24} \right) - \dots \\ \dots - b \left( \left( \frac{h^2}{4} (\rho_U - \rho_A) \frac{(0)^{k+1}}{k+1} h \right) - \dots \right. \\ \left. \dots - \left( h (\rho_U - \rho_A) \frac{(0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} h^2 - 2(\rho_U - \rho_A) \frac{(0)^{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} h^3 \right) - \frac{\rho_A h^3}{24} \right)$$

$$= b \left( \left( \frac{h^3}{4} \frac{(\rho_U - \rho_A)}{k+1} \right) - \left( h^3 \frac{(\rho_U - \rho_A)}{(k+1)(k+2)} - 2h^3 \frac{(\rho_U - \rho_A)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{\rho_A h^3}{24} \right) - \dots$$

$$\dots - b \left( (0) - (0-0) - \frac{\rho_A h^3}{24} \right)$$

$$= bh^3 \left( \frac{(\rho_U - \rho_A)}{4(k+1)} - \frac{(\rho_U - \rho_A)}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(\rho_U - \rho_A)}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{\rho_A}{12} \right)$$

$$I_2 = bh^3 \left( (\rho_U - \rho_A) \left( \frac{1}{4(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) + \frac{\rho_A}{12} \right)$$

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Büşra UZUN  
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul, 1994  
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu  
Lise : Levent Aydın Anadolu Lisesi, Antalya, 2012  
Lisans : Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 2016

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Bursa Uludağ Üniversitesi, Araştırma Görevlisi  
2018 – devam ediyor

İletişim (e-posta) : buzun@uludag.edu.tr / uzunbusra34@gmail.com

Yayımları :

**Civalek, Ö., Numanoglu, H.M., Uzun, B. 2018.** Derivation of Nonlocal Finite Element Formulation for Nano Beams. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 10(2): 131-139.

**Uzun, B., Civalek, Ö. 2018.** Carbon Nanotube Beam Model and Free Vibration Analysis. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 10(1): 1-4.

**Uzun, B., Civalek, Ö. 2019.** Free vibration analysis Silicon nanowires surrounded by elastic matrix by nonlocal finite element method. *Advances in Nano Research*, 7(2): 99-108.

**Uzun, B., Civalek, Ö. 2019.** Nonlocal FEM Formulation for Vibration Analysis of Nanowires on Elastic Matrix with Different Materials. *Mathematical and Computational Applications*, 24(2): 38.

**Uzun, B., Numanoglu, H.M., Civalek, O. 2018.** Free vibration analysis of BNNT with different cross-sections via nonlocal FEM. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49(2): 252-260.

**Uzun, B., Numanoglu, H.M., Civalek, Ö. 2018.** Defination of length-scale parameter in Eringen's Nonlocal Elasticity via Nolocal Lattice and Finite Element Formulation. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 10(3): 264-275.

**Uzun, B., Yaylı, M.Ö. 2019.** Finite Element Model of Functionally Graded Nanobeam for Free Vibration Analysis. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 11(2): 387-400.