



KARMA MESNETLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Semih BEYÇİMEN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMA MESNETLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Semih BEYÇİMEN
(0000-0002-0213-3718)

Prof. Dr. Yaşar PALA
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

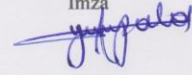
BURSA – 2019
TEZ ONAYI

Semih BEYÇİMEN tarafından hazırlanan “KARMA MESNETLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Yaşar PALA (0000-0003-0358-1958)

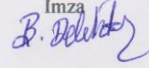
Başkan : Prof. Dr. Yaşar PALA (/0000-0003-0358-1958)
Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik
Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye : Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ (0000-0002-4035-4642) Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik
Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye : Doç. Dr. Hüseyin LEKESİZ (0000-0003-3350-1509) Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik
Fakültesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Hüseyin Aysel EREN
(0000-0003-3908-5139)
Enstitü Müdürü
04.04.2019

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04.09.2019

Semih BEYÇİMEN



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KARMA MESNETLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Semih BEYÇİMEN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yaşar PALA

Bu tezde farklı sınır şartları altında bulunan kirişlerin serbest ve sönümleyici titreşimleri incelenmiştir. Genel bir çözüm vermesi açısından karmaşık bir kiriş modeli oluşturulmuş ve bu model hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş teorileri ile incelenmiştir. Matlab programı yardımı ile sayısal olarak bulunan değerler çeşitli parametrelere göre kıyaslanıp yorumlanmıştır. Ayrıca kademeli veya çatlak bulunan kirişlerin titreşim analizleri de genel bir kiriş modeli üzerinde incelenmiştir. Böylece birçok durumu kapsayan geniş bir model oluşturulmuştur. Çalışmada her iki kiriş teorisi ile incelenen çatlaklı kirişlerin sayısal sonuçları arasında farkın büyük olduğu ve deneysel çalışmalar ile kıyaslandığında Timoshenko kiriş teorisinin Euler-Bernoulli giriş teorisine göre daha doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Çalışmada çatlak, hem dönme yayı hem de dönme ve ötelenme yayı olarak düşünülmüş ve bu iki model arasında kıyaslama yapılmıştır. Bu inceleme sonucunda sadece dönme yayı olarak kullanılan modelin Euler-Bernoulli kirişler için uygun olduğu fakat Timoshenko kirişler için uygun olmadığı ve Timoshenko kirişlerde hem dönme hem de ötelenme yayı olarak kurulan çatlak modelinin daha uygun olduğu sonucuna varılmıştır. Bunun nedeni Timoshenko kirişte, dönme ve ötelenme yayı olarak modellenen çatlakın çatlak bölgesinde kesme kuvvetlerini iletmesidir.

Anahtar Kelimeler: Çatlak, doğal frekans, kademe, kiriş, mod şekli, titreşim,

2019, x + 102 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

VIBRATION ANALYSIS OF RESTRAINED BEAMS

Semih BEYÇİMEN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Yaşar PALA

In this thesis, free and damping vibrations of beams under different boundary conditions have been investigated. In order to provide a general solution, a complex beam model has been created and this model has been examined with both Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. By the Matlab program, numerical values have been compared with respect to various parameters. Besides, vibration analysis of stepped or cracked beams have been examined by using a general beam model. Thus, a wide model has been created covering many situations. In the study, it has been observed that there is a big difference between the numerical results of the cracked beams examined with both beam theory and Timoshenko beam theory gives more accurate results than Euler-Bernoulli beam theory with respect to experimental studies. In this study, the crack is considered as both the spring of rotation and the spring of rotation and translational and comparison is made between these two models. As a result of this investigation, it has been concluded that the cracked model used only as a rotation spring has been suitable for Euler-Bernoulli beams but not for Timoshenko beams and the crack model established as both rotation and translational spring in Timoshenko beams has been more appropriate. Because Timoshenko beam transmits shear forces in zone of the crack modeled as a spring of rotation and translational.

Key words: Beam, crack, mode shape, natural frequency, stepped, vibration

2019, x + 102 pages.

TEŐEKKÖR

Lisansüstü öğrenimim süresince daima bana yol gösteren, üzerimde büyük emeği olan danışman hocam saygı değer Prof. Dr. Yaşar PALA'ya, anlayışından dolayı eşim Esmâ BEYÇİMEN'e, küçük kızım Ayşe Hafsa'ya, tüm hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem ve babama, her türlü yardımlarından dolayı Arş. Gör. Çađlar KAHYA, Arş. Gör. Muhammed DÖNMEZ, Arş. Gör. Mert Ali ÖZEL ve Arş. Gör. Emre DERELİ'ye ve tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Semih BEYÇİMEN
04/09/2019.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
2.1 Önceki Çalışmalar.....	3
2.1.1. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi.....	3
2.1.2. Kademeli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi.....	5
2.1.3. Çatlak ihtiva eden Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi.....	6
2.2 Titreşim Tarihçesi ve Tanımlamalar.....	10
2.2.1. Titreşimin tarihçesi ve kiriş teorileri:.....	10
2.2.2. Çeşitli tanımlar.....	14
2.2.3. Titreşim analiz adımları.....	15
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	18
3.1. Karma Sınır Koşullarında Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları.....	18
3.2. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları.....	22
3.3. Karma Sınır Koşullarında Kademeli Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları.....	24
3.4. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Çatlaklı Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları.....	30
3.5. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları.....	36
3.6. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Kademeli Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları.....	40
3.7. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Çatlaklı Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları.....	45
3.8. Öz Fonksiyon ve Mod Şekilleri.....	51
3.9. Dinamik Cevap.....	54
4. BULGULAR (BULGULAR ve TARTIŞMA).....	57
4.1. Karma Sınır Şartlarına Sahip Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:.....	57
4.2. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:.....	66
4.3. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Kademeli Euler-Bernoulli Kiriş İçin Sayısal Çözümler:.....	68
4.4. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Çatlaklı Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:.....	70
4.5. Mod Şekilleri İçin Sayısal Çözümler:.....	77
5. SONUÇ (TARTIŞMA ve SONUÇ).....	79

KAYNAKLAR	Sayfa 81
EKLER	84
ÖZGEÇMİŞ	102



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

θ_1	Boyutsuz çatlak kesitsel esnekliği;
γ	Boyutsuz çatlak derinlik oranı;
d	Çatlak derinliği;
L_1	Çatlağın konumu;
y, y_1, y_2	Düşey yer değiştirmeler;
ψ	Eğilme açısı;
E, E_1, E_2	Elastisite modülü;
k_i, K_i	Elastik mesnetlerin yay sabitleri;
a	Hareketli kütlelerin ivmesi;
G	Kayma esneklik modülü;
A, A_1, A_2	Kesit alanı;
I, I_1, I_2	Kiriş kesitinin alan atalet momenti;
h	Kiriş kesitinin yüksekliği;
L	Kiriş uzunluğu;
m	Kirişin birim uzunluğunun kütlesi;
b	Kiriş kesitinin genişliği;
$g(x)$	Kirişin başlangıç konumu;
ω_n	Kirişin doğal frekansları;
$v(x)$	Kirişin ilk hızı;
$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$	Kirişin özfonksiyon katsayıları;
ρ, ρ_1, ρ_2	Kirişin yoğunluğu
c_i	Mesnetlerin sönüm sabitleri;
ν	Poisson Oranı;
k, k_1, k_2	Şekil faktörü,
x	Yatay koordinat;
g	Yerçekimi ivmesi (9.81m/s ²);
t	Zaman;

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Karma sınır şartlarına maruz kiriş.....	18
Şekil 3.2. Damper içeren karma sınır şartlarına maruz kiriş.....	22
Şekil 3.3. Karma sınır şartlarına maruz kademeli kiriş.....	25

Şekil 3.4. Karma sınır şartlarına maruz çatlaklı kiriş.....	30
Şekil 3.5. Karma sınır şartlarına maruz çatlaklı kirişin fiziksel modeli.....	30
Şekil 3.6. Dampere içeren karma sınır şartlarına maruz Timoshenko kiriş.....	36
Şekil 3.7. Karmaşık sınır şartlarına maruz kademeli Timoshenko kiriş.....	40
Şekil 3.8. Karmaşık sınır şartlarına sahip çatlaklı Timoshenko kiriş.....	46
Şekil 3.9. Karmaşık sınır şartlarına sahip çatlaklı Timoshenko kirişin fiziksel modeli.....	46
Şekil 4.10. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 10^{20}$, $e_2 = 10^{20}$, $e_3 = 10^{20}$, $e_4 = 10^{20}$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$	77
Şekil 4.11. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$	77
Şekil 4.12. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.25$	77
Şekil 4.13. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.75$	77
Şekil 4.14. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.25$, $\gamma = 0.5$	77
Şekil 4.15. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.75$, $\gamma = 0.5$	78
Şekil 4.16. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.25$, $\gamma = 0.5$	78
Şekil 4.17. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$	78
Şekil 4.18. Belirtilen değerler için Timoshenko kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0$, $\gamma = 0.5$	78
Şekil 4.19. Belirtilen değerler için Timoshenko kirişin mod şekilleri $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$	78
Şekil 4.20. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $b_1 = 0.1$, $a_5 = 1$, $a_4 = 0.1$, $z_3 = 0.1$	78
Şekil 4.21. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $b_1 = 1$, $a_5 = 1$, $a_4 = 0.1$, $z_3 = 0.1$	78
Şekil 4.22. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 1$, $e_4 = 1$	79
Şekil 4.23. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $b_1 = 10$, $a_5 = 1$, $a_4 = 0.1$, $z_3 = 0.1$	79
Şekil 4.24. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $b_1 = 100$, $a_5 = 1$, $a_4 = 0.1$, $z_3 = 0.1$	79
Şekil 4.25. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri $b_1 = 0.1$, $a_5 = 1$, $a_4 = 10^{10} (M \cong 0)$, $z_3 = 0.1$	79

Sayfa

Şekil 4.26. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 1$, $a_5 = 1$, $a_4 = 10^{10} (M \cong 0)$, $z_3 = 0.1$ 79

Şekil 4.27. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 10^{10} (k_R \cong \infty)$, $a_5 = 1$, $a_4 = 0.5$, $z_3 = 0.1$ 79



ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. $K_2 = K_4 = 50$, $e_2 = e_4 = 0.0952$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi	59
Çizelge 4.2. $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	59
Çizelge 4.3 $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi	60
Çizelge 4.4. $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	60
Çizelge 4.5. $K_2 = K_4 = 5000$, $e_2 = e_4 = 9.5328$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	61
Çizelge 4.6. $K_2 = K_4 = 10000$, $e_2 = e_4 = 19.0477$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	61
Çizelge 4.7. $K_2 = K_4 = 50000$, $e_2 = e_4 = 95.2381$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	62
Çizelge 4.8. $K_2 = K_4 = 500000$, $e_2 = e_4 = 952.381$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi.....	62
Çizelge 4.9. $K_2 = K_4 = 1000000$, $e_2 = e_4 = 1904.76$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi	63
Çizelge 4.10. $K_2 = K_4 = 5000000$, $e_2 = e_4 = 9523.81$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi	63
Çizelge 4.11. $K_2 = K_4 / 10 = 1000$, $e_2 = e_4 / 10 = 1.9048$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi.....	64
Çizelge 4.12. $K_2 = K_4 / 10 = 10000$, $e_2 = e_4 / 10 = 19.0476$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi.....	64
Çizelge 4.13. $K_2 = K_4 / 10 = 100000$, $e_2 = e_4 / 10 = 190.4762$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi.....	65
Çizelge 4.14. Sonuçların bilinen değerler ile kıyası	65
Çizelge 4.15. $e_2 = e_4 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_1 = e_3$ ile değişimi	66
Çizelge 4.16. $e_1 = e_3 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_2 = e_4$ ile değişimi.....	66
Çizelge 4.17. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi.....	67
Çizelge 4.18. $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $e_3 = 1$, $e_4 = 1$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi	67

Çizelge 4.19. $e_2 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_1 = e_3$ ile değişimi.....	68
Çizelge 4.20. $e_1 = 0.1, e_3 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_2 = e_4$ ile değişimi.....	68
Çizelge 4.21. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi.....	68
Çizelge 4.22. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 0, e_6 = 0$ değerleri için frekansın L_0 ile değişimi.....	69
Çizelge 4.23. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.25$ değerleri için frekansın h_1/h_2 ile değişimi	69
Çizelge 4.24. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 1, e_6 = 1$ değerleri için frekansın L_0 ile değişimi.....	70
Çizelge 4.25. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 1, e_6 = 1, L_0 = 0.25$ değerleri için frekansın h_1/h_2 ile değişimi	70
Çizelge 4.26. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, L_0 = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının γ ile değişimi	71
Çizelge 4.27. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, \gamma = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının L_0 ile değişimi	71
Çizelge 4.28. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının γ ile değişimi.....	72
Çizelge 4.29. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0, e_6 = 0, \gamma = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının L_0 ile değişimi.....	72
Çizelge 4.30. $e_1 = 0.1, e_3 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_2, e_4 ve γ ile değişimi.....	73
Çizelge 4.31. $e_2 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_1, e_3 ve γ ile değişimi.....	74
Çizelge 4.32. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_5, e_6 ve γ ile değişimi.....	74
Çizelge 4.33. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, L_0 = 0.5, \gamma = 0$ değerleri için doğal frekanslarının h/L ile değişimi	75
Çizelge 4.34. Tablo 8 değerleri arasındaki yüzdelik fark	75
Çizelge 4.35. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının farklı çatlak modellerine göre γ ile değişimi.....	76

1. GİRİŞ

Çoğumuz günlük hayatımızda titreşimlerin etkilerini deneyimleriz. Bir otomobil veya benzer bir şekilde bisiklet sürerken istenmeyen titreşimler hissedebiliriz. Telefonda sohbet ettiğimizde veya stereo hoparlörlerimizden gelen müziği dinlerken titreşimlerin avantajlarından hepimiz yararlanıyoruz. Konuşma yeteneğimiz bile vokal akkorlarımızın titreşimlerinden kaynaklanıyor. İnsan vücudunda akciğerlerin ve kalbin düşük frekanslı salınımları, kulağın yüksek frekanslı salınımları, biri konuşurken larinks salınımları ve yürüme, atlama gibi ritmik vücut hareketlerinin neden olduğu salınımlar da titreşimin birer konusudur.

Mekanik titreşimlerin konusu, mekanik sistemlerin tekrarlanan veya kısmi tekrarlanan hareketlerinin incelenmesiyle ilgilidir. Mühendisler olarak bir yapıda makinede veya araçta aşırı titreşimden kaçınıyoruz veya belirli titreşim türlerini oluşturmak isteyebiliriz. Birçok insan yapımı sistem titreşimlere maruz kalır ya da titreşim üretir. Örneğin, fanlar, vantilatörler, santrifüjlü ayırıcılar, çamaşır makineleri, torna makineleri, santrifüj pompaları, döner presler ve türbinler gibi döner parçalara sahip makinelerde herhangi bir dengesizlik titreşime neden olabilir. Bu makineler için titreşimler genellikle istenmez. Binalar ve yapılar çalışan makine nedeniyle titreşimlere maruz kalabilir. Yaya köprülerinde ve binalardaki zeminlerde de insan hareketleri nedeniyle titreşimler yaşanıyor. Yapısal sistemlerde titreşimlerden kaynaklanan dalgalanma gerilmeleri yorulmaya neden olabilir. Elektron mikroskobu gibi hassas cihazlarla ölçüm yaparken ve mikro elektromekanik sistemler üretilirken de titreşimler istenmez. Araç tasarımında titreşimli panellerden kaynaklanan gürültü veya bir denizaltının gizliliği titreşimin azaltılması ile yakından bağlantılıdır.

Kiriş titreşimleri de önemli ve ilginç bir konudur. Rastgele titreşimlere maruz kalan yapılar yorgunluğa neden olabilir. Bir kiriş, sabit bir dış yük tarafından uyarıldığında, uygulanan dış yükün frekansıyla aynı frekansta titreşir. Uygulanan yükleme frekansı sistemin doğal frekanslarından birine eşit olduğunda büyük kiriş sapmalarına neden olabilecek büyük salınımlar meydana gelir. Bu duruma rezonans (tınlaşım) denir ve aşırı yer değiştirme ve hasara yol açar. Bu gibi nedenlerden dolayı titreşim problemlerinde doğal frekansların belirlenmesi çok önemlidir.

Bu tezde, farklı kiriş sınır koşullarını analiz etmek için her iki ucunda da iki farklı dönme yayı, iki farklı ötelenme yayı ve iki farklı damper ile doğrudan ve genel bir kiriş modeli oluşturulmuş ve Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest ve sönümleyici titreşimler altındaki dinamik tepkileri analiz edilmiştir. Ayrıca herhangi bir noktada çatlak veya kademe bulunan bir kirişin titreşimi yine iki farklı kiriş teorisi kullanılarak incelenmiştir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi aynı zamanda klasik kiriş teorisi olarak da bilinir. Uygulanan yük ile ince bir kirişin sapması arasındaki ilişkiyi sunan doğrusal esneklik teorisinin basitleştirilmesidir. Bununla birlikte, klasik tek boyutlu Euler-Bernoulli teorisi bodur kirişler ve yüksek modlardaki titreşimler için yeterince kesin değildir. Timoshenko kiriş teorisi, sırasıyla 1842'de Rayleigh ve 1921'de Timoshenko tarafından sunulan döner atalet ve enine kayma deformasyonunun etkilerini hesaba katar.

Hedefler;

Bu tezin amaçları: birincisi, serbest titreşim altında çeşitli sınır koşullarındaki Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını ve mod şekillerini bulmak. İkincisi, kademe veya çatlak içeren Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin öz değerlerini ve doğal frekanslarını analiz etmek. Son olarak, sayısal sonuçlar sunarak çeşitli sınır koşullarının Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin titreşimleri üzerindeki etkilerini araştırmak.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1 Önceki Çalışmalar

2.1.1. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi

Birçok araştırmacı Euler-Bernoulli kirişlerinin çeşitli mesnetlere göre serbest titreşimini incelemiştir. Chun (1972), bir ucu serbest diğer ucunda burulma yayı bulunan kirişin frekans denklemini ve mod şekillerini incelemiştir. Lee (1973), bir ucunda yay diğer ucunda kütle bulunan kirişin frekans denklemini araştırmıştır. Maurizi ve ark. (1976), bir ucunda dönme yayı diğer ucunda ötelenme yayı bulunan bir kirişin serbest titreşim problemini çalışmıştır. Goel (1976), her iki ucunda dönme yayı ve üzerinde kütle bulunan bir kirişin serbest titreşimi üzerinde çalışmıştır. Passing (1970), yakıt çubuklarının serbest frekanslarını tahmin etmeye yönelik yaptığı çalışmalarda simetrik yaylarla desteklenen bir kiriş için frekans denklemi türetmiştir. Avcar (2014), kare kesitli alüminyum kirişlerin serbest titreşimlerini çeşitli sınır şartları altında analitik olarak incelenmiş ve bu sonuçları ANSYS programı ile doğrulamıştır. Aynı yazar (2015), dört farklı sınır koşullarında çeşitli geometrik özelliklere sahip prizmatik çelik kirişlerin doğal frekanslarını Yapay Sinir Ağı (YSA) tekniği kullanılarak elde etmiştir. Yanık ve Yaylı (2015), Fourier sinüs serileri ve Stoke dönüşümü kullanılarak elastik zemine oturmuş bir çubuğun aksel titreşim analizini değişik sınır şartlarına göre incelemiştir. Ece ve ark. (2007), üssel olarak değişen kesite sahip bir kirişin titreşimini incelemiştir. Kiriş titreşiminin analitik çözümleri basitçe desteklenen, kenetlenmiş ve serbest uçlarla bağlantılı üç farklı sınır koşulu için elde edilmiş ve her bir sınır koşulu için doğal frekanslar ve mod şekilleri belirlenmiştir. Bapat CN ve Bapat C (1987), birden fazla kütle ve ötelenme yayı taşıyan bir kirişin titreşim analizini incelemiş ve elde ettiği sonuçları farklı yay katsayılarına göre tablolar halinde sunmuşlardır. Sundararajan (1979), simetrik olmayan yaylarla mesnetli temel kiriş frekansı için basit bir matematiksel ifade türetmiştir. Rao ve Naidu (1994), her iki ucunda dönme yayı bulunan bir kirişin analizini sonlu elemanlar metoduyla yapmış ve doğal frekanslarını elde etmişlerdir. Hibbeler (1975), simetrik olmayan yaylar tarafından desteklenen bir kirişin serbest titreşim problemi üzerinde çalışmıştır fakat

sınır koşullarının yanlış olması nedeniyle frekans ifadesi ve sonuçları yanlış bulunmuştur.

Timoshenko kirişlerin titreşimleri konusunu da birçok yazar çalışmıştır. Low (2001), farklı yerlerde kirişe bağlı çok sayıda kütle taşıyan bir kirişin titreşimini incelemiştir. Majkut (2009), tek fark yöntemiyle açıklanan Timoshenko kirişlerinin serbest ve zorlanmış titreşimlerini analiz etmiştir. Laura ve ark. (1974), serbest uçta sonlu bir kütle taşıyan sabit-serbest bir kirişin doğal frekanslarını ve modal şekillerini incelemiştir. Chang (2000), merkezinde ağır bir kütle taşıyan basit mesnetli kirişin serbest titreşim özelliklerini araştırmıştır. Banerjee (2012), dinamik sertlik yöntemi kullanarak yay kütle sistemi taşıyan bir kirişin serbest titreşimini araştırmış ve doğal frekansları ve ilk beş mod şekillerini sunmuştur. Rossit ve Laura (2001a), serbest uca ötelenme yayı ile bağlı kütleyle sahip bir konsol kirişin kiriş titreşimini araştırmışlardır. Analizde nispeten daha basit Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. Aynı yazarlar (2001b), serbest uca bağlı yaylı kütle sistemi bulunan bir konsol Timoshenko kiriş üzerinde de çalışmıştır. Abramovich ve Hamburger (1992), serbest ucunda kütle olan ve ötelenme ve burulma yayları bulunan bir Timoshenko kirişi incelemiştir. Salarieh ve Ghorashi (2006), eksantrik kütleyle sahip bir Timoshenko kirişinin titreşimini incelemiş ve diğer kiriş teorileriyle karşılaştırmışlardır. Jafari-Talookolaei ve Abedi (2014) tarafından yapılan çalışmada, farklı sınır koşullarına sahip bir Timoshenko kirişinin serbest titreşimine tam çözüm bulmak için yeni bir yöntem sunulmuştur. Kati ve Gökdağ (2018), eksantrik üç boyutlu bir kirişin titreşim analizi araştırmışlardır. Cekus (2012), Lagrange çarpanını kullanarak bir Timoshenko kirişin serbest titreşimini araştırmıştır. Yuan ve ark. (2016), Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimine ilişkin denklemleri hem tek biçimli geometriye sahip olmayan hem de kiriş eksenine boyunca malzemenin homojen olmadığı durumlarda çözüm veren yeni bir yöntem önerdiler. Koç (2006), basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerini Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini kullanarak analitik sonuçlarını araştırmıştır. Huang (1961), farklı sınır koşulları altında bulunan altı tip Timoshenko kirişinin normal modlarını ve doğal frekans denklemlerini sunmuştur: pimli-pimli kiriş, serbest-serbest kiriş, sabit-sabit kiriş, sabit-serbest kiriş, sabit-pimli kiriş, pimli-serbest kiriş. Ross ve Wang (1985), iki tarafı sabit ve iki yay içeren bir Timoshenko kiriş için frekans denklemini Chen ve

Kiriakidis (2005), ise bir döner yay ve dikey bir yay içeren Timoshenko kirişinin frekans denklemini türetmişlerdir. Majkut (2009), her iki ucunda da ötelenme ve dönme yayı bulunan bir Timoshenko kirişin titreşimini analiz etmiştir. Moment, bükülme açısı ve kayma açısının toplamı yerine, bükülme açısından kaynaklanmalıdır. Ancak Majkut sonsuz küçük kiriş elementi üzerine etkiyen momentlerin denkleminde hata yapmıştır.

2.1.2. Kademeli Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi

Jang ve Bert (1989a) tarafından yapılan çalışmada çeşitli sınır koşulları altında tek adımlı bir kirişin doğal frekansları için frekans denklemleri ve sayısal çözümler elde edilmiştir. Aynı yazarlar (1989b), kademeli kirişlerin daha yüksek mod frekanslarını göz önünde bulundurmuş ve kademelerin kiriş frekansı üzerindeki etkilerini iki farklı enine kesitli kademeli kiriş kullanarak araştırmışlardır. Laura ve ark. (1994), tek kademeli bir kirişin doğal frekansları için deneysel sonuçlar sunmuştur. Maurizi ve Belles (1991), değişken kesitli kademeli kirişlerin doğal frekanslarını incelemiştir. Lee ve Bergman (1994), yedi kademeli kirişin serbest ve zorlanmış titreşimlerini temel dinamik esneklik yöntemini kullanarak incelemiştir. De Rosa (1994) ve De Rosa ve diğ. (1995), diferansiyel hareket denklemlerini ve ilgili özdeğerleri çözerek tek kademeli bir kirişin serbest titreşim frekanslarını incelemiştir. Naguleswaran, klasik sınır şartlı ve kademeli Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarını ve mod şekillerini bulmuş aynı zamanda elastik sınır şartlı ve üç kademeli bir Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarını elde etmiştir.

Elastik zemine oturan kademeli kirişlerin titreşimleri de bazı yazarlar tarafından incelenmiştir. Wang (1991), elastik zemine oturan serbest uçlu ve basit sınır şartlı kirişlerin her birinin doğal frekanslarını ve mod şekillerini çeşitli parametrelere göre incelemiştir. Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanılmıştır. Kukla(1991) Winkler elastik bir temel ile desteklenen ve değişken kesitli bir Euler-Bernoulli kirişin serbest titreşimini incelemiş ve mod şekillerini çeşitli doğal frekanslara göre elde etmiştir. Thambiratnam ve Zhuge (1995), elastik temellerde desteklenen kirişlerin serbest titreşim analizleri için basit bir sonlu elemanlar yöntemi geliştirmiş ve uygulamışlardır. Analiz, kirişi modelleyen az sayıda eleman ile hızlı ve güvenilir sonuçlar verecek ve bir mikro bilgisayar üzerinde çalışacak şekilde programlanmıştır.

Bu çalışmada elastik bir temel üzerindeki kademeli kiriş, kademeli bir elastik temel üzerindeki kiriş ve elastik bir temel üzerindeki sürekli kiriş gibi bazı özel durumlarda kirişlerin serbest titreşimine ilişkin nümerik örnekler yapılmıştır. Bu sayede mevcut sonuçlar her bir bölümde birbirleriyle karşılaştırılıp yorumlar yapılmıştır.

Farklı sınır ve yükleme koşullarına sahip kademeli Timoshenko kiriş üzerine de birçok araştırma yapılmıştır. Bhashyam and Prathap (1981), Timoshenko bir kiriş için sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. Akella and Craggs (1986), disk süreksizliğini temsil etmede kullanılan ve doğrusal olarak sivrilen elemandan daha iyi performans gösteren kademeli bir elemanın formülasyonu ile disklerin uzunluğunun etkisini de içerecek şekilde Timoshenko kiriş-mil titreşimini incelemiştir. Wang (1991), elastik temelin özellikle en düşük modda hem frekanslar hem de mod şekilleri için kademeli kirişlerin titreşimi üzerindeki etkisini araştırmıştır. Farghaly ve Gadelrab (1995), geleneksel malzemelerden farklı fiber hacim kesitine sahip tek yönlü fiber kompozit malzemelerden yapılmış kademeli bir kirişin doğal frekansları üzerinde çalışmış ve bu çalışmada doğal frekanslarda ilave kazanç gözlemlemişlerdir.

2.1.3. Çatlak ihtiva eden Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin serbest titreşimi

Birçok yazar çeşitli sınır koşulları için çatlak kiriş titreşimi üzerindeki etkisini araştırmıştır. Mahmoud (2001), hareketli bir yükün etkisi altında tek ve çift taraflı açık çatlaklar içeren basit mesnetli bir Euler-Bernoulli kiriş için titreşim analizi yapmıştır. Masoud ve ark (1998), ön gerilmeli çatlaklı bir kirişin doğal frekanslarını elde etmiş ve çatlak derinliğinin etkilerini incelemiştir. Reis ve Pala (2012) ve Pala ve Reis (2012) atalet, merkezci ve Coriolis kuvvetlerinin sırasıyla, çatlak bir konsol kirişin ve basit sınır şartlı çatlak bir kirişin dinamik tepkisi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Çatlaklı kirişlerin yanal titreşiminin belirlenmesi için Chondros ve ark. (1998), Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak tek kenarlı veya çift kenarlı açık çatlaklar içeren kirişin titreşimini incelemiştir. Çalışmadaki önemli nokta, çatlaklı kirişin tüm kiriş boyunca çatlak nedeniyle yerel esneklikten dolayı tek boyutlu bir devamlılık olarak kabul edilmesiydi. Ayrıca makalede çatlak dönme yayı olarak düşünüldüğü bir model de verilmiştir. Daha sonra bu iki model arasında bir karşılaştırma yapılarak iki teorik

model de deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu araştırmada sunulan yaklaşım hem önceki yöntemlerle hem de deneysel sonuçlarla uyumlu olduğu belirtilmiştir.

Literatürde bulunan çalışmaların çoğunda çatlakların açık olduğu varsayılmaktadır. Başka bir yaklaşım çatlakların açılıp kapanmasını hesaba katar. Çatlak nefes alıyorsa, titreşim sırasında çatlak art arda açılır ve kapanır. Chondros ve ark. (2001), böyle bir nefes çatlaklarına sahip kirişin titreşimleri ile ilgili bir çalışma sunmuştur. Bu çalışmada Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır.

Ayrıca, çatlak içeren Timoshenko kirişlerle ilgili de birçok çalışma vardır. Daha önce de belirtildiği gibi, Timoshenko kiriş teorisi hem rotasyonel atalet hem de kayma deformasyonunu dâhil ederek Euler-Bernoulli kiriş teorisinden bir fark oluşturur. Lele ve ark. (2002), kısa kirişlerde rotasyonel atalet ve kayma deformasyonunun etkilerini gözlemlemek için Timoshenko kirişin enine titreşimleriyle ilgili bir çalışma yapmıştır. Çalışmada çatlakların belirlenmesinde türetilmiş yöntem kullanılmıştır. Ayrıca çatlak konumunun frekanstaki değişim bilgisinden elde edilebileceği ters bir yöntem geliştirilmiştir. Çatlak bir dönme yayı olarak modellenmiştir. Bu şekilde kiriş iki bölüme ayrılmış ve bu iki bölüm çatlak konumunda bir dönme yayı ile birleştirilmiştir. Hareket denklemlerini çıkarıldıktan ve çözüldükten sonra denklem içindeki bilinmeyen sabitler sınır şartları ve çatlak bölgesindeki uyumluluk şartları uygulanarak belirlenmiştir.

Chatı ve ark. (1997), sonlu elemanlar yöntemini kullanarak enine kenar çatlakları içeren bir kirişin analizini incelemiştir. Bu çalışmada, kirişteki çatlakların açılıp kapandığı düşünülmüştür. Makalede parçalı doğrusal bir sistem tanımlanarak çatlakların açılıp kapanmasından kaynaklanan süreksizlik çözümlenmiştir. Sonlu elemanlar metodu kullanılarak her bir lineer parçanın doğal frekansları hesaplanmış ve bu doğal lineer parçaların frekansları kullanılarak araştırmada verilen yönteme göre bi-linear frekans elde edilmiştir. Makalede pertürbasyon yöntemi ile doğal frekanslar da elde edilmiştir. Sonuçların karşılaştırılması parçalı doğrusal sistemin iyi bir yaklaşım olduğunu göstermiştir.

Kisa ve Gurel (2006, 2007), çok çatlaklı kirişlerin ve tek çatlaklı kademeli kirişlerin titreşim analizi için sonlu eleman ve bileşen modu sentez yöntemlerini bir araya getiren

sayısal bir model sunmuşlardır. Tabarraei ve Sukumar (2008), çatlaklar gibi süreksiz alanların meshten bağımsız modellenmesi için genişletilmiş sonlu elemanlar yöntemini sunmuşlardır. Sonlu elemanlar yöntemlerinin ileri çatlak tanımlama problemini çözmek için kullanımı çok sayıda araştırma ile sunulmaktadır. Lele ve Maiti (202), çatlağın varlığını bir burulma yayı olarak modellemiş ve çatlağın etkisini Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanarak irdelemişlerdir. Krawczuk ve ark. (2003), aynı çalışmayı Timoshenko kiriş teorisi için uygulamıştır. Loya ve ark. (2006), kirişte bulunan çatlağı hem kesme kuvvetlerinin hem de eğilme momentlerinin etkilerini içerecek şekilde kütsüz ötelenme ve dönme yayı olarak modellemiştir.

Kirişin titreşimi çoklu çatlaklar için de incelenmiştir. Lin ve ark. (2002), çoklu çatlak içeren kirişin serbest titreşimini incelemiştir. Bu çalışmada çatlak sadece dönme yayı olarak modellenmiştir. Lin bu çalışmada özdeğerleri hesaplamak için transfer matrisi yöntemi kullanılmıştır. Aynı yazar (2004), transfer matris yöntemiyle çatlak içeren basit mesnetli bir Timoshenko kirişin titreşim analizini kirişi iki kısma ayırıp sınır şartları ile uyumluluk şartlarını kullanarak elde etmiştir. Lin ayrıca çatlak konumu ve derinliğini de bulan bir yöntem sunmuştur. Çatlak içeren bir konsol Euler-Bernoulli kirişinin serbest ve zorlanmış titreşim analizleri Orhan (2007), tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, serbest titreşim analizinin çatlak yerini bulmak için daha faydalı olduğu zorlanmış titreşim analizi ise çatlak derinliğini belirlemek için daha uygun olduğu belirtilmiştir. Bu analitik çalışmalara ek olarak Nahvi ve Jabbari (2005), Hou ve Lu (2017) tarafından da bazı deneysel çalışmalar yapılmıştır. Altunışık ve ark. (2019), deneysel sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Christides ve Barr (1984), Euler-Bernoulli kiriş teorisi ile aynı yaklaşım seviyesinde tek boyutlu bir çatlak kiriş teorisi geliştirmişlerdir. Ostachowicz ve Krawczuk (1991), bir konsol kirişte iki açık çatlağın frekanslar üzerindeki etkisini irdeleyen bir analiz metodunu sunmuşlardır. Yazarlar bu analiz metodunda kirişte bulunan çatlağı bir yay olarak modellemişler ve daha sonra kirişin her bir kısmı için sınır şartlarını ve çatlağın bulunduğu bölgede uyumluluk şartlarını kullanarak sayısal sonuçları elde etmişlerdir. Dimaragonas (1996), çatlak yapıların titreşimi konusunda bir derleme sunmuştur. İncelemesinde çatlak rotor, çubuk, kiriş, plaka, boru, bıçak ve mermilerin titreşimi bulunmaktadır. Kisa ve Brandon (2000), çatlak kirişin çatlaktan kaynaklı şekil

değiştirmesini hesaba katmak için bi-linear bir rijitlik modeli kullanmışlardır. Saavedra ve Cuitino (2001) ve Chondros ve ark. (20001), çalışmalarında çatlak mekaniği teorisini kullanarak çatlağın çevresinde ürettiği ek esnekliği de hesaba katmışlardır. Zheng (2004), çatlak içeren bir kirişin doğal frekanslarını ve mod şekillerini sonlu elemanlar yöntemini kullanılarak elde etmiştir. Zheng bu çalışmasında toplam esneklik matrisini ve dolayısıyla rijitlik matrisini elde etmek için kiriş elemanının esneklik matrisine genel bir ek esneklik matrisi eklemiştir. Zsolt ve Huszar (2008), betonarme kirişlerin titreşimi için laboratuvar deneyleri ve sayısal benzetimlerle analiz edilen yarı periyodik açılmayı ve çatlakların kapatılması konularını incelemiştir. Doğrusal analiz doğal frekanslar için alt ve üst sınırlar sağlamıştır. Yoon ve ark. (2007), iki açık çatlağın basit sınır şartlı bir kirişin dinamik davranışı üzerine hem analitik hem de deneysel olarak etkisini araştırmıştır. Behzad ve ark. (2010), kenar çatlağına sahip kirişlerin eğilme titreşimi için sürekli bir model geliştirmiştir. Model, yer değiştirme alanının klasik Euler-Bernoulli kirişinin yer değiştirmesinin ve çatlak nedeniyle yer değiştirmenin bir süper pozisyonu olduğunu varsaymaktadır. Mousarezaee ve Hassannejad (2010), sayısal yöntemlere alternatif olarak nefes alan basit mesnetli çatlak bir kirişin serbest titreşim davranışını araştırmak için yeni bir analitik yöntem geliştirmişlerdir. Çatlaklı kiriş için bir SDOF modeli geliştirilmiş ve zamana bağlı olan rijitlik, periyodik bir fonksiyon kullanılarak modellenmiştir. Araştırmacıların çoğu tek çatlağın yapının dinamikleri üzerindeki etkisini incelerken Shifrin (1999), rastgele sonlu sayıda enine açık çatlağına sahip bir kirişin doğal frekanslarını incelemiştir. Aydın (2008), rasgele sayıda çatlak içeren kirişlerin titreşim frekanslarını ve mod şekillerini Euler-Bernoulli kiriş teorisini kullanılarak incelemiştir. Çalışmada eksenel yükün etkisi de incelenmiştir. Çatlak bir dönme yayı olarak düşünülmüş ve çatlakların tüm durumlar için açık olduğu varsayılmıştır. Farklı sınır koşulları ve rastgele sayıda çatlak için doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilmiştir. Her bir sınır koşulu için farklı çatlak derinlikleri ile çözümler elde edilmiş ve doğal frekansların çatlak derinliklerinden önemli ölçüde etkilendiği gözlemlenmiştir. Benzer bir çalışma Khiem ve Lien (2001), tarafından sayısal bir yaklaşım kullanılarak yapılmış ve keyfi sayıda çatlak içeren bir kirişin doğal frekanslarının belirlenmesi için yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışmada, Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmış ve çatlaklar benzer şekilde dönme yayları tarafından

modellenmiştir. Transfer matrisi kullanımıyla hesaplama süresi önemli ölçüde azaltılmıştır.

2.2 Titreşim Tarihçesi ve Tanımlamalar

2.2.1. Titreşimin tarihçesi ve giriş teorileri:

Titreşim konusuna olan ilginin müzik aletlerinin icat edilmesiyle ortaya çıktığı tahmin edilmektedir. Bazı filozoflar ve müzik ile ilgilenenler ses oluşumunun kanun ve kurallarının var olabileceği fikriyle çeşitli araştırmalar yapmıştır. Bu ilk çalışmalar ses ile ilgili bazı kuralların olduğunu ortaya çıkarmıştır. Müzikal sesleri bilimsel olarak araştıran ilk bilim insanının Pisagor (MÖ 582-507) olduğu düşünülmektedir. Pisagor titreşen yaylar üzerine çeşitli deneyler yapmıştır. Bu çalışmalarda farklı boydaki teller eşit gerilmelere maruz bırakıldığında kısa boylu olan telin daha yüksek bir nota verdiği fark edilmiştir. Aristo (MÖ 384-322) insan sesinin çalgı seslerinden daha yumuşak olduğuna dair araştırma sonuçlarını bir makalede yazdı. Aristoxenus (MÖ 360-300) çeşitli ses bilgilerinin yer aldığı kitaplar serisini yayımladı. Zhanhg Heng (78-139) o zamana kadar yapılan ilk depremölçeri icat etti. Fıçı şekline benzeyen bu cihaz depremin hem doğrultusu hem de zamanı hakkında bilgi edinme olanağını sağladı. Galileo Galilei (1564-1642) kalp atışlarıyla salınım hareketi yapan bir sarkacın periyodunu ölçtü ve bu inceleme sonucunda periyodun salınımın genliğinden bağımsız olduğu sonucuna vardı. Marin Mersenne (1588-1648) uzun bir sicimin titreşim frekansını inceleyip gözlemlerini daha sonra '*Harmonicorum Liber*' isimli kitabında yayımlamıştır. Robert Hook (1635-1703) ve Joseph Sauveur (1653–1716) bir sicimin titreşim frekansı ile perde arasındaki ilişkiyle ilgili çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Sauveur (1653–1716) ayrıca bir sicimin aynı anda mevcut birkaç harmoniği ile titreşebildiğini ortaya çıkarmıştır. Sir Isaac Newton (1642-1727) 1686 yılında yayımladığı '*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*' isimli kitabında bulunan Newton'un ikinci hareket kanunu titreşim hareketi yapan cisimlerin hareket denklemlerini bulmak için araştırmacılar tarafından çokça kullanılmıştır. Brook Taylor (1685-1731) titreşen sicimin teorik çözümünü bulmuş ve daha önce Galileo ve Mersenne tarafından sunulan deneysel sonuçlarla uyuştuğunu ortaya çıkarmıştır. Daha sonraki araştırmacılar eğilme etkisinin enine titreşimli bir kirişte en etkili faktör

olduğunu bulmuşlardır. Jacob Bernoulli (1654-1705), bir elastik kirişin eğriliği ile herhangi bir noktada eğilme momenti arasındaki doğrudan orantılılığı ortaya koymuştur. Daniel Bernoulli (1700-1782), titreşimli bir kirişin hareket diferansiyel denklemini formüle etmiştir. Leonhard Euler (1707-1783), Jacob Bernoulli'nin teorisini çeşitli yükleme koşullarına maruz kalan elastik kirişlerin analizinde kullanmıştır. Günümüzde titreşim analizlerinin yapıldığı bu yöntem Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak adlandırılmaktadır. Basit olduğu ve makul mühendislik yaklaşımları sağladığı için Euler-Bernoulli kiriş teorisi (klasik kiriş teorisi) yaygın olarak kullanılmaktadır. Lord Rayleigh (1842–1919) Euler-Bernoulli kiriş teorisine dönme etkisini ekleyerek günümüzde Rayleigh yöntemi olarak adlandırdığımız yöntemi sunmuştur. Lord Rayleigh'nin ilk defa yayınlanan “Theory of Sound” adlı kitabı titreşimlerle ilgili ilk kapsamlı yayınlardan biridir. Kayma kiriş teorisi ise Euler-Bernoulli kiriş teorisine kayma deformasyon etkisini ekler. 1921'de Ukrayna/Rus doğumlu bilim adamı Stephen Prokofyevich Timoshenko (1878–1972), Euler-Bernoulli kiriş teorisinden farklı olarak kayma ve dönme etkisini içeren yeni bir kiriş teorisi önerdi.

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde tüm enine kayma gerilmelerinin sıfır olduğu varsayılmaktadır. Fakat enine kayma gerilmesinin kiriş titreşimleri üzerindeki etkisi, düşük kayma modülüne sahip derin kirişler veya sandviç kirişlerde ihmal edilemez çünkü bu etkiler nispeten belirgin hale gelir. Timoshenko kiriş teorisi normallik varsayımını açarak enine kayma deformasyonunun etkisine dikkate alır ve Euler-Bernoulli kiriş teorisinin bir uzantısıdır. Bu teoride düzlem bölümleri düz kalır ancak deformasyondan sonra düzlem bölümleri boylamasına eksene normal olması gerekmez, bu nedenle enine kayma gerilmesi sıfırdan farklı olarak kabul edilir.

Fiziksel olarak deformasyon ve dönme atalet etkileri dikkate alındığında kirişin sertliği etkili bir şekilde düşer. Bu durum statik bir yük altında daha büyük bir sapmaya neden olur. Dolayısıyla belirli sınır koşulları altında öngörülen öz frekanslar düşer. Kiriş malzemesinin kayma modülü sonsuzluğa yaklaşırsa -ve böylece kiriş kaymada sertleşirse- ve dönme eylemsizlik etkileri ihmal edilirse Timoshenko kiriş teorisi Euler-Bernoulli kiriş teorisine doğru birleşir. Çizelge 1,1'de, dört kiriş teorisi arasındaki temel farklılıklar gösterilmektedir. (Han ve ark. 1999)

Çizelge 1.1. Kiriş Teorileri

	Euler-Bernoulli	Rayleigh	Kayma	Timoshenko
Eğilme Momenti	+	+	+	+
Yanal Yer Değişirmeler	+	+	+	+
Dönme Ataletleri		+		+
Kayma Deformasyonu			+	+

Başlıca katkıda bulunanlardan bazılarının ve katkılarının kısa bir özeti ise Çizelge 1.2'de verilmiştir.

Çizelge 1.2 Titreşim alanındaki önemli gelişmeler

Pisagor	(MÖ 582-507)	Müzikal sesler ve titreşen yaylar üzerine incelemeler
Aristo	(MÖ 384-322)	İnsan ve çalgı sesleri hakkında incelemeler
Aristoxenus	(MÖ 360-300)	Çeşitli ses bilgileri ve kitaplar serisi
Zhanhg Heng	(78-139)	İlk depremölçer cihazının bulunması
Galileo Galilei	(1564–1642)	Sarkacın frekans ölçümü, sicimin titreşimi
Marin Mersenne	(1588–1648)	Sicimin titreşimi
John Wallis	(1616–1703)	Sicimin titreşimi, mod ve harmonik gözlemler
Christian Huygens	(1629–1695)	Sarkaçın doğrusal olmayan salınımları
Robert Hooke	(1635–1703)	Perde-frekans ilişkisi; Hooke'un esneklik yasası
Isaac Newton	(1642–1727)	Hareket kanunları, matematik
Gottfried Leibnitz	(1646–1716)	Hareket kanunları, matematik
Joseph Sauveur	(1653–1716)	Tel titreşim: en düşük frekans için “temel harmonik” ve daha yüksek frekans bileşenleri için “harmonikler” ismini verdi
Brook Taylor	(1685–1731)	Titreşimli tel frekans hesaplaması; Taylor teoremi
Daniel Bernoulli	(1700–1782)	Doğrusal süperpozisyon ilkesi, sicim ve kiriş titreşimleri
Leonhard Euler	(1707–1783)	Açısal momentum prensibi, karmaşık sayılar,

		Euler denklemleri; kiriş, plaka ve yüzey titreşimleri
Jean d'Alembert	(1717–1783)	D'Alembert'in prensibi; hareket denklemleri; dalga denklemi
Charles Coulomb	(1736–1806)	Burulma titreşimleri; sürtünme
Joseph Lagrange	(1736–1813)	Lagrange'ın denklemleri; açık ve kapalı organ borularının frekansları
E. F. F. Chladni	(1756–1824)	Plaka titreşimleri: düğüm çizgileri
Jacob Bernoulli	(1759–1789)	Kiriş, plaka ve yüzey titreşimleri
J. B. J. Fourier	(1768–1830)	Fourier serileri
Sophie Germain	(1776–1831)	Plak titreşimlerini düzenleyen denklemler
Simeon Poisson	(1781–1840)	Plaka, zar ve çubuk titreşimleri; Poisson'ın etkisi
G. R. Kirchhoff	(1824–1887)	Plaka ve zar titreşimleri
R. F. A. Clebsch	(1833–1872)	Elastik ortam titreşimleri
Lord Rayleigh	(1842–1919)	Enerji yöntemleri: Rayleigh yöntemi; Strutt diyagramı; titreşim tezi
Gaston Floquet	(1847–1920)	Periyodik salınımların kararlılığı: Floquet teorisi
Henri Poincaré	(1854–1912)	Doğrusal olmayan salınımlar; Poincaré haritası; istikrar; kaos
A. M. Liapunov	(1857–1918)	Denge kararlılığı
Aurel Stodola	(1859–1943)	Kiriş, plaka ve zar titreşimleri; türbin kanatları
C. G. P. De Laval	(1845–1913)	Dengesiz döner disk titreşimleri: pratik çözümler
Stephen Timoshenko	(1878–1972)	Kiriş titreşimleri; elektrik motorlarında, buhar türbinlerinde ve hidroelektrik türbinlerinde titreşim problemleri
Balthasar v. der Pol	(1889–1959)	Doğrusal olmayan salınımlar: van der Pol salıncacı
Jacob P.D. Hartog	(1901–1989)	Coulomb sönümlenmeli doğrusal olmayan sistemler; döner ve pistonlu makinelerin

		titreşimi; titreşim ders kitabı
--	--	---------------------------------

2.2.2. Çeşitli tanımlar

Kiriş: Genel olarak uzunlamasına eksenine dik yükleri destekleyen yapısal bir eleman "kiriş" olarak adlandırılır. Kesit boyutlarından çok daha uzun bir uzunluğa sahiptir. Genellikle kirişin uzunlamasına eksenine dik yükler taşır ve bu nedenle yükler uzunluğa dik açılardadır.

Titreşim: Belli bir zaman aralığından sonra kendini tekrar eden herhangi bir hareket titreşim olarak adlandırılır. Bir sistemin titreşimi potansiyel enerjinin ve kinetik enerji arasındaki dönüşümüne dayanır. Ayrıca sistem sönümlü ise enerjinin bir kısmı kaybolur.

Titreşimli bir sistemin üç temel elemanı vardır:

Potansiyel enerji depolayan elemanlar: Yay ve esnek cisimler

Kinetik enerji depolayan sistemler: Kütle ve atalet

Enerji boşalmasını sağlayan elemanlar: Damper ve sönümleyiciler

a-) **Elastik Elemanlar (Yaylar):** Yaylar titreşim sistemlerindeki kütleleri birbirine bağlayan ve kütlelerin bağıl hareketlerini sağlayan elemanlardır. Yaylar lineer ve nonlineer karakteristiğe sahip olabilirler. Lineer karakteristiğe sahip yaylar Hooke yasasına uygun davranırlar ve yayda oluşan elastik kuvvet yaydaki şekil değişimi ile orantılıdır. Fakat titreşim genlikleri yüksek olduğu zaman veya metal olmayan malzemeler kullanıldığında yaylar lineer davranışa sahip olmayabilirler.

b-) **Atalet Elemanları:** Atalet elemanları kinetik enerji depolayan elemanlardır. Atalet elemanları öteleme ve dönme hareketlerini ayrı ayrı yapabilecekleri gibi hem öteleme hem de dönme hareketini birlikte gerçekleştirilebilirler.

c-) **Sönüm elemanları:** Sönümlü sistemlerde enerji kaybını oluşturan elemanlardır. Amortisör tipi elemanlar akışkan sürtünmesi ile enerji kaybını sağlarlar ve titreşim genliklerini üstel olarak azaltırlar. Sönüm elemanlarında mekanik enerji ısı enerjisine dönüşür.

Serbestlik Derecesi: Serbestlik derecesi (DOF), herhangi bir zamanda mekanik bir sistemin konumunu tanımlayan bağımsız koordinatların sayısıdır.

Doğal Frekans: Kendi haline terk edilen ve her hangi bir dış tesire maruz olmayan bir sistemin frekansıdır.

Periyot: Bir tam salınım için geçen süredir.

Genlik: Titreşen sistemin yapacağı en büyük yer değiştirmedir.

Sönüm: Hareket esnasında enerji kaybına neden olan malzeme özelliğidir.

Mod Şekli: Gerçek dünyadaki yapılar daha karmaşıktır ve çoklu serbestlik derecelerine (MDOF) sahiptir. Sonuç olarak, gerçek dünya yapıları birçok doğal frekansa sahiptir. Yapı, bu doğal frekansların her birinde farklı şekilde titreşir ve belirli bir frekansta nasıl hareket ettiğine mod şekli denir.

Rezonans: Periyodik bir kuvvetin etkisi altında bulunan bir sistem salınımlar sergiler ve eğer kuvvetin frekansı sistemin doğal frekansına eşit ise bu salınımların genliği artma eğilimine girer. Sonuç olarak sistem belli bir genlikten sonra bütünlüğünü veya bulunduğu durumu koruyamaz ve dağılır veya bozunur. Bu duruma rezonans denir

Özdeğerler: Serbest titreşen bir sistemin doğal frekanslarıdır.

Ayrık ve sürekli sistemler: Mekanik ve yapısal sistemlerin çoğu sınırlı sayıda serbestlik derecesi kullanılarak tanımlanabilir. Bununla birlikte bazı sistemler vardır ki özellikle de sürekli elastik yapıları içerenler, sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahiptir. Çoğu mekanik ve yapısal sistem elastik (deforme olabilir) elemanlara veya bileşenlere sahiptir ve dolayısıyla sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahiptir. Sınırlı sayıda serbestlik derecesine sahip sistemler ayrık veya topaklanmış parametre sistemleri olarak bilinir. Sonsuz sayıda serbestlik dereceli sistemlere ise sürekli veya dağıtılmış sistemler denir.

2.2.3. Titreşim analiz adımları

Titreşimli bir sistemin çıktısı genel olarak başlangıç koşullarına ve dış yüklemelere bağlıdır. Fiziksel bir sistemin titreşim analizi dört adımla özetlenebilir:

1. Bir Fiziksel Sistemin Matematiksel Modellemesi
2. Hareket Denklemlerinin Formülasyonu
3. Hareket Denklemlerinin Matematiksel Çözümü
4. Sonuçların Fiziksel Yorumu

2.2.3.1. Fiziksel bir sistemin matematiksel modellenmesi

Matematiksel modellemenin amacı sistemin varlığını, doğasını, özelliklerini, yönlerini ve fiziksel sisteme dâhil olan fiziksel öğeleri veya bileşenleri belirlemektir. Modellemeyi kolaylaştırmak için gerekli varsayımlar yapılmıştır. Aşağıda bazı varsayımlar verilmiştir:

- Fiziksel bir sistemi sürekli bir madde olarak ele almak
- Newton'un hareket yasalarını dünyanın bir iç çerçeve olduğu varsayımıyla uygulamak
- Göreceli etkileri göz ardı etmek veya ihmal etmek.

Fiziksel sistemin tüm bileşenleri veya elemanları doğrusaldır. Ortaya çıkan matematik model verilen fiziksel sisteme bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayabilir. Genel olarak konuşursak tüm fiziksel sistemler doğrusal olmayan davranış sergilerler. Herhangi bir fiziksel sistemin doğru matematiksel modellenmesi sistemin davranışını düzenleyen doğrusal olmayan diferansiyel denklemlere yol açacaktır. Genellikle bu doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin bir çözümü yoktur veya bir çözümünü bulmak zor olabilir. Pratik amaçlar için hızlı çözümler sağlayan bir sistemi doğrusallaştırmak için varsayımlar yapılmıştır. Doğrusal olmayan problemlerin çoğunda hareket denklemleri için kapalı formda analitik çözümler elde etmenin mümkün olmadığı belirtilmelidir. Bu nedenle genellikle bir bilgisayar simülasyonu cevap analizi için kullanılır.

Matematiksel modelden elde edilen sonuçlar analiz edilirken matematiksel modelin yalnızca fiziksel sisteme bir yaklaşımı olduğu unutulmamalıdır ve bu nedenle sistemin gerçek davranışının farklı olabileceği bilinmelidir.

2.2.3.2. Hareket denklemlerinin formülasyonu

Matematiksel model geliştirildikten sonra doğanın temel yasaları ve dinamiğin ilkeleri uygulanabilir ve sistemin davranışını ifade eden diferansiyel denklemler elde edilebilir. Temel bir doğa kanunu sistemin yapıldığı malzemeye bakılmaksızın tüm fiziksel sistemlere uygulanan bir kanundur. Farklı malzemeler farklı çalışma koşulları altında farklı davranırlar. Temel denklemler sistemin yapıldığı malzemeler hakkında bilgi sağlar. Yer değiştirme, hız ve ivme arasındaki kinematik ilişki gibi geometrik kısıtlamaların uygulanması fiziksel sistemin matematiksel modellemesini tamamlamak için genellikle gereklidir. Gerekli sınır veya başlangıç koşullarını formüle etmek için geometrik kısıtlamaların uygulanması gereklidir. Elde edilen matematiksel model dinamik sistemin elemanlarının veya bileşenlerinin davranışına bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayabilir.

2.2.3.3. Hareket denklemlerinin matematiksel çözümü

Titreşimli bir sistemin matematiksel modellenmesi hareket denklemlerinin düzenlenmesiyle sonuçlanır. Bir sistemin hareketinin temel denklemleri sistemin cevabını bulmak için çözülür. Çözümü bulmak için birçok teknik vardır, yani adi diferansiyel denklemlerin çözümü için standart yöntemler, Laplace dönüşüm yöntemleri, matris yöntemleri ve sayısal yöntemler. Genel olarak kesin analitik çözümler birçok doğrusal dinamik sistem için ve yalnızca birkaç doğrusal olmayan sistem için kullanılabilir.

2.2.3.4. Sonuçların fiziksel yorumu

Fiziksel sistem için geçerli hareket denklemlerinin çözümü genellikle performansı verir. Modelin geçerliliğini doğrulamak için öngörülen performans deneysel sonuçlarla karşılaştırılır. Modelin revize edilmesi veya yeni bir modelin geliştirilmesi ve deneysel

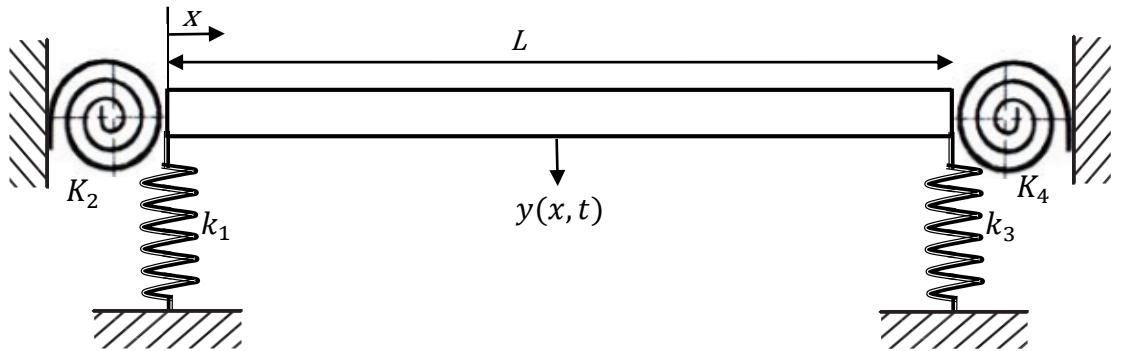
sonuçlarla karşılaştırıldığında yeni bir tahmin yapılması gerekebilir. Sonuçların fiziksel yorumu analiz prosedüründe önemli ve son bir adımdır. Aşağıda bu fiziksel yorumlar ile istidlal yapılabilecek bazı örnekler verilmiştir.

- matematiksel çözümden genel çıkarımlar alınması
- tasarım eğrilerinin geliştirilmesi
- bir sonuca varmak için (tipik veya belirli bir problem için) basit bir aritmetikte varılması
- sonuçların ve ilgili sistemde gerekli veya istenen herhangi bir değişikliğin (varsa) önemi ile ilgili öneriler

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Karma Sınır Koşullarında Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları

Gerçek dünyada bir kirişin sınır koşulları karmaşıktır. Çoğu durumda ne tamamen sabit ne de tamamen serbesttir. Bu bölümde uçlarında iki farklı dönme yayı ve iki farklı ötelenme yayı bulunan bir Euler-Bernoulli kirişin genel bir modeli incelenmiştir.



Şekil 3.1. Karma sınır şartlarına maruz kiriş

Euler-Bernoulli kirişin serbest titreşimi halinde hareket diferansiyel denklemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Burada y yanal yer değiştirmeler, EI kirişin eğilme rijitliği, ρ kütle yoğunluğu, A kesit alanı, x kiriş uzunluğu boyunca mesafe ve t zamandır. (1) denklemi değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile czlebilir.

$$y(x,t) = W(x)T(t) \quad (3.2)$$

kabul edelim. Bu ifadeyi hareket denkleminde yerine koyarak

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = a = \omega^2 = \text{sabit} \quad (3.3)$$

buluruz. Burada, $c^2 = EI / \rho A$ dır ve buradan

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.4b)$$

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde ederiz. Burada

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (3.5)$$

dır. Denklem (3.4b)'nin czm

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.6)$$

formundadır. Buradaki A ve B başlangıç şartlarından bulunacak sabitlerdir. Denklem (3.4a)'nın çözümü

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (3.7)$$

şeklindedir. Buradaki C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitleri sınır şartlarından bulunacaktır. Kirişin sağ ve sol uçlarındaki sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3} &= -k_1 y(0,t) \\ EI \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} &= K_2 \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} \\ EI \frac{\partial^3 y(L,t)}{\partial x^3} &= k_3 y(L,t) \\ EI \frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial x^2} &= -K_4 \frac{\partial y(L,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada k_1 ve k_3 ötelenme yay sabitleri K_2 ve K_4 burulma yay sabitleridir. (3.8) sınır koşulları kullanılarak $W(x)$ üzerindeki şartlar

$$\begin{aligned} EI W'''(0) &= -k_1 W(0) \\ EI W''(0) &= K_2 W'(0) \\ EI W'''(L) &= k_3 W(L) \\ EI W''(L) &= -K_4 W'(L) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Bu şartları (3.7) denkleminde uygulanarak

$$\begin{aligned} EI \beta^3 C_1 - k_1 C_2 - EI \beta^3 C_3 - k_1 C_4 &= 0 \\ -K_2 C_1 - EI \beta C_2 - K_2 C_3 + EI \beta C_4 &= 0 \\ (-EI \beta^3 \cos \beta L - k_3 \sin \beta L) C_1 + (EI \beta^3 \sin \beta L - k_3 \cos \beta L) C_2 \\ + (EI \beta^3 \cosh \beta L - k_3 \sinh \beta L) C_3 + (EI \beta^3 \sinh \beta L - k_3 \cosh \beta L) C_4 &= 0 \\ (-EI \beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L) C_1 + (-EI \beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L) C_2 \\ + (EI \beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L) C_3 + (EI \beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L) C_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Basitleştirme maksadıyla bazı kısaltmalar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned}
u &= \beta L, \quad a_1 = \frac{EI\beta^3}{k_1}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -\frac{EI\beta^3}{k_1}, \quad a_4 = -1 \\
a_5 &= -1, \quad a_6 = -\frac{EI\beta}{K_2}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{EI\beta}{K_2} \\
a_9 &= (-EI\beta^3 \cos \beta L - k_3 \sin \beta L), \quad a_{10} = (EI\beta^3 \sin \beta L - k_3 \cos \beta L) \\
a_{11} &= (EI\beta^3 \cosh \beta L - k_3 \sinh \beta L), \quad a_{12} = (EI\beta^3 \sinh \beta L - k_3 \cosh \beta L) \\
a_{13} &= (-EI\beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L), \quad a_{14} = (-EI\beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L) \\
a_{15} &= (EI\beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L), \quad a_{16} = (EI\beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.10) denklemleri (3.11)'te belirtilen kısaltmalarla birlikte matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ya da

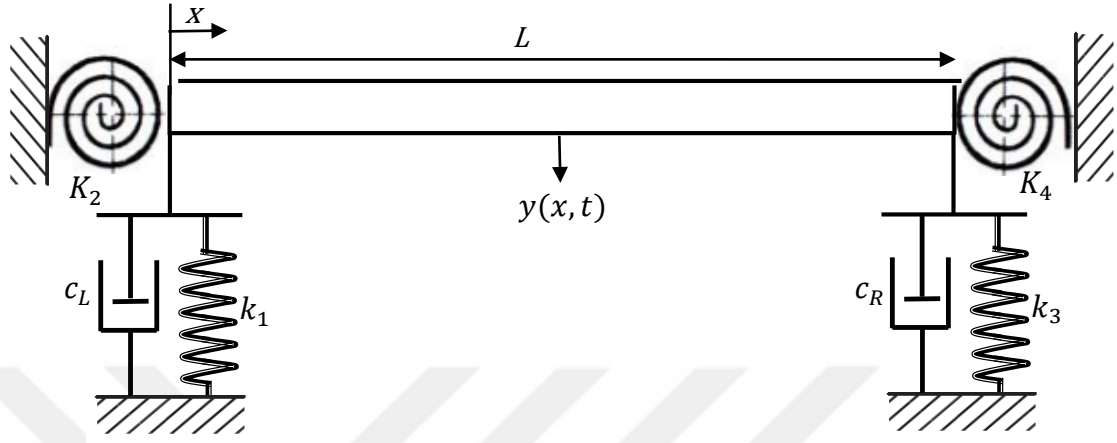
$$[A][B] = [0] \tag{3.13}$$

elde edilir. Burada, $[A]$; (3.12) denkleminin en solundaki matristir. C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitlerinin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \tag{3.14}$$

olmalıdır. Denklem 3.14'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'de sunulmuştur.

3.2. Dampier İçeren Karma Sınır Koşullarında Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları



Şekil 3.2. Dampier içeren karma sınır şartlarına maruz kiriş

Daha önce Euler-Bernoulli kirişin hareket denklemi ve çözüm formu verilmişti. Denklem (3.4a)'nın çözümü

$$W(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (3.15)$$

şeklindedir. Buradaki C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitleri yine sınır şartlarından bulunacaktır. Kirişin sağ ve sol uçlarındaki sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^3 y(0, t)}{\partial x^3} &= -k_1 y(0, t) - c_L \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} \\ EI \frac{\partial^2 y(0, t)}{\partial x^2} &= K_2 \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} \\ EI \frac{\partial^3 y(L, t)}{\partial x^3} &= k_3 y(L, t) + c_R \frac{\partial y(L, t)}{\partial t} \\ EI \frac{\partial^2 y(L, t)}{\partial x^2} &= -K_4 \frac{\partial y(L, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.16) sınır koşulları kullanılarak $W(x)$ üzerindeki şartlar

$$\begin{aligned}
EIW'''(0) &= -k_1W(0) - i\omega c_L W_1 \\
EIW''(0) &= K_2W'(0) \\
EIW'''(L) &= k_3W(L) + i\omega c_R W_1 \\
EIW''(L) &= -K_4W'(L)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Bu şartlar Denklem (3.15)'te uygulanarak

$$\begin{aligned}
&(-\beta^3 L^3)C_1 + (k_x + i\beta^2 L^2 c_x)C_2 + (\beta^3 L^3)C_3 + (k_x + i\beta^2 L^2 c_x)C_4 = 0 \\
&(-K_2 C_1 - EI\beta C_2 - K_2 C_3 + EI\beta C_4) = 0 \\
&(-\beta^3 L^3 \cos \beta L - k_y \sin \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \sin \beta L)C_1 \\
&+ (\beta^3 L^3 \sin \beta L - k_y \cos \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \cos \beta L)C_2 \\
&+ (\beta^3 L^3 \cosh \beta L - k_y \sinh \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \sinh \beta L)C_3 \\
&+ (\beta^3 L^3 \sinh \beta L - k_y \cosh \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \cosh \beta L)C_4 = 0 \\
&(-EI\beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L)C_1 + (-EI\beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L)C_2 \\
&+ (EI\beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L)C_3 + (EI\beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L)C_4 = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. Burada

$$k_x = \frac{k_1 L^3}{EI}, c_x = \frac{c_L L^3}{\sqrt{\rho A E I}}, k_y = \frac{k_3 L^3}{EI}, c_y = \frac{c_R L^3}{\sqrt{\rho A E I}}$$

dır. Basitleştirme amacıyla bazı kısaltmalar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\beta^3 L^3, \quad a_2 = k_x + i\beta^2 L^2 c_x, \quad a_3 = \beta^3 L^3, \quad a_4 = k_x + i\beta^2 L^2 c_x \\
a_5 &= -1, \quad a_6 = -\frac{EI\beta}{K_2}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{EI\beta}{K_2} \\
a_9 &= (-\beta^3 L^3 \cos \beta L - k_y \sin \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \sin \beta L) \\
a_{10} &= (\beta^3 L^3 \sin \beta L - k_y \cos \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \cos \beta L) \\
a_{11} &= (\beta^3 L^3 \cosh \beta L - k_y \sinh \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \sinh \beta L) \\
a_{12} &= (\beta^3 L^3 \sinh \beta L - k_y \cosh \beta L - i\beta^2 L^2 c_y \cosh \beta L) \\
a_{13} &= (-EI\beta \sin \beta L + K_4 \cos \beta L), \quad a_{14} = (-EI\beta \cos \beta L - K_4 \sin \beta L) \\
a_{15} &= (EI\beta \sinh \beta L + K_4 \cosh \beta L), \quad a_{16} = (EI\beta \cosh \beta L + K_4 \sinh \beta L)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.18) denklemleri (3.19)'da belirtilen kısaltmalarla birlikte matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

ya da

$$[A][B] = [0] \quad (3.21)$$

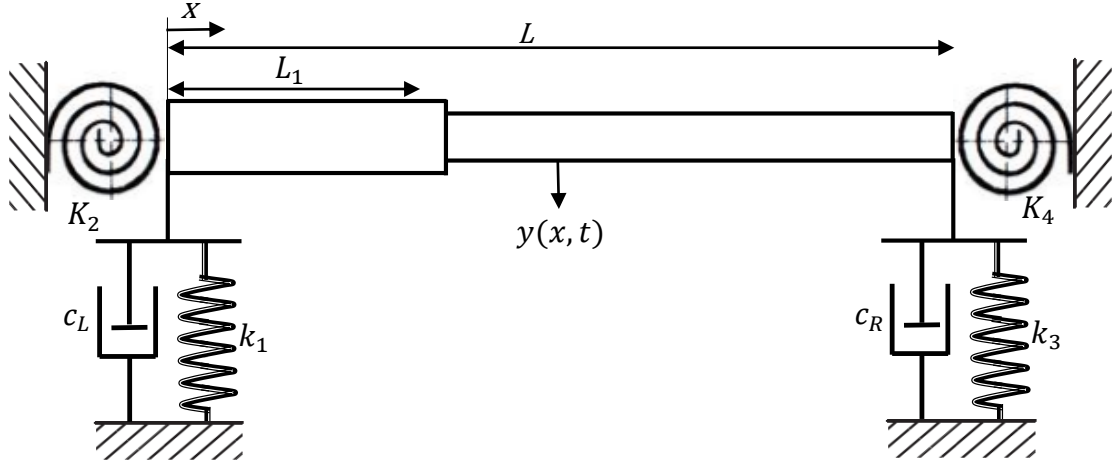
elde edilir. Burada, $[A]$; (14) denkleminin en solundaki matristir. C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \quad (3.22)$$

olmalıdır. Denklem 3.22'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'de sunulmuştur.

3.3.Karma Sınır Koşullarında Kademeli Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları

Karmaşık sınır koşullarına sahip kademeli bir kirişi ele alalım. Kademe $x=L_1$ noktasındadır ve kiriş için ilgili boyutlar şu şekildedir: genişlik b , yükseklik h , kiriş uzunluğu L (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Karma sınır şartlarına maruz kademeli kiriş

Kiriş iki ayrı parça olarak düşünülüp her bir kısım için Euler-Bernoulli teorisi uygulanmalıdır. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre serbest titreşim durumunda her bölüm için hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} &= \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, & 0 < x < L_1 \\
 E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} &= \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}, & L_1 < x < L
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Burada y_1 ve y_2 yanal yer değiştirmeler $E_1 I_1$ ve $E_2 I_2$ kirişin eğilme rijitlikleri ρ_1 ve ρ_2 kütle yoğunlukları A_1 ve A_2 kesit alanları, x kiriş uzunluğu boyunca mesafe ve t zamandır. (3.23) denklemleri değişkenlerine ayırıştırma yöntemi ile çözülebilir.

$$\begin{aligned}
 y_1(x, t) &= W_1(x) e^{i\omega t} \\
 y_2(x, t) &= W_2(x) e^{i\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

olarak kabul edilebilir. Bu ifadeler hareket denkleminde yerine koyularak

$$\frac{c_1^2}{W_1(x)} \frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} = \omega^2 = \text{sabit}$$

$$\frac{c_2^2}{W_2(x)} \frac{d^4 W_2(x)}{dx^4} = \omega^2 = \text{sabit}$$
(3.25)

bulunur. Burada $c_1^2 = E_1 I_1 / \rho_1 A_1$, $c_2^2 = E_2 I_2 / \rho_2 A_2$ dır ve buradan

$$\frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} - \beta_1^4 W_1(x) = 0$$
(3.26a)

$$\frac{d^4 W_2(x)}{dx^4} - \beta_2^4 W_2(x) = 0$$
(3.26b)

şeklinde iki adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada

$$\beta_1^4 = \frac{\omega^2}{c_1^2} = \frac{\rho_1 A_1 \omega^2}{E_1 I_1}$$

$$\beta_2^4 = \frac{\omega^2}{c_2^2} = \frac{\rho_2 A_2 \omega^2}{E_2 I_2}$$
(3.27)

dır. Denklem (3.26a) ve (3.26b)'nin çözümü sırasıyla

$$W_1(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x$$

$$W_2(x) = C_5 \sin \beta x + C_6 \cos \beta x + C_7 \sinh \beta x + C_8 \cosh \beta x$$
(3.28)

şeklindedir. Buradaki $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ sabitleri sınır şartlardan ve uyumluluk koşullarından bulunacaktır. Kirişin sağ ve sol uçlarındaki sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
E_1 I_1 \frac{\partial^3 y_1(0,t)}{\partial x^3} &= -k_1 y_1(0,t) - c_L \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial t} \\
E_1 I_1 \frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial x^2} &= K_2 \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x} \\
E_2 I_2 \frac{\partial^3 y_2(L,t)}{\partial x^3} &= k_3 y_2(L,t) + c_R \frac{\partial y_2(L,t)}{\partial t} \\
E_2 I_2 \frac{\partial^2 y_2(L,t)}{\partial x^2} &= -K_4 \frac{\partial y_2(L,t)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Kirişin kademe bölgesindeki uyumluluk koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
y_1(L_1,t) &= y_2(L_1,t) \\
\frac{\partial y_1(L_1,t)}{\partial x} &= \frac{\partial y_2(L_1,t)}{\partial x} \\
E_1 I_1 \frac{\partial^2 y_1(L_1,t)}{\partial x^2} &= E_2 I_2 \frac{\partial^2 y_2(L_1,t)}{\partial x^2} \\
E_1 I_1 \frac{\partial^3 y_1(L_1,t)}{\partial x^3} &= E_2 I_2 \frac{\partial^3 y_2(L_1,t)}{\partial x^3}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(3.29) sınır şartları ve (3.30) uyumluluk koşulları kullanılarak $W(x)$ üzerindeki şartlar

$$\begin{aligned}
E_1 I_1 W_1'''(0) &= -k_1 W_1(0) - i\omega c_L W_1 \\
E_1 I_1 W_1''(0) &= K_2 W_1'(0) \\
E_2 I_2 W_2'''(L) &= -k_3 W_2(L) + i\omega c_R W_2 \\
E_2 I_2 W_2''(L) &= K_4 W_2'(L)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
W_1(L_1) &= W_2(L_1) \\
W_1'(L_1) &= W_2'(L_1) \\
E_1 I_1 W_1''(L_1) &= E_2 I_2 W_2''(L_1) \\
E_1 I_1 W_1'''(L_1) &= E_2 I_2 W_2'''(L_1)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir. Bu şartlar (3.28) denklemlerinde uygulanarak

$$\begin{aligned}
& (-\beta_1^3 L^3) C_1 + (k_x + i\beta_1^2 L^2 c_x) C_2 + (\beta_1^3 L^3) C_3 + (k_x + i\beta_1^2 L^2 c_x) C_4 = 0 \\
& -K_2 C_1 - E_1 I_1 \beta_1 C_2 - K_2 C_3 + E_1 I_1 \beta_1 C_4 = 0 \\
& (-\beta_2^3 L^3 \cos \beta_2 L - k_y \sin \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \sin \beta_2 L) C_5 \\
& + (\beta_2^3 L^3 \sin \beta_2 L - k_y \cos \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \cos \beta_2 L) C_6 \\
& + (\beta_2^3 L^3 \cosh \beta_2 L - k_y \sinh \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \sinh \beta_2 L) C_7 \\
& + (\beta_2^3 L^3 \sinh \beta_2 L - k_y \cosh \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \cosh \beta_2 L) C_8 = 0 \\
& (-E_2 I_2 \beta_2 \sin \beta_2 L + K_4 \cos \beta_2 L) C_5 + (-E_2 I_2 \beta_2 \cos \beta_2 L - K_4 \sin \beta_2 L) C_6 \\
& + (E_2 I_2 \beta_2 \sinh \beta_2 L + K_4 \cosh \beta_2 L) C_7 + (E_2 I_2 \beta_2 \cosh \beta_2 L + K_4 \sinh \beta_2 L) C_8 = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
& C_1 \sin \beta_1 L_1 + C_2 \cos \beta_1 L_1 + C_3 \sinh \beta_1 L_1 + C_4 \cosh \beta_1 L_1 \\
& - C_5 \sin \beta_2 L_1 - C_6 \cos \beta_2 L_1 - C_7 \sinh \beta_2 L_1 - C_8 \cosh \beta_2 L_1 = 0 \\
& \beta_1 (C_1 \cos \beta_1 L_1 - C_2 \sin \beta_1 L_1 + C_3 \cosh \beta_1 L_1 + C_4 \sinh \beta_1 L_1) \\
& + \beta_2 (-C_5 \cos \beta_2 L_1 + C_6 \sin \beta_2 L_1 - C_7 \cosh \beta_2 L_1 - C_8 \sinh \beta_2 L_1) = 0 \\
& \beta_1^2 E_1 I_1 (-C_1 \sin \beta_1 L_1 - C_2 \cos \beta_1 L_1 + C_3 \sinh \beta_1 L_1 + C_4 \cosh \beta_1 L_1) \\
& + \beta_2^2 E_2 I_2 (C_5 \sin \beta_2 L_1 + C_6 \cos \beta_2 L_1 - C_7 \sinh \beta_2 L_1 - C_8 \cosh \beta_2 L_1) = 0 \\
& \beta_1^3 E_1 I_1 (-C_1 \cos \beta_1 L_1 + C_2 \sin \beta_1 L_1 + C_3 \cosh \beta_1 L_1 + C_4 \sinh \beta_1 L_1) \\
& + \beta_2^3 E_2 I_2 (C_5 \cos \beta_2 L_1 - C_6 \sin \beta_2 L_1 - C_7 \cosh \beta_2 L_1 - C_8 \sinh \beta_2 L_1) = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. Basitleştirme maksadıyla bazı kısaltmalar aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned}
v &= \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}, \quad a_1 = -\beta_1^3 L^3, \quad a_2 = k_x + i\beta_1^2 L^2 c_x, \quad a_3 = \beta_1^3 L^3, \quad a_4 = k_x + i\beta_1^2 L^2 c_x \\
a_5 &= -1, \quad a_6 = -\frac{E_1 I_1 \beta_1}{K_2}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{E_1 I_1 \beta_1}{K_2} \\
a_9 &= (-\beta_2^3 L^3 \cos \beta_2 L - k_y \sin \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \sin \beta_2 L) \\
a_{10} &= (\beta_2^3 L^3 \sin \beta_2 L - k_y \cos \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \cos \beta_2 L) \\
a_{11} &= (\beta_2^3 L^3 \cosh \beta_2 L - k_y \sinh \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \sinh \beta_2 L) \\
a_{12} &= (\beta_2^3 L^3 \sinh \beta_2 L - k_y \cosh \beta_2 L - i\beta_2^2 L^2 c_y \cosh \beta_2 L) \\
a_{13} &= (-E_2 I_2 \beta_2 \sin \beta_2 L + K_4 \cos \beta_2 L), \quad a_{14} = (-E_2 I_2 \beta_2 \cos \beta_2 L - K_4 \sin \beta_2 L) \\
a_{15} &= (E_2 I_2 \beta_2 \sinh \beta_2 L + K_4 \cosh \beta_2 L), \quad a_{16} = (E_2 I_2 \beta_2 \cosh \beta_2 L + K_4 \sinh \beta_2 L)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{17} &= \sin \beta_1 L_1 & a_{18} &= \cos \beta_1 L_1 & a_{19} &= \sinh \beta_1 L_1 & a_{20} &= \cosh \beta_1 L_1 \\
a_{21} &= -\sin \beta_2 L_1 & a_{22} &= -\cos \beta_2 L_1 & a_{23} &= -\sinh \beta_2 L_1 & a_{24} &= -\cosh \beta_2 L_1 \\
a_{25} &= \cos \beta_1 L_1 & a_{26} &= -\sin \beta_1 L_1 & a_{27} &= \cosh \beta_1 L_1 & a_{28} &= \sin \beta_1 L_1 \\
a_{29} &= -\cos \beta_2 L_1 & a_{30} &= \sin \beta_2 L_1 & a_{31} &= -\cosh \beta_2 L_1 & a_{32} &= -\sin \beta_2 L_1 \\
a_{33} &= -v \sin \beta_1 L_1 & a_{34} &= -v \cos \beta_1 L_1 & a_{35} &= v \sinh \beta_1 L_1 & a_{36} &= v \cosh \beta_1 L_1 \\
a_{37} &= \sin \beta_2 L_1 & a_{38} &= \cos \beta_2 L_1 & a_{39} &= -\sinh \beta_2 L_1 & a_{40} &= -\cosh \beta_2 L_1 \\
a_{41} &= -v \cos \beta_1 L_1 & a_{42} &= v \sin \beta_1 L_1 & a_{43} &= v \cosh \beta_1 L_1 & a_{44} &= v \sinh \beta_1 L_1 \\
a_{45} &= \cos \beta_2 L_1 & a_{46} &= -\sin \beta_2 L_1 & a_{47} &= -\cosh \beta_2 L_1 & a_{48} &= -\sinh \beta_2 L_1
\end{aligned} \tag{3.35}$$

(3.33) ve (3.34) denklemleri (3.35)'te belirtilen kısaltmalarla birlikte matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & a_{31} & a_{32} \\
a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{40} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5 \\
C_6 \\
C_7 \\
C_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{3.36}$$

ya da

$$[A][B] = [0] \tag{3.37}$$

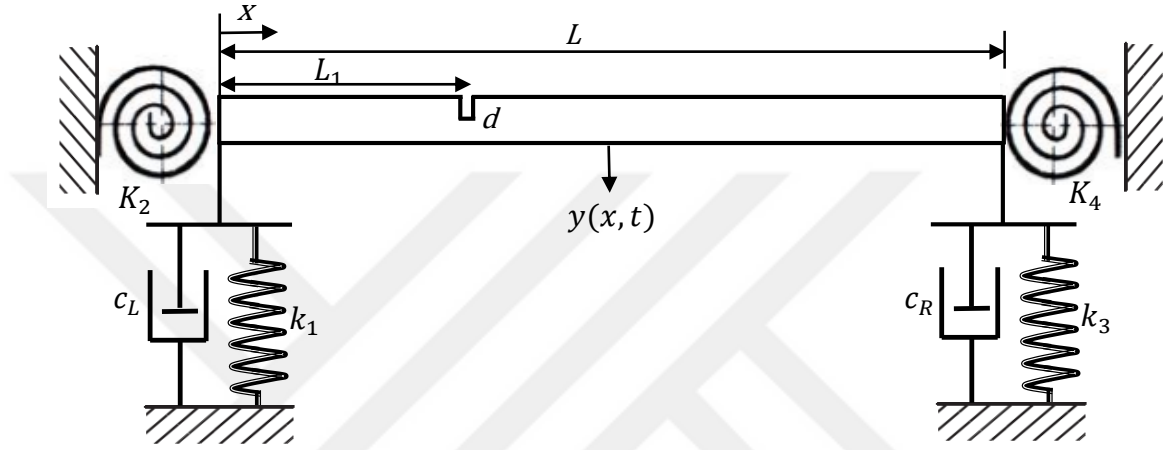
elde edilir. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ ve C_8 sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \tag{3.38}$$

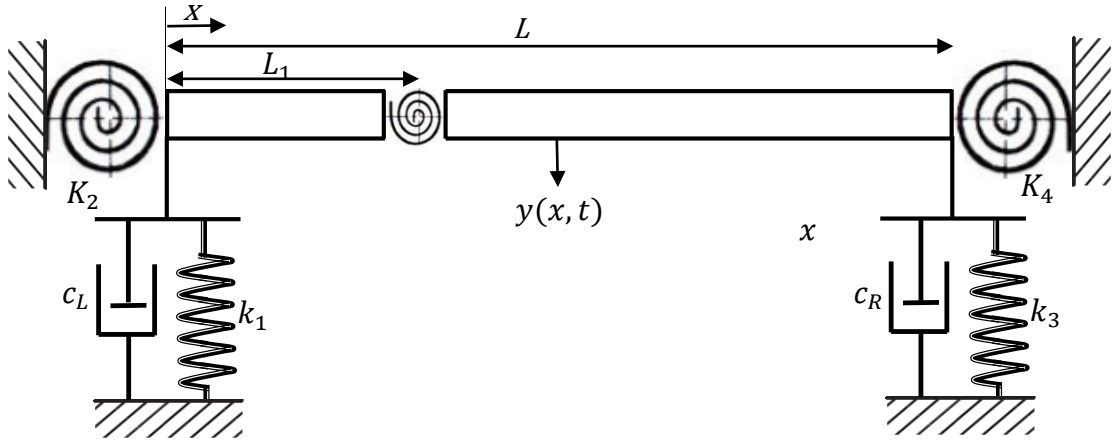
Denklem 3.38'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'te sunulmuştur.

3.4. Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında atlaklı Euler-Bernoulli Kirişinin Doğal Frekansları

Karmaşık sınır koşullarına sahip çatlak bir kiriş ele alalım. Çatlak $x = L_1$ noktasındadır ve kiriş için ilgili boyutlar şu şekildedir: genişlik b , yükseklik h , kiriş uzunluğu L ve çatlak derinliği d (Şekil 1).



Şekil 3.4. Karma sınır şartlarına maruz çatlaklı kiriş



Şekil 3.5. Karma sınır şartlarına maruz çatlaklı kirişin fiziksel modeli

Çatlak kiriş iki parçaya böler. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre serbest titreşim durumunda her bölüm için hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L_1 \quad (3.39a)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}, \quad L_1 < x < L \quad (3.39b)$$

Burada, y_1 ve y_2 kirişin her bir parçası için yer değiştirmeler, E Young modülü, I atalet momenti, t zaman, A kesit alanı ve ρ kütle yoğunluğudur. Kirişin sağ ve sol uçlarındaki sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$EI \frac{\partial^3 y_1(0,t)}{\partial x^3} = -k_1 y_1(0,t) - c_L \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial t} \quad (3.40a)$$

$$EI \frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial x^2} = K_2 \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}$$

$$EI \frac{\partial^3 y_2(L,t)}{\partial x^3} = k_3 y_2(L,t) + c_R \frac{\partial y_2(L,t)}{\partial t} \quad (3.40b)$$

$$EI \frac{\partial^2 y_2(L,t)}{\partial x^2} = -K_4 \frac{\partial y_2(L,t)}{\partial x}$$

Burada, k_1 ve k_3 ötelenme yaylarının katsayısı, K_2 ve K_4 dönme yayların katsayısı, c_L ve c_R damperlerin katsayısıdır. Kirişin her iki bölümündeki yer değiştirmelerin, bükülme momentlerinin ve kayma kuvvetlerinin çatlak konumunda eşit olması dikkate alınarak bu konumdaki koşullar şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} y_1(L_1,t) &= y_2(L_1,t) \\ \frac{\partial^2 y_1(L_1,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y_2(L_1,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 y_1(L_1,t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 y_2(L_1,t)}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Çatlak konumundaki süreksizlik durumu şu şekilde yazılabilir: (Chondros ve ark. 1998)

$$\frac{\partial y_2(L_1,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(L_1,t)}{\partial x} = \theta_1 \frac{\partial^2 y_2(L_1,t)}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

burada, θ_1 boyutsuz çatlak kesitsel esnekliğidir ve tek taraflı açık bir çatlak için :
(Chondros ve ark. 1998)

$$\theta_1 = 6\pi h(1-\nu^2)f(\gamma) \quad (3.43)$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $\gamma = d / h$ boyutsuz çatlak derinlik oranıdır ve

$$f(\gamma) = (0.6272\gamma^2 - 1.035\gamma^3 + 3.7201\gamma^4 - 5.177\gamma^5 + 7.553\gamma^6 - 7.332\gamma^7 + 2.4909\gamma^8) \quad (3.44)$$

dir. Denklem. (3.39a) ve (3.39b) ayrıştırma yöntemi ile çözülebilir.

$$y_1(x, t) = W_1(x)e^{i\omega t} \quad (3.45a)$$

$$y_2(x, t) = W_2(x)e^{i\omega t} \quad (3.45b)$$

(3.45a) ve (3.45b) denklemlerini (3.39a) ve (3.39b) denklemleri içerisinde aşağıdaki kısaltmaları tanımlayarak yazarsak

$$\frac{c^2}{W_1(x)} \frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} = \omega^2 = \text{sabit} \quad (3.46a)$$

$$\frac{c^2}{W_2(x)} \frac{d^4 W_2(x)}{dx^4} = \omega^2 = \text{sabit} \quad (3.46b)$$

elde ederiz ve burada $c^2 = EI / \rho A$ dır. (3.46) denklemlerinden aşağıdaki iki adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^4 W_1(x)}{dx^4} - \beta^4 W_1(x) = 0 \quad (3.47a)$$

$$\frac{d^4 W_2(x)}{dx^4} - \beta^4 W_2(x) = 0 \quad (3.47b)$$

Burada

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

dır. (3.47a) ve (3.47b) denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$W_1(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (3.48a)$$

$$W_2(x) = C_5 \sin \beta(x-L_1) + C_6 \cos \beta(x-L_1) + C_7 \sinh \beta(x-L_1) + C_8 \cosh \beta(x-L_1) \quad (3.48b)$$

burada, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ sınır şartlarından ve uyumluluk koşullarından belirlenecek sabitler. (3.40a) ve (3.40b) sınır koşulları ile (3.41) ve (3.42) çatlak konumundaki uyumluluk koşulları kullanılarak $W(x)$ üzerindeki şartlar

$$\begin{aligned} EIW_1''(0) &= -k_1 W_1(0) - i\omega c_L W_1 \\ EIW_1''(0) &= K_2 W_1'(0) \\ EIW_2'''(L) &= k_3 W_2(L) + i\omega c_R W_2 \\ EIW_2''(L) &= -K_4 W_2'(L) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= W_2 \\ W_2'(L_1) - W_1'(L_1) &= \theta_1 W_2''(L_1) \\ W_1''(L_1) &= W_2''(L_1) \\ W_1'''(L_1) &= W_2'''(L_1) \end{aligned} \quad (3.50)$$

olarak elde edilir. Bu şartlar (3.48a) ve (3.48b)'de uygulanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (-\beta^3 L^3)C_1 + (k_x + i\beta^2 L^2 c_x)C_2 + (\beta^3 L^3)C_3 + (k_x + i\beta^2 L^2 c_x)C_4 = 0 \\
& (-K_2 C_1 - EI\beta C_2 - K_2 C_3 + EI\beta C_4) = 0 \\
& (-\beta^3 L_2^3 \cos \beta L_2 - k_y \sin \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \sin \beta L_2)C_5 \\
& + (\beta^3 L_2^3 \sin \beta L_2 - k_y \cos \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \cos \beta L_2)C_6 \\
& + (\beta^3 L_2^3 \cosh \beta L_2 - k_y \sinh \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \sinh \beta L_2)C_7 \\
& + (\beta^3 L_2^3 \sinh \beta L_2 - k_y \cosh \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \cosh \beta L_2)C_8 = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
& (-EI\beta \sin \beta L_2 + K_4 \cos \beta L_2)C_5 + (-EI\beta \cos \beta L_2 - K_4 \sin \beta L_2)C_6 \\
& + (EI\beta \sinh \beta L_2 + K_4 \cosh \beta L_2)C_7 + (EI\beta \cosh \beta L_2 + K_4 \sinh \beta L_2)C_8 = 0 \\
& (C_1 \sin \beta L_1 + C_2 \cos \beta L_1 + C_3 \sinh \beta L_1 + C_4 \cosh \beta L_1 - C_6 - C_8) = 0 \\
& (C_5 + C_7 - C_1 \cos \beta L_1 + C_2 \sin \beta L_1 - C_3 \cosh \beta L_1 - C_4 \sinh \beta L_1) - \theta_1 \beta (-C_6 + C_8) = 0 \\
& \beta^2 (-C_1 \sin \beta L_1 - C_2 \cos \beta L_1 + C_3 \sinh \beta L_1 + C_4 \cosh \beta L_1) + \beta^2 (C_6 - C_8) = 0 \\
& \beta^3 (-C_1 \cos \beta L_1 + C_2 \sin \beta L_1 + C_3 \cosh \beta L_1 + C_4 \sinh \beta L_1) + \beta^3 (C_5 - C_7) = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Burada

$$k_x = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad c_x = \frac{c_L L^3}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad k_y = \frac{k_3 L_2^3}{EI}, \quad c_y = \frac{c_R L_2^3}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad L_2 = L - L_1$$

dır. Basitleştirmek maksadıyla aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\beta^3 L^3, \quad a_2 = a_4 = k_x + i\beta^2 L^2 c_x, \quad a_3 = \beta^3 L^3 \\
a_5 &= -1, \quad a_6 = -\frac{EI\beta}{K_2}, \quad a_7 = -1, \quad a_8 = \frac{EI\beta}{K_2} \\
a_9 &= (-\beta^3 L_2^3 \cos \beta L_2 - k_y \sin \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \sin \beta L_2) \\
a_{10} &= (\beta^3 L_2^3 \sin \beta L_2 - k_y \cos \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \cos \beta L_2) \\
a_{11} &= (\beta^3 L_2^3 \cosh \beta L_2 - k_y \sinh \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \sinh \beta L_2) \\
a_{12} &= (\beta^3 L_2^3 \sinh \beta L_2 - k_y \cosh \beta L_2 - i\beta^2 L_2^2 c_y \cosh \beta L_2) \\
a_{13} &= (-EI\beta \sin \beta L_2 + K_4 \cos \beta L_2), \quad a_{14} = (-EI\beta \cos \beta L_2 - K_4 \sin \beta L_2) \\
a_{15} &= (EI\beta \sinh \beta L_2 + K_4 \cosh \beta L_2), \quad a_{16} = (EI\beta \cosh \beta L_2 + K_4 \sinh \beta L_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
a_{17} = \sin \beta_1 L_1 & a_{18} = \cos \beta_1 L_1 & a_{19} = \sinh \beta_1 L_1 & a_{20} = \cosh \beta_1 L_1 \\
a_{21} = 0 & a_{22} = -1 & a_{23} = 0 & a_{24} = -1 \\
a_{25} = \cos \beta_1 L_1 & a_{26} = -\sin \beta_1 L_1 & a_{27} = \cosh \beta_1 L_1 & a_{28} = \sin \beta_1 L_1 \\
a_{29} = 1 & a_{30} = \theta_1 \beta & a_{31} = 1 & a_{32} = -\theta_1 \beta \\
a_{33} = -\sin \beta_1 L_1 & a_{34} = -\cos \beta_1 L_1 & a_{35} = \sinh \beta_1 L_1 & a_{36} = \cosh \beta_1 L_1 \\
a_{37} = 0 & a_{38} = 1 & a_{39} = 0 & a_{40} = -1 \\
a_{41} = -\cos \beta_1 L_1 & a_{42} = \sin \beta_1 L_1 & a_{43} = \cosh \beta_1 L_1 & a_{44} = \sinh \beta_1 L_1 \\
a_{45} = 1 & a_{46} = 0 & a_{47} = -1 & a_{48} = 0
\end{array}$$

(3.51) ve (3.52) denklemleri yukarıda belirtilen kısaltmalarla birlikte matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & a_{31} & a_{32} \\
a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{40} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5 \\
C_6 \\
C_7 \\
C_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.53)$$

ya da

$$[A][B] = 0$$

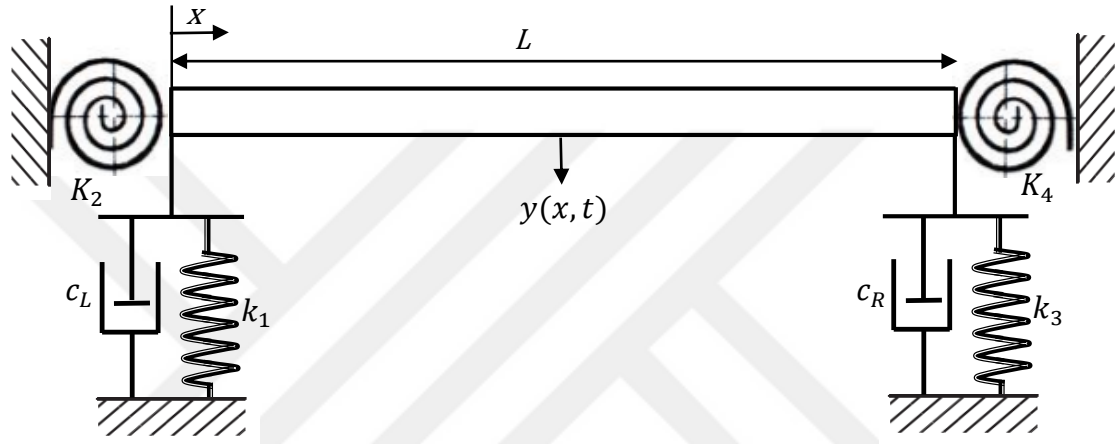
elde edilir. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \quad (3.54)$$

olmalıdır. Denklem 3.54'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'de sunulmuştur.

3.5. Damber İçeren Karma Sınır Koşullarında Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları

Bu bölümde uçlarında iki farklı dönme yayı, iki farklı ötelenme yayı ve iki farklı damber bulunan Timoshenko kirişin genel bir modeli incelenmiştir. Böylece yay sabitleri değiştirilerek çeşitli kiriş sınır koşulları analiz edilebilir.



Şekil 3.6. Damber içeren karma sınır şartlarına maruz Timoshenko kiriş

Timoshenko kirişin serbest titreşimi halinde hareket diferansiyel denklemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = kAG \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (3.55a)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = kAG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.55b)$$

Burada, I atalet momenti, E esneklik modülü, G kayma esneklik modülü, A kesit alanı, ρ kirişin yoğunluğu, k şekil faktörü, y yer değiştirme, ψ eğilme açısıdır.

$$y = LY(x)e^{i\omega t}, \quad \psi = \Psi(x)e^{i\omega t} \quad (3.56)$$

kabul edelim. (3.56) denklemi (3.55) denklemlerinde yazılıp bazı matematiksel işlemler

yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} Y''(\xi) + \lambda^2 s^2 Y(\xi) - \Psi'(\xi) &= 0 \\ s^2 \Psi''(\xi) - [1 - \lambda^2 r^2 s^2] \Psi(\xi) + Y'(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir ve burada

$$s^2 = \frac{EI}{kAGL^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}$$

dır. Çeşitli işlemlerden sonra Denklem (3.58) ayrıca aşağıdaki gibi tek bir denklemde birleştirilebilir:

$$Y^{IV}(\xi) + PY''(\xi) + QY(\xi) = 0 \quad (3.58)$$

burada

$$\begin{aligned} P &= \frac{\rho \omega^2 L^2}{E} \left(1 + \frac{E}{kG} \right), \quad Q = z_2^2 - \lambda^2, \quad z_0 = \frac{\rho \omega^2 L^2}{E} \\ z_1 &= \frac{\rho \omega^2 L^2}{kG}, \quad z_2^2 = z_0 z_1 = \frac{\rho^2 \omega^4 L^4}{kEG} \end{aligned}$$

dır. Denklem (3.58)'in çözümü için $Y(\xi) = e^{\alpha \xi}$ olduğu varsayılarak karakteristik denklem ve kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha^4 + P\alpha^2 + Q &= 0 \\ \alpha_1 = -i\beta_1, \quad \alpha_2 = i\beta_1, \quad \alpha_3 = -\beta_2, \quad \alpha_4 = \beta_2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

burada,

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{P + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \Delta = P^2 - 4Q$$

Böylece, $Y(\xi)$ aşağıdaki formda yazılabilir

$$Y(\xi) = C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \cos \beta_1 \xi + C_3 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \cosh \beta_2 \xi$$

$Y(\xi)$ Denklem (3.57)'in ilk ifadesi içerisinde integrale edilerek $\Psi'(\xi)$ elde edilir.

$$\Psi'(\xi) = \bar{m}_1 C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \bar{m}_1 \cos \beta_1 \xi + C_3 \bar{m}_2 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \bar{m}_2 \cosh \beta_2 \xi \quad (3.60)$$

burada

$$\bar{m}_1 = \lambda^2 s^2 - \beta_1^2 \quad , \quad \bar{m}_2 = \lambda^2 s^2 + \beta_2^2$$

dır. Denklem (3.60) 'in integrali alınarak $\Psi(\xi)$ ifadesi elde edilir.

$$\Psi(\xi) = -m_1 C_1 \cos \beta_1 \xi + m_1 C_2 \sin \beta_1 \xi + m_2 C_3 \cosh \beta_2 \xi + m_2 C_4 \sinh \beta_2 \xi \quad (3.61)$$

burada

$$m_1 = \frac{\bar{m}_1}{\beta_1} \quad , \quad m_2 = \frac{\bar{m}_2}{\beta_2}$$

dır. C_1, C_2, C_3, C_4 katsayıları kirişin her iki ucundaki sınır koşulları kullanılarak belirlenmelidir. Bu sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\xi = 0$:

$$\begin{aligned} kAG \left(Y'(\xi) \Big|_{\xi=0} - \Psi(\xi) \Big|_{\xi=0} \right) &= -k_1 Y_1(\xi) \Big|_{\xi=0} - i\omega c_L Y_1(\xi) \Big|_{\xi=0} , \\ \frac{EI}{L} \Psi'(\xi) \Big|_{\xi=0} &= K_2 \Psi(\xi) \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (3.62a)$$

$\xi = 1$:

$$\begin{aligned} kAG \left(Y'(\xi) \Big|_{\xi=1} - \Psi(\xi) \Big|_{\xi=1} \right) &= k_3 Y_2(\xi) \Big|_{\xi=1} + i\omega c_R Y_2(\xi) \Big|_{\xi=1} \\ \frac{EI}{L} \Psi'(\xi) \Big|_{\xi=1} &= -K_4 \Psi(\xi) \Big|_{\xi=1} \end{aligned} \quad (3.62b)$$

Sınır şartları kullanılarak aşağıdaki dört denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 &= 0 \\
a_5 C_1 + a_6 C_2 + a_7 C_3 + a_8 C_4 &= 0 \\
a_9 C_1 + a_{10} C_2 + a_{11} C_3 + a_{12} C_4 &= 0 \\
a_{13} C_1 + a_{14} C_2 + a_{15} C_3 + a_{16} C_4 &= 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

burada

$$\begin{aligned}
a_1 &= kAG(\beta_1 + m_1) & a_2 &= k_1 + i\omega c_L & a_3 &= kAG(\beta_2 - m_2) & a_4 &= k_1 i\omega c_L \\
a_5 &= m_1 K_2 & a_6 &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} & a_7 &= -m_2 K_2 & a_8 &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \\
a_9 &= kAG\beta_1 \cos(\beta_1 L) + kAGm_1 \cos(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sin(\beta_1 L) \\
a_{10} &= -kAG\beta_1 \sin(\beta_1 L) - kAGm_1 \sin(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cos(\beta_1 L) \\
a_{11} &= kAG\beta_2 \cosh(\beta_2 L) - kAGm_2 \cosh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sinh(\beta_2 L) \\
a_{12} &= kAG\beta_2 \sinh(\beta_2 L) - kAGm_2 \sinh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cosh(\beta_1 L) \\
a_{13} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \sin(\beta_1 L) - m_1 K_4 \cos(\beta_1 L) & a_{14} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \cos(\beta_1 L) + m_1 K_4 \sin(\beta_1 L) \\
a_{15} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \sinh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \cosh(\beta_2 L) & a_{16} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \cosh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \sinh(\beta_2 L)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

dır. (3.63) denklemleri matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

ya da

$$[A][B] = [0] \tag{3.66}$$

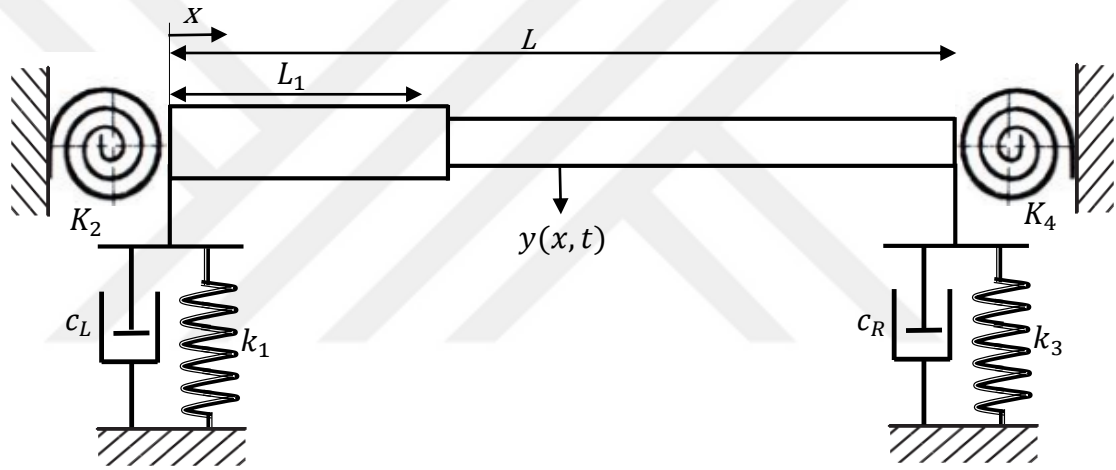
elde edilir. C_1, C_2, C_3 ve C_4 sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \tag{3.67}$$

olmalıdır. Denklem (3.67)'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'te sunulmuştur.

3.6.Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Kademeli Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları

Karmaşık sınır koşullarına sahip kademeli bir Timoshenko kirişi ele alalım. Kademe değişimi $x=L_1$ noktasındadır ve kiriş için ilgili boyutlar şu şekildedir: genişlik b , yükseklik h , kiriş uzunluğu L (Şekil 1).



Şekil3.7. Karmaşık sınır şartlarına maruz kademeli Timoshenko kiriş

Kiriş iki ayrı parça olarak düşünülüp her bir kısım için Timoshenko kiriş teorisi uygulanmalıdır. Timoshenko kiriş teorisine göre serbest titreşim durumunda her bölüm için hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= k_1 A_1 G_1 \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \\ \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= k_2 A_2 G_2 \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.68a)$$

$$\begin{aligned}\rho_1 I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= k_1 A_1 G_1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} - \psi_1 \right) + E_1 I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 I_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= k_2 A_2 G_2 \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \psi_2 \right) + E_2 I_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (3.68b)$$

Burada, I_1, I_2 her bir bölge için atalet momentleri, E_1, E_2 esneklik modülleri, G_1, G_2 kayma esneklik modülleri, A_1, A_2 kesit alanları, ρ_1, ρ_2 kirişin yoğunlukları, k_1, k_2 şekil faktörleri, y_1, y_2 dikey yer değiştirmeler, ψ_1, ψ_2 eğilme açılarıdır.

$$y = LY(x)e^{i\omega t}, \quad \psi = \Psi(x)e^{i\omega t} \quad (3.69)$$

olduğu kabul edilebilir. (3.69) denklemi (3.68) denklemlerinde yazılıp bazı matematiksel işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}Y_1''(\xi) + \lambda^2 s^2 Y_1(\xi) - \Psi_1'(\xi) &= 0 \\ s^2 \Psi_1''(\xi) - [1 - \lambda^2 r^2 s^2] \Psi_1(\xi) + Y_1'(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.70a)$$

$$\begin{aligned}Y_2''(\xi) + \lambda^2 s^2 Y_2(\xi) - \Psi_2'(\xi) &= 0 \\ s^2 \Psi_2''(\xi) - [1 - \lambda^2 r^2 s^2] \Psi_2(\xi) + Y_2'(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.70b)$$

elde edilir ve burada

$$\begin{aligned}s_1^2 &= \frac{E_1 I_1}{k_a A_1 G_1 L^2}, \quad \lambda_1^2 = \frac{\rho_1 A_1 \omega^2 L^4}{E_1 I_1}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad r_1^2 = \frac{I_1}{A_1 L^2} \\ s_2^2 &= \frac{E_2 I_2}{k_b A_2 G_2 L^2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{\rho_2 A_2 \omega^2 L^4}{E_2 I_2}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad r_2^2 = \frac{I_2}{A_2 L^2}\end{aligned}$$

dır. Çeşitli işlemler sonucunda Denklem (3.70a) ve Denk. (3.70b) ayrıca aşağıdaki gibi tek bir denklemde birleştirilebilirler.

$$\begin{aligned}Y_1^{iv}(\xi) + P_1 Y_1''(\xi) + Q_1 Y_1(\xi) &= 0 \\ Y_2^{iv}(\xi) + P_2 Y_2''(\xi) + Q_2 Y_2(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.71)$$

burada

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\rho_1 \omega^2 L^2}{E_1} \left(1 + \frac{E_1}{k_1 G_1} \right), \quad Q_1 = z_2^2 - \lambda_1^2, \quad z_0 = \frac{\rho_1 \omega_1^2 L_1^2}{E_1} \\
z_1 &= \frac{\rho_1 \omega^2 L^2}{k_1 G_1}, \quad z_2^2 = z_0 z_1 = \frac{\rho_1^2 \omega^4 L^4}{k_1 E_1 G_1} \\
P_2 &= \frac{\rho_2 \omega^2 L^2}{E_2} \left(1 + \frac{E_2}{k_2 G_2} \right), \quad Q_2 = z_4^2 - \lambda_2^2, \quad z_{0_2} = \frac{\rho_2 \omega^2 L^2}{E_2} \\
z_3 &= \frac{\rho_2 \omega^2 L^2}{k_2 G_2}, \quad z_4^2 = z_{0_2} z_3 = \frac{\rho_2^2 \omega^4 L^4}{k_2 E_2 G_2}
\end{aligned}$$

dır. Gerekli işlemler yapıldıktan ve aşağıdaki kısaltmalar tanımlandıktan sonra her bir $Y(\xi)$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_1(\xi) &= C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \cos \beta_1 \xi + C_3 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \cosh \beta_2 \xi \\
Y_2(\xi) &= C_5 \sin \beta_3 \xi + C_6 \cos \beta_3 \xi + C_7 \sinh \beta_4 \xi + C_8 \cosh \beta_4 \xi
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sqrt{\frac{P_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{-P_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2}}, \quad \Delta_1 = P_1^2 - 4Q_1 \\
\beta_3 &= \sqrt{\frac{P_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2}}, \quad \beta_4 = \sqrt{\frac{-P_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2}}, \quad \Delta_2 = P_2^2 - 4Q_2
\end{aligned}$$

dır. $Y_1(\xi)$ ve $Y_2(\xi)$ denklemleri (3.71) denklemleri içerisinde integre edilerek $\Psi'_1(\xi)$ ve $\Psi'_2(\xi)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
\Psi'_1(\xi) &= \bar{m}_1 C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \bar{m}_1 \cos \beta_1 \xi + C_3 \bar{m}_2 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \bar{m}_2 \cosh \beta_2 \xi \\
\Psi'_2(\xi) &= \bar{m}_3 C_5 \sin \beta_3 \xi + C_6 \bar{m}_3 \cos \beta_3 \xi + C_7 \bar{m}_4 \sinh \beta_4 \xi + C_8 \bar{m}_4 \cosh \beta_4 \xi
\end{aligned} \tag{3.73}$$

burada

$$\begin{aligned}
\bar{m}_1 &= \lambda_1^2 s_1^2 - \beta_{11}^2, \quad \bar{m}_2 = \lambda_1^2 s_1^2 + \beta_{21}^2 \\
\bar{m}_3 &= \lambda_2^2 s_2^2 - \beta_{12}^2, \quad \bar{m}_4 = \lambda_2^2 s_2^2 + \beta_{22}^2
\end{aligned}$$

dır. Denklem (3.73) 'ün integrali alınarak $\Psi_1(\xi)$ ve $\Psi_2(\xi)$ ifadeleri de elde edilir.

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi) &= -m_{11}C_1 \cos \beta_{12}\xi + m_{11}C_2 \sin \beta_{11}\xi + m_{21}C_3 \cosh \beta_{21}\xi + m_{21}C_4 \sinh \beta_{21}\xi \\ \Psi_2(\xi) &= -m_{12}C_5 \cos \beta_{12}\xi + m_{12}C_6 \sin \beta_{12}\xi + m_{22}C_7 \cosh \beta_{22}\xi + m_{22}C_8 \sinh \beta_{22}\xi\end{aligned}\quad (3.74)$$

burada

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{\bar{m}_1}{\beta_1}, & m_2 &= \frac{\bar{m}_2}{\beta_2} \\ m_3 &= \frac{\bar{m}_3}{\beta_3}, & m_4 &= \frac{\bar{m}_4}{\beta_4}\end{aligned}$$

dır. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ katsayıları kirişin her iki ucundaki sınır koşulları ve kademe konumundaki uyumluluk şartları kullanılarak belirlenmelidir. Bu sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\xi = 0$ 'da:

$$\begin{aligned}kAG\left(Y'(\xi)\Big|_{\xi=0} - \Psi(\xi)\Big|_{\xi=0}\right) &= -k_1 Y_1(\xi)\Big|_{\xi=0} - i\omega c_L Y_1(\xi)\Big|_{\xi=0} \\ \frac{EI}{L} \Psi'(\xi)\Big|_{\xi=0} &= K_2 \Psi(\xi)\Big|_{\xi=0}\end{aligned}\quad (3.75a)$$

$\xi = 1$ 'de:

$$\begin{aligned}kAG\left(Y'(\xi)\Big|_{\xi=1} - \Psi(\xi)\Big|_{\xi=1}\right) &= k_3 Y_2(\xi)\Big|_{\xi=1} + i\omega c_R Y_2(\xi)\Big|_{\xi=1} \\ \frac{EI}{L} \Psi'(\xi)\Big|_{\xi=1} &= -K_4 \Psi(\xi)\Big|_{\xi=1}\end{aligned}\quad (3.75b)$$

Kirişin kademe konumundaki uyumluluk şartları aşağıdaki gibi yazılabilir

$\xi = L_1$ 'de:

$$\begin{aligned}Y_1(n) &= Y_2(n) \\ \Psi_1(n) &= \Psi_2(n) \\ \left(\frac{E_1 I_1}{L}\right) \Psi'_1(n) &= \left(\frac{E_2 I_2}{L}\right) \Psi'_2(n) \\ k_a A_1 G_1 \left(Y'_1(n) - \Psi_1(n)\right) &= k_b A_2 G_2 \left(Y'_2(n) - \Psi_2(n)\right)\end{aligned}\quad (3.76)$$

Sınır şartları ve kademe konumundaki uyumluluk şartları kullanılarak aşağıdaki sekiz denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 &= 0 \\
a_5 C_1 + a_6 C_2 + a_7 C_3 + a_8 C_4 &= 0 \\
a_9 C_5 + a_{10} C_6 + a_{11} C_7 + a_{12} C_8 &= 0 \\
a_{13} C_5 + a_{14} C_6 + a_{15} C_7 + a_{16} C_8 &= 0 \\
a_{17} C_1 + a_{18} C_2 + a_{19} C_3 + a_{20} C_4 + a_{21} C_5 + a_{22} C_6 + a_{23} C_7 + a_{24} C_8 &= 0 \\
a_{25} C_1 + a_{26} C_2 + a_{27} C_3 + a_{28} C_4 + a_{29} C_5 + a_{30} C_6 + a_{31} C_7 + a_{32} C_8 &= 0 \\
a_{33} C_1 + a_{34} C_2 + a_{35} C_3 + a_{36} C_4 + a_{37} C_5 + a_{38} C_6 + a_{39} C_7 + a_{40} C_8 &= 0 \\
a_{41} C_1 + a_{42} C_2 + a_{43} C_3 + a_{44} C_4 + a_{45} C_5 + a_{46} C_6 + a_{47} C_7 + a_{48} C_8 &= 0
\end{aligned} \tag{3.77}$$

burada

$$\begin{aligned}
a_1 &= kAG(\beta_1 + m_1) & a_2 &= k_1 + i\omega c_L & a_3 &= kAG(\beta_2 - m_2) & a_4 &= k_1 i\omega c_L \\
a_5 &= m_1 K_2 & a_6 &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} & a_7 &= -m_2 K_2 & a_8 &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \\
a_9 &= kAG\beta_1 \cos(\beta_1 L) + kAGm_1 \cos(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sin(\beta_1 L) \\
a_{10} &= -kAG\beta_1 \sin(\beta_1 L) - kAGm_1 \sin(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cos(\beta_1 L) \\
a_{11} &= kAG\beta_2 \cosh(\beta_2 L) - kAGm_2 \cosh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sinh(\beta_2 L) \\
a_{12} &= kAG\beta_2 \sinh(\beta_2 L) - kAGm_2 \sinh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cosh(\beta_2 L) \\
a_{13} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \sin(\beta_1 L) - m_1 K_4 \cos(\beta_1 L), & a_{14} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \cos(\beta_1 L) + m_1 K_4 \sin(\beta_1 L) \\
a_{15} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \sinh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \cosh(\beta_2 L), & a_{16} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \cosh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \sinh(\beta_2 L) \\
a_{17} &= \sin \beta_1 L_1 & a_{18} &= \cos \beta_1 L_1 & a_{19} &= \sinh \beta_2 L_1 & a_{20} &= \cosh \beta_2 L_1 \\
a_{21} &= -\sin \beta_3 L_1 & a_{22} &= -\cos \beta_3 L_1 & a_{23} &= -\sinh \beta_4 L_1 & a_{24} &= -\cosh \beta_4 L_1 \\
a_{25} &= -m_1 \cos \beta_1 L_1 & a_{26} &= m_1 \sin \beta_1 L_1 & a_{27} &= m_2 \cosh \beta_2 L_1 & a_{28} &= m_2 \sinh \beta_2 L_1 \\
a_{29} &= m_3 \cos \beta_3 L_1 & a_{30} &= -m_3 \sin \beta_3 L_1 & a_{31} &= -m_4 \cosh \beta_4 L_1 & a_{32} &= -m_4 \sinh \beta_4 L_1 \\
a_{33} &= v\bar{m}_1 \sin \beta_1 L_1 & a_{34} &= v\bar{m}_1 \cos \beta_1 L_1 & a_{35} &= v\bar{m}_2 \sinh \beta_2 L_1 & a_{36} &= v\bar{m}_2 \cosh \beta_2 L_1 \\
a_{37} &= -\bar{m}_3 \sin \beta_3 L_1 & a_{38} &= -\bar{m}_3 \cos \beta_3 L_1 & a_{39} &= -\bar{m}_4 \sinh \beta_4 L_1 & a_{40} &= -\bar{m}_4 \cosh \beta_4 L_1 \\
a_{41} &= z \cos \beta_1 (\beta_1 + m_1), & a_{42} &= z \sin \beta_1 (-\beta_1 - m_1) \\
a_{43} &= z \cosh \beta_2 (\beta_2 - m_2), & a_{44} &= z \sinh \beta_1 (-\beta_2 - m_2) \\
a_{45} &= \cos \beta_3 (\beta_3 + m_3), & a_{46} &= \sin \beta_3 (-\beta_3 - m_3) \\
a_{47} &= \cosh \beta_4 (\beta_4 - m_4), & a_{48} &= \sinh \beta_4 (-\beta_4 - m_4)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

dır. (3.77) denklemleri matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & a_{31} & a_{32} \\
a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & d_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{40} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5 \\
C_6 \\
C_7 \\
C_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.78)$$

ya da

$$[A][B] = [0] \quad (3.79)$$

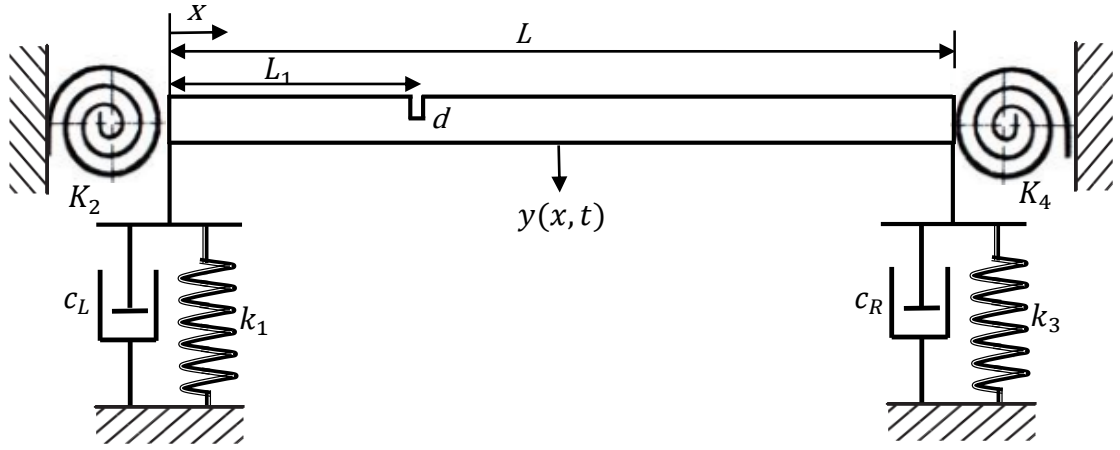
elde edilir. sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \quad (3.80)$$

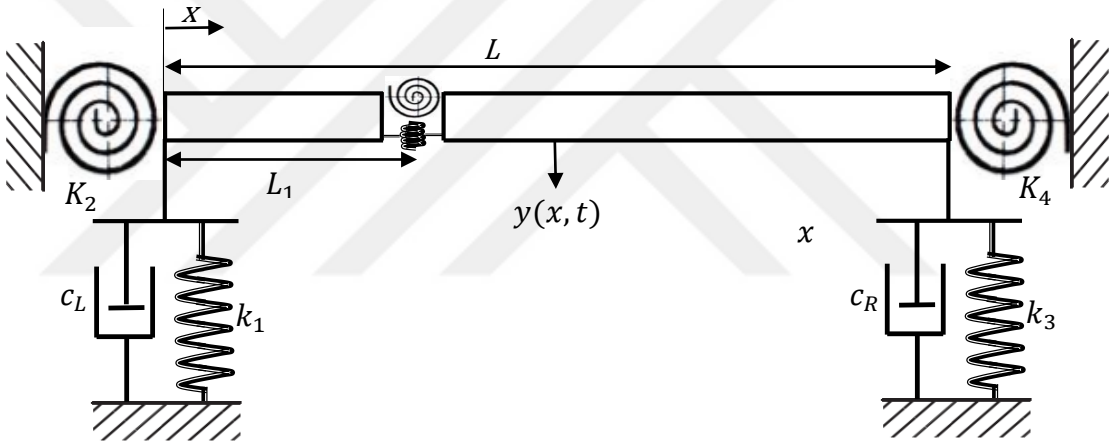
olmalıdır. Denklem (3.80)'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'te sunulmuştur.

3.7.Damper İçeren Karma Sınır Koşullarında Çatlaklı Timoshenko Kirişinin Doğal Frekansları

Karmaşık sınır koşullarına sahip çatlak bir kirişi ele alalım. Çatlak $x = L_1$ noktasındadır. Kiriş için ilgili boyutlar şu şekildedir: genişlik b , yükseklik h , kiriş uzunluğu L ve çatlak derinliği d (Şekil 1).



Şekil 3.8. Karmaşık sınır şartlarına sahip çatlaklı Timoshenko kiriş



Şekil 3.9. Karmaşık sınır şartlarına sahip çatlaklı Timoshenko kirişin fiziksek modeli

Çatlak kirişi iki parçaya böler. Timoshenko kiriş teorisine göre serbest titreşim durumunda her bölüm için hareket denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= kAG \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \\ \rho A \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} &= kAG \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.81a)$$

$$\begin{aligned}\rho I \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= kAG \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} - \psi_1 \right) + EI \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} &= kAG \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} - \psi_2 \right) + EI \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2}\end{aligned}\quad (3.81b)$$

Burada, I atalet momenti, E esneklik modülü, G kayma esneklik modülü, A kesit alanı, ρ kirişin yoğunluğu, k şekil faktörü, y yer değiştirme, ψ eğilme açısıdır.

$$\begin{aligned}y_1 &= LY_1(x)e^{i\omega t} & \psi_1 &= \Psi_1(x)e^{i\omega t} \\ y_2 &= LY_2(x)e^{i\omega t} & \psi_2 &= \Psi_2(x)e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (3.82)$$

olarak kabul edelim. (3.82) denklemleri (3.81) denklemlerinde yazılıp bazı matematiksel işlemler yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned}Y_1''(\xi) + \lambda^2 s^2 Y_1(\xi) - \Psi_1'(\xi) &= 0 \\ s^2 \Psi_1''(\xi) - [1 - \lambda^2 r^2 s^2] \Psi_1(\xi) + Y_1'(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.83a)$$

$$\begin{aligned}Y_2''(\xi) + \lambda^2 s^2 Y_2(\xi) - \Psi_2'(\xi) &= 0 \\ s^2 \Psi_2''(\xi) - [1 - \lambda^2 r^2 s^2] \Psi_2(\xi) + Y_2'(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.83b)$$

olarak elde edilir ve burada

$$s^2 = \frac{EI}{kAGL^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}$$

dır. Çeşitli matematiksel işlemler sonucunda Denklem (3.83a) ve Denklem (3.83b) ayrıca aşağıdaki gibi tek bir denklemde de birleştirilebilirler:

$$\begin{aligned}Y_1^{iv}(\xi) + PY_1''(\xi) + QY_1(\xi) &= 0 \\ Y_2^{iv}(\xi) + PY_2''(\xi) + QY_2(\xi) &= 0\end{aligned}\quad (3.84)$$

burada

$$P = \frac{\rho\omega^2 L^2}{E} \left(1 + \frac{E}{kG} \right), \quad Q = z_2^2 - \lambda^2, \quad z_0 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{E}$$

$$z_1 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{kG}, \quad z_2^2 = z_0 z_1 = \frac{\rho^2 \omega^4 L^4}{kEG}$$

dır. Denklem (3.84)'ün çözümü aşağıdaki formda yazılabilir

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \cos \beta_1 \xi + C_3 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \cosh \beta_2 \xi \\ Y_2(\xi) &= C_5 \sin \beta_1 \xi + C_6 \cos \beta_1 \xi + C_7 \sinh \beta_2 \xi + C_8 \cosh \beta_2 \xi \end{aligned} \quad (3.85)$$

burada

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{P + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{-P + \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \Delta = P^2 - 4Q$$

dır. $Y_1(\xi)$ ve $Y_2(\xi)$ denklemleri (3.83a) ve (3.83b) denklemlerinin ilk ifadeleri içerisinde integre edilerek $\Psi'_1(\xi)$ ve $\Psi'_2(\xi)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \Psi'_1(\xi) &= \bar{m}_1 C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \bar{m}_1 \cos \beta_1 \xi + C_3 \bar{m}_2 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \bar{m}_2 \cosh \beta_2 \xi \\ \Psi'_2(\xi) &= \bar{m}_1 C_5 \sin \beta_1 \xi + C_6 \bar{m}_1 \cos \beta_1 \xi + C_7 \bar{m}_2 \sinh \beta_2 \xi + C_8 \bar{m}_2 \cosh \beta_2 \xi \end{aligned} \quad (3.86)$$

Burada

$$\bar{m}_1 = \lambda^2 s^2 - \beta_1^2, \quad \bar{m}_2 = \lambda^2 s^2 + \beta_2^2$$

dır. Denklem (3.86) 'nın integrali alınarak $\Psi_1(\xi)$ ve $\Psi_2(\xi)$ ifadeleri de elde edilir.

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi) &= -m_1 C_1 \cos \beta_1 \xi + m_1 C_2 \sin \beta_1 \xi + m_2 C_3 \cosh \beta_2 \xi + m_2 C_4 \sinh \beta_2 \xi \\ \Psi_2(\xi) &= -m_1 C_5 \cos \beta_1 \xi + m_1 C_6 \sin \beta_1 \xi + m_2 C_7 \cosh \beta_2 \xi + m_2 C_8 \sinh \beta_2 \xi \end{aligned} \quad (3.87)$$

burada

$$m_1 = \frac{\bar{m}_1}{\beta_1}, \quad m_2 = \frac{\bar{m}_2}{\beta_2}$$

dır. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ katsayıları kirişin her iki ucundaki sınır koşulları ve çatlak konumundaki uyumluluk şartları kullanılarak belirlenmelidir. Bu sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$\xi = 0$:

$$\begin{aligned} kAG \left(Y_1'(\xi) \Big|_{\xi=0} - \Psi_1(\xi) \Big|_{\xi=0} \right) &= -k_1 Y_1(\xi) \Big|_{\xi=0} - i\omega c_L Y_1(\xi) \Big|_{\xi=0} \\ \frac{EI}{L} \Psi_1'(\xi) \Big|_{\xi=0} &= K_2 \Psi_1(\xi) \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (3.88a)$$

$\xi = L$:

$$\begin{aligned} kAG \left(Y_2'(\xi) \Big|_{\xi=1} - \Psi_2(\xi) \Big|_{\xi=1} \right) &= k_3 Y_2(\xi) \Big|_{\xi=1} + i\omega c_R Y_2(\xi) \Big|_{\xi=1} \\ \frac{EI}{L} \Psi_2'(\xi) \Big|_{\xi=1} &= -K_4 \Psi_2(\xi) \Big|_{\xi=1} \end{aligned} \quad (3.88b)$$

Çatlak bir dönme ve bir ötelenme yayı olarak modellenmiştir (Şekil 3.8). Burada uyumluluk şartları aşağıdaki gibidir (Loya ve ark. 2006)

$\xi = L_1$:

$$\begin{aligned} Y_2(L_1) - Y_1(L_1) &= \frac{h}{L} \frac{r^2}{s^2} q(\alpha) (Y_2'(L_1) - \Psi_2(L_1)) \\ \Psi_2(L_1) - \Psi_1(L_1) &= \frac{h}{L} \Theta(\alpha) \Psi_2'(L_1) \\ \Psi_1'(n) &= \Psi_2'(n) \\ Y_1'(n) - \Psi_1(n) &= Y_2'(n) - \Psi_2(n) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Burada

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{d}{h} \\ q(\gamma) &= \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 (-0.22 + 3.82\gamma + 1.54\gamma^2 - 14.64\gamma^3 + 9.6\gamma^4) \\ \Theta(\gamma) &= 2 \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 (5.93 - 19.69\gamma + 37.14\gamma^2 - 35.84\gamma^3 + 13.12\gamma^4) \end{aligned}$$

dır. Burada d çatlak derinliği, γ çatlak derinlik oranı, h kiriş kalınlığıdır. Sınır şartları ve uyumluluk koşulları kullanılarak aşağıdaki sekiz denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 &= 0 \\
a_5 C_1 + a_6 C_2 + a_7 C_3 + a_8 C_4 &= 0 \\
a_9 C_5 + a_{10} C_6 + a_{11} C_7 + a_{12} C_8 &= 0 \\
a_{13} C_5 + a_{14} C_6 + a_{15} C_7 + a_{16} C_8 &= 0 \\
a_{17} C_1 + a_{18} C_2 + a_{19} C_3 + a_{20} C_4 + a_{21} C_5 + a_{22} C_6 + a_{23} C_7 + a_{24} C_8 &= 0 \\
a_{25} C_1 + a_{26} C_2 + a_{27} C_3 + a_{28} C_4 + a_{29} C_5 + a_{30} C_6 + a_{31} C_7 + a_{32} C_8 &= 0 \\
a_{33} C_1 + a_{34} C_2 + a_{35} C_3 + a_{36} C_4 + a_{37} C_5 + a_{38} C_6 + a_{39} C_7 + a_{40} C_8 &= 0 \\
a_{14} C_1 + a_{42} C_2 + a_{43} C_3 + a_4 C_{44} + a_{45} C_5 + a_{46} C_6 + a_{47} C_7 + a_{48} C_8 &= 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

burada

$$\begin{aligned}
a_1 &= kAG(\beta_1 + m_1) & a_2 &= k_1 + i\omega c_L & a_3 &= kAG(\beta_2 - m_2) & a_4 &= k_1 i\omega c_L \\
a_5 &= m_1 K_2 & a_6 &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} & a_7 &= -m_2 K_2 & a_8 &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \\
a_9 &= kAG\beta_1 \cos(\beta_1 L) + kAGm_1 \cos(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sin(\beta_1 L) \\
a_{10} &= -kAG\beta_1 \sin(\beta_1 L) - kAGm_1 \sin(\beta_1 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cos(\beta_1 L) \\
a_{11} &= kAG\beta_2 \cosh(\beta_2 L) - kAGm_2 \cosh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \sinh(\beta_2 L) \\
a_{12} &= kAG\beta_2 \sinh(\beta_2 L) - kAGm_2 \sinh(\beta_2 L) - (k_3 + i\omega c_R) \cosh(\beta_1 L) \\
a_{13} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \sin(\beta_1 L) - m_1 K_4 \cos(\beta_1 L) & a_{14} &= \frac{EI\bar{m}_1}{L} \cos(\beta_1 L) + m_1 K_4 \sin(\beta_1 L) \\
a_{15} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \sinh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \cosh(\beta_2 L) & a_{16} &= \frac{EI\bar{m}_2}{L} \cosh(\beta_2 L) + m_2 K_4 \sinh(\beta_2 L) \\
a_{17} &= -s_t & a_{18} &= -q_t & a_{19} &= -r_t \\
a_{20} &= -t_t & a_{21} &= s_t - h_q (\beta_1 q_t - m_1 q_t) & a_{22} &= q_t + h_q (\beta_1 s_t + m_1 s_t) \\
a_{23} &= r_t - h_z (\beta_2 t_t + m_2 t_t) & a_{24} &= t_t - h_z (\beta_2 r_t + m_2 r_t) & a_{25} &= (m_1 q_t) \\
a_{26} &= (-m_1 s_t) & a_{27} &= (-m_2 t_t) & a_{28} &= (-m_2 r_t) \\
a_{29} &= (-m_1 q_t - h_m \bar{m}_1 s_t) & a_{30} &= (m_1 s_t - h_m \bar{m}_1 q_t) & a_{31} &= (m_2 t_t - h_m \bar{m}_2 r_t) \\
a_{32} &= (-m_2 r_t - h_m \bar{m}_2 t_t) & a_{33} &= (\bar{m}_1 s_t) & a_{34} &= (\bar{m}_1 q_t) \\
a_{35} &= (\bar{m}_2 r_t) & a_{36} &= (\bar{m}_2 t_t) & a_{37} &= (-\bar{m}_1 s_t) \\
a_{38} &= (-\bar{m}_1 q_t) & a_{39} &= (-\bar{m}_2 r_t) & a_{40} &= (-\bar{m}_2 t_t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= (\beta_1 q_t + m_1 q_t) & a_{42} &= (-\beta_1 s_t - m_1 s_t) & a_{43} &= (\beta_2 t_t - m_2 t_t) \\
a_{44} &= (\beta_2 r_t - m_2 r_t) & a_{45} &= (-\beta_1 q_t - m_1 q_t) & a_{46} &= (\beta_1 s_t + m_1 s_t) \\
a_{47} &= (-\beta_2 t_t + m_2 t_t) & a_{48} &= (-\beta_2 r_t + m_2 r_t) & & \\
s_t &= \sin \beta_1 L_1 & q_t &= \cos \beta_1 L_1 & r_t &= \sinh \beta_2 L_1 & t_t &= \cosh \beta_2 L_1 \\
h_q &= \frac{h r^2}{L s^2} q(\gamma) \beta_1 & h_z &= \frac{h r^2}{L s^2} q(\gamma) \beta_2 & h_m &= \frac{h}{L} \Theta(\gamma)
\end{aligned}$$

dır. (3.90) denklemleri matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{17} & a_{18} & a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} & a_{30} & a_{31} & a_{32} \\
a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & d_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{40} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
C_1 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
C_5 \\
C_6 \\
C_7 \\
C_8
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \quad (3.91)$$

ya da

$$[A][B] = 0$$

elde edilir. $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ sabitleri sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\det(A) = 0 \quad (3.92)$$

olmalıdır. Denklem 3.92'deki determinantın çözümü Matlab programı kullanılarak elde edilmiş ve çözümü veren program algoritması EK-1'de sunulmuştur.

3.8. Öz Fonksiyon ve Mod Şekilleri

Tüm problemlerde kullanılabilen ortak bir çözüm bulmak amacıyla Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişler iki kısma ayrılmış şekilde ve kademeli ya da çatlaklı olduğu düşünülerek formüle edilmiştir.

Çatlaklı ya da kademeli bir Euler-Bernoulli kiriş için W ve Timoshenko kiriş için Y ifadeleri daha önce aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \\ W_2(x) &= C_5 \sin \beta(x-L_1) + C_6 \cos \beta(x-L_1) + C_7 \sinh \beta(x-L_1) + C_8 \cosh \beta(x-L_1) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= C_1 \sin \beta_1 \xi + C_2 \cos \beta_1 \xi + C_3 \sinh \beta_2 \xi + C_4 \cosh \beta_2 \xi \\ Y_2(\xi) &= C_5 \sin \beta_1 \xi + C_6 \cos \beta_1 \xi + C_7 \sinh \beta_2 \xi + C_8 \cosh \beta_2 \xi \end{aligned} \quad (3.94)$$

Her iki durumda da problemin özfonksiyonlarının bulunabilmesi için $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ katsayılarını C_1 cinsinden basitçe aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} C_2 &= h_1 C_1, & C_3 &= h_2 C_1, & C_4 &= h_3 C_1 \\ C_5 &= h_4 C_1, & C_6 &= h_5 C_1, & C_7 &= h_6 C_1 \\ C_8 &= h_7 C_1 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Böylece, Euler-Bernoulli kiriş durumu için $W_1(\xi)$ ve $W_2(\xi)$ aşağıdaki formu alır.

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 (\sin \beta x + h_1 \cos \beta x + h_2 \sinh \beta x + h_3 \cosh \beta x) \\ W_2(x) &= C_1 (h_4 \sin \beta(x-L_1) + h_5 \cos \beta(x-L_1) + h_6 \sinh \beta(x-L_1) + h_7 \cosh \beta(x-L_1)) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Öte yandan, Timoshenko kiriş durumu için $Y_1(\xi)$ ve $Y_2(\xi)$ aşağıdaki formu alır.

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= C_1 (\sin \beta_1 \xi + h_1 \cos \beta_1 \xi + h_2 \sinh \beta_2 \xi + h_3 \cosh \beta_2 \xi) \\ Y_2(\xi) &= C_1 (h_4 \sin \beta_1 \xi + h_5 \cos \beta_1 \xi + h_6 \sinh \beta_2 \xi + h_7 \cosh \beta_2 \xi) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Burada $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$ katsayıları genel bir ifadeyle aşağıdaki sınır koşulları denklemleri yardımıyla bulunabilir.

$$a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 + a_4C_4 = 0$$

$$a_5C_1 + a_6C_2 + a_7C_3 + a_8C_4 = 0$$

$$a_9C_5 + a_{10}C_6 + a_{11}C_7 + a_{12}C_8 = 0$$

$$a_{13}C_5 + a_{14}C_6 + a_{15}C_7 + a_{16}C_8 = 0$$

$$a_{17}C_1 + a_{18}C_2 + a_{19}C_3 + a_{20}C_4 + a_{21}C_5 + a_{22}C_6 + a_{23}C_7 + a_{24}C_8 = 0$$

$$a_{25}C_1 + a_{26}C_2 + a_{27}C_3 + a_{28}C_4 + a_{29}C_5 + a_{30}C_6 + a_{31}C_7 + a_{32}C_8 = 0$$

$$a_{33}C_1 + a_{34}C_2 + a_{35}C_3 + a_{36}C_4 + a_{37}C_5 + a_{38}C_6 + a_{39}C_7 + a_{40}C_8 = 0$$

$$a_{41}C_1 + a_{42}C_2 + a_{43}C_3 + a_{44}C_4 + a_{45}C_5 + a_{46}C_6 + a_{47}C_7 + a_{48}C_8 = 0$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} t_1 + t_2 h_1 \\ t_3 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} -q_1 - q_2 h_1 - q_3 h_2 \\ q_4 \end{pmatrix}, \quad h_4 = \begin{pmatrix} -r_1 - r_2 h_1 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

$$h_5 = \begin{pmatrix} -p_1 - p_2 h_1 - p_3 h_4 \\ p_4 \end{pmatrix}, \quad h_6 = \begin{pmatrix} t_4 h_4 + t_5 h_5 \\ t_7 \end{pmatrix}, \quad h_7 = \begin{pmatrix} -q_9 h_4 - q_{10} h_5 - q_{11} h_6 \\ q_{12} \end{pmatrix},$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} -a_5 + \frac{a_8 a_1}{a_4} \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} -a_6 + \frac{a_8 a_2}{a_4} \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} -a_7 + \frac{a_8 a_3}{a_4} \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$t_4 = \begin{pmatrix} -a_{13} + \frac{a_{16} a_9}{a_{12}} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix} -a_{14} + \frac{a_{16} a_{10}}{a_{12}} \\ a_{12} \end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix} -a_{15} + \frac{a_{16} a_{11}}{a_{12}} \\ a_{12} \end{pmatrix}$$

$$p_1 = \left(a_{17} + a_{19} \frac{t_1}{t_3} + \frac{a_{20}}{a_4} \left(-a_1 - a_3 \frac{t_1}{t_3} \right) \right), \quad p_2 = \left(a_{18} + a_{19} \frac{t_2}{t_3} + \frac{a_{20}}{a_4} \left(-a_2 - a_3 \frac{t_2}{t_3} \right) \right)$$

$$p_3 = \left(a_{21} + a_{23} \frac{t_4}{t_7} + \frac{a_{24}}{a_{12}} \left(-a_{10} - a_{11} \frac{t_4}{t_7} \right) \right), \quad p_4 = \left(a_{22} + a_{23} \frac{t_5}{t_7} + \frac{a_{24}}{a_{12}} \left(-a_{10} - a_{11} \frac{t_5}{t_7} \right) \right)$$

$$r_1 = \left(a_{25} + a_{27} \frac{t_1}{t_3} + \frac{a_{28}}{a_4} \left(-a_1 - a_3 \frac{t_1}{t_3} \right) - a_{30} \frac{p_1}{p_4} - a_{31} \frac{t_5 p_1}{t_7 p_4} + \frac{a_{32}}{a_{12}} \left(\frac{a_{10} p_1}{p_4} + \frac{a_{11} p_1 t_5}{t_7 p_4} \right) \right)$$

$$r_2 = \left(a_{26} + a_{27} \frac{t_2}{t_3} + \frac{a_{28}}{a_4} \left(-a_2 - a_3 \frac{t_2}{t_3} \right) - a_{30} \frac{p_2}{p_4} - a_{31} \frac{t_5 p_2}{t_7 p_4} + \frac{a_{32}}{a_{12}} \left(\frac{a_{10} p_2}{p_4} + \frac{a_{11} p_2 t_5}{t_7 p_4} \right) \right)$$

$$r_3 = \left(a_{29} - a_{30} \frac{p_3}{p_4} + a_{31} \left(\frac{t_4}{t_7} - \frac{t_5 p_3}{p_4} \right) + \frac{a_{32}}{a_{12}} \left(-a_9 + \frac{a_{10} p_3}{p_4} + \frac{a_{11}}{t_7} \left(-t_4 + \frac{t_5 p_3}{p_4} \right) \right) \right)$$

$$s_1 = \left(\begin{array}{l} a_{33} + a_{35} \frac{t_1}{t_3} + \frac{a_{36}}{a_4} \left(-a_1 - a_3 \frac{t_1}{t_3} \right) - a_{37} \frac{r_1}{r_3} + \frac{a_{38}}{p_4} \left(-p_1 + \frac{p_3 r_1}{r_3} \right) + \frac{a_{39}}{t_7} \left(-\frac{t_4 r_1}{t_3} + \frac{t_5}{p_4} \left(-p_1 + \frac{p_3 r_1}{r_3} \right) \right) \\ + \frac{a_{40}}{a_{12}} \left(\frac{a_9 r_1}{t_3} + \frac{a_{10}}{p_4} \left(p_1 - \frac{p_3 r_1}{r_3} \right) \right) + \frac{a_{11}}{t_7} \left(\frac{t_4 r_1}{r_3} + \frac{t_5}{p_4} \left(p_1 - \frac{p_3 r_1}{r_3} \right) \right) \end{array} \right)$$

$$s_2 = \left(\begin{array}{l} a_{34} + a_{35} \frac{t_2}{t_3} + \frac{a_{36}}{a_4} \left(-a_2 - a_3 \frac{t_2}{t_3} \right) - a_{37} \frac{r_2}{r_3} + \frac{a_{38}}{p_4} \left(-p_2 + \frac{p_3 r_2}{r_3} \right) + \frac{a_{39}}{t_7} \left(-\frac{t_4 r_2}{t_3} + \frac{t_5}{p_4} \left(-p_2 + \frac{p_3 r_2}{r_3} \right) \right) \\ + \frac{a_{40}}{a_{12}} \left(\frac{a_9 r_2}{t_3} + \frac{a_{10}}{p_4} \left(p_2 - \frac{p_3 r_2}{r_3} \right) \right) + \frac{a_{11}}{t_7} \left(\frac{t_4 r_2}{r_3} + \frac{t_5}{p_4} \left(p_2 - \frac{p_3 r_2}{r_3} \right) \right) \end{array} \right)$$

C_1 değeri, sırasıyla Euler-Bernoulli kiriş ve Timoshenko kiriş için ortogonalite koşulu kullanılarak elde edilir.

$$\int_0^{L_1} \rho A Y_n(\xi) Y_m(\xi) dx = \delta_{nm} \quad 0 < x < L_1, \quad \int_{L_1}^L \rho A Y_n(\xi) Y_m(\xi) dx = \delta_{nm} \quad L_1 < x < L$$

$$\int_0^{L_1} \rho A W_n(\xi) W_m(\xi) dx = \delta_{nm} \quad 0 < x < L_1, \quad \int_{L_1}^L \rho A W_n(\xi) W_m(\xi) dx = \delta_{nm} \quad L_1 < x < L$$
(3.98)

Denklem 3.96 ve 3.97'nin çözümünü veren Matlab programı (Mod şekilleri) EK-1'de sunulmuştur.

3.9. Dinamik Cevap

Daha önce $y(x, t)$ ifadesini aşağıdaki gibi kabul etmiştik.

$$y(x, t) = W(x)T(t)$$

Kirişin cevabını bulmak için her mod için yukarıdaki işlemin tekrarlanıp toplanması gerekir. Mod-süperpozisyon ilkesine göre $y(x, t)$ ifadesi

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W(x)T(t) \quad (3.99)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce $W(x)$ ve $T(t)$ ifadelerinin açık hali aşağıdaki şekilde verilmişti.

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= C_1 (\sin \beta x + h_1 \cos \beta x + h_2 \sinh \beta x + h_3 \cosh \beta x) \\
W_2(x) &= C_1 (h_4 \sin \beta(x-L_1) + h_5 \cos \beta(x-L_1) + h_6 \sinh \beta(x-L_1) + h_7 \cosh \beta(x-L_1))
\end{aligned}
\tag{3.100a}$$

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{3.100b}$$

Böylece $y(x, t)$ ifadesi

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\sin \beta_n x + h_1 \cos \beta_n x + h_2 \sinh \beta_n x + h_3 \cosh \beta_n x) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \tag{3.100}$$

şeklinde yazılabilir. Burada A ve B ifadeleri başlangıç koşullarından bulunabilir. Kirişin ilk konumu $g(x)$ ve ilk hızı $v(x)$ olsun. Bu durumda başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
y(x, 0) &= g(x) \\
\dot{y}(x, 0) &= v(x)
\end{aligned}
\tag{3.101}$$

Başlangıç koşullarını uygulanarak A ve B katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
A &= \rho A \int_0^L g(x) W(x) \\
B &= \frac{\rho A}{w} \int_0^L v(x) W(x)
\end{aligned}
\tag{3.102}$$

β, A ve B değerleri her mod için farklı olacağından β ifadesini n katsayısına bağlı β_n ve A ve B ifadeleri yine n katsayısına bağlı A_n ve B_n olacak şekilde kirişin cevabı

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin \beta_n x + h_1 \cos \beta_n x + h_2 \sinh \beta_n x + h_3 \cosh \beta_n x) (A_n \cos \omega t + B_n \sin \omega t) \tag{3.103}$$

şeklinde elde edilir. İki parçalı kiriş için ise

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_1(x)(A_{1n} \cos \omega t + B_{1n} \sin \omega t) & 0 < x < L_1 \\ y_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_2(x)(A_{2n} \cos \omega t + B_{2n} \sin \omega t) & L_1 < x < L \end{aligned} \quad (3.104)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \sin \beta_n x + h_1 \cos \beta_n x + h_2 \sinh \beta_n x + h_3 \cosh \beta_n x \\ W_2(x) &= h_4 \sin \beta(x - L_1) + h_5 \cos \beta(x - L_1) + h_6 \sinh \beta(x - L_1) + h_7 \cosh \beta(x - L_1) \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \rho A \int_0^L g(x) W_1(x), & B_1 &= \frac{\rho A}{\omega_1} \int_0^L v(x) W_1(x) \\ A_2 &= \rho A \int_0^L g(x) W_2(x), & B_2 &= \frac{\rho A}{\omega_2} \int_0^L v(x) W_2(x) \end{aligned} \quad (3.106)$$

dır. Denklem 3.103 ve 3.104'ün çözümünü veren Matlab programı (Dinamik cevap) EK-1'de sunulmuştur.

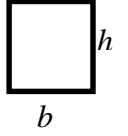
4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Karma Sınır Şartlarına Sahip Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:

Yorumlamanın kolaylığı için boyutsuz parametreler ve hesaplamalarda kullanılan kirişin özellikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$e_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad e_2 = \frac{K_2 L}{EI}, \quad e_3 = \frac{k_3 L^3}{EI}, \quad e_4 = \frac{K_4 L}{EI}$$

E	G	b	h	k	ρ	L
210 GPa	80.76 GPa	0.05m	0.1 m	5/6	7800 kg/m ³	1m



k_1, k_3, K_2, K_4 yay katsayılarına değerler atamak suretiyle doğal frekanslar elde edilmiştir. İlk 10 çizelgede $k_1 = k_3 \cdot 0.1$ ve $K_2 = K_4$ simetrik hali ele alınmıştır. Çizelge 4.11, 4.12 ve 4.13'te ise $k_1 = k_3/10$, $K_2 = K_4/10$ alınarak β değerleri elde edilmiştir. Her bir tablo $K_2 = K_4$ 'ün bir değerine karşılık artan $k_1 = k_3$ değerleri için oluşturulmuştur. $K_2 = K_4$ 'ün ilk değeri 50 ile başlatılıp 5 000 000'a kadar arttırılmıştır. İlk değer küçük bir dönme rijitliğine tekabül etmektedir. $k_1 = k_3$ 'ün birimi N/m , $K_2 = K_4$ 'ün birimi ise Nm/rad 'dir.

Çizelge 4.1-4.10'dan görüleceği üzere ilk üç β değeri $k_1 = k_3$ 'ün artan değerleriyle önemli bir artış gösterirken diğer β değerlerinde $k_1 = k_3$ 'ün artan değerlerine bağlılığı gittikçe azalmaktadır. Nitekim β_{10} değeri $k_1 = k_3$ değerleri ile hemen hemen hiç değişmemektedir. Diğer yandan küçük $k_1 = k_3$ değerleri halinde artan β değerleri arasındaki fark π kadar olmaktadır. Fakat $k_1 = k_3$ değerleri arttıkça ancak daha sonraki β değerlerinde fark π 'ye doğru gitmektedir. Şu halde yeteri kadar büyük β değerleri için $\beta_n - \beta_{n-1} = \pi$ olduğu söylenebilir. Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10 incelendiğinde β 'in ilk değeri hariç diğer değerlerinin yaklaşık olarak $\beta_2 = \pi$, $\beta_3 = 2\pi$, $\beta_4 = 3\pi$, ... $\beta_{n+1} = n\pi$ şeklinde sıralandığı gözlemlenebilir. Sonuç olarak ilk birkaç β değeri hariç daha sonraki β değerleri $k_1 = k_3$ ve $K_2 = K_4$ 'den bağımsız olarak

birbirlerinden π kadar fark eder hale gelmektedir. Yani $\beta_n - \beta_{n-1} = \pi$ olduğu görülmektedir. Buna göre mesela $k_1 = k_3 = 50$, $K_2 = K_4 = 5000000$ için β_{30} değeri $\beta_{30} = \beta_{10} + 20\pi = 91.102$ şeklinde bulunabilir. Bu ifadenin doğruluğunu denetlemek için Matlab programında β_{30} değeri (3.14) frekans denkleminde 91.097 olarak bulunmuştur. Yine $k_1 = k_3 = 50$, $K_2 = K_4 = 50$ için β_{40} değeri $\beta_{40} = \beta_{10} + 30\pi = 120,958$ şeklinde bulunabilir. Bu ifadeyi doğrulamak için Matlab programında β_{40} değeri (3.14) frekans denkleminde 120.957 bulunmuştur.

Çizelge 4.11-4.13'te ise simetrik olmayan durum için sayısal sonuçlar verilmiştir. Bu çizelgede, ilk üç β değeri dışındaki β değerleri simetrik durumdaki sonuçların aksine $k_1 = k_3$ 'ün artan değerleriyle önemli bir artış gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.13'de k_1, k_3, K_2, K_4 'ün çok büyük değerler aldığı hale dair β değerleri görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler iki ucu ankastre kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela $k_1 = K_2 = k_3 = K_4 = 9 \times 10^9$ için $\beta_1 = 4.73$, $\beta_2 = 7.853$, $\beta_3 = 10.995$ elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların aynısıdır [19]. Aynı çizelge k_1, K_2 'in çok büyük, k_3, K_4 'ün çok küçük değerler aldığı hale dair β değerleri de görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler bir ucu sabit diğer ucu serbest kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela $k_1 = K_2 = 9 \times 10^9$ ve $k_3 = K_4 = 10^{-9}$ için $\beta_1 = 1.875$, $\beta_2 = 4.694$, $\beta_3 = 7.854$ elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların aynısıdır [19]. Yine aynı çizelgede k_1, k_3, K_2, K_4 'ün çok küçük değerler aldığı hale dair β değerleri görülmektedir. Bu durumda elde edilen değerler iki ucu serbest kirişin bilinen değerleri ile örtüşmelidir. Mesela $k_1 = K_2 = k_3 = K_4 = 10^{-9}$ için $\beta_1 = 4.73$, $\beta_2 = 7.853$, $\beta_3 = 10.995$ elde edilmektedir, bu değerler bilinen sonuçların aynısıdır [19]. Sabit-sabit ve serbest-serbest kiriş halinde β değerlerinin aynı olduğuna da dikkat edilmelidir.

Çizelge 4.1. $K_2 = K_4 = 50$, $e_2 = e_4 = 0.0952$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	200	500	1000	2000	5000	25000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	0.381	0.952	1.904	3.809	9.523	47.619	190.476
β_1	0.657	0.918	1.162	1.384	2.012	2.315	2.380	3.010
β_2	1.294	1.457	1.676	1.918	2.756	3.243	3.998	5.211
β_3	4.769	4.475	4.785	4.803	4.937	5.096	5.511	6.756
β_4	7.878	7.878	7.881	7.885	7.915	7.955	8.074	8.659
β_5	11.013	11.014	11.015	11.016	11.027	11.041	11.084	11.312
β_6	14.150	14.150	14.151	14.151	14.155	14.164	14.184	14.289
β_7	17.289	17.290	17.291	17.291	17.293	17.297	17.308	17.365
β_8	20.431	20.430	20.432	20.432	20.433	20.434	20.441	20.475
β_9	23.570	23.570	23.570	23.570	23.571	23.573	23.577	23.601
β_{10}	26.711	26.711	26.711	26.711	26.711	26.713	26.715	26.731

Çizelge 4.2. $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	38.095	57.142	95.238	190.476
β_1	0.658	1.385	2.016	2.320	2.609	2.754	2.901	3.040
β_2	1.491	1.986	2.776	3.253	3.808	4.162	4.621	5.213
β_3	4.805	4.837	4.968	5.123	5.403	5.646	6.051	6.760
β_4	7.901	7.908	7.938	7.978	8.056	8.134	8.292	8.672
β_5	11.030	11.03	11.044	11.058	11.086	11.115	11.175	11.327
β_6	14.164	14.165	14.170	14.177	14.191	14.204	14.232	14.302
β_7	17.300	17.302	17.304	17.308	17.315	17.322	17.338	17.376
β_8	20.439	20.440	20.441	20.443	20.445	20.449	20.461	20.484
β_9	23.578	23.578	23.579	23.580	23.600	23.620	23.592	23.607
β_{10}	26.718	26.718	26.718	26.719	26.720	26.723	26.728	26.738

Çizelge 4.3 $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	38.095	57.142	95.238	190.476
β_1	0.660	1.387	2.022	2.332	2.635	2.788	2.946	3.091
β_2	1.812	2.146	2.830	3.280	3.818	4.165	4.620	5.216
β_3	4.903	4.932	5.053	5.197	5.459	5.691	6.079	6.771
β_4	7.966	7.973	8.003	8.040	8.116	8.192	8.343	8.710
β_5	11.078	11.080	11.091	11.106	11.135	11.162	11.221	11.369
β_6	14.202	14.203	14.208	14.215	14.229	14.242	14.269	14.339
β_7	17.332	17.333	17.336	17.339	17.347	17.354	17.369	17.406
β_8	20.466	20.466	20.468	20.470	20.474	20.483	20.488	20.511
β_9	23.601	23.601	23.602	23.604	23.607	23.613	23.616	23.630
β_{10}	26.738	26.738	26.739	26.740	26.742	26.746	26.750	26.759

Çizelge 4.4. $K_2 = K_4 = 100$, $e_2 = e_4 = 0.1905$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	38.095	57.142	95.238	190.476
β_1	0.656	1.388	2.030	2.351	2.668	2.834	3.007	3.177
β_2	2.039	2.324	2.901	3.317	3.832	4.170	4.620	5.220
β_3	5.038	5.064	5.172	5.302	5.541	5.756	6.121	6.786
β_4	8.064	8.071	8.099	8.134	8.205	2.777	8.420	8.767
β_5	11.153	11.155	11.166	11.179	11.207	11.234	11.290	11.434
β_6	14.262	14.263	14.268	14.275	14.288	14.301	14.328	14.396
β_7	17.383	17.383	17.386	17.389	17.396	17.404	17.419	17.455
β_8	20.509	20.509	20.511	20.513	20.518	20.522	20.531	20.553
β_9	23.639	23.639	23.640	23.642	23.645	23.648	23.654	23.668
β_{10}	26.772	26.772	26.773	26.774	26.776	26.778	26.782	26.792

Çizelge 4.5. $K_2 = K_4 = 5000$, $e_2 = e_4 = 9.5328$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	38.095	57.142	95.238	190.476
β_1	0.660	1.393	2.062	2.425	2.818	3.051	3.330	3.645
β_2	2.881	2.964	3.250	3.520	3.914	4.203	4.622	5.252
β_3	5.824	5.837	5.889	5.954	6.080	6.201	6.429	6.907
β_4	8.812	8.816	8.833	8.854	8.896	8.938	9.024	9.235
β_5	11.834	11.836	11.844	11.853	11.871	11.890	11.928	12.024
β_6	14.881	14.882	14.886	14.891	14.900	14.910	14.931	14.981
β_7	17.946	17.947	17.949	17.952	17.958	17.964	17.975	18.004
β_8	21.024	21.024	21.027	21.028	21.032	21.036	21.043	21.062
β_9	24.113	24.113	24.115	24.116	24.118	24.212	24.126	24.139
β_{10}	27.210	27.210	27.212	27.213	27.215	27.216	27.219	27.229

Çizelge 4.6. $K_2 = K_4 = 10000$, $e_2 = e_4 = 19.0477$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	20000	30000	50000	100000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	38.095	57.142	95.238	190.476
β_1	0.660	1.391	2.070	2.436	2.844	3.091	3.397	3.747
β_2	2.999	3.068	3.319	3.564	3.934	4.211	4.622	5.262
β_3	6.013	6.023	6.065	6.119	6.223	6.325	6.519	6.947
β_4	9.045	9.049	9.062	9.079	9.122	9.149	9.218	9.312
β_5	12.093	12.095	12.101	12.109	12.124	12.139	12.170	12.249
β_6	15.153	15.155	15.157	15.162	15.169	15.178	15.194	15.236
β_7	18.224	18.224	18.226	18.229	18.233	18.238	18.248	18.273
β_8	21.302	21.302	21.304	21.305	21.309	21.312	21.318	21.334
β_9	24.388	24.388	24.389	24.390	24.391	24.395	24.399	24.410
β_{10}	27.480	27.480	27.481	27.483	27.484	27.485	27.488	27.496

Çizelge 4.7. $K_2 = K_4 = 50000$, $e_2 = e_4 = 95.2381$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	30000	50000	100000	500000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	57.142	95.238	190.476	952.381
β_1	0.660	1.394	2.074	2.448	3.133	3.464	3.880	4.447
β_2	3.112	3.172	3.389	3.611	4.220	4.622	5.272	6.820
β_3	6.220	6.228	6.261	6.303	6.468	6.628	6.996	8.681
β_4	9.332	9.334	9.344	9.357	9.408	9.460	9.592	10.594
β_5	12.440	12.445	12.449	12.455	12.477	12.499	12.556	13.038
β_6	15.560	15.560	15.560	15.563	15.574	15.586	15.615	15.865
β_7	18.670	18.670	18.670	18.672	18.681	18.688	18.706	18.850
β_8	21.785	21.785	21.785	21.786	21.793	21.798	21.809	21.901
β_9	24.902	24.902	24.902	24.903	24.906	24.91	24.917	24.979
β_{10}	28.019	28.019	28.019	28.020	28.022	28.024	28.030	28.074

Çizelge 4.8. $K_2 = K_4 = 500000$, $e_2 = e_4 = 952.381$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	30000	50000	100000	500000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	57.142	95.238	190.476	952.381
β_1	0.660	1.395	2.075	2.451	3.143	3.483	3.914	4.516
β_2	3.141	3.198	3.408	3.624	4.223	4.622	5.274	6.880
β_3	6.277	6.284	6.315	6.354	6.508	6.659	7.010	8.695
β_4	9.415	9.417	9.426	9.438	9.485	9.532	9.652	10.599
β_5	12.553	12.554	12.558	12.563	12.583	12.602	12.653	13.086
β_6	15.692	15.693	15.694	15.696	15.707	15.717	15.742	15.959
β_7	18.830	18.83	18.830	18.831	18.838	18.844	18.859	18.982
β_8	21.968	21.968	21.968	21.969	21.973	21.977	21.986	22.063
β_9	25.107	25.107	25.107	25.107	25.110	25.113	25.119	25.169
β_{10}	28.245	28.245	28.245	28.245	28.247	28.249	28.254	28.289

Çizelge 4.9. $K_2 = K_4 = 1000000$, $e_2 = e_4 = 1904.76$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	30000	50000	100000	500000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	57.142	95.238	190.476	952.381
β_1	0.660	1.395	2.075	2.452	3.144	3.484	3.916	4.515
β_2	3.143	3.199	3.409	3.624	4.223	4.622	5.275	6.884
β_3	6.280	6.287	6.318	6.357	6.510	6.660	7.012	8.695
β_4	9.420	9.422	9.431	9.442	9.489	9.536	9.656	10.599
β_5	12.560	12.56	12.564	12.569	12.589	12.608	12.659	13.089
β_6	15.699	15.699	15.702	15.704	15.714	15.724	15.750	15.965
β_7	18.839	18.839	18.841	18.842	18.848	18.854	18.868	18.990
β_8	21.979	21.979	21.980	21.981	21.985	21.988	21.998	22.073
β_9	25.120	25.120	25.121	25.121	25.123	25.125	25.131	25.182
β_{10}	28.259	28.259	28.259	28.260	28.262	28.264	28.268	28.303

Çizelge 4.10. $K_2 = K_4 = 5000000$, $e_2 = e_4 = 9523.81$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3$ ile değişimi

$k_1 = k_3$	50	1000	5000	10000	30000	50000	100000	500000
$e_1 = e_3$	0.095	1.904	9.523	19.047	57.142	95.238	190.476	952.381
β_1	0.660	1.395	2.075	2.452	3.145	3.485	3.918	4.523
β_2	3.144	3.200	3.410	3.625	4.223	4.622	5.275	6.887
β_3	6.283	6.290	6.320	6.359	6.512	6.662	7.012	8.696
β_4	9.424	9.426	9.435	9.446	9.493	9.540	9.659	10.600
β_5	12.565	12.565	12.569	12.575	12.594	12.614	12.663	13.069
β_6	15.706	15.706	15.708	15.711	15.721	15.731	15.756	15.970
β_7	18.847	18.847	18.849	18.850	18.856	18.862	18.876	18.896
β_8	21.989	21.989	21.990	21.990	21.994	21.998	22.007	22.081
β_9	25.130	25.130	25.130	25.130	25.133	25.136	25.142	25.191
β_{10}	28.271	28.271	28.271	28.271	28.273	28.275	28.280	28.314

Çizelge 4.11. $K_2 = K_4 / 10 = 1000$, $e_2 = e_4 / 10 = 1.9048$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi

$k_1 = k_3 / 10$	100	1000	5000	10000	50000	100000	250000	500000
$e_1 = e_3 / 10$	0.190	1.904	9.523	19.047	95.238	190.476	476.190	952.381
β_1	1.187	1.928	2.515	2.827	3.549	3.737	3.866	3.911
β_2	2.732	3.138	3.996	4.422	5.380	5.874	6.434	6.679
β_3	5.626	5.693	5.993	6.329	7.494	7.952	8.657	9.213
β_4	8.637	8.657	8.749	8.869	9.730	10.307	10.971	11.536
β_5	11.690	11.699	11.738	11.788	12.222	12.718	13.506	14.018
β_6	14.764	14.768	14.789	14.814	15.036	15.334	16.075	16.670
β_7	17.851	17.854	17.866	17.881	18.007	18.179	18.712	19.351
β_8	20.948	20.950	20.957	20.966	21.046	21.151	21.498	22.048
β_9	24.051	24.052	24.058	24.064	24.117	24.186	24.414	24.822
β_{10}	27.160	27.161	27.164	27.169	27.206	27.254	27.409	27.698

Çizelge 4.12. $K_2 = K_4 / 10 = 10000$, $e_2 = e_4 / 10 = 19.0476$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi

$k_1 = k_3 / 10$	100	1000	5000	10000	50000	100000	250000	500000
$e_1 = e_3 / 10$	0.190	1.904	9.523	19.047	95.238	190.476	476.190	952.381
β_1	1.193	1.985	2.583	2.884	3.746	4.068	4.326	4.420
β_2	3.095	3.393	4.188	4.654	5.569	6.001	6.664	7.067
β_3	6.134	6.177	6.377	6.228	7.812	8.291	8.872	9.416
β_4	9.210	9.223	9.282	9.359	10.021	10.663	11.366	11.833
β_5	12.296	12.302	12.326	12.358	12.642	13.029	13.877	14.447
β_6	15.389	15.392	15.405	15.421	15.561	15.756	16.375	17.066
β_7	18.487	18.490	18.497	18.506	18.585	18.693	19.059	19.658
β_8	21.590	21.590	21.595	21.602	21.652	21.717	21.937	22.348
β_9	24.697	24.697	24.701	24.705	24.738	24.782	24.922	25.190
β_{10}	27.807	27.807	27.809	27.813	27.836	27.866	27.963	28.142

Çizelge 4.13. $K_2 = K_4 / 10 = 100000$, $e_2 = e_4 / 10 = 190.4762$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $k_1 = k_3 / 10$ ile değişimi

$k_1 = k_3 / 10$	100	1000	5000	10000	50000	100000	250000	500000
$e_1 = e_3 / 10$	0.190	1.904	9.523	19.047	95.238	190.476	476.190	952.381
β_1	1.193	1.993	2.596	2.895	3.787	4.159	4.469	4.586
β_2	3.166	3.449	4.232	4.704	5.614	6.020	6.718	7.207
β_3	6.269	6.308	6.491	6.726	7.905	8.390	8.923	9.450
β_4	9.399	9.411	9.463	9.553	10.146	10.756	11.501	11.924
β_5	12.531	12.536	15.558	12.586	12.839	13.195	14.038	14.616
β_6	15.664	15.666	16.678	15.692	15.814	15.986	16.560	17.262
β_7	18.798	18.8	18.805	18.813	18.882	18.974	19.298	19.867
β_8	21.931	21.932	21.934	21.942	21.983	22.039	22.228	22.595
β_9	25.064	25.064	25.066	25.071	25.101	25.135	25.255	25.486
β_{10}	28.198	28.198	28.199	28.203	28.222	28.248	28.328	28.479

Çizelge 4.14. Sonuçların bilinen değerler ile kıyası

	Sabit-Sabit Kiriş		Sabit-Serbest Kiriş		Serbest - Serbest Kiriş	
	$k_1 = k_3 = 10^{10}$ $K_2 = K_4 = 10^{10}$	S.S.RAO	$k_1 = K_2 = 10^{10}$ $k_3 = K_4 = 0$	S.S.RAO	$k_1 = k_3 = 0$ $K_2 = K_4 = 0$	S.S.RAO
β_1	4.730	4.730	1.875	1.875	4.730	4.730
β_2	7.853	7.853	4.694	4.694	7.853	7.853
β_3	10.995	10.995	7.854	7.854	10.995	10.995
β_4	14.137	14.137	10.995	10.995	14.137	14.137

Çizelge 4.15'te Timoshenko kirişe ait doğal frekansların $e_1 = e_3$ boyutsuz katsayılara bağlı $k_1 = k_3$ ötelenme yay katsayıları ile değişimi verilmiştir. Çizelge 4.16'da ise yine Timoshenko kirişe ait doğal frekansların $e_2 = e_4$ boyutsuz katsayılara bağlı $K_2 = K_4$ dönme yay katsayıları ile değişimi verilmiştir. Yayların doğal frekansa etkileri Euler-Bernoulli kiriş ile benzer olmakla beraber Timoshenko kiriş doğal frekanslarının tüm durumlar için Euler-Bernoulli kiriş doğal frekanslarından daha küçük olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca $e_1 = e_3$ değeri arttıkça yani $k_1 = k_3$ ötelenme yay katsayıları

arttıkça ilk doğal frekansın gittikçe düşerek sifira yaklaştığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla belli bir değerden sonra ilk doğal frekans olarak ikinci sütunda bulunan değerler geçerli olmaktadır. Örneğin $e_1 = e_3$ sabitini sonsuz bir değere yaklaştırdığımızda ilk doğal frekans ikinci sütunda görülen 3.1457 değeri olarak bulunmuştur.

Çizelge 4.15. $e_2 = e_4 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_1 = e_3$ ile değişimi

$e_1 = e_3$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1.2340	4.6866	7.5203	10.1412	12.5193
0.1	1.1468	4.6848	7.5199	10.1410	12.5192
1	0.0024	4.6682	7.5162	10.1396	12.5186
10	0.0008	4.4997	7.4794	10.1260	12.5120
∞	-	3.1457	6.1046	8.8487	11.3484

Çizelge 4.16. $e_1 = e_3 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_2 = e_4$ ile değişimi

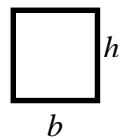
$e_2 = e_4$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	0.0051	4.6466	7.4968	10.1253	12.5076
0.1	1.1468	4.6848	7.5199	10.1410	12.5192
1	2.0732	4.9517	7.6975	10.2669	12.6153
10	2.8637	5.6907	8.3592	10.8305	13.0971
∞	3.1124	6.0902	8.8404	11.3430	13.6131

4.2. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:

Yorumlamanın kolaylığı için boyutsuz parametreler ve hesaplamalarda kullanılan kirişin özellikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$e_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad e_2 = \frac{K_2 L}{EI}, \quad e_3 = \frac{k_3 L^3}{EI}, \quad e_4 = \frac{K_4 L}{EI}, \quad e_5 = \frac{c_L L}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad e_6 = \frac{c_R L}{\sqrt{\rho A E I}}$$

E	G	b	h	k	ρ	L
210 GPa	80.76 GPa	0.05m	0.1 m	5/6	7800 kg/m ³	1m



Çizelge 4.17 ve 4.18’de Euler-Bernoulli kirişin $e_5 = e_6$ sabilerinin artan değerleriyle doğal frekansların değişimi incelenmiştir. $e_5 = e_6$ değerlerinin artması dolayısıyla damper katsayılarının artması doğal frekansları düşürdüğü görülmüştür. Ayrıca $e_5 = e_6$ değerlerinin sıfır olduğu durumların doğal frekansları daha önce sayısal sonuçları verilen aynı koşullar altındaki damperiz sistemin doğal frekanslarıyla beklendiği gibi aynı olduğu gözlemlenmiştir. Çizelge 4.19, 4.20 ve 4.21’de ise damper içeren Timoshenko kirişin doğal frekansları farklı durumlarda incelenmiştir. Çizelge 4.21’de damper katsayısının artmasıyla doğal frekansların Euler-Bernoulli kirişte olduğu gibi düştüğü gözlemlenmiştir. Bu frekansların imajiner kısımları hem Euler-Bernoulli hem Timoshenko kiriş durumlarında $e_5 = e_6$ değerlerinin artmasıyla önce arttığı bir noktadan sonra tekrar düşerek sıfıra doğru yaklaştığı görülmüştür.

Çizelge 4.17. $e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi

$e_5 = e_6$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1.3092	4.7715	7.8787	11.0138	14.1513
0.1	1.3043 + 0.1140i	4.7711 + 0.0416i	7.8785 + 0.0253i	11.0136 + 0.0181i	14.1512 + 0.0141i
1	0.2298 + 0.2298i	4.7216 + 0.4203i	7.8548 + 0.2529i	11.0003 + 0.1810i	14.1427 + 0.1410i
10	0.0707 + 0.0707i	3.1881 + 0.3320i	6.4573 + 0.6459i	9.8560 + 0.8816i	13.3019 + 0.9595i
100	0.0063 + 0.0054i	3.1728 + 0.0323i	6.3003 + 0.0638i	9.4389 + 0.0952i	12.5810 + 0.1266i

Çizelge 4.18. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi

$e_5 = e_6$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1.1856	2.2333	5.0631	8.0767	11.1611
0.1	2.2325 + 0.0623i	5.0628 + 0.0367i	8.0765 + 0.0239i	11.1610 + 0.0176i	14.2686 + 0.0138i
1	1.1034 + 0.4531i	5.0268 + 0.3706i	8.0569 + 0.2395i	11.1493 + 0.1756i	14.2609 + 0.1383i
10	0.2242 + 0.2242i	3.4203 + 0.4090i	6.6198 + 0.7368i	10.0109 + 0.9585i	13.4469 + 1.0033i
100	0.0707 + 0.0707i	3.3990 + 0.0394i	6.4289 + 0.0721i	9.5284 + 0.1037i	12.6497 + 0.1352i

Çizelge 4.19. $e_2 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_1 = e_3$ ile değişimi

$e_1 = e_3$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	4.6748 + 0.2017i	7.5146 + 0.1162i	10.1381 + 0.0785i	12.5174 + 0.0575i	14.6762 + 0.0443i
0.1	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
1	4.6562 + 0.2011i	7.5105 + 0.1159i	10.1365 + 0.0784i	12.5167 + 0.0575i	14.6758 + 0.0443i
10	4.4845 + 0.1921i	7.4737 + 0.1134i	10.1229 + 0.0775i	12.5101 + 0.0571i	14.6721 + 0.0441i
100	3.4918 + 0.0225i	7.1414 + 0.0830i	9.9930 + 0.0684i	12.4464 + 0.0532i	14.6360 + 0.0421i

Çizelge 4.20. $e_1 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_2 = e_4$ ile değişimi

$e_2 = e_4$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	4.6343 + 0.2050i	7.4910 + 0.1168i	10.1222 + 0.0786i	12.5056 + 0.0575i	14.6669 + 0.0442i
0.1	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
1	4.9429 + 0.1780i	7.6928 + 0.1104i	10.2642 + 0.0768i	12.6135 + 0.0572i	14.7536 + 0.0445i
10	5.6872 + 0.1139i	8.3572 + 0.0806i	10.8292 + 0.0620i	13.0962 + 0.0499i	15.1726 + 0.0414i
∞	6.0881 + 0.0799i	8.8394 + 0.0539i	11.3425 + 0.0412i	13.6128 + 0.0339i	15.6788 + 0.0292i

Çizelge 4.21. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının $e_5 = e_6$ ile değişimi

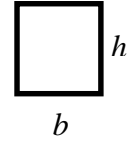
$e_5 = e_6$	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
0	1.1404 + 0.0000i	4.6840 + 0.0000i	7.5193 + 0.0000i	10.1407 + 0.0000i	12.5190 + 0.0000i
0.5	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
1	4.6361 + 0.4066i	7.4971 + 0.2322i	10.1286 + 0.1567i	12.5115 + 0.1148i	14.6722 + 0.0884i
10	3.1622 + 0.3207i	6.2467 + 0.5678i	9.1637 + 0.6902i	11.8140 + 0.6904i	14.1730 + 0.6275i
∞	3.1457 + 0.0000i	6.1046 + 0.0000i	8.8487 + 0.0000i	11.3484 + 0.0000i	13.6168 + 0.0000i

4.3. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Kademeli Euler-Bernoulli Kiriş İçin Sayısal Çözümler:

Yorumlamanın kolaylığı için boyutsuz parametreler ve hesaplamalarda kullanılan kirişin özellikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$e_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad e_2 = \frac{K_2 L}{EI}, \quad e_3 = \frac{k_3 L^3}{EI}, \quad e_4 = \frac{K_4 L}{EI}, \quad e_5 = \frac{c_L L}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad e_6 = \frac{c_R L}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad L_0 = \frac{L_1}{L}$$

E	L	b	h	ρ
210 GPa	1m	0.05m	0.1 m	7800 kg/m ³



Çizelge 4.22’de kademe konumunun (L_0) artmasıyla yani kademe konumunun kirişin diğer ucuna doğru ilerlemesiyle doğal frekansların değişimi incelenmiştir. Çizelgeden de görüleceği üzere frekanslarda dalgalanmalar meydana gelmiştir. Çizelge 4.23’te ise frekansların kademe (kesit yüksekliği) oranı ile değişimi verilmiştir. Kesit oranının (h_1/h_2) artmasıyla frekansların genel anlamda arttığı gözlemlenmiştir. Çizelge 4.24 ve 4.25’te damper içeren kademeli kirişin sayısal sonuçları verilmiştir. Çizelge 4.24’te yine frekanslarda dalgalanmalar görülmektedir. Çizelge 4.25’te ise ilk modlarda frekanslar kesit oranının artmasıyla artmakta iken sonraki modlarda sonuçlarda dalgalanmalar meydana gelmektedir.

Çizelge 4.22. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 0, e_6 = 0$ değerleri için frekansın L_0 ile değişimi

L_0	β_1	β_2	β_3
0	754.9	2540.8	5752.3
0.25	746.2	2483.9	5635.4
0.50	790.7	2684.2	7617.7
0.75	759.1	4038.8	7199.1
1	747.08	3839.8	6297.2

Çizelge 4.23. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.25$ değerleri için frekansın h_1/h_2 ile değişimi

h_1/h_2	β_1	β_2	β_3
1	373.5	1919.9	4885.5
2	746.2	2483.9	5635.4
3	1036.4	3129.1	6264.6
4	1325.7	3659.4	7051.5
5	1639.4	4041.5	7980.1

Çizelge 4.24. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 1, e_6 = 1$ değerleri için frekansın L_0 ile değişimi

L_0	β_1	β_2	β_3
0	0.1 + 414.1i	2196.8 + 870.2i	5492.1 + 931.8i
0.25	126.6 + 257.4i	2249.5 + 662.2i	5457.6 + 716.1i
0.50	149.1 + 204.8i	534.2 + 625.9i	2432.5 + 756.7 i
0.75	151.8 + 171.9i	578.8 + 542.1i	3889.9 + 982.1i
1	151.6 + 149.7i	622.1 + 421.7i	3764.4 + 558.1i

Çizelge 4.25. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, e_5 = 1, e_6 = 1, L_0 = 0.25$ değerleri için frekansın h_1/h_2 ile değişimi

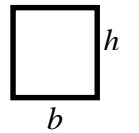
h_1/h_2	β_1	β_2	β_3
1	75.8 + 74.8 i	1882.2 + 279.1i	4857.3 + 289.1i
2	126.6 + 257.4i	2249.5 + 662.2i	5457.6 + 716.1i
3	333.8 + 470.2i	2432.1 + 812.2i	5730.1 + 1113.6i
4	0+ 394.1i	2644.9 + 618.3i	6137.8 + 1233.4i
5	0+450.9i	2796.4 + 450.9i	6832.8 + 1171.9i

4.4. Damper İçeren Karma Sınır Şartlarına Sahip Çatlaklı Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kiriş İçin Sayısal Çözümler:

Yorumlamanın kolaylığı için boyutsuz parametreler ve hesaplamalarda kullanılan kirişin özellikleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$e_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad e_2 = \frac{K_2 L}{EI}, \quad e_3 = \frac{k_3 L^3}{EI}, \quad e_4 = \frac{K_4 L}{EI}, \quad e_5 = \frac{c_L L}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad e_6 = \frac{c_R L}{\sqrt{\rho A E I}}, \quad L_0 = \frac{L_1}{L}$$

E	G	b	h	k	ρ	L
210 GPa	80.76 GPa	0.05m	0.1 m	5/6	7800 kg/m ³	1m



Çizelge 4.26'da, hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş için çatlak derinlik oranı γ ile frekansların değişimi verilmiştir. Her iki durumda da, γ arttıkça frekansın imajiner kısmı artarken reel kısmı azalmaktadır. Bu γ değerinin artmasıyla frekans azalırken genliğin artacağı anlamına gelir. Frekansların düşmesinin nedeni kirişin büyük γ

değerler için zayıflamasıdır. Genel olarak Euler-Bernoulli kirişine karşılık gelen frekans değerleri, Timoshenko kirişe göre daha büyük olduğu da görülmüştür.

Çizelge 4.26. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$, $L_0 = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının γ ile değişimi

	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Euler-Bernoulli	0	4.7594 + 0.2085i	7.8728 + 0.1265i	11.0104 + 0.0906i	14.1491 + 0.0706i	17.2888 + 0.0578i
	0.25	4.5684 + 0.2088i	7.8728 + 0.1265i	10.6981 + 0.0911i	14.1491 + 0.0706i	16.8360 + 0.0582i
	0.50	4.0375 + 0.2152i	7.8728 + 0.1265i	10.1251 + 0.0948i	14.1491 + 0.0706i	16.2071 + 0.0603i
	0.75	3.1032 + 0.2516i	7.8728 + 0.1265i	9.6686 + 0.1013i	14.1491 + 0.0706i	15.8442 + 0.0626i
	0.90	2.4499 + 0.3044i	7.8728 + 0.1265i	9.5407 + 0.1038i	14.1491 + 0.0706i	15.7584 + 0.0632i
Timoshenko	0	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
	0.25	4.4614 + 0.2212i	7.5106 + 0.1847i	9.5257 + 0.0854i	12.5057 + 0.0602i	13.8124 + 0.0479i
	0.50	3.9074 + 0.2314i	7.5015 + 0.2294i	9.1821 + 0.0979i	12.4928 + 0.0699i	13.1213 + 0.0491i
	0.75	3.0052 + 0.2766i	7.4813 + 0.3006i	8.8192 + 0.1128i	12.4219 + 0.0764i	12.7682 + 0.0528i
	0.90	2.2609 + 0.3491i	7.3718 + 0.3549i	8.9413 + 0.1209i	12.3916 + 0.0816i	12.5190 + 0.0540i

Çizelge 4.27'de, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişler için L_0 oranıyla frekansların değişimi verilmektedir. Bu çizelgede çatlak lokasyonundaki değişikliklerin frekanslar üzerinde simetrik bir etki gösterdiği görülmektedir. Timoshenko kiriş durumunda frekansların değerleri, Euler-Bernoulli kiriş durumuna karşılık gelen frekans değerlerinden daha küçük olduğu bu çizelgede de görülmüştür.

Çizelge 4.27. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$, $\gamma = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının L_0 ile değişimi

	L_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Euler-Bernoulli	0.0	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
	0.25	4.4652 + 0.2440i	6.9552 + 0.1321i	10.3072 + 0.0764i	14.0017 + 0.0600i	17.0899 + 0.0736i
	0.50	4.0375 + 0.2152i	7.8728 + 0.1265i	10.1251 + 0.0948i	14.1491 + 0.0706i	16.2071 + 0.0603i
	0.75	4.4652 + 0.2440i	6.9552 + 0.1321i	10.3072 + 0.0764i	14.0017 + 0.0600i	17.0899 + 0.0736i
	1	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
Timoshenko	0.0	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
	0.25	4.2918 + 0.2617i	6.6715 + 0.1309i	9.6150 + 0.0610i	12.1738 + 0.0359i	14.8609 + 0.0825i
	0.50	3.9074 + 0.2314i	7.5142 + 0.1162i	9.1821 + 0.0979i	12.5173 + 0.0575i	13.1213 + 0.0491i
	0.75	4.2918 + 0.2617i	6.6715 + 0.1309i	9.6150 + 0.0610i	12.1738 + 0.0359i	14.8609 + 0.0825i
	1	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i

Çizelge 4.28'de damper katsayıları sıfır olarak alınmıştır. Bu durumda, beklendiği gibi tüm frekanslar reeldir. Euler-Bernoulli kiriş durumunda β_1, β_3 ve β_5 değerleri γ değerinin artmasıyla değişmezken β_2 ve β_4 değerlerinin γ ile değiştiği gözlemlenmiştir. Bu değişimin nedeni, 2 ve 4 modlarının çatlak konumunda dallanmasıdır (Şekil 4.11 ve Şekil 4.19). Timoshenko kiriş durumunda ise tüm β değerleri γ değerinden etkilenmektedir.

Çizelge 4.28. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının γ ile değişimi

	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Euler-Bernoulli	0	1.3092	4.7715	7.8787	11.0138	14.1513
	0.25	1.3092	4.5815	7.8787	10.7015	14.1513
	0.50	1.3092	4.0548	7.8787	10.1288	14.1513
	0.75	1.3092	3.1382	7.8787	9.6726	14.1513
	0.90	1.3092	2.5185	7.8787	9.5448	14.1513
Timoshenko	0	1.1465	4.6848	7.5199	10.1410	12.5192
	0.25	1.1459	4.5232	7.5182	9.9357	12.5156
	0.50	1.1452	4.0321	7.5051	9.4902	12.4653
	0.75	1.1450	3.0663	7.4631	9.0761	12.3058
	0.90	1.1449	2.1891	7.3932	8.9442	12.0142

Çizelge 4.29'da, uçlarında damper olmayan bir kirişin frekansların L_0 ile değişimi gösterilmektedir. Beklendiği gibi frekansların hepsi reeldir. Frekans değerlerinin davranışı hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kirişlerinde aynı olduğu ve çatlak lokasyonundaki değişikliklerin frekanslar üzerinde simetrik bir etki gösterdiği tekraren görülmektedir.

Çizelge 4.29. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $\gamma = 0.5$ değerleri için doğal frekanslarının L_0 ile değişimi

	L_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Euler-Bernoulli	0.0	1.3046	4.7709	7.8783	11.0134	14.1510
	0.25	1.3067	4.4828	6.9639	10.3104	14.0035
	0.50	1.3092	4.0548	7.8787	10.1288	14.1513
	0.75	1.3067	4.4828	6.9639	10.3104	14.0035

	1	1.3046	4.7709	7.8783	11.0134	14.1510
Timoshenko	0.0	1.1404	4.6840	7.5193	10.1407	12.5190
	0.25	1.1438	4.4216	6.7421	9.5809	12.3698
	0.50	1.1452	4.0321	7.5051	9.4902	12.4653
	0.75	1.1438	4.4216	6.7421	9.5809	12.3698
	1	1.1404	4.6840	7.5193	10.1407	12.5190

Çizelge 4.30'da dönme yaylarının etkisini görmek için farklı e_2 ve e_4 değerlerinin γ değeri ile değişimi incelenmiştir. Çizelge 4.31'de ise ötelenme yayların etkisini gözlemlemek için farklı e_1 ve e_3 değerlerinin γ değeri ile değişimi verilmiştir. Çizelge 4.30'da artan e_2 ve e_4 değerleriyle frekansların reel kısımlarının arttığını imajiner kısımlarının düştüğünü görüyoruz. Çizelge 4.31'de ise frekansların hem gerçek hem de imajiner kısımları artan e_1 ve e_3 değerleri ile arttığı görülmektedir. Fakat yüksek modlardaki frekanslar e_1 ve e_3 değerlerinin neredeyse hiç etkilenmediği de görülmektedir.

Çizelge 4.30. $e_1 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$, $L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_2, e_4 ve γ ile değişimi

	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$e_2 = 0.1$ $e_4 = 0.1$	0	4.7594 + 0.2085i	7.8728 + 0.1265i	11.0104 + 0.0906i	14.1491 + 0.0706i	17.2888 + 0.0578i
	0.25	4.5684 + 0.2088i	7.8728 + 0.1265i	10.6981 + 0.0911i	14.1491 + 0.0706i	16.8360 + 0.0582i
	0.50	4.0375 + 0.2152i	7.8728 + 0.1265i	10.1251 + 0.0948i	14.1491 + 0.0706i	16.2071 + 0.0603i
	0.75	3.1032 + 0.2516i	7.8728 + 0.1265i	9.6686 + 0.1013i	14.1491 + 0.0706i	15.8442 + 0.0626i
	0.90	2.4499 + 0.3044i	7.8728 + 0.1265i	9.5407 + 0.1038i	14.1491 + 0.0706i	15.7584 + 0.0632i
$e_2 = 1$ $e_4 = 0.1$	0	4.9028 + 0.1953i	7.9717 + 0.1229i	11.0841 + 0.0892i	14.2078 + 0.0699i	17.3376 + 0.0574i
	0.25	4.7178 + 0.1947i	7.9711 + 0.1229i	10.7720 + 0.0896i	14.2075 + 0.0699i	16.8853 + 0.0578i
	0.50	4.2155 + 0.1977i	7.9698 + 0.1230i	10.2018 + 0.0931i	14.2069 + 0.0698i	16.2587 + 0.0599i
	0.75	3.4083 + 0.2181i	7.9682 + 0.1231i	9.7502 + 0.0993i	14.2063 + 0.0697i	15.8979 + 0.0621i
	0.90	2.9670 + 0.2389i	7.9677 + 0.1231i	9.6242 + 0.1017i	14.2062 + 0.0696i	15.8128 + 0.0627i
$e_2 = 1$ $e_4 = 1$	0	5.0412 + 0.1838i	8.0685 + 0.1195i	11.1569 + 0.0878i	14.2661 + 0.0692i	17.3861 + 0.0570i
	0.25	4.8595 + 0.1828i	8.0685 + 0.1195i	10.8443 + 0.0882i	14.2661 + 0.0692i	16.9338 + 0.0574i
	0.50	4.3743 + 0.1842i	8.0685 + 0.1195i	10.2748 + 0.0916i	14.2661 + 0.0692i	16.3083 + 0.0594i
	0.75	3.6296 + 0.1992i	8.0685 + 0.1195i	9.8256 + 0.0976i	14.2661 + 0.0692i	15.9490 + 0.0616i
	0.90	3.2461 + 0.2143i	8.0685 + 0.1195i	9.7006 + 0.0999i	14.2661 + 0.0692i	15.8642 + 0.0622i

Çizelge 4.31. $e_2 = 0.1, e_4 = 0.1, e_5 = 0.5, e_6 = 0.5, L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_1, e_3 ve γ ile değişimi

	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$e_1 = 0.1$ $e_3 = 0.1$	0	4.7594 + 0.2085i	7.8728 + 0.1265i	11.0104 + 0.0906i	14.1491 + 0.0706i	17.2888 + 0.0578i
	0.25	4.5684 + 0.2088i	7.8728 + 0.1265i	10.6981 + 0.0911i	14.1491 + 0.0706i	16.8360 + 0.0582i
	0.50	4.0375 + 0.2152i	7.8728 + 0.1265i	10.1251 + 0.0948i	14.1491 + 0.0706i	16.2071 + 0.0603i
	0.75	3.1032 + 0.2516i	7.8728 + 0.1265i	9.6686 + 0.1013i	14.1491 + 0.0706i	15.8442 + 0.0626i
	0.90	2.4499 + 0.3044i	7.8728 + 0.1265i	9.5407 + 0.1038i	14.1491 + 0.0706i	15.7584 + 0.0632i
$e_1 = 1$ $e_3 = 0.1$	0	4.7678 + 0.2087i	7.8746 + 0.1266i	11.0111 + 0.0907i	14.1495 + 0.0706i	17.2890 + 0.0578i
	0.25	4.5775 + 0.2091i	7.8744 + 0.1266i	10.6988 + 0.0911i	14.1494 + 0.0706i	16.8362 + 0.0582i
	0.50	4.0496 + 0.2158i	7.8743 + 0.1266i	10.1259 + 0.0949i	14.1494 + 0.0706i	16.2074 + 0.0603i
	0.75	3.1281 + 0.2543i	7.8741 + 0.1267i	9.6695 + 0.1014i	14.1493 + 0.0707i	15.8444 + 0.0626i
	0.90	2.5025 + 0.3135i	7.8740 + 0.1267i	9.5417 + 0.1039i	14.1492 + 0.0707i	15.7586 + 0.0632i
$e_1 = 1$ $e_3 = 1$	0	4.7761 + 0.2089i	7.8765 + 0.1268i	11.0118 + 0.0907i	14.1498 + 0.0706i	17.2892 + 0.0578i
	0.25	4.5865 + 0.2094i	7.8765 + 0.1268i	10.6995 + 0.0911i	14.1498 + 0.0706i	16.8364 + 0.0582i
	0.50	4.0615 + 0.2164i	7.8765 + 0.1268i	10.1268 + 0.0949i	14.1498 + 0.0706i	16.2076 + 0.0603i
	0.75	3.1515 + 0.2566i	7.8765 + 0.1268i	9.6705 + 0.1015i	14.1498 + 0.0706i	15.8446 + 0.0626i
	0.90	2.5468 + 0.3191i	7.8765 + 0.1268i	9.5427 + 0.1040i	14.1498 + 0.0706i	15.7588 + 0.0632i

Çizelge 4.32’de e_5 ve e_6 değerlerine bağlı damper katsayılarının frekanslar üzerindeki etkisi görülmektedir. Bu çizelgede e_5 ve e_6 değerlerinin artması ile frekansların reel kısımlarının artmakta imajiner kısımlarının düşmekte olduğu ve reel kısımlardaki artışın yüksek modlara doğru gittikçe azaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.32. $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1, L_0 = 0.5$ değerleri için Euler-Bernoulli kirişin doğal frekanslarının e_5, e_6 ve γ ile değişimi

	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$e_5 = 1$ $e_6 = 1$	0	4.5145 + 1.0410i	7.8470 + 0.6940i	11.0340 + 0.5145i	14.1875 + 0.4077i	17.3315 + 0.3373i
	0.25	4.3135 + 0.9992i	7.8483 + 0.6984i	10.7160 + 0.5135i	14.1890 + 0.4091i	16.8761 + 0.3382i
	0.50	3.7727 + 0.8918i	7.8518 + 0.7088i	10.1321 + 0.5269i	14.1917 + 0.4116i	16.2443 + 0.3483i
	0.75	2.8987 + 0.7150i	7.8566 + 0.7208i	9.6659 + 0.5546i	14.1940 + 0.4136i	15.8797 + 0.3594i
	0.90	2.4547 + 0.5483i	7.8585 + 0.7252i	9.5351 + 0.5653i	14.1947 + 0.4142i	15.7935 + 0.3626i
$e_5 = 4$ $e_6 = 1$	0	5.0268 + 0.3706i	8.0552 + 0.2393i	11.0404 + 0.0906i	14.2609 + 0.1383i	17.3823 + 0.1139i
	0.25	4.8442 + 0.3689i	8.0569 + 0.2395i	10.8365 + 0.1764i	14.2609 + 0.1383i	16.9299 + 0.1147i
	0.50	4.3552 + 0.3725i	8.0569 + 0.2395i	10.2665 + 0.1833i	14.2609 + 0.1383i	16.3042 + 0.1188i
	0.75	3.5978 + 0.4056i	8.0569 + 0.2395i	9.8168 + 0.1953i	14.2609 + 0.1383i	15.9446 + 0.1231i
	0.90	3.2016 + 0.4398i	8.0569 + 0.2395i	9.6916 + 0.1999i	14.2609 + 0.1383i	15.8598 + 0.1244i

Çizelge 4.33, hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş teorileri için h/L oranının frekanslar üzerindeki etkisini göstermektedir. Beklendiği gibi, Euler-Bernoulli kirişin frekansları h/L oranından etkilenmemektedir. Fakat Timoshenko kirişte, frekansların reel kısımları h/L oranı arttıkça azalır ve daha yüksek modlar için bu azalma daha yüksek olur. Euler-Bernoulli kiriş teorisi kayma ve kesme kuvvetlerini dikkate almadığı için frekanslar h/L oranından etkilenmemektedir.

Çizelge 4.34'de ise h/L oranın değişimiyle aynı koşullar altındaki Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerin frekansları arasındaki yüzdelik fark verilmiştir. Bu çizelgede de görüleceği üzere Euler-Bernoulli kiriş teorisinin h/L oranının küçük olduğu çatlaklı kirişlerde kullanabileceği fakat h/L oranının büyük olduğu çatlaklı kirişlerde kullanılmasının doğru sonuçlar vermeyeceği görülmektedir. Bu durumlarda Timoshenko kiriş teorisinin kullanılması daha isabetli olacaktır.

Çizelge 4.33. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0.5$, $e_6 = 0.5$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0$ değerleri için doğal frekanslarının h/L ile değişimi

	h/L	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Euler-Bernoulli	0.01	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
	0.05	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
	0.1	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
	0.2	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
	0.3	4.7587 + 0.2085i	7.8723 + 0.1265i	11.0101 + 0.0906i	14.1489 + 0.0706i	17.2886 + 0.0578i
Timoshenko	0.01	4.6636 + 0.1721i	7.7466 + 0.2988i	10.8619 + 0.4151i	13.9871 + 0.5266i	17.1196 + 0.6312i
	0.05	4.6722 + 0.7704i	7.7426 + 0.2718i	10.8115 + 0.3368i	13.6713 + 0.2583i	16.4130 + 0.2070i
	0.1	4.6730 + 0.2016i	7.5142 + 0.1162i	10.1379 + 0.0785i	12.5173 + 0.0575i	14.6761 + 0.0443i
	0.2	4.4531 + 0.0473i	6.8048 + 0.0250i	8.7745 + 0.0157i	10.4108 + 0.0101i	11.7955 + 0.0059i
	0.3	4.2104 + 0.0194i	6.1157 + 0.0091i	7.6376 + 0.0049i	9.4207 + 0.0041i	10.6096 + 0.0050i

Çizelge 4.34. Tablo 8 değerleri arasındaki yüzdelik fark

h/L	$\%d_{\beta_1}$	$\%d_{\beta_2}$	$\%d_{\beta_3}$	$\%d_{\beta_4}$	$\%d_{\beta_5}$	$\%d_{ort}$
0.01	1.9711	1.6573	1.4148	1.2124	1.0443	1.4600
0.05	0.7234	0.5449	1.8481	3.3916	5.0716	2.3159
0.1	1.7980	4.5480	7.9215	11.531	15.111	8.1820
0.2	6.3373	13.549	20.302	26.418	31.772	19.676

0.3	11.437	22.303	30.628	33.416	38.632	27.283
-----	--------	--------	--------	--------	--------	--------

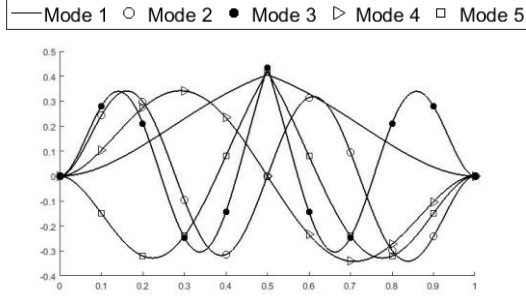
Farklı çatlak modellerinin sayısal sonuçları, Çizelge 4.35'te verilmiştir. Şekil 3.5 ve 3.9'dan de görüleceği gibi, Model 1'de çatlak bir dönme yayı olarak modellenmişken Model 2'de çatlak bir dönme ve ötelenme yayı olarak modellenmiştir. Model 1 durumunda, çift sayılı modlarda farklı çatlak derinliği değerleri için elde edilen frekanslar herhangi bir değişiklik göstermezken tek sayılı modlarda, γ arttıkça frekanslar bir miktar azalmıştır. Model 2'de ise tüm frekanslar γ değerinin değişmesinden etkilenmiştir fakat çift sayılı modlara denk gelen frekanslar, tek sayılı modlara karşılık gelen frekanslara göre daha çok etkilenmiştir. Böylece Model 1 ve Model 2 frekans değerleri arasındaki farkın çatlak modelinden kaynaklanmakta olduğu söylenebilir. Model 2'de çatlak, dönme ve ötelenme yayı olarak modellendiği için kesme kuvvetleri çatlak konumunda iletilebilir. Fakat Model 1'de çatlak sadece dönme yayı olarak modellendiğinden kesme kuvvetleri çatlak konumunda iletilemez. Ayrıca Euler-Bernoulli kirişlerdeki tüm çatlaklar Şekil 3.5'teki gibi modellendiğinden (Model 1) çatlak konumunda dallanmayan frekanslar çatlak derinliğinden etkilenmemektedir. Fakat Timoshenko kirişlerdeki tüm modlar çatlak konumundan dallandığından frekanslar çatlak derinliğinden etkilenmektedir.

Çizelge 4.35. $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$, $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$ değerleri için Timoshenko kirişin doğal frekanslarının farklı çatlak modellerine göre γ ile değişimi

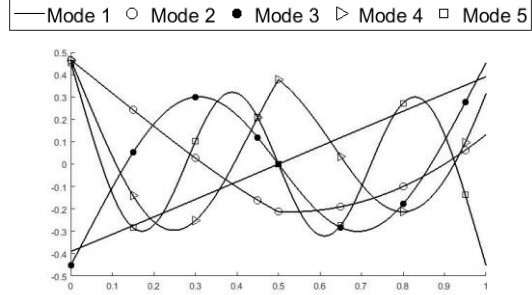
	γ	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Model 1 (Şekil 3.5)	0	1.1465	4.6846	7.5199	10.1409	12.5192
	0.25	1.1464	4.6846	7.5186	10.1409	12.5150
	0.50	1.1464	4.6846	7.5055	10.1409	12.4686
	0.75	1.1464	4.6846	7.4631	10.1409	12.3055
	0.90	1.1463	4.6846	7.3931	10.1409	12.0139
Model 2 (Şekil 3.9)	0	1.1465	4.6846	7.5199	10.1409	12.5192
	0.25	1.1459	4.5232	7.5182	9.9357	12.5156
	0.50	1.1452	4.0321	7.5051	9.4902	12.4653
	0.75	1.1450	3.0663	7.4631	9.0761	12.3058
	0.90	1.1449	2.1891	7.3932	8.9442	12.0142

4.5. Mod Şekilleri İçin Sayısal Çözümler:

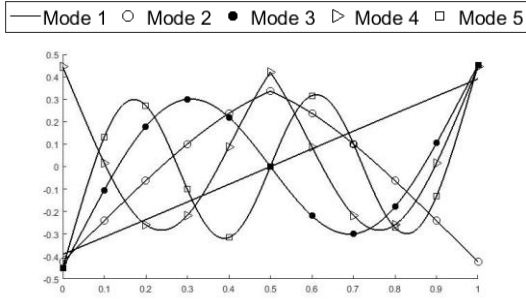
Aşağıdaki grafiklerde çeşitli sınır koşulları altında farklı modellere ait kirişlerin mod şekilleri gösterilmiştir.



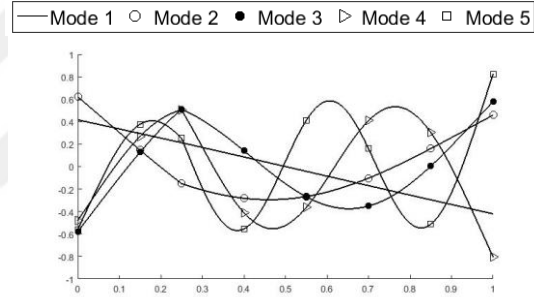
Şekil 4.10. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 10^{20}$, $e_2 = 10^{20}$, $e_3 = 10^{20}$, $e_4 = 10^{20}$
 $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$



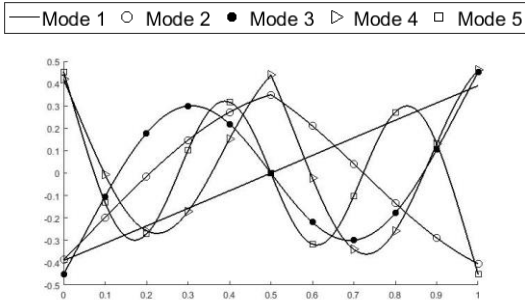
Şekil 4.13. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$
 $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.75$



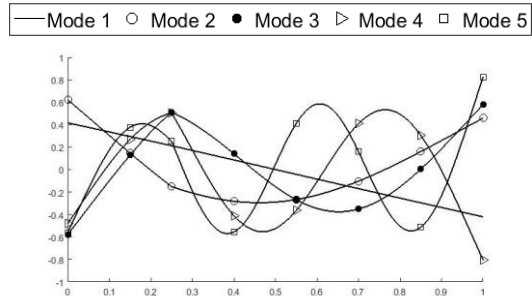
Şekil 4.11. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$
 $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.5$



Şekil 4.14. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$
 $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.25$, $\gamma = 0.5$



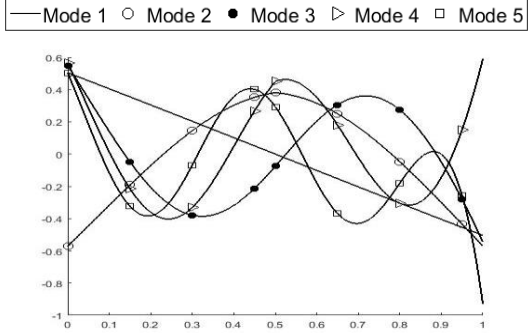
Şekil 4.12. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 0.1$, $e_2 = 0.1$, $e_3 = 0.1$, $e_4 = 0.1$
 $e_5 = 0$, $e_6 = 0$, $L_0 = 0.5$, $\gamma = 0.25$



Şekil 4.15. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri

$$e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$$

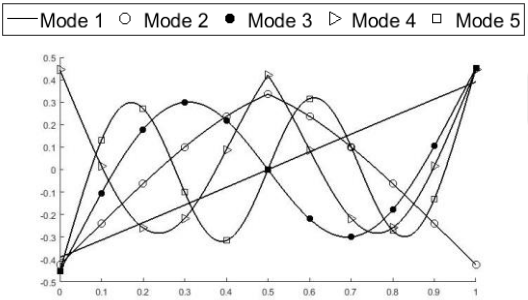
$$e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.75, \gamma = 0.5$$



Şekil 4.16. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri

$$e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$$

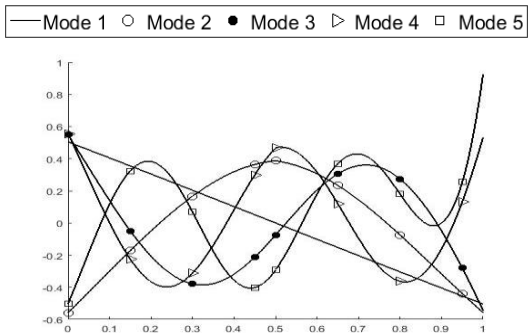
$$e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.25, \gamma = 0.5$$



Şekil 4.17. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri

$$e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$$

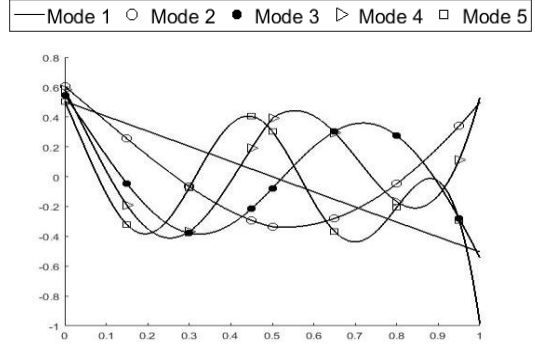
$$e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.5, \gamma = 0.5$$



Şekil 4.18. Belirtilen değerler için Timoshenko kirişin mod şekilleri

$$e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$$

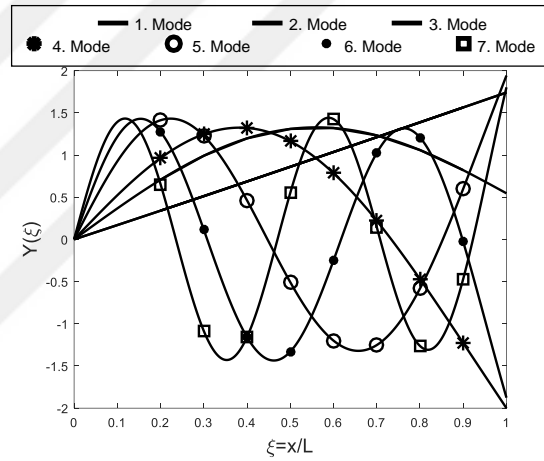
$$e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0, \gamma = 0.5$$



Şekil 4.19. Belirtilen değerler için Timoshenko kirişin mod şekilleri

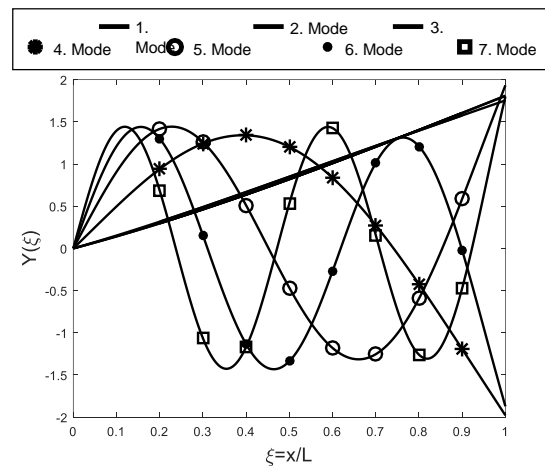
$$e_1 = 0.1, e_2 = 0.1, e_3 = 0.1, e_4 = 0.1$$

$$e_5 = 0, e_6 = 0, L_0 = 0.5, \gamma = 0.5$$



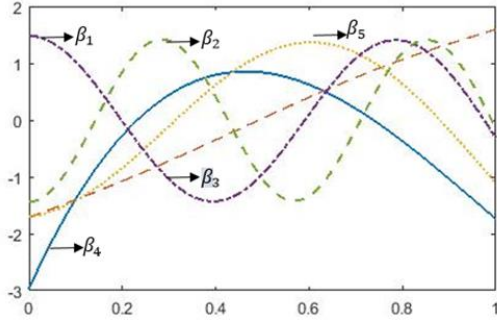
Şekil 4.20. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri

$$b_1 = 0.1, a_5 = 1, a_4 = 0.1, z_3 = 0.1$$

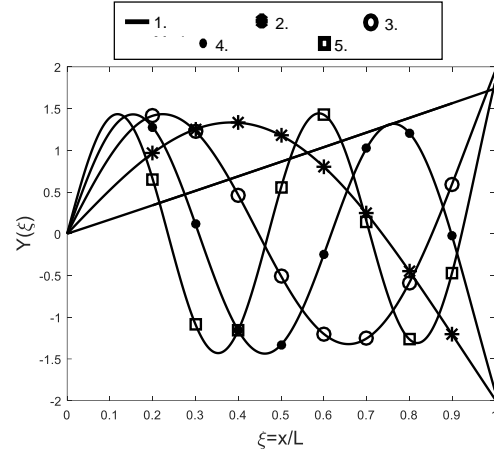


Şekil 4.21. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri

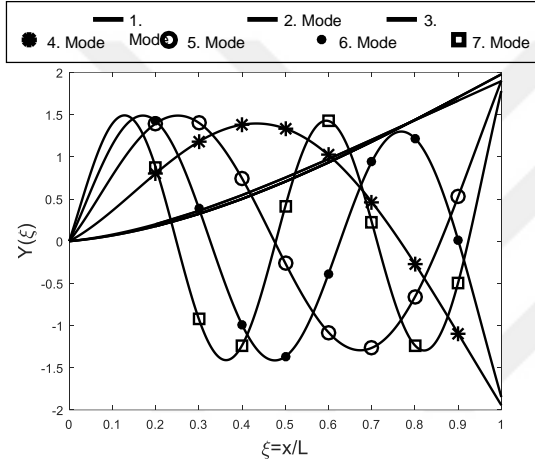
$$b_1 = 1, a_5 = 1, a_4 = 0.1, z_3 = 0.1$$



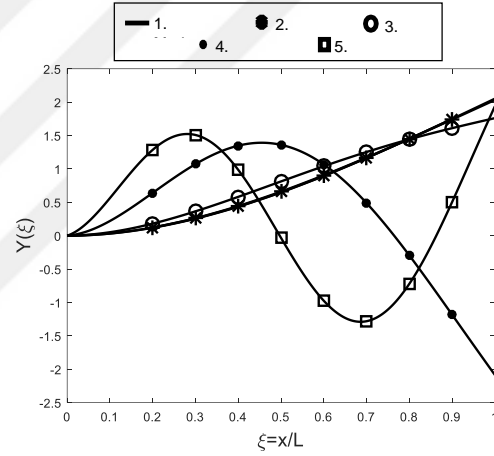
Şekil 4.22. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $e_1 = 1, e_2 = 1, e_3 = 1, e_4 = 1$



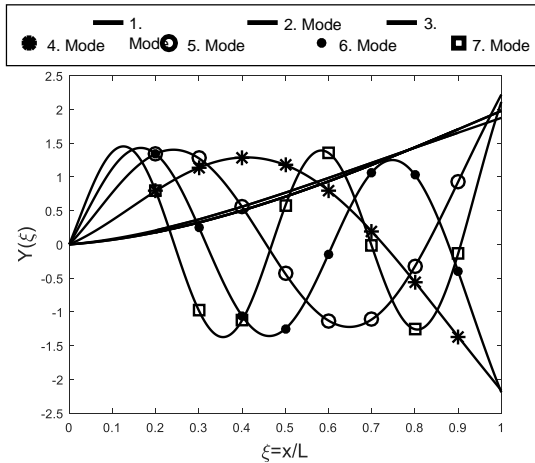
Şekil 4.25. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 0.1, a_5 = 1, a_4 = 10^{10} (M \cong 0), z_3 = 0.1$



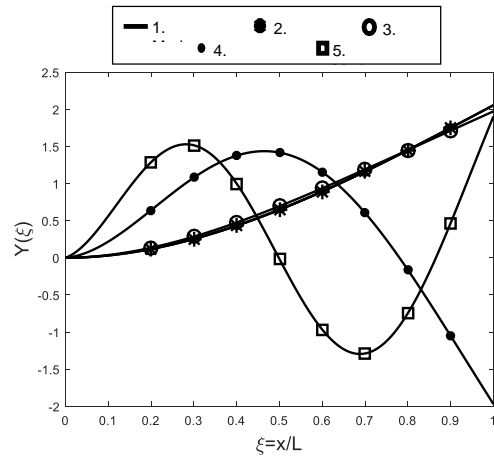
Şekil 4.23. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 10, a_5 = 1, a_4 = 0.1, z_3 = 0.1$



Şekil 4.26. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 1, a_5 = 1, a_4 = 10^{10} (M \cong 0), z_3 = 0.1$



Şekil 4.24. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 100, a_5 = 1, a_4 = 0.1, z_3 = 0.1$



Şekil 4.27. Belirtilen değerler için Euler-Bernoulli kirişin mod şekilleri
 $b_1 = 10^{10} (k_R \cong \infty), a_5 = 1, a_4 = 0.5, z_3 = 0.1$

5. SONUÇ

Bu çalışmada önce karma sınır şartlarına sahip çatlaksız ve kademesiz Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişin doğal frekansları bulunmuş ve parametrelerin frekanslar üzerindeki etkileri ele alınmıştır. Tüm sonuçlar incelendiğinde β değerlerinin, $K_2 = K_4$ değerlerinden $k_1 = k_3$ değerlerine nispeten daha az etkilendiği görülmektedir. Çatlaksız ve kademesiz kirişlerde yüksek frekans değerlerini bulmak için basit bir kural olduğu sonucu da elde edilmiştir: $n > 10$ olmak üzere $\beta_n = \beta_{10} + (n - 10)\pi$.

Sınır şartları olarak iki ucu serbest, iki ucu rijit ve bir ucu serbest diğer ucu rijit mesnetli çubuk dikkate alınarak bilinen sonuçlar ile mevcut sonuçlar mukayese edilmiş ve sonuçların örtüştüğü görülmüştür. İlaveten mod analizi gerçekleştirilmiş ve ilk 5 mod elde edilmiştir. Böylece aynı tür kirişin sabit ya da hareketli kuvvet altında zorlanmış titreşim analizi için gerekli ön çalışma tamamlanmış olmaktadır.

$e_5 = e_6$ değerlerinin artması dolayısıyla damper katsayılarının artması doğal frekansları düşürdüğü görülmüştür. Ayrıca $e_5 = e_6$ değerlerinin sıfır olduğu durumların doğal frekansları daha önce sayısal sonuçları verilen aynı koşullar altındaki damperiz sistemin doğal frekanslarıyla beklendiği gibi aynı olduğu gözlemlenmiştir.

Kademe konumu (L_0) ve frekansların değişimi arasında düzenli bir ilişki olmadığı ve frekanslarda dalgalanmalar meydana geldiği görülmüştür.

Daha sonraki bölümde ötelenme yayı, burulma yayı ve sönümleyici içeren karmaşık sınır koşulları atlındaki çatlaklı bir kirişin titreşimi incelenmiştir. Sonuçlar, Timoshenko kirişe ait frekanslarının aynı koşullar altında Euler-Bernoulli kirişe ait frekanslarından daha düşük olduğunu ortaya koymaktadır çünkü Euler-Bernoulli kiriş teorisinin aksine Timoshenko kiriş teorisinde kesme kuvvetleri dikkate alınmaktadır. Tablolardan çatlaklı Euler-Bernoulli kiriş teorisinin yaklaşık olarak h/L oranının 0,05 değerine kadar kullanılmasının uygun olduğu görülmektedir. Daha yüksek h/L oranlarında Timoshenko kiriş teorisinin kullanılmasının daha uygun olacağı sonucuna varılmıştır.

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde, bazı modların çatlak konumunda dallanmadığı ve bu modlardaki frekansların çatlak derinlik oranından etkilenmediği fakat Timoshenko kirişlerde tüm modların çatlak derinlik oranından etkilendiği görülmüştür. Bunun çatlak modellemesi nedeniyle olduğu tahmin edilmiştir. Bu tahminin doğrulanması için, Timoshenko kirişlerde çatlak, hem dönme hem de ötelenme yayı olarak modellenen çatlak modeli (Model 2) yerine daha önce Euler-Bernoulli kirişlerde kullanılan ve sadece dönme yayı olarak modellenen çatlak modeli (Model 1) ile modellenmiştir. Model 1 ile modellenen çatlaklı Timoshenko kirişlerde çatlak konumunda dallanmayan modların olduğu ve bu modlara denk gelen frekanslarının çatlak derinlik oranından etkilenmediği görülmüştür. Dolayısıyla yapılan tahmin doğrulanmış ve kirişlerde bulunan çatlakların hem dönme yayı hem de ötelenme yayı (Model 2) olarak modellenmesinin daha uygun olduğu sonucuna varılmıştır.

Hem Timoshenko hem de Euler-Bernoulli kirişlerde, frekanslar artan çatlak derinlik oranları ile azalmaktadır. Ayrıca frekanslardaki düşüş, çatlak derinlik oranının daha büyük değerlerinde daha da artmaktadır.

Çatlak konumundaki değişikliklerin frekanslar üzerinde simetrik bir etki gösterdiği görülmüştür. Örnek vermek gerekirse, aynı koşullar altında $L_1 = 0.25$ ve $L_1 = 0.75$ veya $L_1 = 0.42$ ve $L_1 = 0.58$ konumunda frekanslar aynıdır. Genel olarak, $\beta_n(L_1) = \beta_n(1 - L_1)$ sonucuna varılmıştır.

Hem çatlaklı Euler-Bernoulli hem de çatlaklı Timoshenko kiriş için, dönme yayının etkisinin ötelenme yaydan daha yüksek olduğu görülmektedir.

Çeşitli koşullar altında, her iki kiriş durumu için de mod şekilleri çizilmiştir. Gelecekteki bir çalışma olarak, mevcut çalışmanın sonuçları, aynı koşullar altında bir kirişin zorlanmış titreşiminde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abramovich, H., Hamburger, O. 1992.** Vibration of a uniform cantilever Timoshenko beam with translational and rotational springs and with a tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 154(1):67–80.
- Akella, S., Craggs, A. 1986.** Modifications to a timoshenko beam-shaft finite element to include internal disks and changes in cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 106(2):227–239.
- Anderson, D.F., Day, E.A. 1965.** Quantitative analysis of the major free fatty acids of cheddar cheese. *J. Dairy Sci.*, 47:733-738.
- Avcar, M. 2014.** Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions. *International Journal of Mechanics and Applications*, 4(3):94-100.
- Avcar, M., Saplıoğlu, K. 2015.** An Artificial Neural Network Application for Estimation of Natural Frequencies of Beams. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 6(6):94-102.
- Balasubramanian, T.S., Subramanian, G. 1985.** On the performance of a four degree of freedom per node element for stepped beam analysis and higher frequency estimation. *Journal of Sound and Vibration*, 99(4):563–567.
- Balasubramanian, T.S., Subramanian, G., Ramani, T.S. 1990.** Significance and use of very high order derivatives as nodal degrees of freedom in stepped beam vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 137(2):353–356.
- Banerjee, J.R. 2012.** Free vibration of beams carrying spring-mass systems - A dynamic stiffness approach. *Computers and Structures*, 104–105:21–26.
- Bhaskar, G.R., Prathap, G. 1981.** The second frequency spectrum of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 76(3):407–420.
- Bapat, C.N., Bapat, C. 1987.** Natural frequencies of a beam with non-classical boundary conditions and concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 001:066-071.
- Cekus, D. 2012.** Free Vibration of a Cantilever Tapered Timoshenko Beam. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, 4(11):11–17.
- Chang, C. H. 2000.** Free vibration of a simply supported beam carrying a rigid mass at the middle. *Journal of Sound and Vibration*, 237(4):733–744.
- Chen, H.L.R., Alejandro, C.K. 2000.** Stiffness evaluation and damage detection of ceramic candle filters. *Journal of engineering mechanics*, 126(3):308-319.
- Chen, H.L.R., Alejandro, C.K. 2005.** Nondestructive evaluation of ceramic candle filter with various boundary conditions. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 24(2):67-81.
- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D, Yao, J. 1998.** A continuous cracked beam vibration theory. *Journal Sound and Vibration*, 215:14-35.
- Chun, K.R. 1972.** Free vibration of a beam with one end spring-hinged and the other free. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1154-1155.
- De Rosa, M.A., 1989.** Stability and Dynamics of Beams on Winkler Foundations, *Earth. Eng. Struct. Dyn*, 18:377-388.

- Ece, M.C., Aydogdu, M., Taskin, V. 2007.** Vibration of a variable cross-section beam. *Mechanics Research Communications*, 34:78-84.
- Farghaly, S.H., Gadelrab, R.M. 1995.** Free vibration of a stepped composite timoshenko cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 187(5):886–896.
- Goel, R.P. 1976.** Free vibrations of a beam-mass system with elastically restrained ends. *Journal of Sound and Vibration*, 47: 9-14.
- Han, M.S., Benaroya H., Wei, T. 1999.** Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5):935-988.
- Hibbeler, R.C. 1975.** Free vibration of a beam supported by unsymmetrical spring-hinges. *Journal of Applied Mechanics*, 42:501-502.
- Huang, T.C. 1961.** The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. *Journal of Applied Mechanics*, 28(4):579-584.
- Jafari, R.A., Abedi, M. 2014.** An Exact Solution for the Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams. *Review of Applied Physics*, 3:12–17.
- Jang S.K., Bert. C.W. 1989a.** Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 130(2):342–346.
- Jang S.K., Bert. C.W. 1989b.** Free vibration of stepped beams: higher mode frequencies and effects of steps on frequency. *Journal of Sound and Vibration*, 132(1):164–168.
- Kadioğlu, H.G. 2018.** Timoshenko kirişlerinin genel elastik sınır koşullarında titreşim analizi. *Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul.*
- Kati, H.D., Gokdag, H. 2018.** Vibration analysis of a Timoshenko beam carrying 3D tip mass by using differential transform method. *Structural Engineering and Mechanics*, 65(4):381-388.
- Koç, Y. 2006.** Euler Bernoulli ve Timoshenko teorileri kullanılarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Bursa.*
- Kukla, S., (1991).** Free Vibration of a Beam Supported on a Stepped Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 149(2):259-265.
- Laura, P.A.A., Pombo, J.L., Susemihl, E.A. 1974.** A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, 37(2): 161–168.
- Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Pombo, J.L., Pasqua. D. 1991.** Dynamic stiffening of stepped beams of rectangular cross-section: A comparison of finite element prediction and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):174–178.
- Lee, J., Bergman, L.A. 1994.** The vibration of stepped beams and rectangular plates by an elemental dynamic flexibility method. *Journal of Sound and Vibration*, 171(5):617–640.
- Lee, T.W. 1973.** Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and carrying a mass at the other free end. *Journal of Applied Mechanics*, 40:813–815.
- Low, K.H. 2001.** On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(3).871–881.
- Loya, J.A, Rubio, L., Fernandez-Saez, J. 2006.** Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams. *Journal of Sound and Vibration*, 290:640-653.

- Majkut, L. 2009.** Free and Forced Vibrations of Timoshenko Beams Described by Single Difference Equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47(1):193–210.
- Maurizi, M.J., Belles, M. 1991.** Naturel Frequencies of The Beam-Masssystem: Comparison of The Two Fundemantal Theories of Beam Vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 150:330-334.
- Maurizi, M.J., Rossi, R.E., Reyes, J.A. 1976.** Vibration frequencies for a beam with one end spring-hinged and subjected to a translational restraint at the other end. *Journal of Sound and Vibration*, 48:565-568.
- Naguleswaran, S. 2002a.** Natural frequencies, sensitivity and mode shape details of an euler-bernoulli beam with one step change in cross-section and with ends on classical supports. *Journal of Sound and Vibration*, 252(4):751–767.
- Naguleswaran, S. 2002b.** Vibration of an euler-bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:2541–2555.
- Passing, E.G. 1970.** End slope and fundamental frequency of vibrating fuel rods. *Nuclear Engineering and Design*, 14:198-200.
- Rao, G.V., Naidu, N.R. 1994.** Free vibration and stability behaviour of uniform beams and columns with non-linear elastic end rotational restraints. *Journal of Sound and Vibration*, 176:130–135.
- Rao, S.S. 2004.** Mechanical Vibration. 4nd ed. Pearson Education, New Jersey, USA, 1105 pp.
- Reis, M. 2009.** Hareketli yüklere maruz mesnetli eğrisel kirişlerin Dinamik davranışlarının incelenmesi. *Doktora Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Bursa.
- Ross, T.J., Felix, S.W. 1985.** Timoshenko beams with rotational end constraints. *Journal of engineering mechanics*, 111(3):416-430.
- Rossit, C.A., Laura, P.A.A. 2001a.** Free vibrations of a cantilever beam with a spring – mass system attached to the free end. *Ocean Engineering*, 28:933–939.
- Rossit, C.A., Laura, P.A.A. 2001b.** Transverse, normal modes of vibration of a cantilever Timoshenko beam with a mass elastically mounted at the free end. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(6): 28-37.
- Salarieh, H., Ghorashi, M. 2006.** Free vibration of Timoshenko beam with finite mass rigid tip load and flexural-torsional coupling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(7):763–779.
- Subramanian, G., Balasubramanian, T.S. 1985.** Beneficial effects of steps on free vibration characteristics of beams. *Journal of Sound and Vibration*, 118(3):555–560.
- Sundararajan, C. 1979.** Fundamental frequency of beams with elastic rotational restraints. *Journal of Mechanical Design*, 101:711-712.
- Thambiratnam, D., Zhunge, Y. 1995.** Free Vibration Analysis of Beams on Elastic Foundation, *Computers and Structures*, 60(6):971-980.
- Yanık, F., Yaylı, M.O. 2015.** Rijit Olmayan Sınır Koşullarında Elastik Zemin Oturan Bir Çubuğun Eksenel Titreşim Analizi. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1):35-44.
- Yuan, J., Pao, Y.H., ve Chen, W. 2016.** Exact solutions for free vibrations of axially inhomogeneous Timoshenko beams with variable cross section. *Acta Mechanica*, 227(9):2625–2643.

Wang, J., (1991). Vibration of Stepped Beams on Elastic Foundations, *Journal of Sound and Vibration*, 149(2):315-322.

EKLER

Doğal frekansları, mod şekillerini ve dinamik cevabı veren Matlab program kodları EK 1'de verilmiştir.

EK 1 Matlab Programları

Damperli Euler-Bernoulli Kirişin Frekansları

```
clear
clc
syms beta ;

E=2.1*10^11; ro=7800; A=0.03*0.1; L=1; I=(1/12)*0.03*(0.1^3); h=0.1;
k1=52500; K2=52500; k3=k1; K4=K2; co=0; ck=0;
c0=0; ck=0;

roa=sqrt(ro*A*E*I);
kx=k1*(L^3)/(E*I); ky=k3*(L^3)/(E*I);
cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L)/(roa);

a1=-(beta^3)*(L^3); a2=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a3=(beta^3)*(L^3); a4=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a5=-1; a6=(-(E*I*beta)/K2); a7=-1; a8=((E*I*beta)/K2);
a9=((-beta^3)*(L^3)*cos(beta*L)-ky*sin(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*sin(beta*L));
a10=((beta^3)*(L^3)*sin(beta*L)-ky*cos(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*cos(beta*L));
a11=((beta^3)*(L^3)*cosh(beta*L)-ky*sinh(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*sinh(beta*L));
a12=((beta^3)*(L^3)*sinh(beta*L)-ky*cosh(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*cosh(beta*L));
a13=(-E*I*beta*sin(beta*L)+K4*cos(beta*L));
a14=(-E*I*beta*cos(beta*L)-K4*sin(beta*L));
a15=(E*I*beta*sinh(beta*L)+K4*cosh(beta*L));
a16=(E*I*beta*cosh(beta*L)+K4*sinh(beta*L));

%deter=[a1 a2 a3 a4;a5 a6 a7 a8; a9 a10 a11 a12;a13 a14 a15 a16];
%determinant=det(deter);
deter3=a1*a6*a11*a16 - a1*a6*a12*a15 - a1*a7*a10*a16 + a1*a7*a12*a14 +
a1*a8*a10*a15 - a1*a8*a11*a14 - a2*a5*a11*a16 + a2*a5*a12*a15 +
a2*a7*a9*a16 - a2*a7*a12*a13 - a2*a8*a9*a15 + a2*a8*a11*a13 +
a3*a5*a10*a16 - a3*a5*a12*a14 - a3*a6*a9*a16 + a3*a6*a12*a13 +
a3*a8*a9*a14 - a3*a8*a10*a13 - a4*a5*a10*a15 + a4*a5*a11*a14 +
a4*a6*a9*a15 - a4*a6*a11*a13 - a4*a7*a9*a14 + a4*a7*a10*a13;
```

```

f1=inline(deter3, 'beta')
z=zeros(11,1);
for y= 20:1:30
beta=fsolve(f1,y)
z(y+1)=beta;
end
fid=fopen('N1.txt','wt');
%4.3f\n is the statistical form of the array
fprintf(fid, '%4.4f\n', z)

%betaa=((ro*A*(w^2))/(E*I))^(0.25);

%plot(beta,sonuc)

```

Karma Timoshenko Kirişin Frekansları

```

clear all
clc
syms bet
%w=1:0.1:100;
E=2.1*10^11; ro=7800; A=0.05*0.1; L=1; k=5/6; G=(1/2.6)*E;
I=(1/12)*0.05*(0.1^3);
k1=10000; K2=10000; k3=k1; K4=K2;
w=sqrt((E*I*bet^4)/(ro*A));

z2=sqrt((ro^2)*(L^4)*(w.^4)/(k*E*G));
p=(ro*(w.^2)*(L^2)/E)*(1+(E/(k*G)));
landa=sqrt(ro*A*(w.^2)*(L^4)/(E*I));
q=((z2.^2)-(landa.^2)); delta=sqrt((p.^2)-(4*(q))); r=sqrt(I/(A*L^2));
s=sqrt((E*I)/(k*A*G*(L^2)));
beta1=sqrt((p+delta)/2);
beta2=sqrt((-p+delta)/2);
m1a=(landa.^2).*(s.^2)-(beta1.^2);
m2a=(landa.^2).*(s.^2)+(beta2.^2);

m1=m1a./beta1;
m2=m2a./beta2;

%cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L)/(roa)

a1=(k*A*G*beta1+m1); a2=(k1); a3=(k*A*G*beta2-m2); a4=(k1);
a5=m1*K2; a6=(E*I*m1a/L); a7=(-m2*K2); a8=(E*I*m2a/L);
a9=(k*A*G*beta1.*cos(beta1*L)+k*A*G*m1.*cos(beta1*L)-k3*sin(beta1*L));
a10=(-k*A*G*beta1.*sin(beta1*L)-k*A*G*m1.*sin(beta1*L)-
k3*cos(beta1*L));
a11=(k*A*G*beta2.*cosh(beta2*L)-k*A*G*m2.*cosh(beta2*L)-
k3*sinh(beta2*L));
a12=(k*A*G*beta2.*sinh(beta2*L)-k*A*G*m2.*sinh(beta2*L)-
k3*cosh(beta2*L));
a13=((E*I*m1a/L).*sin(beta1*L)-m1.*K4.*cos(beta1*L));
a14=((E*I*m1a/L).*cos(beta1*L)+m1.*K4.*sin(beta1*L));

```

```

a15=( (E*I*m2a/L) .*sinh(beta2*L)+m2.*K4.*cosh(beta2*L));
a16=( (E*I*m2a/L) .*cosh(beta2*L)+m2.*K4.*sinh(beta2*L));

%deter=vpa([a1 a2 a3 a4;a5 a6 a7 a8; a9 a10 a11 a12;a13 a14 a15 a16]);
%deter3=vpa(det(deter),3)

deter3=vpa(a1.*a6.*a11.*a16 - a1.*a6.*a12.*a15 - a1.*a7.*a10.*a16 +
a1.*a7.*a12.*a14 + a1.*a8.*a10.*a15 - a1.*a8.*a11.*a14 -
a2.*a5.*a11.*a16 + a2.*a5.*a12.*a15 + a2.*a7.*a9.*a16 -
a2.*a7.*a12.*a13 - a2.*a8.*a9.*a15 + a2.*a8.*a11.*a13 +
a3.*a5.*a10.*a16 - a3.*a5.*a12.*a14 - a3.*a6.*a9.*a16 +
a3.*a6.*a12.*a13 + a3.*a8.*a9.*a14 - a3.*a8.*a10.*a13 -
a4.*a5.*a10.*a15 + a4.*a5.*a11.*a14 + a4.*a6.*a9.*a15 -
a4.*a6.*a11.*a13 - a4.*a7.*a9.*a14 + a4.*a7.*a10.*a13,5)

f1=inline(deter3, 'bet')
z=zeros(81,1);
for y= 1:1:20
bet=fsolve(f1,y)
z(y+1)=bet;
end
fid=fopen('N1.txt','wt');
%4.3f\n is the statistical form of the array
fprintf(fid, '%4.4f\n',z)

betaa=((ro*A*(w^2))/(E*I))^(0.25)

```

Kademeli Euler-Bernoulli Kirişin Frekansları

```

clear
clc
%beta=0:0.01:20
syms w
E1=2.1*10^11; ro1=7800; h1=0.25; A1=0.05*h1; L=1;
I1=(1/12)*0.05*(h1^3);
E2=2.1*10^11; ro2=7800; h2=0.05; A2=0.05*h2; L=1;
I2=(1/12)*0.05*(h2^3);

roa=sqrt(ro1*A1*E1*I1); rob=sqrt(ro2*A2*E2*I2);
k1=1*(E1*I1)/(L^3); K2=k1; k3=k1; K4=k1;
c0=0; ck=0; n=1;

beta1=(( (w^2)*ro1*A1)/(E1*I1))^(0.25);
beta2=(( (w^2)*ro2*A2)/(E2*I2))^(0.25);

beto=(beta1/beta2); v1=((beta1^2)*E1*I1)/((beta2^2)*E2*I2);
v2=((beta1^3)*E1*I1)/((beta2^3)*E2*I2);
kx=k1*(L^3)/(E1*I1); ky=k3*(L^3)/(E2*I2);
cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L)/(rob)

e1=- (beta1^3)*(L^3); e2=kx+(i*(beta1^2)*(L^2)*cx);
e3=(beta1^3)*(L^3); e4=kx+(i*(beta1^2)*(L^2)*cx);
q=E1*I1.*beta1/K2;

e5=( (-beta2^3)*(L^3)*cos(beta2*L)-ky*sin(beta2*L)-
i*(beta2^2)*(L^2)*cy*sin(beta2*L));

```



```

beta11=sqrt((p1+delta1)/2); beta21=sqrt((-p1+delta1)/2);
beta12=sqrt((p2+delta2)/2); beta22=sqrt((-p2+delta2)/2);
m11a=(landa1.^2).*(s1.^2)-(beta11.^2); m21a=(landa1.^1
).*(s1.^2)+(beta21.^2);
m12a=(landa2.^2).*(s2.^2)-(beta12.^2);
m22a=(landa2.^2).*(s2.^2)+(beta22.^2);

m11=m11a./beta11; m21=m21a./beta21;
m12=m12a./beta12; m22=m22a./beta22;

n11=m11a; n21=m21a; n12=m12a; n22=m22a;

a1=(ka*A1*G1*(beta11+m11)); a2=(k1+c1*i*w); a3=(ka*A1*G1*(beta21-
m21)); a4=(k1+c0*i*w);
a5=m11*K2; a6=(E1*I1*m11a/L); a7=(-m21*K2); a8=(E1*I1*m21a/L);
a9=(kb*A2*G2*beta12.*cos(beta12*L)+kb*A2*G2*m12.*cos(beta12*L)-
k3*sin(beta12*L));
a10=(-kb*A2*G2*beta12.*sin(beta12*L)-kb*A2*G2*m12.*sin(beta12*L)-
k3*cos(beta12*L));
a11=(kb*A2*G2*beta22.*cosh(beta22*L)-kb*A2*G2*m22.*cosh(beta22*L)-
k3*sinh(beta22*L));
a12=(kb*A2*G2*beta22.*sinh(beta22*L)-kb*A2*G2*m22.*sinh(beta22*L)-
k3*cosh(beta22*L));
a13=((E2*I2*m12a/L).*sin(beta12*L)-m12.*K4.*cos(beta12*L));
a14=((E2*I2*m12a/L).*cos(beta12*L)+m12.*K4.*sin(beta12*L));
a15=((E2*I2*m22a/L).*sinh(beta22*L)+m22.*K4.*cosh(beta22*L));
a16=((E2*I2*m22a/L).*cosh(beta22*L)+m22.*K4.*sinh(beta22*L));

a9=(k*A*G*beta1.*cos(beta1*L)+k*A*G*m1.*cos(beta1*L)-
(k3+ck*i*w)*sin(beta1*L));
a10=(-k*A*G*beta1.*sin(beta1*L)-k*A*G*m1.*sin(beta1*L)-
(k3+ck*i*w)*cos(beta1*L));
a11=(k*A*G*beta2.*cosh(beta2*L)-k*A*G*m2.*cosh(beta2*L)-
(k3+ck*i*w)*sinh(beta2*L));
a12=(k*A*G*beta2.*sinh(beta2*L)-k*A*G*m2.*sinh(beta2*L)-
(k3+ck*i*w)*cosh(beta2*L));
a13=((E*I*m1a/L).*sin(beta1*L)-m1.*K4.*cos(beta1*L));
a14=((E*I*m1a/L).*cos(beta1*L)+m1.*K4.*sin(beta1*L));
a15=((E*I*m2a/L).*sinh(beta2*L)+m2.*K4.*cosh(beta2*L));
a16=((E*I*m2a/L).*cosh(beta2*L)+m2.*K4.*sinh(beta2*L));

s1=sin(beta11); q1=cos(beta11); r1=sinh(beta21); t1=cosh(beta21);
v=(E1*I1)/(E2*I2);
s2=sin(beta12); q2=cos(beta12); r2=sinh(beta22); t2=cosh(beta22);
z=(ka*G1*E1)/(kb*G2*E2);

a17=z*q1*(beta11+m11); a18=z*s1*(-beta11-m11); a19=z*t1*(beta21-m21);
a20=z*r1*(-beta21-m21);
a21=q2*(beta12+m12); a22=s2*(-beta12-m12); a23=t2*(beta22-m22);
a24=r2*(-beta22-m22);

deter=[a1 a2 a3 a4 0 0 0 0;a5 a6 a7 a8 0 0 0 0;0 0 0 0 a9 a10 a11
a12;0 0 0 0 a13 a14 a15 a16;s1 q1 r1 t1 -s2 -q2 -r2 -t2;-m11*q1 m11*s1
m21*t1 m21*r1 m12*q2 -m12*s2 -m22*t2 -m22*r2;v*n11*s1 v*n11*q1

```

```

v*n21*r1 v*n21*t1 -n12*s2 -n12*q2 -n22*r2 -n22*t2;a17 a18 a19 a20 -a21
-a22 -a23 -a24]
deter3=vpa(det(deter),5)
%plot(w,deter3)

f1=inline(deter3,'w')
z=zeros(101,1);
for y= 1:250:16000
w=fsolve(f1,y)
z(y+1)=w;
end
fid=fopen('N1.txt','wt');
%4.3f\n is the statistical form of the array
fprintf(fid,'%4.4f\n',z)

```

Çatlak Timoshenko Kirişin Mod Şekilleri

```

clear all
clc
syms C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 x
E=2.1*10^11; ro=7800; A=0.03*0.1; L=1; k=5/6; G=(1/2.6)*E;
I=(1/12)*0.03*(0.1^3); h=0.1;
k1=52500; K2=52500; k3=k1; K4=K2; ad=0.025; L1=0.5;
co=0;ck=0;

% 0      1.1465  4.6848  7.5199  10.1410  12.5192
% 0.25   1.1459  4.5232  7.5182  9.9357   12.5156
% 0.50   1.1452  4.0321  7.5051  9.4902   12.4653
% 0.75   1.1450  3.0663  7.4631  9.0761   12.3058

% ilgili frekans değerlerini nn'ye gir.

nn=[ 1.1452;    4.0321;  7.5051;  9.4902;  12.4653];
beta= nn(5);
w=sqrt((E*I*beta.^4)/(ro*A));

z2=sqrt((ro^2)*(L^4)*(w.^4)/(k*E*G));
p=(ro*(w.^2)*(L^2)/E)*(1+(E/(k*G)));
landa=sqrt(ro*A*(w.^2)*(L^4)/(E*I));
qq=((z2.^2)-(landa.^2)); delta=sqrt((p.^2)-(4*(qq)));
rr=sqrt(I/(A*L^2));
ss=sqrt((E*I)/(k*A*G*(L^2)));
beta1=sqrt((p+delta)/2);
beta2=sqrt((-p+delta)/2);
m1a=(landa.^2).*(ss.^2)-(beta1.^2);
m2a=(landa.^2).*(ss.^2)+(beta2.^2);
m1=m1a./beta1;
m2=m2a./beta2;

a1=(k*A*G*beta1+k*A*G*m1); a2=(k1+co*i*w); a3=(k*A*G*beta2-k*A*G*m2);
a4=(k1+co*i*w);
a5=m1*K2; a6=(E*I*m1a/L); a7=(-m2*K2); a8=(E*I*m2a/L);
a9=(k*A*G*beta1.*cos(beta1*L)+k*A*G*m1.*cos(beta1*L)-
(k3+ck*i*w)*sin(beta1*L));

```



```

a10=(-k*A*G*beta1.*sin(beta1*L)-k*A*G*m1.*sin(beta1*L)-
(k3+ck*i*w)*cos(beta1*L));
a11=(k*A*G*beta2.*cosh(beta2*L)-k*A*G*m2.*cosh(beta2*L)-
(k3+ck*i*w)*sinh(beta2*L));
a12=(k*A*G*beta2.*sinh(beta2*L)-k*A*G*m2.*sinh(beta2*L)-
(k3+ck*i*w)*cosh(beta2*L));
a13=((E*I*m1a/L).*sin(beta1*L)-m1.*K4.*cos(beta1*L));
a14=((E*I*m1a/L).*cos(beta1*L)+m1.*K4.*sin(beta1*L));
a15=((E*I*m2a/L).*sinh(beta2*L)+m2.*K4.*cosh(beta2*L));
a16=((E*I*m2a/L).*cosh(beta2*L)+m2.*K4.*sinh(beta2*L));

s=sin(beta1*L1); q=cos(beta1*L1); r=sinh(beta2*L1); t=cosh(beta2*L1);
% ad catlak derinlik
alfa=ad/h; alf=((alfa)/(1-alfa)).^(2)); hr=(h*(rr.^2))./(L*(ss.^2));
qa=alf*(-0.22+3.82*alfa+1.54*(alfa^2)-14.64*(alfa^3)+9.6*(alfa^4));
tetalfa=2*alf*(5.93-19.69*alfa+37.14*(alfa^2)-
35.84*(alfa^3)+13.12*(alfa^4));

hq=hr.*qa.*beta1; hz=hr.*qa.*beta2; hm=(h/L).*tetalfa;

a17=(-s); a18=(-q); a19=(-r); a20=(-t); a21=(s-hq*q-hr*qa*m1.*q);
a22=(q+hq.*s+hr*qa*m1.*s); a23=(r-hz.*t+hr*qa*m2.*t); a24=(t-
hz.*r+hr*qa*m2.*r);
a25=(m1.*q); a26=(-m1.*s); a27=(-m2.*t); a28=(-m2.*r); a29=(-m1.*q-
hm.*m1a.*s); a30=(m1.*s-hm.*m1a.*q); a31=(m2.*t-hm.*m2a.*r);
a32=(m2.*r-hm.*m2a.*t);
a33=(-m1a.*s); a34=(-m1a.*q); a35=(-m2a.*r); a36=(-m2a.*t);
a37=(m1a.*s); a38=(m1a.*q); a39=(m2a.*r); a40=(m2a.*t);
a41=(beta1*q+m1.*q); a42=(-beta1*s-m1.*s); a43=(beta2*t-m2.*t);
a44=(beta2*r-m2.*r); a45=(-beta1*q-m1.*q); a46=(beta1*s+m1.*s); a47=(-
beta2*t+m2.*t); a48=(-beta2*r+m2.*r);

deter=[a1 a2 a3 a4 0 0 0 0;a5 a6 a7 a8 0 0 0 0;a17 a18 a19 a20 a21 a22
a23 a24;a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32;a33 a34 a35 a36 a37 a38 a39
a40;a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48;0 0 0 0 a9 a10 a11 a12;0 0 0 0 a13
a14 a15 a16];

%1.sütun
deter(2,:)=-deter(2,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(2,);
deter(5,:)=-deter(5,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(4,);

%2.sütun
deter(1,:)=-deter(1,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(1,);
deter(5,:)=-deter(5,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(4,);

%3.sütun
deter(1,:)=-deter(1,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(2,);
deter(4,:)=-deter(4,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(6,);

%4.sütun

```

```

deter(1,:)=-deter(1,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(3,);
deter(5,:)=-deter(5,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(8,);
%5.sütun
deter(1,:)=-deter(1,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(4,);
deter(6,:)=-deter(6,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(8,);
%6.sütun
deter(1,:)=-deter(1,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(5,);
deter(7,:)=-deter(7,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(8,);
%7.sütun
deter(1,:)=-deter(1,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(6,);
deter(8,:)=-deter(8,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(8,);

aa=deter(1,+)/-deter(1,1);
bb=deter(2,+)/-deter(2,2);
cc=deter(3,+)/-deter(3,3);
dd=deter(4,+)/-deter(4,4);
ee=deter(5,+)/-deter(5,5);
ff=deter(6,+)/-deter(6,6);
gg=deter(7,+)/-deter(7,7);
hh=deter(8,+)/-deter(8,8);

detc=[aa;bb;cc;dd;ee;ff;gg;hh];
detc
w1=((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
w2=((detc(5,8))*sin(beta*(x))+(detc(6,8))*cos(beta*(x))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x))+cosh(beta*(x)));
w1x=w1.^2; w2x=w2.^2; w1int=inline(w1x,'x'); w2int=inline(w2x,'x');

C8=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w1int,0,0.5)))))
C82=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w2int,0.5,1)))))

% mod şekilleri

x=0:0.001:0.5; x2=0.5:0.001:1;
wn1=C8*((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));

```

```

wn2=C8*((detc(5,8))*sin(beta*(x2))+(detc(6,8))*cos(beta*(x2))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x2))+cosh(beta*(x2)));

hold on
    plot(x,wn1,'k')
hold on
    plot(x2,wn2,'k')

% modları işaretleme için

x=0:0.15:0.5; x2=0.5:0.15:1;

wn1=C8*((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));

wn2=C8*((detc(5,8))*sin(beta*(x2))+(detc(6,8))*cos(beta*(x2))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x2))+cosh(beta*(x2)));

hold on
    a=plot(x,wn1,'ko')
    a.MarkerSize = 8;
hold on
    a=plot(x2,wn2,'ko')
    a.MarkerSize = 8;

```

Çatlak Euler-Bernoulli Kirişin Mod Şekilleri 1

```

clear all
clc
format long
n=[0.668294686712349; 1.309212046222559;
4.054770903249183;7.878717214021586;10.128841670585963];

beta= n(3);
L1=0.5; n=L1; m=0; L=1; E=2.1*10^11; ro=7800; H=0.1; h=H;
A=0.05*h; I=(1/12)*0.05*(h^3); roa=sqrt(ro*A*E*I); c0=0; ck=0;
yy=0.5; e1=0.1; e2=0.1; e3=e1; e4=e2; cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L-L1)/(roa);
k1=e1*(E*I)/(L^3); K2=e2*(E*I)/(L); k3=e3*(E*I)/(L^3);
K4=e4*(E*I)/(L);
fyt=(0.6772)*(yy^2)-(1.04533)*(yy^3)+(4.5948)*(yy^4)-
(9.9736)*(yy^5)+(20.2948)*(yy^6)-(33.0351)*(yy^7)+(47.1063)*(yy^8)-
(40.7556)*(yy^9)+(19.6)*(yy^10);
fyc=fyt; teta1=6*pi*H*fyt; teta2=6*pi*H*fyc; D=H*yy;
kx=k1*(L^3)/(E*I); ky=k3*((L-L1)^3)/(E*I);

syms x
a1=(-beta^3)*(L^3); a2=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx); a3=(beta^3)*(L^3);
a4=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a5=1; a6=((E*I*beta)/K2); a7=1; a8=-((E*I*beta)/K2);
a9=((-beta^3)*((L-L1)^3)*cos(beta*(L-L1))-ky*sin(beta*(L-L1))-i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sin(beta*(L-L1)));
a10=((beta^3)*((L-L1)^3)*sin(beta*(L-L1))-ky*cos(beta*(L-L1))-i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cos(beta*(L-L1)));

```

```

a11=((beta^3)*((L-L1)^3)*cosh(beta*(L-L1))-ky*sinh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sinh(beta*(L-L1)));
a12=((beta^3)*((L-L1)^3)*sinh(beta*(L-L1))-ky*cosh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cosh(beta*(L-L1)));
a13=(-E*I*beta.*sin(beta*(L-L1))+K4*cos(beta*(L-L1))); a14=(-
E*I*beta.*cos(beta*(L-L1))-K4*sin(beta*(L-L1)));
a15=(E*I*beta.*sinh(beta*(L-L1))+K4*cosh(beta*(L-L1)));
a16=(E*I*beta.*cosh(beta*(L-L1))+K4*sinh(beta*(L-L1)));

a17=sin(beta*n); a18=cos(beta*n); a19=sinh(beta*n); a20=cosh(beta*n);
a21=0; a22=-1; a23=0; a24=-1;
a25=-cos(beta*n); a26=sin(beta*n); a27=-cosh(beta*n); a28=-
sinh(beta*n); a29=1; a30=tetal*beta; a31=1; a32=-tetal*beta;
a33=-sin(beta*n); a34=-cos(beta*n); a35=sinh(beta*n);
a36=cosh(beta*n); a37=0; a38=1; a39=0; a40=-1;
a41=-cos(beta*n); a42=sin(beta*n); a43=cosh(beta*n); a44=sinh(beta*n);
a45=1; a46=0; a47=-1; a48=0;

```

```

deter=[a1 a2 a3 a4 0 0 0 0;a5 a6 a7 a8 0 0 0 0;0 0 0 0 a9 a10 a11
a12;0 0 0 0 a13 a14 a15 a16;a17 a18 a19 a20 a21 a22 a23 a24;a25 a26
a27 a28 a29 a30 a31 a32;a33 a34 a35 a36 a37 a38 a39 a40;a41 a42 a43
a44 a45 a46 a47 a48];

```

```

t1=-a5+(a8/a4)*a1; t2=-a6+(a8/a4)*a2; t3=a7-(a8/a4)*a3; t4=-
a13+(a16/a12)*a9; t5=-a14+(a16/a12)*a10; t7=a15-(a16/a12)*a11;
p1=a17+(a19/t3)*t1+(a20/a4)*(-a1-a3*t1/t3);
p2=a18+(a19/t3)*t2+(a20/a4)*(-a2-a3*t2/t3);
p3=a21+(a23/t4)*t7+(a24/a12)*(-a9-a11*t4/t7);
p4=a22+(a23/t7)*t5+(a24/a12)*(-a10-a11*t5/t7);

```

```

r1=(a25+(a27/t3)*t1+(a28/a4)*(-a1-a3*t1/t3)-(a30/p4)*p1-
(a31/t7)*(t5*p1/p4)+(a32*a10*p1)/(a12*p4)+(a32*a11*t5*p1)/(a12*t7*p4)
;

```

```

r2=(a26+(a27/t3)*t2+(a28/a4)*(-a2-a3*t2/t3)-(a30/p4)*p2-
(a31/t7)*(t5*p2/p4)+(a32*a10*p2)/(a12*p4)+(a32*a11*t5*p2)/(a12*t7*p4)
;

```

```

r3=(a29-(a30/p4)*p3+(a31/t7)*(t4-t5*p3/p4)-
(a32*a9/a12)+(a32*a10*p3)/(a12*p4)-
(a32*a11*t4)/(a12*t7)+(a32*a11*t5*p3)/(a12*t7*p4));
s1=(a33+(a35/t3)*t1+(a36/a4)*(-a1-a3*t1/t3)-(a37/r3)*r1+(a38/p4)*(-
p1+p3*r1/r3)+(a39/t7)*(t4*r1/r3+(t5/p4)*(-
p1+p3*r1/r3)))+(a40/a12)*(a9*(r1/r3)+(a10/p4)*(p1-
p3*r1/r3)))+(a40/a12)*(a11/t7)*(t4*r1/r3+(-t5/p4)*(p1-p3*r1/r3));
s2=(a34+(a35/t3)*t2+(a36/a4)*(-a2-a3*t2/t3)-(a37/r3)*r2+(a38/p4)*(-
p2+p3*r2/r3)+(a39/t7)*(t4*r2/r3+(t5/p4)*(-
p2+p3*r2/r3)))+(a40/a12)*(a9*(r2/r3)+(a10/p4)*(p2-
p3*r2/r3)))+(a40/a12)*(a11/t7)*(t4*r2/r3+(-t5/p4)*(p2-p3*r2/r3));

```

```

h1=(-s1/s2); h2=((t1+t2*h1)/t3); h3=((-a1-a2*h1-a3*h2)/a4); h4=((-r1-
r2*h1)/r3);
h5=((-p1-p2*h1-p3*h4)/p4); h6=((t4*h4+t5*h5)/t7); h7=((-a9*h4-a10*h5-
a11*h6)/a12);

```

```

w1=(sin(beta*x)+h1*cos(beta*x)+h2*sinh(beta*x)+h3*cosh(beta*x));

```

```

w3=(h4*sin(beta*(x-L1))+h5*cos(beta*(x-L1))+h6*sinh(beta*(x-
L1))+h7*cosh(beta*(x-L1)));
w1x=w1.^2;
w2x=w2.^2;
w3x=w3.^2;

w1int=inline(w1x,'x'); w2int=inline(w2x,'x'); w3int=inline(w3x,'x');

C1=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w1int,0,0.5)))))
C21=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w2int,0.5,1)))))
C22=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w3int,0.5,1)))))
% w1int=int(w1x,0,0.5);
% w2int=int(w2x,0.5,1);
% C1=(sqrt(1/(ro*A*w1int))); C12=(sqrt(1/(ro*A*w2int)));
x=0:0.001:0.5; x2=0.5:0.001:1;
wn1=C1*(sin(beta*x)+h1*cos(beta*x)+h2*sinh(beta*x)+h3*cosh(beta*x));
wn2=C21*(sin(beta*(x2))+hx1*cos(beta*(x2))+hx2*sinh(beta*(x2))+hx3*cos
h(beta*(x2)));
wn3=C1*(h4*sin(beta*(x2))+h5*cos(beta*(x2))+h6*sinh(beta*(x2))+h7*cosh
(beta*(x2)));

hold on
plot(x,wn1,'r')
hold on
% plot(x2,wn2)
hold on
plot(x2,wn3)

% subplot(311)
% hold on
% plot(x,wn1)
% hold on
% subplot(312)
% hold on
% plot(x2,wn2)
% hold on
% ezplot(wn2,0,0.5)

```

Çatlak Euler-Bernoulli Kirişin Mod Şekilleri 2

```

clear all
clc
syms C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 x

nn=[ 4.73 ;1 ;1 ;1 ;1 ];

% 3.8362 7.8532 9.4580 14.1372
beta= nn(1);
L1=0.5; n=L1; m=0; L=1; E=2.1*10^11; ro=7800; H=0.1; h=H; A=0.05*h;
I=(1/12)*0.05*(h^3); roa=sqrt(ro*A*E*I); c0=0; ck=0;
yy=0.5; e1=10^15; e2=e1; e3=e1; e4=e2; cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L-
L1)/(roa); k1=e1*(E*I)/(L^3); K2=e2*(E*I)/(L); k3=e3*(E*I)/(L^3);
K4=e4*(E*I)/(L);

```

```

fyt=(0.6772)*(yy^2)-(1.04533)*(yy^3)+(4.5948)*(yy^4)-
(9.9736)*(yy^5)+(20.2948)*(yy^6)-(33.0351)*(yy^7)+(47.1063)*(yy^8)-
(40.7556)*(yy^9)+(19.6)*(yy^10);
fyc=fyt; tetal=6*pi*H*fyt; D=H*yy; kx=k1*(L^3)/(E*I); ky=k3*((L-
L1)^3)/(E*I);

a1=(-beta^3)*(L^3); a2=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx); a3=(beta^3)*(L^3);
a4=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a5=1; a6=((E*I*beta)/K2); a7=1; a8=-((E*I*beta)/K2);
a9=(-beta^3)*((L-L1)^3)*cos(beta*(L-L1))-ky*sin(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sin(beta*(L-L1));
a10=(beta^3)*((L-L1)^3)*sin(beta*(L-L1))-ky*cos(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cos(beta*(L-L1));
a11=(beta^3)*((L-L1)^3)*cosh(beta*(L-L1))-ky*sinh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sinh(beta*(L-L1));
a12=(beta^3)*((L-L1)^3)*sinh(beta*(L-L1))-ky*cosh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cosh(beta*(L-L1));
a13=(-E*I*beta.*sin(beta*(L-L1))+K4*cos(beta*(L-L1))); a14=(-
E*I*beta.*cos(beta*(L-L1))-K4*sin(beta*(L-L1)));
a15=(E*I*beta.*sinh(beta*(L-L1))+K4*cosh(beta*(L-L1)));
a16=(E*I*beta.*cosh(beta*(L-L1))+K4*sinh(beta*(L-L1)));
a17=sin(beta*n); a18=cos(beta*n); a19=sinh(beta*n); a20=cosh(beta*n);
a21=0; a22=-1; a23=0; a24=-1;
a25=-cos(beta*n); a26=sin(beta*n); a27=-cosh(beta*n); a28=-
sinh(beta*n); a29=1; a30=tetal*beta; a31=1; a32=-tetal*beta;
a33=-sin(beta*n); a34=-cos(beta*n); a35=sinh(beta*n);
a36=cosh(beta*n); a37=0; a38=1; a39=0; a40=-1;
a41=-cos(beta*n); a42=sin(beta*n); a43=cosh(beta*n); a44=sinh(beta*n);
a45=1; a46=0; a47=-1; a48=0;
deter=[a1 a2 a3 a4 0 0 0 0;a5 a6 a7 a8 0 0 0 0;a17 a18 a19 a20 a21 a22
a23 a24;a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32;a33 a34 a35 a36 a37 a38 a39
a40;a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48;0 0 0 0 a9 a10 a11 a12;0 0 0 0 a13
a14 a15 a16];
% deter(2,:)=-deter(2,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(2,:)
% for i=1:8
%
%     if deter(i,1)~=0
%         i=i-1;
%     deter(i+1,:)=-deter(i+1,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(i+1,:)
%     i+1;
%     end
% end

%1.sütun
deter(2,:)=-deter(2,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(2,);
deter(5,:)=-deter(5,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(4,);
%2.sütun
deter(1,:)=-deter(1,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(1,);
deter(5,:)=-deter(5,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(4,);
%3.sütun
deter(1,:)=-deter(1,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(2,);

```

```

deter(4,:)=-deter(4,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(6,);
%4.sütun
deter(1,:)=-deter(1,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(3,);
deter(5,:)=-deter(5,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(8,);
%5.sütun
deter(1,:)=-deter(1,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(4,);
deter(6,:)=-deter(6,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(8,);
%6.sütun
deter(1,:)=-deter(1,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(5,);
deter(7,:)=-deter(7,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(8,);
%7.sütun
deter(1,:)=-deter(1,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(6,);
deter(8,:)=-deter(8,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(8,);

aa=deter(1,+)/-deter(1,1);
bb=deter(2,+)/-deter(2,2);
cc=deter(3,+)/-deter(3,3);
dd=deter(4,+)/-deter(4,4);
ee=deter(5,+)/-deter(5,5);
ff=deter(6,+)/-deter(6,6);
gg=deter(7,+)/-deter(7,7);
hh=deter(8,+)/-deter(8,8);

detc=[aa;bb;cc;dd;ee;ff;gg;hh];
detc
w1=((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
w2=((detc(5,8))*sin(beta*(x-L1))+(detc(6,8))*cos(beta*(x-L1))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x-L1))+cosh(beta*(x-L1)));
w1x=w1.^2; w2x=w2.^2; w1int=inline(w1x,'x'); w2int=inline(w2x,'x')

C8=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w1int,0,0.5)))))
C82=(sqrt(1/(ro*A*(quad(w2int,0.5,1)))))
% w1int=int(w1x,0,0.5);
% w2int=int(w2x,0.5,1);
% C1=(sqrt(1/(ro*A*w1int))); C12=(sqrt(1/(ro*A*w2int)));

```

```

x=0:0.001:0.5; x2=0.5:0.001:1;
wn1=C8*((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
wn2=C8*((detc(5,8))*sin(beta*(x2-L1))+(detc(6,8))*cos(beta*(x2-L1))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x2-L1))+cosh(beta*(x2-L1)));

hold on
plot(x,wn1,'k')
hold on
plot(x2,wn2,'k')

x=0:0.15:0.5; x2=0.5:0.15:1;

wn1=C8*((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
wn2=C8*((detc(5,8))*sin(beta*(x2-L1))+(detc(6,8))*cos(beta*(x2-L1))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x2-L1))+cosh(beta*(x2-L1)));

hold on
a=plot(x,wn1,'ko')
a.MarkerSize = 8;
hold on
a=plot(x2,wn2,'ko')
a.MarkerSize = 8;

% subplot(311)
% hold on
% plot(x,wn1)
% hold on
% subplot(312)
% hold on
% plot(x2,wn2)
% hold on
% ezplot(wn2,0,0.5)

```

Euler-Bernoulli Kirişin Dinamik cevabı

```

clear all
clc
syms C1 C2 C3 C4 x t

betaa=[ 1.3092; 4.7715; 7.8787; 11.0138 ;14.1513; 17.29029; 20.4301;
23.5704;26.7104;29.8517;32.988;36.128;39.268;42.408;45.548];

% betaa=[4.7587 + 0.2085i;7.8723 + 0.1265i;11.0101 + 0.0906i;
14.1489 + 0.0706i; 17.2886 + 0.0578i];

yxt=0;
for nn=1:9
beta=betaa(nn)
L=1; E=2.1*10^11; ro=7800; H=0.1; h=H; A=0.03*h; I=(1/12)*0.03*(h^3);
roa=sqrt(ro*A*E*I); c0=0; ck=0; e1=0.1; e2=e1; e3=e1; e4=e2;
k1=e1*(E*I)/(L^3); K2=e2*(E*I)/(L); k3=e3*(E*I)/(L^3);
K4=e4*(E*I)/(L);

```



```

kx=k1*(L^3)/(E*I); ky=k3*(L^3)/(E*I); cx=c0*(L)/(roa);
cy=ck*(L)/(roa);

a1=-(beta^3)*(L^3); a2=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx); a3=(beta^3)*(L^3);
a4=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a5=-1; a6=(-(E*I*beta)/K2); a7=-1; a8=((E*I*beta)/K2);
a9=(-beta^3)*(L^3)*cos(beta*L)-ky*sin(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*sin(beta*L);
a10=((beta^3)*(L^3)*sin(beta*L)-ky*cos(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*cos(beta*L));
a11=((beta^3)*(L^3)*cosh(beta*L)-ky*sinh(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*sinh(beta*L));
a12=((beta^3)*(L^3)*sinh(beta*L)-ky*cosh(beta*L)-
i*(beta^2)*(L^2)*cy*cosh(beta*L));
a13=(-E*I*beta*sin(beta*L)+K4*cos(beta*L));
a14=(-E*I*beta*cos(beta*L)-K4*sin(beta*L));
a15=(E*I*beta*sinh(beta*L)+K4*cosh(beta*L));
a16=(E*I*beta*cosh(beta*L)+K4*sinh(beta*L));

determinant=[a1 a2 a3 a4;a5 a6 a7 a8; a9 a10 a11 a12;a13 a14 a15 a16];

H=[a1 a2 a3 a4;a5 a6 a7 a8; a9 a10 a11 a12;a13 a14 a15 a16];
E11=[a1 a2 a3;a5 a6 a7;a9 a10 a11];E10=[a4;a8;a12];E01=[a13 a14
a15];E00=[a16];
MM=-inv(E11)*E10;
h1=MM(1);h2=MM(2);h3=MM(3);h4=1;

w1=h1*(sin(beta*x)+h2*cos(beta*x)+h3*sinh(beta*x)+h4*cosh(beta*x));

w1x=w1.^2;
C1=(sqrt(1/(ro*A*(int(w1x,0,1)))));
C1=vpa(C1)

gx=(2*L*x)*0.01; vx=0; w=sqrt((E*I*beta.^4)/(ro*A));

An=ro*A*int((gx*w1),0,1);
Bn=(ro*A/w)*int((vx*w1),0,1);
wn=C1*(h1*(sin(beta*x)+h2*cos(beta*x)+h3*sinh(beta*x)+h4*cosh(beta*x))
);

tt=An*cos(w*t)+Bn*sin(w*t);
yxt0=wn*tt;
yxt=yxt+yxt0;
end

% t=0;
% x=0:0.01:1
% ytt=
% plot(x,ytt)
%
```

Çatlak Euler-Bernoulli Kirişin Dinamik Cevabı

```
clear all
```

```

clc
syms C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 x x2 t

betaa=[ 1.3092; 4.7715; 7.8787; 11.0138 ;14.1513; 17.29029; 20.4301;
23.5704;26.7104;29.8517;32.988;36.128;39.268;42.408;45.548];

% betaa=[4.7587 + 0.2085i;7.8723 + 0.1265i;11.0101 + 0.0906i;
14.1489 + 0.0706i; 17.2886 + 0.0578i];

yxt=0;
for nn=1:6
beta=betaa(nn)
L1=0.5; n=L1; m=0; L=1; E=2.1*10^11; ro=7800; H=0.1; h=H; A=0.03*h;
I=(1/12)*0.03*(h^3); roa=sqrt(ro*A*E*I); c0=0; ck=0;
yy=0; e1=0.1; e2=e1; e3=e1; e4=e2; cx=c0*(L)/(roa); cy=ck*(L-
L1)/(roa); k1=e1*(E*I)/(L^3); K2=e2*(E*I)/(L); k3=e3*(E*I)/(L^3);
K4=e4*(E*I)/(L);
fyt=(0.6772)*(yy^2)-(1.04533)*(yy^3)+(4.5948)*(yy^4)-
(9.9736)*(yy^5)+(20.2948)*(yy^6)-(33.0351)*(yy^7)+(47.1063)*(yy^8)-
(40.7556)*(yy^9)+(19.6)*(yy^10);
fyc=fyt; tetal=6*pi*H*fyt; D=H*yy; kx=k1*(L^3)/(E*I); ky=k3*((L-
L1)^3)/(E*I);

a1=(-beta^3)*(L^3); a2=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx); a3=(beta^3)*(L^3);
a4=kx+(i*(beta^2)*(L^2)*cx);
a5=1; a6=((E*I*beta)/K2); a7=1; a8=-((E*I*beta)/K2);
a9=((-beta^3)*((L-L1)^3)*cos(beta*(L-L1))-ky*sin(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sin(beta*(L-L1)));
a10=((beta^3)*((L-L1)^3)*sin(beta*(L-L1))-ky*cos(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cos(beta*(L-L1)));
a11=((beta^3)*((L-L1)^3)*cosh(beta*(L-L1))-ky*sinh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*sinh(beta*(L-L1)));
a12=((beta^3)*((L-L1)^3)*sinh(beta*(L-L1))-ky*cosh(beta*(L-L1))-
i*(beta^2)*((L-L1)^2)*cy*cosh(beta*(L-L1)));
a13=(-E*I*beta.*sin(beta*(L-L1))+K4*cos(beta*(L-L1))); a14=(-
E*I*beta.*cos(beta*(L-L1))-K4*sin(beta*(L-L1)));
a15=(E*I*beta.*sinh(beta*(L-L1))+K4*cosh(beta*(L-L1)));
a16=(E*I*beta.*cosh(beta*(L-L1))+K4*sinh(beta*(L-L1)));
a17=sin(beta*n); a18=cos(beta*n); a19=sinh(beta*n); a20=cosh(beta*n);
a21=0; a22=-1; a23=0; a24=-1;
a25=-cos(beta*n); a26=sin(beta*n); a27=-cosh(beta*n); a28=-
sinh(beta*n); a29=1; a30=tetal*beta; a31=1; a32=-tetal*beta;
a33=-sin(beta*n); a34=-cos(beta*n); a35=sinh(beta*n);
a36=cosh(beta*n); a37=0; a38=1; a39=0; a40=-1;
a41=-cos(beta*n); a42=sin(beta*n); a43=cosh(beta*n); a44=sinh(beta*n);
a45=1; a46=0; a47=-1; a48=0;
deter=[a1 a2 a3 a4 0 0 0 0;a5 a6 a7 a8 0 0 0 0;a17 a18 a19 a20 a21 a22
a23 a24;a25 a26 a27 a28 a29 a30 a31 a32;a33 a34 a35 a36 a37 a38 a39
a40;a41 a42 a43 a44 a45 a46 a47 a48;0 0 0 0 a9 a10 a11 a12;0 0 0 0 a13
a14 a15 a16];
%1.sütun
deter(2,:)=-deter(2,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(2,);
deter(5,:)=-deter(5,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,1)*deter(1,+)/deter(1,1) + deter(4,);
%2.sütun
deter(1,:)=-deter(1,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(1,);

```

```

deter(5,:)=-deter(5,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(6,);
deter(3,:)=-deter(3,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,2)*deter(2,+)/deter(2,2) + deter(4,);
%3.sütun
deter(1,:)=-deter(1,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(2,);
deter(4,:)=-deter(4,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,3)*deter(3,+)/deter(3,3) + deter(6,);
%4.sütun
deter(1,:)=-deter(1,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(3,);
deter(5,:)=-deter(5,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,4)*deter(4,+)/deter(4,4) + deter(8,);
%5.sütun
deter(1,:)=-deter(1,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(4,);
deter(6,:)=-deter(6,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(6,);
deter(7,:)=-deter(7,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,5)*deter(5,+)/deter(5,5) + deter(8,);
%6.sütun
deter(1,:)=-deter(1,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(5,);
deter(7,:)=-deter(7,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(7,);
deter(8,:)=-deter(8,6)*deter(6,+)/deter(6,6) + deter(8,);
%7.sütun
deter(1,:)=-deter(1,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(1,);
deter(2,:)=-deter(2,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(2,);
deter(3,:)=-deter(3,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(3,);
deter(4,:)=-deter(4,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(4,);
deter(5,:)=-deter(5,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(5,);
deter(6,:)=-deter(6,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(6,);
deter(8,:)=-deter(8,7)*deter(7,+)/deter(7,7) + deter(8,);

aa=deter(1,+)/-deter(1,1);
bb=deter(2,+)/-deter(2,2);
cc=deter(3,+)/-deter(3,3);
dd=deter(4,+)/-deter(4,4);
ee=deter(5,+)/-deter(5,5);
ff=deter(6,+)/-deter(6,6);
gg=deter(7,+)/-deter(7,7);
hh=deter(8,+)/-deter(8,8);

detc=[aa;bb;cc;dd;ee;ff;gg;hh];
detc;
w1=((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*sinh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
w2=((detc(5,8))*sin(beta*(x-L1))+(detc(6,8))*cos(beta*(x-L1))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x-L1))+cosh(beta*(x-L1)));

```

```

w1x=w1.^2; w2x=w2.^2; w1int=inline(w1x,'x'); w2int=inline(w2x,'x');

C8=(sqrt(1/(ro*A*(int(w1x,0,L1)))));

wn1=C8*((detc(1,8))*sin(beta*x)+(detc(2,8))*cos(beta*x)+(detc(3,8))*si
nh(beta*x)+(detc(4,8))*cosh(beta*x));
wn2=C8*((detc(5,8))*sin(beta*(x2-L1))+(detc(6,8))*cos(beta*(x2-
L1))+(detc(7,8))*sinh(beta*(x2-L1))+cosh(beta*(x2-L1)));
gx=(2*L*x)*0.01; vx=0; w=sqrt((E*I*beta.^4)/(ro*A));

An=ro*A*int((gx*wn1),0,x)
Bn=(ro*A/w)*int((vx*wn1),0,x)
tt=An*cos(w*t)+Bn*sin(w*t);
yxt0=wn1*tt;
yxt=yxt+yxt0;
end

```



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Semih BEYÇİMEN
Doğum Yeri ve Tarihi : Erzurum / 01.01.1992
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Sultangazi Atatürk Lisesi
Lisans : Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği
Yüksek Lisans :Bursa Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Bursa Uludağ Üniversitesi

İletişim (e-posta) : semihbeycimen@uludag.edu.tr

Yayımları : **Beyçimen, S., Pala, Y. 2019.** Karma mesnetli kirişin serbest titreşim analizi, DOI: 10.5505/pajes.2019.33558