SİNGÜLER İNTEGRALLER VE

SOBOLEV UZAYLARI

Yaşar BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1996

47633

Yaşar BOLAT'ın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "Singüler İntegraller ve Sobolev Uzaylara" başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

05.07.1996

ÜYE : Doç.Dr.Ömer AKIN

ÜYE : Prof.Dr.Ali SİNAN

ÜYE : Yrd.Doç.Dr.Hüseyin YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15.07.1996.. gün ve 96-6/15 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Ö.Faruk EMRULLAHOĞLU
Enstitü Müdürü

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER İNTEGRALLER VE SOBOLEV UZAYLARI

Yaşar BOLAT

47633

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 5/11/1996 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından (85/Seksenbeş) Not Takdir Edilerek Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

Doç. Dr. Ömer AKIN	Prof. Dr. Ali SINAN	Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Danışman		

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİNGÜLER İNTEGRALLER VE SOBOLEV UZAYLARI

Yaşar BOLAT

Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr.Ömer AKIN

1996, sayfa: 53

Jüri: Doç.Dr.Ömer AKIN

Prof.Dr.Ali SİNAN

Yrd.Doç.Dr.Hüseyin YILDIRIM

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Giriş kısmında, Singüler integraller ve Sobolev uzayları hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Birinci bölümde, Singüler integraller ve Sobolev uzaylarının incelenmesinde yardımcı olacak bazı temel bilgi ve özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde, Singüler çekirdekler ve onların Fourier dönüşümleri ile ilgili bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Sobolev uzayları ve genelleştirmeler hakkında bilgi verilmiş, bazı temel özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Singüler integral, çekirdek, Sobolev uzayı, dağılım(distribution)

Temperate dağılım, öteleme ile değiştirme, diferensiyeller ile değiştirme.

ABSTRACT

Masters Thesis

Singular Integrals and Sobolev Spaces

Yaşar BOLAT

Kocatepe Üniversity

Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr.Ömer AKIN

1996, Page: 53

Jury : Assoc.Prof.Dr.Ömer AKIN
Prof.Dr.Ali SİNAN
Assoc.Prof.Dr.Hüseyin YILDIRIM

This thesis consist of three parts.

In the introduction part, it was given a short knowledge about some works on singular integrals and Sobolev spaces.

In the first part, some main definitions and properties are given to examine singular integrals and Sobolev spaces.

In the second part, some main properties of singular kernels and their Fourier transforms are investigated.

In the third part, it was given about the definitions and some important properties of Sobolev spaces and generalizations.

Key Words : Singular integral, kernel, Sobolev space, distribution, temperate distribution, commutates with translations, commutetes with differentiations.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım sayın Doç. Dr. Ömer AKIN ve sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a ebedi minnettarlık duygularımla teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbf{C^k(Q)}$: Q içinde kendisi ve $|\alpha| \leq k$ olmak üzere bütün $D^\alpha f(x)$ türevleri sürekli $f(x)$ fonksiyonlarının sınıfını gösterecektir.

$\mathbf{C^k(\overline{Q})}$: $\overline{Q}$, Q'nun kapanışını göstermek üzere $\overline{Q}$'da kendisi ve $|\alpha| \leq k$ olmak üzere bütün $D^\alpha f(x)$ türevleri sürekli $f(x)$ fonksiyonlarının kümesini gösterecektir. Bu sınıfa ait bir $f(x)$ fonksiyonunun normu , $k < \infty$ için

$$\|f\|_{C^k(\overline{Q})} = \sup_{x \in \overline{Q}} |D^\alpha f(x)|$$

dir.

$\mathbf{C_0^k(Q)}$: Q içinde sonlu olan $C^k(Q)$ sınıfına ait fonksiyonların uzayıdır. Yani; kompakt desteğe sahip fonksiyonların sınıfını gösterecektir.

$\mathbf{C_0^\infty(E^n)}$: E^n'in içinde ve sınırında sürekli dışında sıfır olan kompakt desteğe sahip fonksiyonların sınıfıdır.

$\sigma_\mathbf{n}$: R^n içinde birim kürenin yüzey alanını göstermek üzere;

$$\sigma_n = \int\limits_{|s=1|} ds = \frac{2\Pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$ şeklinde verilir.

Giriş

Singüler integraller konusu;**Mihlin, Calderon ve Zygmund**'un çalışmalarının sonucu 20.yüzyılın sonlarında önemli gelişme sağlamıştır. Singüler integrallerin, Fourier serileri, Kısmi diferensiyel denklemler ve Analizin diğer dallarında yapılan çalışmalarla önemli bağlantıları vardır. Singüler integrallere örnek olarak genelde; f fonksiyonunun Hilbert dönüşümü olarak bilinen,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt \qquad -\infty < x < \infty$$

dönüşümü verilir. Burada f fonksiyonu integrallenebilir olsa bile, $x = t$ noktasında integrantın singülerliğinden dolayı integral mevcut değildir. Bununla beraber, singülerlik noktasının simetrik bir komşuluğunun kaldırılmasıyla esas değer anlamında(principal value=p.v.)

$$\tilde{f} = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt$$

integralini gözönünde bulundurabiliriz. Bu singüler integral (veya esas değer integrali) analitik fonksiyonların sınır değer çalışmalarında karşımıza çıkar. Bütün bunlarla beraber, singüler integraller üzerine kurulan bu çalışmamızdaki amacımız; önce, singüler çekirdekler ve bu singüler çekirdeklerin Fourier dönüşümlerinin temel özelliklerini araştırıp inceleyerek, Sobolev uzaylarının bir genel sınıfına, singüler integral operatörlerinin detaylı temel özelliklerinin genişletilmesini incelemek olacaktır. Daha sonra, singüler integraller teorisinde esas rol oynayan singüler integral operatörlerinin geniş bir sınıfına nasıl yayıldığını irdeleyeceğiz. Bu çalışmada eğer integral bölgesi belirtilmemiş ise E^n tam uzayı üzerinden integral alındığı anlaşılacaktır.

BÖLÜM 1

1 Temel Kavramlar

1.1 Konvolüsyonlar ve bazı temel özellikleri

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $x \in E$ 'nin ölçülebilir fonksiyonları olsunlar ve basitlik olması açısından f ve g 'nin reel değerli olduklarını farzedelim. Buna göre ;

Tanım 1.1.1: (iki fonksiyonun konvolüsyonu)

$h = f * g$ Konvolüsyonu

$$h = (f * g)(x) = \int_{E^n} f(y)g(x-y)dy$$

formülü ile tanımlanmıştır. Buradaki integral Lebesgue integralidir. Konvolüsyon bir çarpım türüdür. Ancak noktasal çarpım L^1'de kapalı olmamasına karşılık , konvolüsyon çarpımı L^1'de kapalıdır. Yani; eğer f , $g \in L^1$ ise o zaman $f \cdot g \notin L^1$ dir, ancak $h = f*g \in L^1$ dir. Yani;

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

dir.

Özellikler 1.1.2:

1- Konvolüsyon komutatiftir. Yani; $f * g = g * f$ dır.

2- Konvolüsyon L^1 uzayında asosyatiftir. Yani; $h * (f * g) = (h * f) * g$ dir.

3- (W.H.Young Teoremi) $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer $f \in L^p$ ve $g \in L^1$ ise o zaman $h = f * g$ vardır ve L^p'ye aittir. Yani; $\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ dir.

4- (Young Teoremi) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ olmak üzere $f \in L^p$ ve $g \in L^q$ olduğunu kabuledelim. Eğer $h = f * g$ ise o zaman $h \in L^r$ ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

dır.

5- $1 \leq p < \infty$ olmak üzere eğer $f \in L^p(E^n)$ ise o zaman; $|u| \longrightarrow 0$ iken,

$$\|f(x+u) - f(x)\|_p = \left(\int |f(x+u) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0$$

olur. $\epsilon > 0$ parametresine bağlı bir $K_\varepsilon(x)$ fonksiyonunu ve;

$$(f * K_\varepsilon)(x) = \int f(y) K_\varepsilon(x-y) dy$$

konvolüsyonunu gözönünde bulunduralım. Buradaki $K_\varepsilon(x)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyon veya kısaca çekirdek diyeceğiz. $K_\varepsilon(x)$ çekirdeğinin aşağıdaki özellikleri sağladığı kabul edilecektir.

a) Her $\epsilon > 0$ için,

$$\int |K_\varepsilon(x)| dx \leq A$$

dır.(A ϵ 'dan baıgımsız bir sabittir.)

b) Her $\epsilon > 0$ için ,

$$\int K_\varepsilon(x) dx = 1$$

dir.

c) Belirlenmiş herhangi bir $\delta > 0$ için $\epsilon \longrightarrow 0$ iken

$$\int_{|x| \geq \delta} | K_\varepsilon(x) | dx \longrightarrow 0$$

olur. Bu özelliklerin ispatı için [Neri,U.,1971]'e bakılabilir.

1.2 Fourier Dönüşümü ve Bazı Temel Özellikleri

$x, y \in E^n$ olmak üzere $x.y$ iç çarpımını;

$$x \cdot y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$$

şeklinde tanımlayacağız.

Tanım 1.2.1: $f \in L^p(E^n)$ olsun. Bu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü;

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E^n} f(y) e^{-i(x \cdot y)} dy$$

formülü ile ifade edilir. Fourier dönüşümünün buna eşdeğer iki ifadesi ise;

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int f(y) e^{-i(x \cdot y)} dy \qquad ve \qquad \hat{f}(x) = \int f(y) e^{-2\pi i(x \cdot y)} dy$$

şeklindedir.

Herhangi bir $x \in E^n$ için yukardaki integraller mutlak yakınsak olduğundan [Neri,U.,1971], $\hat{f}(x)$ Fourier dönüşümü hemen hemen her yerde tanımlı ve sınırlıdır. Gerçekten;

$$|\hat{f}(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int |f(y)| dy = (2\pi)^{-n} \|f\|_1 < \infty$$

dır.

Özellikler 1.2.2:

1- $\forall f_j(x_j) \in L(E^1)$ olmak üzere eğer $f(x) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü; $\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x_1) \cdot \hat{f}_2(x_2) \cdots \hat{f}_n(x_n)$ dır.

2- $a \in E^n$ ve $g(x) = e^{i(x \cdot a)} f(x)$ olsun.O halde , $\hat{g}(x) = \hat{f}(x - a)$ dır.

3- $\lambda \neq 0$ olan bir reel sabit ve $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ olsun. O zaman, $\hat{f}_\lambda(x) = |\lambda|^{-n} \hat{f}(\frac{x}{\lambda})$ olur.

4- Fourier dönüşüm lineerdir. Yani; a, b her hangi iki sabit olmak üzere,

$$F(af+bg)(x) = a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)$$

dir.

5- $a \in E^n$ ve $f_a(x) = f(x+a)$ olsun. O halde; $\hat{f}_a(x) = e^{i(xa)}\hat{f}(x)$ dir.

6- Çift bir fonksiyonun Fourier dönüşümü çift, tek fonksiyonun Fourier dönüşümü ise tektir.

7- (Rieman-Lebesgue Teoremi) Eğer $f \in L(E^n)$ ise , o zaman $\hat{f}$ sınırlı ve düzgün süreklidir.

Bundan başka $|X| \longrightarrow \infty$ iken $\hat{f}(x) \longrightarrow 0$ dır.

8- $f, g \in L$ olsun.Eğer $h = f * g$ ise, o zaman $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$ dir.

9- $f, g \in L$ olsun. O halde;

$$\int \hat{f}(x).g(x)dx = \int f(x).\hat{g}(x)dx$$

dir.

10- Bir radyal(uzaklığa bağlı) fonksiyonun Fourier dönüşümü yine radyaldır.

Ters Fourier Dönüşüm formülü: $f \in L(E^n)$ olmak üzere;

$$f(x) = \int \hat{f}(y)e^{i(x.y)}dy$$

dir. Bu özelliklerin ispatı için [Neri.U.,1971]'e bakılabilir.

Tanım 1.2.3:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ katlı-indeks ;

$\alpha! = \alpha_1 ! \ \alpha_2! \cdots \alpha_n !$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$,

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$,

$D = (D_1, D_2, \cdots, D_n)$,

$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1(1)n$ olmak üzere;

$D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ şeklinde tarif edilecektir.

Tanım 1.2.4: Kompleks C^n 'de Skalar çarpım

$< Z, \xi >= z_1\overline{\xi_1} + z_2\overline{\xi_2} + \cdots + z_n\overline{\xi_n}$

ve $|Z| = \sqrt{< Z, Z >} = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2}$

şeklinde tarif edileceklektir.

Tanım 1.2.5: $U : E^n \longrightarrow C$ kompakt destekli fonksiyonların sınıfını $C_0^\infty = C_0^\infty(E^n)$ ile göstereceğiz. C_0^∞ uzayının bir kompleks vektör uzayı olduğu açıktır. C_0^∞ uzayı üzerinde. aşağıdaki yakınsaklık kriterine göre indirgenmiş topolojiyi gözönünde bulundurabiliriz. Eğer U_n dizisi belirli bir kompakt K kümesi içinde desteğe sahip ve onun bütün türevleri ile birlikte U_n dizisi U'ya düzgün yakınsar ise U_n, U'ya yakınsar denir ve $U_n \longmapsto U$ şeklinde gösterilir. Daha açık olarak her bir α katlı-indeks için, K üzerinde,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha U_n \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha U$$

yakınsaklığı düzgündür. Bu topoloji ile donatılmış C_0^∞ topolojik uzayına D topolojik vektör uzayı denir.

Tanım 1.2.6: D üzerinde bütün sürekli lineer, eşlenik fonksiyonellerin topolojik vektör uzayı D^* , E^n üzerinde dağılımlar(Schwarz) uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.7:(Dağılım) Kendisi ve bütün türevleri $|X| \longrightarrow \infty$ iken $|X|$'in her hangi bir negatif kuvvetinden daha hızlı sıfıra yakınsıyan C^∞ sınıfına ait fonksiyonların vektör uzayını S ile göstereceğiz.

Daha açık olarak eğer bütün α ve β katlı-indeksleri için

$|X^\alpha D^\beta U(x)| \leq C_{\alpha\beta}$ olacak şekilde $C_{\alpha\beta}$ pozitif sabitleri varsa $U \in S$ dir. S uzayına dağılım uzayı denir.

Tanım 1.2.8: (Temperate distribution-Temperate dağılım) Eğer S uzayı içinde U_k dizisi U'ya yakınsar ise o zaman $< f, U_k > \longrightarrow < f, U >$ olacak şekilde S üzerinde sürekli bütün lineer, eşlenik f fonksiyonellerinin topolojik vektör uzayı, S^* temperate dağılımlar uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.9: (Tam uzay) L_k^p uzayı üzerinde tanımlanan norma göre L_k^p'den alacağımız bir dizi yine L_k^p'de bir limite sahip ise ; yani bu dizi yakınsak bir Cauchy dizisi ise L_k^p uzayına tamdır denir.

Tanım 1.2.10:(Hölder eşitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sartını sağlayan bir sayı ve q da p'nin eşleniği olmak üzere

$$|\int fgdx| \leq ||f||_p ||g||_q$$

şeklinde tanımlanır.

$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ eşitsizliği de Minkowsky eşitsizliği olarak bilinir.

Tanım 1.2.11: (Ölçülebilir fonksiyon) (X,A) bir ölçülebilir uzay ve $f : X \longrightarrow R$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\alpha > 0$ için, $f^{-1}(]-\infty,\infty[) = \{x \in X : \quad f(x) > \alpha\} \in A$ oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 1.2.12: (Destek - Support) Bir f fonksiyonunun desteği,

$$supp f = \overline{\{x : \quad f(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır[Schwarz 1966].

Tanım 1.2.13:(Dağılım-Distribution) Kompakt desteğe sahip ve C^∞ sınıfına ait fonksiyonların sınıfı D olsun. Bu halde, $U : D \longrightarrow R$ ya da $U : D \longrightarrow C$ fonksiyonelleri lineer ve sürekli ise U fonksiyoneli bir dağılım adını alır. $f \in D$ ve ψ her hangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$<\psi, f> = <U_\psi, f> = \int_{R^n} f(x)\psi(x)dx$$

şeklinde tanımlanır[Schwarz 1966].

Tanım 1.2.14: (Homogen Çekirdek) Her $\lambda > 0$ ve $x \in R^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise $K(x)$ çekirdeğine α. dereceden homogendir denir.

Tanım 1.2.15:(Singüler integral) f ve K , R^n'de tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{R^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanan $h(x)$ fonksiyonuna f ve K'nın konvolüsyonu denir.Eğer $\alpha = n$ ise yukarıdaki integrale singüler integral denir. Burada α , K'nın homogenlik derecesi ve n , uzayın boyutudur. Ayrıca $F(f * g) = FfFg$ eşitliği geçerlidir[Neri,U.,1971].

Tanım 1.2.16: (Schwarz Uzayı) Kendisi ve türevleri bir polinom ile çarpıldığında sınırlı kalan fonksiyonların uzayıdır. Yani;

$$S_* = S_*(E^n) = \{f \in C^\infty(E^n) \quad : \quad \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \qquad \forall \alpha, \beta \in Z^+ \ \ için\}.$$

Teorem 1.2.17: $1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(E^n)$ ve Ω, Σ üzerinde integrallenebilir ve tek fonksiyon olsun. O zaman ;

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq B_p \|f\|_p$

b) $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir $\tilde{f}$ fonksiyonu vardır.

c) $\|\tilde{f}\|_p \leq B_p \|f\|_p$ dir. Burada $B_p = \frac{\pi}{2} A_p \|\Omega\|_1$ şeklindedir.

Teorem 1.2.18: $K(x) = \Omega(x).|X|^{-n}$ çekirdeğinin Σ üzerinde sıfır ortalama değerli çift çekirdek olduğunu ve uygun $q > 1$ 'ler için de $\Omega \in L^q(\Sigma)$ olduğunu kabuledelim. $1 < p < \infty$ olmak üzere eğer $f \in L^p(E^n)$ ise $\tilde{f}_\varepsilon = K_\varepsilon \cdot f = K_\varepsilon * f$ yazarız. Burada K_ε kesilim çekirdeğidir ve

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} K(x) & |x| > \varepsilon \\ \\ 0 & |x| \leq \varepsilon \end{cases}$$

dır.

O zaman ;

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_{p,q} \|\Omega\|_q \|f\|_p$

b) $\epsilon \longrightarrow 0$ iken $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir $\tilde{f} \in L^p$ fonksiyonu vardır.

c) $\|\tilde{f}\|_p \leq A_{p,q} \|\Omega\|_q \|f\|_p$

Teorem 1.2.19:(Calderon-Zygmund) $1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(E^n)$ olsun. $K(x) = \Omega(x').|x|^{-n}$, Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olmak üzere $\tilde{f}_\varepsilon = K_\varepsilon * f$ yazalım ve uygun $q > 1$'lar için $\Omega \in L^p(\Sigma)$ olsun. Bu durumda;

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_{p,q}\|\Omega\|_q\|f\|_p$

b) $\epsilon \longrightarrow 0$ iken $\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}\|_p \longrightarrow 0$ olacak şekilde bir $\tilde{f} \in L^p$ fonksiyonu vardır.

Yukarıda, sadece ifadesini vermiş olduğumuz bu teoremlerin ispatı için [Neri,U.,1971]'e bakılabilir.

Teorem 1.2.20:(Parseval-Plancherel) $f \in L^2(E^n)$ olsun. f fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $R \longrightarrow \infty$ iken $\hat{f}_R(x)$'in L^2 normunda bir limiti gibi mevcut olur.

Ayrıca; $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_2$ (Parseval formülü)

dır. Bundan başka; f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü,

L^2 içinde $f(x) = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{|y|\leq R} \hat{f}(y)e^{i(x\cdot y)}dy$ anlamında korunur[Neri,U.,1971].

Teorem 1.2.21:(Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi) $f(x,h)$ toplanabilir majoranta sahip olsun: $|f(x,h)| \leq F(x)$, h parametresinden bağımsız ve $F(x) \in L^1(\Omega)$ dır. Eğer, $h \longrightarrow 0$ iken $f(x,h)$ fonksiyonunun hemen hemen her x için limiti varsa, o zaman

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Omega} f(x,h)dx = \int\limits_{\Omega} \lim_{h\to 0} f(x,h)dx$$

dir[Samko 1993].

Teorem 1.2.22:(Minkowsky integral eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ ve $f(x,y)$ fonksiyonu Ω_1 ve Ω_2 üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ise,

$$\left(\int\limits_{\Omega_1}\left(\int\limits_{\Omega_2}|f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{\Omega_1} dy\left(\int\limits_{\Omega_2}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği vardır[Samko 1993].

Teorem 1.2.23:(Fubini Teoremi) $f(x,y)$ fonksiyonu Q_{m+n} üzerinde integrallenebilir olsun. O zaman h. h. her $x \in Q_n$ için $f(x,y)$, $y \in Q_m$'e göre integrallenebilirdir.

Yani; $\int\limits_{Q_m} f(x,y)dy$ ve $\int\limits_{Q_n} f(x,y)dx$ integralleri $x \in Q_n$ ve $y \in Q_m$'e göre integrallenebilirdir. Bu durumda,

$$\int\limits_{Q_{m+n}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{Q_n} dx \int\limits_{Q_m} f(x,y)dy = \int\limits_{Q_m} dy \int\limits_{Q_n} f(x,y)dx$$

dir[V.P.Mıkhaılov 1976].

BÖLÜM 2

2 Singüler çekirdekler ve onların Fourier dönüşümleri

$x \in E^n$ olmak üzere verilen bir $k(x)$ fonksiyonu

$$k_\varepsilon(x) = \epsilon^{-n}k(x)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $k_\varepsilon(x)$ lokal integrallenebilir ve $U \in C_0^\infty(E^n)$ ise o zaman her $\lambda > 0$ için;

$$\int k(\lambda x)\overline{U(x)}dx = \lambda^{-n}\int k(x)\overline{U(x/\lambda)}dx$$

veya bir başka deyişle:

$$< k(\lambda x), U(x) >=< k(x), U_\lambda(x) >$$

dır.

Özel olarak, eğer $k(x)$, m. dereceden homogen ise,

$$\begin{aligned}
\lambda^m < k(x), U(x) > &= \lambda^m \int k(x)\overline{U(x)}dx \\
&= \int k(\lambda x)\overline{U(x)}dx \\
&= \int \lambda^{-m}k(x)\overline{U(x/\lambda)}dx \\
&=< k(x), U_\lambda(x) >
\end{aligned}$$

olur. Daha genel olarak, her hangi bir $f \in S^*$ temperate dağılımı için, bütün $u \in S$ olmak üzere Π_λ operatörünü;

$$< \Pi_\lambda f, U >=< f, U_\lambda > \tag{2.0.1}$$

formülü ile tanımlayacağız. f lokal integrallenebilir bir fonksiyon olduğunda

$$(\Pi_\lambda f) = f(\lambda x)$$

olacağı açıktır. Ayrıca, $f(\lambda x)$'in Fourier dönüşümü için bilinen Fourier dönüşüm formülünü şu şekilde genişletebiliriz.

$$F(\Pi_\lambda f) = \lambda^{-n}\Pi_{1/\lambda}F(f) \tag{2.0.2}$$

İspat . Bir $f \in S^*$ dağılımının $\hat{f} = F(f)$ Fourier dönüşümü, her $U \in S$ için,

$$< \hat{f}, U > = < f, \hat{U} >$$

dır.

Bu tanıma ve (2.0.1) formülüne göre, her $U \in S$ için,

$$\begin{aligned} < F(\Pi_\lambda f), U > &= < \Pi_\lambda f, F(U) > \\ &= < f(\lambda x), \hat{U} > \\ &= < f, \hat{U}_\lambda > \\ &= < f, \lambda^{-n}\hat{U}(x/\lambda) > \\ &= < f, \lambda^{-n}\Pi_{1/\lambda}\hat{U} > \\ &= < \lambda^{-n}\Pi_{1/\lambda}\hat{f}, U > \end{aligned}$$

olduğu görülür. Aynı şekilde,

$$\begin{aligned} < \lambda^{-n}\hat{f}(x/\lambda), U > &= < \hat{f}(\lambda x), U(x) > \\ &= < f(\lambda x), \hat{U} > \\ &= < f(x), \hat{U}_\lambda(x) > \\ &= < f(x), \lambda^{-n}\Pi_{1/\lambda}\hat{U}(x) > \end{aligned}$$

olur. Bu da iddiayı gerçekler.

Tanım 2.0.24: S^* 'daki bir f dağılımı için, eger $\Pi_\lambda f = \lambda^m f$ oluyorsa f 'ye m. dereceden bir homogen dağılımdır denir.

Eğer $f(x) = f(|x|)$ ise böyle bir f fonksiyonuna uzaklığa bağlı (radyal) fonksiyon denir. Ayrıca, bir radyal fonksiyonun Fourier dönüşümü yine bir radyal fonksiyondur.

Mesala; $n \geq 2$ ve $\frac{n}{2} < \alpha < n$ olmak üzere $|x|^{-\alpha}$ lokal integrallenebilir radyal fonksiyonunu gözönüne alalım ve bunun Fourier dönüşümünü hesaplayalım. Fonksiyonumuz lokal integrallenebilir olduğundan, bunu iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazabiliriz. Yani; $|x|^{-\alpha} = f+g$ olsun. Burada f fonksiyonu $|x|^{-\alpha}$ 'nın $\{x : |x| \leq 1\}$ kümesine kısıtlanışı ve g fonksiyonu da $|x|^{-\alpha}$ 'nın $\{x : |x| > 1\}$ kümesine kısıtlanışı olsun. O halde Fourier dönüşümünün lineerliğinden

$$F(|x|^{-\alpha}) = F(f+g) = F(f) + F(g)$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\hat{f} + \hat{g} = \int_{|x|\leq 1} |y|^{-\alpha} e^{-2\pi i x y} dy + \int_{|x|>1} |y|^{-\alpha} e^{-2\pi i x y} dy = I + II$$

dersek, $I < \infty$ olması için $\alpha < n$ olması gerekeceğinden $f \in L^1$ dir.

$II < \infty$ olması için $\alpha > \frac{n}{2} \Rightarrow 2\alpha > n$ olması gerekeceğinden $g \in L^2$ dir.

$F(|x|^{-\alpha})$ fonksiyonu lokal integrallenebilir, sınırlı sürekli fonksiyonların toplamı ve L^2 uzayında bir fonksiyondur. Üstelik $|x|^{-\alpha}$ lokal integrallenebilir olduğundan,

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda |x|^{-\alpha} &= |\lambda x|^{-\alpha} \\ &= \lambda^{-\alpha} |x|^{-\alpha} \end{aligned} \tag{2.0.3}$$

dır. Şimdi (2.0.2) formülüne göre;

$$F(\Pi_\lambda |x|^{-\alpha}) = \lambda^{-\alpha}\Pi_{1/\lambda}F(|x|^{-\alpha})$$

yazarız. (2.0.3) formülünden de;

$$F(\Pi_\lambda |x|^{-\alpha}) = \lambda^{-\alpha}F(|x|^{-\alpha})$$

elde ederiz. Böylece bu son iki eşitlik birleştirilirse,

$$\lambda^{-\alpha}F(|x|^{-\alpha}) = \lambda^{-\alpha}\Pi_{1/\lambda}F(|x|^{-\alpha})$$

$$F(|x|^{-\alpha}) = \lambda^{\alpha-n}\Pi_{1/\lambda}F(|x|^{-\alpha})$$

elde edilir. $1/\lambda$ yerine λ yazmakla,

$$\Pi_\lambda F(|x|^{-\alpha}) = \lambda^{\alpha-n}F(|x|^{-\alpha}) \tag{2.0.4}$$

elde ederiz. Buradan $F(|x|^{-\alpha})$ 'nın $(\alpha - n)$. dereceden homogen bir fonksiyon olduğu görülür. Böylece $|x|^{-\alpha}$ bir radyal fonksiyon olduğundan $F(|x|^{-\alpha})$ da bir radyal fonksiyondur.

Netice olarak $(\alpha - n)$. dereceden bir $F(|x|^{-\alpha})$ radyal fonksiyonu uygun C_α kompleks sabitleri için,

$$F(|x|^{-\alpha})(\xi) = C_\alpha|\xi|^{\alpha-n} \tag{2.0.5}$$

şeklinde olmalıdır. Gerçekten

$$F(|x|^{-\alpha})(\xi) = \int |x|^{-\alpha}e^{-2\pi ix\xi}dx$$

olur. Burada $2\pi i x\xi = u \Rightarrow |2\pi i\xi|^n dx = du, |x| = \dfrac{|u|}{|2\pi i\xi|}$ ve $dx = \dfrac{du}{|2\pi i\xi|^n}$ dönüşümü yaparsak,

$$
\begin{aligned}
F(|x|^{-\alpha})(\xi) &= \int \left(\frac{|u|}{|2\pi i\xi|}\right)^{-\alpha} \left(\frac{1}{|2\pi i\xi|}\right)^{n} e^{-u} du \\
&= \frac{1}{|2\pi i\xi|^{-\alpha+n}} \int |u|^{-\alpha} e^{-u} du \\
&= |2\pi i|^{\alpha-n} \Gamma(1-\alpha) |\xi|^{\alpha-n} \\
&= C_\alpha |\xi|^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. C_α sabiti aşağıdaki gibi hesaplanır. $e^{-\pi|x|^2} \in S$ ise $F(e^{-\pi|x|^2})(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ olduğundan.

Plancherel formülü ve (2.0.5) formülünü kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
< F(|x|^{-\alpha}), F(e^{-\pi|x|^2}) > &=< C_\alpha |\xi|^{\alpha-n}, e^{-\pi|\xi|^2} > \\
&= C_\alpha < |\xi|^{\alpha-n}, e^{-\pi|\xi|^2} > \\
&=< |x|^{-\alpha}, e^{-\pi|x|^2} >
\end{aligned}
\tag{2.0.6}
$$

buluruz. $\Sigma = \{x : |x| = 1\}$ notasyonu birim küreyi, ω_n ; Σ 'nın alanını, x' : x 'in Σ üzerindeki izdüşümü, yani $x' = x/|x|$ ve dx' de Σ üzerinde yüzey elemanını göstermek üzere, $< |x|^{-\alpha}, e^{-\pi|x|^2} >$ iç çarpım ifadesini hesaplayalım.

$$
< |x|^{-\alpha}, e^{-\pi|x|^2} >= \int |x|^{-\alpha} e^{-\pi|x|^2} dx
$$

olur. $|x| = r$ değişken değiştirmesi yaparsak $dx = r^{n-1} dr dx'$ olur. O halde.

$$
\begin{aligned}
\int_{E^n} |x|^{-\alpha} e^{-\pi|x|^2} dx &= \int_{\Sigma} dx' \int_0^\infty r^{-\alpha} r^{n-1} e^{-\pi r^2} dr \\
&= \omega_n \int_0^\infty r^{-\alpha+n-1} e^{-\pi r^2} dr
\end{aligned}
$$

olur. $\pi r^2 = u$ dersek, $(2\pi r)dr = du$, $dr = du/(2\pi\sqrt{u/\pi})$ olur. Buna göre ;

$$\omega_n \int_0^\infty r^{-\alpha+n-1} e^{-\pi r^2} dr = \omega_n \int_0^\infty \left(\sqrt{u/\pi}\right)^{-\alpha+n-1} e^{-u} \frac{1}{2\pi\sqrt{u/\pi}} du$$
$$= \omega_n \frac{1}{2} \pi^{\frac{\alpha-n}{2}} \int_0^\infty u^{\frac{-\alpha+n}{2}-1} e^{-u} du$$

elde ederiz. Gamma fonksiyonunun tanımı gereğince

$$= \omega_n \frac{1}{2} \pi^{\frac{\alpha-n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \tag{2.0.7}$$

buluruz. Benzer şekilde $C_\alpha < |\xi|^{\alpha-n}, e^{-\pi|\xi|^2} >$ 'yi hesaplayalım.

$$C_\alpha < |\xi|^{\alpha-n}, e^{-\pi|\xi|^2} >= C_\alpha \int |\xi|^{\alpha-n} e^{-\pi|\xi|^2} d\xi$$

dir. $|\xi| = r \Rightarrow d\xi = r^{n-1} dr dx'$ olur. Buradan

$$= C_\alpha \int_\Sigma dx' \int_0^\infty r^{\alpha-n} r^{n-1} e^{-\pi r^2} dr$$
$$= C_\alpha \omega_n \int_\Sigma dx' \int_0^\infty r^{\alpha-1} e^{-\pi r^2} dr$$

olur. Yukardakine benzer olarak,

$$= C_\alpha \omega_n \int_0^\infty \left(\sqrt{u/\pi}\right)^{\alpha-1} \frac{u^{-1/2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-u} du$$
$$= C_\alpha \omega_n \frac{1}{2} \pi^{-\alpha/2} \int_0^\infty u^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-u} du$$

buluruz. Yine Gamma fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$= C_\alpha \omega_n \frac{1}{2} \pi^{-\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.0.7'}$$

elde edlir. Şimdi (2.0.6)'yı gözönünde bulundurarak; (2.0.7) ve (2.0.7')'yü eşitlersek,

$$\omega_n \frac{1}{2} \pi^{(\alpha-n)/2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) = C_\alpha \omega_n \frac{1}{2} \pi^{-\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

elde edilir. Buradan da;

$$C_\alpha = \pi^{(\alpha-n)/2}\pi^{\alpha/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} = \pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \tag{2.0.8}$$

elde edilir.

Böylece C_α 'yı hesaplamış oluruz. Bu bize aşağıdaki önermeyi verir;

Önerme 2.0.25: Eğer $n \geq 2$ ve $\frac{n}{2} < \alpha < n$ ise $|x|^{-\alpha}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$F(|x|^{-\alpha})(\xi) = C_\alpha|\xi|^{\alpha-n}$$

formülü ile verilir. Buradaki C_α sabiti yukarda (2.0.8) formülü ile verilen sabittir.

Önerme 2.0.26: α herhangi bir sabit olmak üzere $-\alpha$. dereceden bir homogen dağılımın Fourier dönüşümü $(\alpha - n)$. dereceden bir homogen dağılımdır.

Şimdi $n \geq 1$ olmak üzere E^n deki lokal integrallenemeyen bazı çekirdekler üzerinde çalışmaya geçelim. İlk başta tanımladığımız notasyona göre $-n$. dereceden bir homogen çekirdeği,

$$k(x) = k(|x|\frac{x}{|x|}) = \Omega(x')|x|^{-n}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $x' = \frac{x}{|x|}$ Σ birim küresine aittir ve k çekirdeğinin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılan Ω, k 'nın Σ 'ya kısıtlanışıdır. Böyle herhangi bir k çekirdeği ile k 'nın esas değeri olarak adlandırılan ve,

$$< p \cdot v \cdot k, f >= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} k(x)f(x)dx$$

formülü ile verilen $p \cdot v \cdot k.$ dağılımı ve,

$$\begin{aligned}(Kf)(x) &= p \cdot v \cdot \int k(x-y)f(y)dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)f(y)dy \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} (k_\varepsilon * f)(x) \qquad (0<\varepsilon<1)\end{aligned} \tag{2.0.9}$$

ile verilen bir K operatörünü birleştiririz. Burada ;

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k(x) & |x| > \varepsilon \\ \\ 0 & |x| \le \varepsilon \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz[Neri, U., 1971].

k çekirdeğinin karakteristiği olarak adlandırılan Ω , eğer Σ üzerinde integrallenebilirse k_ε çekirdeği lokal olarak integrallenebildiğini daha önce göstermiştik.

Bu operatörlerin, f fonksiyonlarının yeterince geniş bir sınıfı için varolması ve böyle sınıflar üzerinde de sınırlı operatörler olması için, singüler çekirdekler üzerine asağıdaki şartları yükleyeceğiz

Tanım 2.0.27: Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa

$$k_\varepsilon(x) = \Omega(x')|x|^{-n}$$

fonksiyonuna singüler konvolüsyon- çekirdek denir.

i) k , Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Yani;

$$\int_\Sigma k = \int_\Sigma \Omega(x')dx' = 0$$

dır.

ii) Uygun $q > 1$ ' lar için $\Omega \in L^q(\Sigma)$ dır.

Bir k singüler konvolüsyon- çekirdeğini (2.0.9) ile birleştirilmiş K operatörüne singüler konvolüsyon- operatör denir. Ω 'nın $L^q(\Sigma)$ üzerindeki normu;

$$\|\Omega\|_q = \left(\int_\Sigma |\Omega(x')|^q dx' \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindedir.

Teorem 2.0.28: $1 < p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p(E^n)$ ve $\hat{f}_\varepsilon = k_\varepsilon * f$ verilmiş olsun. Burada k_ε bir k kesilim singüler konvolüsyon- çekirdeğidir. O zaman f ve ϵ ' dan bağımsız uygun A sabiti için;

i) $A = A_{p,q}\|\Omega\|_q$ ve $A_{p,q}$ yalnız p ve q ' ya bağlı n boyutlu bir sabit olmak üzere, $\|\hat{f}_\varepsilon\|_p \leq A\|f\|_p$ dir.

ii) $\{\hat{f}_\varepsilon\}$ dizisi $\epsilon \longrightarrow 0$ iken L^p ' de bir Cauchy dizisidir.

iii) Eğer $\{\hat{f}_\varepsilon\}$ dizisinin L^p ' de limitini $\hat{f} = Kf$ gösterirse $\hat{f}$ ' nin normu ; $\|\hat{f}\|_p \leq A\|f\|_p$ dir.

İspat . $f \in C^1$ olsun. K çekirdeğini çift ve tek kısımlarına parçalayarak $K = K' + K''$ şeklinde yazalım. Burada $K' = \frac{1}{2}(K(x) + K(-x))$ ve $K''(x) = \frac{1}{2}(K(x) - K(-x))$ yazabiliriz. Bu çift ve tek çekirdeklerin karakteristik fonksiyonlarını sırasıyla Ω' ve Ω'' ile gösterelim. Ω'' 'nün Σ üzerinde sıfır ortalama değerli, integrallenebilir ve tek olduğu açıktır. Bundan dolayı $\Omega' = \Omega - \Omega''$ de Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir ve ayrıca uygun $q > 1$ 'lar için $\Omega' \in L^q(\Sigma)$ dır. Şimdi,

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_\varepsilon\|_p &\leq \|K'_\varepsilon * f\|_p + \|\hat{f}_\varepsilon\|_p \\ &\leq \|K''_\varepsilon * f\|_p \\ &= I' + II'' \end{aligned}$$

yazarız teorem 1.2.17.'ye göre,

$$\begin{aligned} I'' &\leq B_p\|\Omega''\|_p\|f\|_p \\ &\leq B_{p,q}\|\Omega''\|_p\|f\|_p \\ &\leq B_{p,q}\|\Omega\|_p\|f\|_p \end{aligned}$$

elde ederiz. Teorem 1.2.18'e göre,

$$I' \leq C_{p,q}\|\Omega'\|_p\|f\|_p \leq C_{p,q}\|\Omega\|_p\|f\|_p$$

bulunur. Bu eşitsizlikleri taraf-tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} I' + I'' &\leq (B_{pq} + C_{pq})\,\|\Omega\|_q\|f\|_p \\ &= A_{pq}\|\Omega\|_q\|f\|_p \\ &= A\|f\|_p \end{aligned}$$

buradan, $\|\hat{f}_\varepsilon\| \leq A\|f\|_p$ elde ederiz.

ii)'nin ispatı: İlk önce L^p 'nin yoğun alt cümlesine ait fonksiyonlar için $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\{\hat{f}_\varepsilon\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $g, h \in C_o^1(E^1)$ fonksiyonları kompakt destekli, sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. $h(x)$ fonksiyonunun çift ve orijin komşuluğunda $h(x) = 1$ olduğunu kabul edelim. Şimdi,

$i_*)$ $\quad \hat{g}_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{|x-t|>\varepsilon} \dfrac{g(t)}{x-t}dt$ dir. Bundan başka,

$$\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{h(x-t)}{x-t}dt = 0$$

olduğundan,

$ii_*)$ $\quad \hat{g}_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{|x-t|>\varepsilon} \dfrac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t}dt$ yazabiliriz. $(-a, a)$ aralığı g 'nin desteğini kapsasın, o zaman eğer $|x| \geq 2a$ ise, bütün $t \in (-a, a)$ 'ler için

$||x| - |t|| \geq |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x|$ olur. Böylece, (i_*) 'a göre

$$\begin{aligned} |\hat{g}_\varepsilon(x)| &\leq \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{|g(t)|}{|x-t|}dt \\ &\leq \int\limits_{-a}^{a} \frac{|g(t)|}{||x|-|t||}dt \\ &\leq \frac{C}{|x|} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan eğer $|x| < 2a$ ise $|g(t) - g(x)h(x-t)| < M|x-t|$ sağlanır. g ve h sonlu desteğe sahip olduğundan (ii_*) 'dan $|\hat{g}_\varepsilon(x)| \leq B$ elde ederiz. Buradan bu iki sonucu birleştirirsek, bütün x 'ler için,

$$|\hat{g}_\varepsilon(x)| \leq \frac{A}{1+|x|} \tag{2.0.10}$$

elde ederiz. Buradaki son fonksiyon her $p > 1$ için L^p 'ye aittir. $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\hat{g}_\varepsilon(x)$ noktasal olarak, $\hat{g}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) - g(x)h(x-t)}{x-t}dt$ 'ye yakınsak olduğundan (2.0.10) eşitsizliğine ve Lebesgue yakınsaklık teoremine göre L^p normunda $\hat{g}_\varepsilon \longrightarrow \hat{g}$ dır. Yani, $\{\hat{g}_\varepsilon(x)\}$ L^p 'de bir Cauchy dizisidir. C_0^1 L^p 'de yoğun olduğundan verilen herhangi bir $f \in L^p$ ve $\delta > 0$ için , $||f - g|| < \delta$ sağlanacak şekilde bir $g \in C_0^1$ vardır. Böylece, $\hat{f}_\varepsilon - \hat{f}_\eta = (\hat{f}_\varepsilon - \hat{g}_\varepsilon) + (\hat{g}_\varepsilon - \hat{g}_\eta) + (\hat{g}_\varepsilon - \hat{f}_\eta)$ olur. Minkowsky eşitşizliği ve (i) gereğince

$$\begin{aligned} ||\hat{f}_\varepsilon - \hat{f}_\eta||_p &\leq ||(\widehat{f-g})_\varepsilon||_p + ||(\hat{g}_\varepsilon - \hat{g}_\eta)||_p + ||(\widehat{g-f})_\eta||_p \\ &\leq 2A_p\delta + ||\hat{g}_\varepsilon - \hat{g}_\eta||_p \end{aligned}$$

elde edilir ve $\{\hat{g}_\varepsilon(x)\}$ L^p 'de bir Cauchy dizisi olduğundan $\{\hat{f}_\varepsilon\}$ da bir Cauchy dizisidir. Bundan dolayı L^p de öyle bir $\hat{f}_\varepsilon$ vardır ki $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken L^p normuna göre , $\hat{f}_\varepsilon \longrightarrow f$ dir.

iii)'ün ispatı: Normun sürekliliğine göre i) ve ii), iii)'ün doğruluğunu gösterir. Esasen, bu teorem $1 < p < \infty$ olmak üzere $\hat{f}_\varepsilon = k_\varepsilon * f$ kesilim konvolüsyonlarının normu L^p normundaki limitler gibi , singüler konvolüsyon- operatörlerinin varlığını tanıtır. Bundan başka bu teorem bu operatörlerin $f \longrightarrow Kf$ 'e $L^p(E^n)$ 'de sınırlı lineer dönüşümler tanımladığını gösterir.

Lemma 2.0.29: $k(x) = \Omega(x') \cdot |x|^{-n}$ bir singüler konvolüsyon- çekirdek olsun. O zaman $U \in D$ olmak üzere,

$$< p \cdot v \cdot k, U >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x) U(x) dx$$

ile verilen $p \cdot v \cdot k.$ lineer fonksiyoneli vardır ve bir dağılımdır.

İspat . $U \in D$ olmak üzere

$$\int_{|x|>\varepsilon} k(x) U(x) dx = \int_{1>|x|>\varepsilon} + \int_{x \geq 1} = I + II$$

yazalım. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ile Hölder eşitsizliğine göre,

$$\begin{aligned} |II| &= |\int_{|x|\geq 1} k(x) U(x) dx| \\ &\leq \left(\int_{|x|\geq 1} |k(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{|x|\geq 1} |U(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{|x|\geq 1} |k(x)|^p dx \right)^{1/p} \|U(x)\|_q \end{aligned}$$

bulunur. Burada $k(x) = \Omega(x')|x|^{-n}$ gereğince $|k(x)|^p = |\Omega(x')|^p |x|^{-np}$ olur. O halde ,
$|II| = \left(\int_{|x|\geq 1} |\Omega(x')|^p |x|^{-np} dx \right)^{1/p} \|U\|_q$ yazılır.

Kutupsal koordinatlarla, $|x| = r \Rightarrow dx = r^{n-1}drdx'$ olup,

$$\int\limits_{|x|\geq 1} |k(x)|^p dx = \int\limits_{\Sigma} |\Omega(x')|^p dx' \int\limits_1^{\infty} r^{n-1} r^{-np} dr$$
$$= \int\limits_{\Sigma} |\Omega(x')|^p dx' \int\limits_1^{\infty} r^{n-1-np} dr$$

elde edilir. $n \in Z^+$ olmak üzere, $p > 1$ olduğundan $1-p < 0$ ve $n-np < 0$ bulunur. O halde $n - np - 1 < 0$ olacaktır ki bu da bize son integralin yakınsak olduğunu, dolaysıyla II 'nin sonlu olduğunu gösterir.

$$\int\limits_{1>|x|>\varepsilon} k(x)dx = \int\limits_{1>|x|>\varepsilon} \Omega(x')|x|^{-n}dx$$

olup. Kutupsal koordinatlarla

$$\int\limits_{1>|x|>\varepsilon} k(x)dx = \int\limits_{\Sigma} \Omega(x')dx' \int\limits_{\varepsilon}^{1} r^{-n}.r^{n-1}dr$$
$$= \int\limits_{\Sigma} \Omega(x')dx' \int\limits_{\varepsilon}^{1} r^{-1}dr$$

bulunur. $\int\limits_{\Sigma} \Omega(x')dx' = 0$ olduğundan $\int\limits_{1>|x|>\varepsilon} k(x)dx = 0$ olur. Böylece,

$$\int\limits_{1>|x|>\varepsilon} k(x)\,(U(x) - U(0))\,dx = \int\limits_{1>|x|>\varepsilon} g(x)dx$$

yazabiliriz. $g(x)$ birim küre üzerinde mutlak integrallenebilir olup $\varepsilon \longrightarrow 0$ 'a götürebiliriz. Gerçekten, eğer C , U 'nun birinci mertebeden türevi için bir üst sınır ise,

$$|g(x)| = |k(x) \lim_{x \to 0} \tfrac{U(x)-U(x)}{x-0} x|$$
$$= |\Omega(x')||x|^{-n}|U'(x)||x|$$
$$\leq C|\Omega(x')||x|^{1-n}$$

bulunur. Buradan,

$$\int\limits_{|x|\leq 1} |g(x)|dx \leq C \int\limits_{|x|\leq 1} |\Omega(x')||x|^{1-n}dx$$

Kutupsal koordinatlarla, $\Omega \in L^q(\Sigma) \subset L^1(\Sigma)$ olduğundan

$$\int_{|x|\leq 1} |g(x)|dx \leq C \int_{|x|\leq 1} |\Omega(x')||x|^{1-n}dx < \infty$$

olur. Buradan, her $U \in D$ için, $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken,

$$< k_\varepsilon, U > = < p \cdot v \cdot k, U >$$

olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi, $\|\Omega\|_1 = \int_\Sigma |\Omega(x')|dx'$ yazalım ve uygun $0 < \Theta < 1$ 'lar için,

$$U(x) - U(0) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial U}{\partial x_j}(\Theta x)$$

olsun. K kompakt olmak üzere, eğer $supp\ U \subset K$ ise,

$$| < k_\varepsilon, U > | = | \int_\varepsilon^\infty \int_\Sigma \Omega(x')(U(x) - U(0))r^{-1}drdx'|$$

yazarız ve $\left|\frac{x_j}{|x_j|}\right| \leq 1$ olduğundan K 'ya bağlı uygun C_K sabitleri için,

$$| < k_\varepsilon, U > | \leq C_K \|\Omega\|_1 \sum_{j=1}^{n} \sup_x |\frac{\partial U}{\partial x_j}|$$

buluruz. Buradan $\varepsilon \longrightarrow 0$ alırsak,

$$| < p \cdot v \cdot k, U > | \leq C_K \|\Omega\|_1 \sum_{j=1}^{n} \sup_x |\frac{\partial U}{\partial x_j}|$$

elde ederiz. Bu yaklaşımdan açıktır ki eğer $m \longrightarrow \infty$ iken $\{U_m\}$ dizisi D 'de sıfıra yakınsarsa, yani $\{U_m\} \longrightarrow 0$ olursa, o zaman $< p \cdot v \cdot k, U_m > \longrightarrow 0$ olur. O halde $p \cdot v \cdot k$ bir dağılımdır.

Teorem 2.0.30: Eger $k(x) = \Omega(x') \cdot |x|^{-n}$ bir singüler konvolüsyon- çekirdek ise, o zaman $p \cdot v \cdot k$ bir temperate dağılımdır ve $F(p \cdot v \cdot k)$ Σ üzerinde sıfır ortalama değeri ile sıfırıncı dereceden, sınırlı homogen fonksiyondur. Ayrıca, her $f \in D$ için,

i) $Kf = (p \cdot v \cdot k) * f$

ii) $F(Kf) = F(p \cdot v \cdot k).F(f)$

dir.

İspat . $l = (p \cdot v \cdot k)(1 + |x|^2)^{-1}$ 'nin temperate dağılımı olduğunu göstermek kafidir. Gerçekten, eğer l temperate dağılımı ise, o zaman $p \cdot v \cdot k = l(1 + |x|^2)$ 'nin yine bir temperate dağılım olduğu açıktır. $l_1 = l$ 'nin $\{x : |x| < 1\}$ kümesine kısıtlanışı, $l_2 = l - l_1 = l$ 'nin $\{x : |x| \geq 1\}$ kümesine kısıtlanışı olmak üzere, l 'yi $l = l_1 + l_2$ şeklinde yazalım, l_1 'in bir kompakt destekli dağılım, $D_0^* \subset S^*$ olduğundan; bir dağılımdır. Diğer taraftan, $|x| \geq 1$ için, $l_2 = k(x)(1 + |x|^2)^{-1}$ olup kutupsal koordinatlarla, $q > 1$ için, $\Omega \in L^p(\Sigma) \subset L^1(\Sigma)$ olduğundan,

$$\int\limits_{|x|\geq 1} |k(x)|(1 + |x|^2)^{-1} dx = \int\limits_{\Sigma} |\Omega(x')| dx' \int\limits_1^\infty \frac{dr}{r + r^3} < \infty$$

elde edilir. Başka bir deyişle, l_2 integrallenebilir bir fonksiyonla aynıdır ve bundan dolayı l_2 hemde bir temperate dağılımıdır. (i) hipotezi; (2.0.9) ifadesi ve D 'deki fonksiyonlarla $D^* \subset S^*$ 'ın elamanlarının konvolüsyonunun tanımının direk bir sonucudur. Teorem 2.0.5.'i ve

Fourier dönüşümlerle ilgili bilgilerimizi kullanarak $(i) \Rightarrow (ii)$ 'yi gösterebiliriz;

$$\begin{aligned} Kf = (p \cdot v \cdot k) * f \Rightarrow F(Kf) &= F((p \cdot v \cdot k) * f) \\ &= \int ((p \cdot v \cdot k) * f)(y) e^{-2\pi i x y} dy \\ &= \int \left(p \cdot v \cdot \int k(z) f(y-z) dz \right) e^{-2\pi i x y} dy \end{aligned}$$

yazarız. Burada $y - z = u$ dönüşümü yaparsak $z = y - u$, $dz = -du$, $dy = dz$ olur.

O halde,

$$F(Kf) = \int \left(-p \cdot v \cdot \int k(y-u) f(u) du \right) e^{-2\pi i x (z+u)} dz$$

olur. İntegral E^n üzerinden olduğundan,

$$= \int \left(p \cdot v \cdot \int k(y-u) f(u) du \right) e^{-2\pi i x (z+u)} dz$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} &= \int f(u) e^{-2\pi i x u} du \left(p \cdot v \cdot \int k(z) e^{-2\pi i x z} dz \right) \\ &= p \cdot v \cdot \left(\int k(z) e^{-2\pi i x z} dz \right) \int f(u) e^{-2\pi i x u} du \\ &= F(p \cdot v \cdot k).F(f) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (i) $Kf = (p \cdot v \cdot k) * f \Rightarrow$ (ii) $F(Kf) = F(p \cdot v \cdot k).F(f)$ olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi $F(p \cdot v \cdot k)$ 'nın bilinen bazı Fourier dönüşüm özelliklerine sahip oldığnu gösterelim. Eğer $f \in D \subset L^2$ ise , o zaman $p = 2$ alıp teorem 2.0.5'i kullanarak $Kf \in L^2$ 'yi elde ederiz. Böylece (ii) 'ye göre $F(Kf) = F(p{\cdot}v{\cdot}k).F(f)$ 'in de L^2 'ye ait olduğunu görürüz. Herhangi bir $C \subset E^n$ verilsin, $F(f)$ hiç bir zaman sıfır olamayacak ve C üzerinde $F(Kf) = F(p \cdot v \cdot k)F(f)$ olacak şekilde bir $f \in D$ fonksiyonunu seçelim. O zaman;

$F(p\cdot v\cdot k)F(f)\in L^2$ ve $\frac{1}{F(f)}$,C üzerinde sınırlı olduğundan $F(p\cdot v\cdot k)\in L^2(C)$ olduğunu gösterir. (ii) formülü, L^2 'de Parseval formülü ve teorem 2.0.5.'ten; her $f\in D$ için,

$$\|F(p\cdot v\cdot k).F(f)\|_2=\|F(Kf)\|_2=\|Kf\|_2\le A\|f\|_2$$

sonucunu çıkarırız. Bundan dolayı her $f\in D$ için,

$$\|F(p\cdot v\cdot k).F(f)\|_2\le A\|f\|_2 \tag{2.0.11}$$

olur. Halbuki $F(D)$, L^2 'de yoğun olduğundan (i) formülü $F(p\cdot v\cdot k)$ 'nın L^∞ 'a ait olması gerektiğini ifade eder.

$K(x)$, $-n.$ dereceden homogen olduğundan $p\cdot v\cdot k$ 'nın $-n.$ dereceden bir homogen dağılım olduğunu görmek kolaydır. Bundan dolayı önerme 2.0.3.'e göre $F(p\cdot v\cdot k)$ 'nın sıfırıncı dereceden bir homogen dağılım olduğu sonucunu çıkarırız. Yani, her $\lambda>0$ için,

$$\Pi_\lambda F(p\cdot v\cdot k)=F(p\cdot v\cdot k)$$

dır. Halbuki $F(p\cdot v\cdot k)$, L^∞ 'da bir fonksiyondur. Bundan dolayı lokal integrallenebilirdir. Böylece bütün $U\in D$ 'lar için,

$$\begin{aligned}< F(p\cdot v\cdot k),U > &=< \Pi_\lambda F(p\cdot v\cdot k),U >\\ &=< F(p\cdot v\cdot k),U_\lambda >\\ &=< F(p\cdot v\cdot k)(\lambda x),U >\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı, her $\lambda>0$ ve h. h. her x için,

$$F(p\cdot v\cdot k)(\lambda x)=F(p\cdot v\cdot k) \tag{2.0.12}$$

sonucuna varırız. (2.0.12) eşitliğinin λ ' ya bağlı korunmayacak şekilde ki x noktalarının cümlesini dikkate alalım.

İDDİA. Her $x \neq 0$ ve $\lambda > 0$ için, $F(p \cdot v \cdot k)$ fonksiyonunu sıfır ölçümlü bir cümle üzerinde (2.0.12) korunacak şekilde bir yolla değiştirebiliriz.

İspat . $h = F(p{\cdot}v{\cdot}k)$ alalım ve $h(x)$ 'in ölçülebilirliğini kullanalım. $h(\lambda x) = h(x)$ eşitliğinin E^nx$(0,\infty)$ 'da h. h. her (x,λ) için doğruluğu (2.0.12)'den görülür. Pozitif lineer ölçüme sahip λ değerlerinin bir kümesi üzerinde $h(\lambda x) \neq h(x)$ 'i sağlayan x noktalarının kümesini Z ile gösterelim. E^nx$(0,\infty)$ üzerinde h. h. h. y. $h(\lambda x) = h(x)$ olduğundan Z sıfır ölçümüne sahip olmalıdır. Fakat o zaman Fubini teoremi, bazı $q > 0$ 'lar için $\Sigma_\rho = \{x : |x| = \rho\}$ küresi ile Z 'nin kesişiminin sıfır yüzey ölçümüne sahip olduğunu gösterir. Bu belirlenmiş ρ ile,

$$h^*(x) = \begin{cases} h(\rho\frac{x}{|x|}) & x \neq 0 \ ve \ \rho\frac{x}{|x|} \in Z \\ \\ 0 & x = 0 \ ve \ \rho\frac{x}{|x|} \in Z \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarız. Açık olarak $h^*(x)$ sıfırıncı dereceden homogen ve ölçülebilir bir fonksiyondur. Böylece h. h. h. y. $h^* = h$ olması değişmeden aynen kalır. $x \neq 0$ olmak üzere $x_\rho = \rho\frac{x}{|x|} \in \Sigma_\rho$ olsun. Eğer $x_\rho \in Z$ ise , bu durumda $h^*(x_\rho) = h(x_\rho)$ dır. Bundan dolayı $\Sigma_\rho \cap Z$ sıfır yüzey ölçümüne sahip olduğundan, Σ üzerinde h. h. h. y. $h^* = h$ dır. Bundan başka, bütün $\lambda > 0$ 'lar için, $h^*(\lambda x_\rho) = h^*(x_\rho) = h(x_\rho)$ dır. H. h. her bir $\lambda > 0$ için $h(\lambda x_\rho) = h(x_\rho)$ olduğundan h. h. h. y. $h^*(x) = h(x)$ olduğunu görürüz. Buradan iddia ispatlanmış olur.

Böylece, yukardaki iddiada elealınan değişiklik yapıldıktan sonra $F(p \cdot v \cdot k)$ 'nın sıfırıncı dereceden homogen, sınırlı bir fonksiyon olduğu tesbit edilir. Buradan, $F(p{\cdot}v{\cdot}k)$ 'nın Σ birim küresi üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olmasının değişmeden aynen kaldığı görülür.

Şimdi S^* üzerinde F 'nin tanımına göre,

$$< F(p \cdot v \cdot k), e^{-\pi|\xi|^2} >=< p \cdot v \cdot k, e^{-\pi|x|^2} >$$

dir. Böylece,

$$\int F(p \cdot v \cdot k)(\xi) e^{-\pi|\xi|^2} d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x) e^{-\pi|x|^2} dx$$

olur. Fakat, Ω , Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olduğundan

$$\int_{|x|>\varepsilon} k(x) e^{-\pi|x|^2} dx = \int_{\Sigma} \Omega(x') dx' \int_0^{\infty} r^{-1} e^{-\pi r^2} dr = 0$$

olur ve

$$\int F(p \cdot v \cdot k)(\xi) e^{-\pi|\xi|^2} d\xi = 0 \tag{2.0.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\rho = |\xi|$ ve $\rho' = \frac{\xi}{|\xi|}$ olup, buradan

$$\int F(p \cdot v \cdot k)(\xi) e^{-\pi|\xi|^2} d\xi = \int_{\Sigma} F(p \cdot v \cdot k)(\xi') d\xi' \int_0^{\infty} \rho^{n-1} e^{-\pi\rho^2} d\rho$$

olur. Son integraldeki integrant , pozitif ve integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan integrali pozitiftir. Bundan dolayı (2.0.13)'e göre

$$\int_{\Sigma} F(p \cdot v \cdot k) = 0$$

değerini elde ederiz.

Orijini çıkartılmış bir n -boyutlu Öklid uzayını E_0^n veya $E^n - \{0\}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.0.31: $k \in C^{\infty}(E_0^n)$ $-n$. dereceden homogen ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerli olsun. O zaman, $F(p \cdot v \cdot k) = h \in C^{\infty}(E_0^n)$, sıfırıncı dereceden homogen ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Diğer taraftan eğer $h \in C^{\infty}(E_0^n)$, sıfırıncı dereceden homogen ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip ise yukarıdaki gibi bazı k 'lar için, $h = F(p \cdot v \cdot k)$ dır.

İspat . Bir önceki teoreme göre h fonksiyonu sınırlı, sıfırıncı dereceden homogen ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerlidir. Bundan dolayı , $h \in C^{\infty}(E_0^n)$ dır. Her hangi bir T temperate dağılım için,

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i T)\right) = -x_j \frac{\partial}{\partial x_i} F(T)$$

olduğu görülür. Bu sebeple,

$$-x_j \frac{\partial}{\partial x_i} F(p \cdot v \cdot k) = F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j(p \cdot v \cdot k))\right) \tag{2.0.14}$$

olur. Şimdi bütün $U \in D$ 'lar için, $U = \overline{U}$ 'yu kolaylık olması açısından reel değerli kabul edeceğiz.

$$\begin{aligned} < \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i(p \cdot v \cdot k)), U > &= - < (p \cdot v \cdot k), x_i \frac{\partial}{\partial x_j} > \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} k(x) x_i \frac{\partial}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

olur.

$$x_i k \frac{\partial U}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) U = \frac{\partial}{\partial x_j}((x_i k) U)$$

olduğundan, eğer $(supp\ U) \subset \{x : |x| < R\}$ ise, o zaman $\varepsilon < |x| < R$ bölgesi üzerinde Gauss formülü uygulanırsa,

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j}((x_i k) U) dx = -\int_{|x| = \varepsilon} x_i k(x) U(x) \frac{x_j}{|x|} d\sigma_\varepsilon$$

olduğunu görürüz. Burada $d\sigma_\varepsilon$, $|x| = \varepsilon$ küresi üzerinde yüzey elamanıdır. Böylece,

$$-\int k(x) x_i \frac{\partial U}{\partial x_j} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i k(x)) U(x) dx + \int_{|x| = \varepsilon} x_i k(x) U(x) \frac{x_j}{|x|} d\sigma_\varepsilon$$

olur. $\varepsilon \to 0$ iken son integral uygun C sabitleri için $CU(0)$ 'a yakınsar. Buradan, δ Dirac ölçümü olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i(p \cdot v \cdot k)) = p \cdot v \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i k) + C\delta \tag{2.0.15}$$

sonucunu elde ederiz. $F(\delta) = 1$ olduğundan (2.0.15)'teki formülün Fourier dönüşümü alınır ve (2.0.14) kullanılırsa,

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_i} F(p \cdot v \cdot k) = F(p \cdot v \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i k)) + C \tag{2.0.16}$$

sonucunu elde ederiz. $k \in C^\infty(E_0^n)$ ve $-n$. dereceden homogen olduğundan $\dfrac{\partial(x_i k)}{\partial x_j}$ fonksiyonu da bu özelliklere sahiptir. Bundan başka, bu fonksiyonun Σ birim küresi üzerinde sıfır değerine sahip olduğunu ileride göreceğiz (k'nın kendisi gibi). Gerçekten, kutupsal koordinatları kullanırsak,

$$\int\limits_{1 \le |x| \le 2} \left(\frac{\partial(x_i k)}{\partial x_j} \right)(x) dx = log2 \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i k)\, dx'$$

olduğunu görürüz. Oysa, Gauss formülüne göre birinci integral

$$\int\limits_{|x|=2} x_i k(x) \frac{x_j}{|x|} d\sigma_2 - \int\limits_{|x|=1} x_i k(x) \frac{x_j}{|x|} d\sigma_1 = 0$$

şeklinde yazılır. Zira, integrand $(1-n)$. dereceden homogen olduğundan buradaki iki integral eşittir. Bundan dolayı,

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial(x_j k)}{\partial x_j} dx' = 0$$

dır. Şimdi yine bir önceki teoreme göre $F(p \cdot v \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_j}(x_i k))$ fonksiyonunun bir sınırlı fonksiyon olduğu sonucuna varabiliriz. O zaman (2.0.16)'ya göre $x_j \neq 0$ için $\dfrac{\partial}{\partial x_i} F(p \cdot v \cdot k)$ fonksiyonunun bütün kompakt cümleler üzerinde sınırlı bir fonksiyonla aynı olduğunu gösterir. Bununla beraber, her $j = 1, 2, \cdots, n$ için bu korunması gerektiğinden $\dfrac{\partial}{\partial x_i} F(p \cdot v \cdot k)$, $E_0^n = E^n - \{0\}$ üzerinde bir sınırlı fonksiyonla aynı olmalıdır. Bu tartışmayı tekrar edersek, her α katlı-indeks için, $|\alpha| > 0$ olmak üzere, bir C_α sabitinin var olduğunu görürüz. Burada;

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{|\alpha|}}(x^\alpha p \cdot v \cdot k) = p \cdot v \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{|\alpha|}}(x^\alpha k) + C_\alpha \delta$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}(-1)^{\alpha} x_j^{|\alpha|} \left|\frac{\partial}{\partial x}\right|^{\alpha} F(p \cdot v \cdot k) &= F\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{|\alpha|}}(x^{\alpha} p \cdot v \cdot k)\right) \\ &= F\left(p \cdot v \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{|\alpha|}}(x^{\alpha} k)\right) + C_{\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman, yine önceki gibi ispat edecek olursak, $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_j^{|\alpha|}}(x^{\alpha} k)$ 'nın teorem 2.0.7.'deki hipotezi sağlayan, yine bir çekirdek olduğunu ve böylece de $\frac{\partial}{\partial x} F(p \cdot v \cdot k)$ 'nın E_0^n 'ın her bir kompakt cümlesi üzerinde sınırlı bir fonksiyon ile aynı olduğunu görürüz. Bundan dolayı, $F(p \cdot v \cdot k) \in C^{\infty}(E_0^n)$ olarak sonuçlandırabiliriz ve onun türevleri negatif dereceli homogen olduğundan onlar orijin noktasının her hangi bir açık komşuluğunun tamamı üzerinde sınırlı olmalıdır. Aksine, $h \in C^{\infty}(E_0^n)$ 'ın sıfırıncı dereceden homogen ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olduğunu farzedelim. $F(p \cdot v \cdot G) = h$ olacak şekilde yukarıdaki k gibi benzer özelliklere sahip bir G fonksiyonu bulmalıyız. h aynı zamanda sıfırıncı dereceden homogen bir temperate dağılım olduğundan $F(H) = h$ olacak şekide $-n$. dereceden homogen bir H temperate dağılımı vardır. O halde her $j = 1, 2, \cdots, n$ için,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h = (2\Pi i)^n F(\xi_j^n H) \tag{2.0.17}$$

olduğunu görebiliriz. Diğer taraftan, $\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h \in C^{\infty}(E_0^n)$, $-n$. dereceden homogen ve bu $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_j^{n-1}}\right)$ şeklinde yazılabileceğinden $1 \leq x \leq 2$ üzerinden integre edilirse, h , Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Böylece lemma 2.0.6 ve teorem 2.0.7'ye göre $p \cdot v \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h$ bir temperate dağılımdır. Bundan başka $\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h$ ve $p \cdot v \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h$ 'ın orijinde destekli bir dağılıma göre uygun bulunmadığını görürüz. Tersine; lemma 2.0.6.'ya göre bazı

$m \geq 0$ 'lar için,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h = p \cdot v \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h + \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D_\delta^\alpha \tag{2.0.17'}$$

olur.(2.0.17) ve (2.0.17')'den ters Fourier dönüşümler alınır ve sonuçlar karşılaştırılırsa;

$$(2\Pi i)^n \xi_j^n H = F^{-1}\left(p \cdot v \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h\right) + \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha \xi^\alpha \tag{2.0.18}$$

bulunur. Fakat (2.0.18)'in sağtarafının ilk terimi $-n$. dereceden homogen bir temperate dağılımın ters Fourier donüşümü gibi, sıfırıncı dereceden homogendir. $\xi^\alpha H$ da sıfırıncı dereceden homogen olduğundan (2.0.18)'deki polinom, bir sabit olmalıdır.

$$(2\Pi i)^n \xi_j^n H = F^{-1}(p \cdot v \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h) + C_0 \tag{2.0.18'}$$

dır. Bundan başka, $\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h \in C^\infty(E_0^n)$ ve Σ üzerinde sıfır ortalama değerli $-n$. dereceden homogen ve F ile F^{-1} aynı özelliklere sahip olduğundan, teoremimizin yukardaki ispat ettiğimiz kısmı ile (2.0.18')'i kullanırsak; $\frac{\partial^n}{\partial x_j^n} h \in C^\infty(E_0^n)$ olduğu görülür. Bundan dolayı, $j = 1, 2, \cdots, n$ keyfi olmak üzere, ξ_j^n ile $\xi_j^n H$ 'yı bölersek E_0^n üzerinde H 'nın $-n$. dereceden homogen bir $G \in C^\infty(E_0^n)$ fonksiyonu ile aynı olduğu sonucuna varırız.

Şimdi, G 'nin Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olduğunu ispatlayalım.

$U \in D$ fonksiyonu

$$U = \begin{cases} U > 0 & 1 < |x| < 2 \\ \\ 0 & 1 > |x| > 2 \end{cases}$$

olan bir radyal fonksiyon olsun. O zaman G 'nin tamamına göre [Simge.tan. $C^\infty(E_0^n)$ bkz.]

$$< H, U >= \int G(x) U(x) dx = C \int_\Sigma G(x') dx'$$

olur. Burada $C = \int_1^2 U(r)r^{-1}dr > 0$ olduğunu görürüz. $H = F^{-1}(h)$ ve h sıfırıncı dereceden homogen olduğundan,

$$\begin{aligned} < H, U > &=< F^{-1}(h), U > \\ &=< h, F^{-1}(U) > \\ &= \int_0^\infty \left(F^{-1}(U)\right)(r)r^{n-1}dr \int_\Sigma h(x')dx' = 0 \end{aligned}$$

olur. $F^{-1}(U)$ yine bir radyal fonksiyondur ve h , Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Bundan dolayı G , Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Sonuç olarak h ve $F(p \cdot v \cdot G)$ ikisi de birer sınırlı fonksiyon olup, $(H - (p \cdot v \cdot G))$ orijinde destekli olduğundan, bunun Fourier donüşümü olan $(h - F(p \cdot v \cdot G))$; bir sabit polinom omalıdır. Bundan başka h ve $F(p \cdot v \cdot G)$, Σ üzerinde sıfır ortalama değerine sahip olduğundan, bu sabit polinom da sıfır olmalıdır. O halde $h = F(p \cdot v \cdot G)$ dir.

BÖLÜM 3

3 L_k^p Sobolev Uzayları ve genelleştirmeler

$L^p = L^p(E^n) = \{f : \int |f|^p dx < \infty\}$ fonksiyon uzaylarının tanımını hatırlayalım.

$0 < p \leq \infty$ için,

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int |f|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty & ,0 < p < \infty \\ \\ esssup|f| & ,p = \infty \end{cases}$$

ölçülebilir fonksiyonlarının kümesini gözönünde bulunduralım. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L^p = \{f : \|f\|_p < \infty\}$ uzayının Banach uzayı (yani tam normlu lineer uzay) olduğunu biliyoruz. Bundan başka, Hölder eşitsizliğine göre $1 \leq p \leq \infty$ için, $L^p \subset L^1_{lok}$ olduğu gösterilir. Yani, L^p 'deki fonksiyonlar E^n 'de lokal integrallenebilirdir. $\int K(x)dx = 1$ olacak şekilde bir $K(x) \in L^1$ fonksiyonu verilsin ve $\varepsilon > 0$ için

$$K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} K(\frac{x}{\varepsilon})$$

alınsın.

$K_\varepsilon(x)$ 'in aşağıdaki özellikleri sağladığı görülür.

a) Bütün $\varepsilon > 0$ 'lar için $\|K_\varepsilon(x)\|_1 = \|K(x)\|_1$

b) $\int K_\varepsilon(x)dx = 1$

c) Herhangi bir $a > 0$ için, $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\int\limits_{|x|>a} |K_\varepsilon(x)|dx \longrightarrow 0$

Bununla beraber, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere eğer $f \in L^p$ ise,

$$f_\varepsilon = (f * K_\varepsilon)(x) = \int f(y)K_\varepsilon(x-y)dy$$

konvolüsyonları $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken L^p 'deki norma göre f 'ye yakınsar.

Yukarıdaki a), b) ve c) özelliklerinin gerçekleneceğini ve bu konvolüsyonların da f 'ye L^p 'deki norma göre yakınsadığını gösterelim.

İspat . a) $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})$ ise $\frac{x}{\varepsilon} = y$ dönüşümü yaparsak, $dy = \varepsilon^{-n}dx$ olur. O zaman

$$\begin{aligned}\int |K_\varepsilon(x)|dx &= \int \varepsilon^{-n}|K(\frac{x}{\varepsilon})|dx \\ &= \int |K(y)|dy\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\int |K_\varepsilon(x)|dx &= \int |K(y)|dy \\ &= \int |K(x)|dx\end{aligned}$$

elde edilir. Yani; $\|K_\varepsilon\|_1 = \|K\|_1$ olduğu görülür.

b)

$$\int K_\varepsilon(x)dx = \int \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})dx$$

olduğundan, $dy = \varepsilon^{-n}dx$ olur. O halde;

$$\begin{aligned}\int K_\varepsilon(x)dx &= \int \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})dx \\ &= \int \varepsilon^{-n}K(y)\varepsilon^n dy \\ &= \int K(y)dy \\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir.

c)

$$\int_{|x|>a} |K_\varepsilon(x)|dx = \varepsilon^{-n}\int_{|x|>a} |K(\frac{x}{\varepsilon})|dx$$

O halde $\frac{|x|}{\varepsilon} = |y| \Rightarrow |x| > \varepsilon|y| > a \Rightarrow |y| > \frac{a}{\varepsilon}$ olacağından

$$\begin{aligned}\int_{|x|>a} |K_\varepsilon(x)|dx &= \varepsilon^{-n} \int_{|y|>a/\varepsilon} |K(\frac{y}{\varepsilon})|dy \\ &= \int_{|y|>a/\varepsilon} |K(y)|dy\end{aligned}$$

olur ki $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\int_{|x|>a} |K_\varepsilon(x)|dx \longrightarrow 0$ olduğu görülür.

f fonksiyonu bir x noktasında sürekli ve $\eta > 0$ keyfi bir sabit olsun uygun $\delta > 0$ için, eğer $|(x-y)-x| < \delta$ ve buradan $|y| < \delta$ ise $|f(x-y)-f(x)| < \eta$ dır.

O halde b) özelliğine göre,

$$\begin{aligned}f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int f(x-y)K_\varepsilon(y)dy - \int f(x)K_\varepsilon(y)dy \\ &= \int (f_\varepsilon(x) - f(x))\, K_\varepsilon(y)dy\end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla ,

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \int |f(x-y) - f(x)||K_\varepsilon(y)|dy \\ &= \int_{|y|\leq\delta} + \int_{|y|>\delta} \\ &= I + II.\end{aligned}$$

Buradan $|f(x-y) - f(x)| < \eta$ 'ya ve a) özelliğine göre

$$\begin{aligned}I &= \int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)||K_\varepsilon(y)|dy \\ &\leq \eta \int |K_\varepsilon(y)|dy \\ &\leq \eta A\end{aligned}$$

olur. Eğer L^p normuna göre $|f| \leq M$ ise, c) özelliğine göre $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken,

$$\begin{aligned} II &= \int\limits_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)||K_\varepsilon(y)|dy \\ &\leq \int\limits_{|y|>\delta} |f(x-y)||K_\varepsilon(y)|dy \\ &+ \int\limits_{|y|>\delta} |f(x)||K_\varepsilon(y)|dy \\ &= \int\limits_{|y|>\delta} (|f(x-y)| + |f(x)|)\,|K_\varepsilon(y)|dy \\ &\leq 2M \int\limits_{|y|>\delta} |K_\varepsilon(y)|dy \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Bundan dolayı $|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq I + II \leq 2A\eta$ elde edilir. O halde $f_\varepsilon \longrightarrow f$ olduğu görülür.

Bundan başka eğer, $1 \leq p < \infty$, kompakt destekli $f \in L^p$ ve $g \in D$ için,

$f*g$ konvolüsyonu da D 'ye ait ise L^p 'deki kompakt destekli fonksiyonlar L^p'de yoğundur.

Gerçekten,

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = h(x)$$

olacağından $h(x) \in D$ dır.

Şimdi, $f*g_n$ konvolüsyonunun $f*g$ konvolüsyonuna yakınsadığını kabul edelim. O zaman

$$|(f*g_n) - (f*g)| < \varepsilon$$

olması gerekir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \left|\int f(y)g_n(x-y)dy - \int f(y)g(x-y)dy\right| &= \left|\int f(y)\,(g_n(x-y) - g(x-y))\,dy\right| \\ &\leq \int |f(y)||g_n(x-y) - g(x-y)|dy \end{aligned}$$

olur. g_n ve g kompakt destekli olduğundan $|g_n(x-y) - g(x-y)|$ maksimum değerine sınırda ulaşır. Bu da $|g_n(x-y) - g(x-y)| = 0$ demektir. O halde $|f*g_n - f*g| \leq 0$ olacağından

$f * g_n \longrightarrow f * g$ 'ye düzgün yakınsar. Şimdi bu yakınsamanın, α katlı-indeks olmak üzere, bütün D^α türevleri için de gerçeklendiğini gösterirsek $f * g$ konvolüsyonunun D 'ye ait olduğunu göstermiş oluruz.

$$\int f(y)g_n(x-y)dy \longrightarrow \int f(y)g(x-y)dy$$

olduğundan $|f * g_n - f * g| < \varepsilon$ yazıp, eşitsizliğin her iki tarafının D^α türevini alırsak,

$$D^\alpha|f * g_n - f * g| < D^\alpha\varepsilon \Rightarrow |D^\alpha f * g_n - D^\alpha f * g| < 0$$

olur ve,

$$|D^\alpha \int f(y)g_n(x-y)dy - D^\alpha \int f(y)g(x-y)dy| < 0$$

$$|D^\alpha \int f(y)\left(g_n(x-y) - g(x-y)\right)dy| < 0.$$

Burada f ve g , C^∞ sınıfına ait olduğundan,

$$|\int f(y)D^\alpha\left(g_n(x-y) - g(x-y)\right)dy| < 0 \Rightarrow |\int f(y)\left(D^\alpha g_n(x-y) - D^\alpha g(x-y)\right)dy| < 0$$

buradan $|D^\alpha g_n(x-y) - D^\alpha g(x-y)| < 0 \Rightarrow D^\alpha g_n(x-y) \longrightarrow D^\alpha g(x-y)$ elde edilir. Bu da bize $f * g$ 'nin D 'ye ait olduğunu gösterir.

Önerme 3.0.32: $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, ve $K(x) \in D$ olsun ve $\int K(x)dx = 1$ 'i sağlasın. Eğer, $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})$ ise, o zaman $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $f * K_\varepsilon$ konvolüsyonu L^p 'deki norma göre f 'ye yakınsar. Bundan başka her bir sonlu $p \ge 1$ için D , L^p 'de yoğundur.

Bütün $p \ge 1$ 'ler için L^p uzayı,bütün temperate dağılımlar uzayının, yani S^* 'ın bir alt kümesi gibi düşünülmüş olabilir. Bundan dolayı L^p 'deki fonksiyonlar dağılımlar anlamında diferensiyellenebilirdir. $f \in L^p$ foksiyonlarının

$$< D^\alpha f, U > = < f, D^\alpha U > = < g_\alpha, U >$$

anlamında $D^\alpha f$ dağılım türevlerin de L^p 'ye ait olduğunu gözönünde bulundurursak, her $U \in D$ 'ler için, $< D^\alpha f, U > = < g_\alpha, U >$ olacak şekilde $g_\alpha \in L^p$ fonksiyonları vardır. O halde $D^\alpha f = g_\alpha \in L^p$ istenilen sonucunu elde ederiz.

Tanım 3.0.33: $1 \leq p < \infty$ ve k da negatif olmayan bir tam sayı olsun. O zaman $|\alpha| \leq k$ olacak şekilde her bir α katlı-indeksi için, $L_k^p = L_k^p(E^n)$ uzayı $D^\alpha f \in L^p$ olan bütün $f \in L^p$ fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. L_k^p sınıfı,

$$\|f\|_{p,k} = \{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^2 \}^{1/2}$$

normu ile donatılacaktır.

UYARI: L_k^p sınıfının L^p 'nin lineer bir alt uzayı olduğu açıktır. $L_0^p = L_k^p$ dir. $\|f\|_{p,k}$ lineer fonksiyonelinin L_k^p lineer uzayı üzerinde bir norm olduğu görülür.

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p \qquad ve \qquad \sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p$$

fonksiyonelleri L_k^p sınıfı üzerinde eşdeğer normlar olarak kabul edilir. Her bir $0 \leq j \leq k$ için $L_k^p \subset L_j^p \subset L^p$ dir. Burada kapsamalar sürekli olduğundan her $f \in L_k^p$ için

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p,j} \leq \|f\|_{p,k}$$

dır.

Teorem 3.0.34: Bütün $p \geq 1$ 'ler ve k pozitif tam sayıları için L_k^p bir Banach uzayıdır. Bundan başka eğer p sonlu ise D , L_k^p 'de yoğundur.

İspat . L_k^p 'nin Banach uzayı olduğunu göstermek için L_k^p 'nin tam olduğunu ispatlıyacağız. $\{f_n\}$ dizisi L_k^p 'de bir Cauchy dizisi olsun. O zaman norm tanımına göre $0 \leq |\alpha| \leq k$ olmak üzere her α için $\{f_n\}$, L^p 'de bir Cauchy dizisidir. Özellikle $g_0 \in L^p$ için L^p normuna göre $f_n \longrightarrow g_0$ dır.

Benzer şekilde $0 \leq |\alpha| \leq k$ olacak şekilde her α için L^p 'de

$$D^\alpha f_n \longrightarrow g_\alpha \tag{3.0.1}$$

olacak şekilde bir $g_\alpha \in L^p$ fonksiyonu vardır. Bütün $p \geq 1$ 'ler için eğer L^p 'de $h_n \longrightarrow h$ ise,

o zaman bütün $U \in D$ 'lar için $< h_n, U > \longrightarrow < h, U >$ olduğunu hatırlayalım.

Gerçekten, Hölder eşitsizliğine göre,

$$| < h_n - h, U > | \leq ||h_n - h||_p ||U||_q \longrightarrow 0$$

olur. Böylece (3.0.1)'den bütün $U \in D$ 'lar için

$$< D^\alpha f_n, > \longrightarrow < g_\alpha, U >$$

olur ve

$$< D^\alpha f_n, U > = < f_n, D^\alpha U > \longrightarrow < g_0, D^\alpha U > = < D^\alpha g_0, U >$$

olur. Bütün $|\alpha| \leq k$ 'lar için $D^\alpha f g_0 = G_\alpha \in L^p$ olur. Böylece $g_0 \in L_k^p$ dır ve $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken L_k^p 'deki norma göre $f_n \longrightarrow 0$ dır. Şimdi, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere D 'nin

L^p_k 'de yoğun olduğunu ispatlayalım. $f \in L^p_k$ verilsin.

$$h_\varepsilon(x) = (f * K_\varepsilon)(x) = \int f(y)K_\varepsilon(x-y)dy$$

konvolüsyonlarını gözönünde bulunduralım. $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$, $K(x) \in D$ ve $\int K(x)dx = 1$ olduğunu biliyoruz. Önerme 3.0.9.'dan, $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken L^p normuna göre $h_\varepsilon \longrightarrow f$ olduğunu olduğunu da gözönünde bulundurursak; her bir α katlı-indeksi için

$$D^\alpha h_\varepsilon = D^\alpha(f * K_\varepsilon) = f * D^\alpha K_\varepsilon$$

olduğundan $h_\varepsilon(x) \in C^\infty$ dır. Bundan başka ,

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha h_\varepsilon(x) &= \int f(y)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha K_\varepsilon(x-y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int f(y)(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha K_\varepsilon(x-y)dy\end{aligned}$$

dir. Böylece eğer $|\alpha| \leq k$ ise kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned}D^\alpha h_\varepsilon(x) &= \int (D^\alpha f)(y)K_\varepsilon(x-y)dy \\ &= ((D^\alpha f) * K_\varepsilon)(x)\end{aligned} \tag{3.0.2}$$

buluruz. Burada $D^\alpha f \in L^p$ dir. Böylece, Young teoremine göre $\|K_\varepsilon\|_1 = \|K\|_1 = A$ olduğundan

$$\begin{aligned}|D^\alpha h_\varepsilon| &\leq \int |D^\alpha f||K_\varepsilon|dy \\ &= \int |D^\alpha f||K_\varepsilon|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}dy \\ &\leq (\int |D^\alpha f|^p|K_\varepsilon|dy)^{\frac{1}{p}}(\int |K_\varepsilon|dy)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|K_\varepsilon\|_1^{\frac{p}{q}}\int |D^\alpha f|^p|K_\varepsilon|dy\end{aligned}$$

dır. Buradan ;

$$\begin{aligned}\int |D^\alpha h_\varepsilon|dx &\leq \|K_\varepsilon\|_1^{\frac{p}{q}}\int dx\int |D^\alpha f|^p|K_\varepsilon|dy \\ &= \|K_\varepsilon\|_1^{\frac{p}{q}}\int |K_\varepsilon|dx\int |D^\alpha f|^p dy \\ &= \|D^\alpha f\|_p\|K_\varepsilon\|_1 \Rightarrow \|D^\alpha h_\varepsilon\|_p \leq A\|D^\alpha f\|_p\end{aligned}$$

olur. Netice olarak bütün $\varepsilon > 0$ 'lar için $h_\varepsilon \in L_k^p$ dır. (3.0.2) formülüne L_k^p 'nın tanımını uygularsak, bütün $|\alpha| \leq k$ ' lar için, $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $h_\varepsilon \longrightarrow f$ olur. Sonuç olarak eğer $|x| \leq 1$ ise $U(x) = 1$ olacak şekilde $U(x) \geq 0$, $U \in D$, fonksiyonunu seçelim ve $g_\varepsilon(x) = U(\varepsilon x)h_\varepsilon(x)$ fonksiyonlarını gözönünde bulunduralım. O zaman

$$\begin{aligned} D^\alpha\left(g_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)\right) &= D^\alpha(h_\varepsilon(x)\left(U(\varepsilon x) - 1\right)) \\ &= \sum_{|\alpha|=|\gamma|+|\beta|} C_{\beta\gamma} D^\beta h_\varepsilon(x) D^\gamma U(\varepsilon x)\varepsilon^{|\gamma|} \\ &+ (U(\varepsilon x) - 1)\, D^\alpha h_\varepsilon(x) \qquad (|\gamma| \geq 1) \end{aligned}$$

dır. her $0 \leq |\alpha| \leq k$ ve her $\varepsilon > 0$ için; A , ε 'dan bağımsız olmak üzere,

$$\|D^\alpha h_\varepsilon\|_p \leq A\|D^\alpha f\|_p$$

olduğundan $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\|D^\alpha g_\varepsilon - D^\alpha h_\varepsilon\|_p \longrightarrow 0$ sağlanır. Sonuç olarak L_k^p normuna göre $(g_\varepsilon - h_\varepsilon) \longrightarrow 0$ olur. Bundan dolayı $g_\varepsilon \in D$ ve $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken L_k^p normuna göre $g_\varepsilon \longrightarrow f$ olur.

UYARI: Eğer $p = 2$ ise L_k^p iç çarpımlı bir Hilbert uzayıdır.

$$(f.g)_k = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int (D^\alpha f)\overline{(D^\alpha g)}dx$$

ve $\|f\|_{2,k} = (f.f)_k^{1/2}$ dır.

L^p 'deki fonksiyonların dağılım anlamında L^p 'deki türevleri zayıf türevler olarak ta adlandırılır. Şimdi L^p 'deki fonksiyonların kuvvetli türevlerini tanımlayalım ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere türev operatörlerinin aynı olduğunu gösterelim.

$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, E^n 'de standart tabanı göstersin ve h da bir reel parametreyi göstersin.

Tanım 3.0.35: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L^p$ olsun. Eğer $\dfrac{(f(x+he_i) - f(x))}{h}$ fark bölümü L^p normuna göre $h \longrightarrow 0$ iken $g_i \in L^p$ fonksiyonuna yakınsarsa, o zaman $g_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 'ye f 'nin bir kuvvetli L^p -türevi denir. Yüksek mertebeden kuvvetli L^p -türevleri genelde olduğu gibi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\dfrac{\partial f}{\partial x_j})$ şeklinde yazılır.

Teorem 3.0.36: $1 \leq p < \infty$ olsun. O halde L_k^p sınıfı; $|\alpha| \leq k$ olmak üzere, bütün α 'lar için $D^\alpha f$ kuvvetli L^p -türevlerine sahip $f \in L^p$ fonksiyonlarının sınıfı ile aynıdır. Ayrıca, bir $D^\alpha f$ kuvvetli L^p -türevi, dağılımlar anlamında f 'nin yerini tutan türevi ile -dağılım olarak- aynıdır.

İspat . Teoremin ispatı için yalnız $k = 1$ durumunu inceleyeceğiz. Teoremin son iddiası ile ispata başlayalım. $f \in L_1^p$ ve $g_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, f 'nin kuvvetli L^p -türevi olsun.
Bu fonksiyonlar dağılımlar gibi düşünülebilir ve (Teorem 3.0.11.'in ispatındaki gibi) dağılım anlamında yakınsaklık olarak ifade edilen L^p normuna göre yakınsaklığı hesaba katarak,bütün $U \in D$ 'lar için,

$$
\begin{aligned}
< g_i, U > &= \lim_{h \to 0} < \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h}, U > \\
&= \lim_{h \to 0} < f, \frac{U(x+he_i) - U(x)}{h} > \\
&= < f, -\frac{\partial U}{\partial x_i} >
\end{aligned}
$$

yazılımına sahibiz. Son adımda integral içinde limit alabiliriz. Bundan dolayı
$g_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de dağılımlar anlamındadır.
Sonuç olarak $f \in L_1^p$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, f 'nin bir dağılım türevi verilsin. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 'nin de f 'nin bir kuvvetli L^p - türevi olduğunu ispatlayalım. D , L_1^p 'de yoğun olduğundan, verilen her hangi bir $\varepsilon > 0$ için $\|g\|_{p,1} < \varepsilon$ olmak üzere $f = U + g$ olacak şekilde bir

$U \in D$ fonksiyonu bulabiliriz. Buradan, üçgen eşitsizliğine göre,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_p &\leq \left\|\frac{U(x+he_i)-U(x)}{h}-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right\|_p \\ &+\left\|\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h}-\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\|_p \\ &= A+B\end{aligned}$$

dir. $U \in D$ olduğundan $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ dağılım türevi adi kısmi türev ile aynıdır. Gerçekten uygun $\delta > 0$ 'lar için, $|h| < \delta$ olmak üzere $A < \varepsilon$ alarak iddianın doğruluğunu görmek kolaydır. $h \longrightarrow 0$ iken $\frac{U(x+h)-U(x)}{h} = \frac{\partial U}{\partial x}$ olacağından $\|\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\|_p < \varepsilon$ yazabiliriz. O halde $\varepsilon \longrightarrow 0$ iken $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ olacağı görülür. B için üçgen eşitsizliği ve L_1^p normuna göre

$$B \leq \left\|\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h}\right\|_p + \|g\|_{p,1} \tag{3.0.3}$$

sonucuna sahibiz. Şimdi L_1^p normuna göre $n \longrightarrow \infty$ iken $V_n \longrightarrow g$ olacak şekilde D 'de bir $\{V_n\}$ dizisi alalım. O halde herbir n için,

$$\frac{V_n(x+he_i)-V_n(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial V_n(x+he_i)}{\partial x_i}dt$$

olur. Böylece Minkowski integral eşitsizliğini kullanarak,

$$\left\|\frac{V_n(x+he_i)-V_n(x)}{h}\right\|_p \leq \left\|\frac{\partial V_n}{\partial x_i}\right\|_p \leq \|V_n\|_{p,1}$$

buluruz. Sonuç olarak $n \longrightarrow \infty$ alırsak,

$$\left\|\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h}\right\|_p \leq \|g\|_{p,1} \tag{3.0.4}$$

sonucuna varırız. Böylce (3.0.3) ve (3.0.4)'ten g 'nin tanımına göre,

$$B \leq 2\|g\|_{p,1} < 2\varepsilon$$

olduğunu görürüz. Yukardaki sonuçla birleştirirsek, her hangi bir $\varepsilon > 0$ için $|h| < \delta$ olmak üzere

$$\|\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\|_p < 3\varepsilon$$

şeklinde $\delta > 0$ olduğu bulunur.

Bundan dolayı $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f 'nin bir kuvvetli L^p -türevidir.

Her $a \in E^n$ vektörü için τ_a öteleme operatörünü;

$$(\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

şeklinde tanımlayacağız. Eğer her $a \in E^n$ için ;

$$T\tau_a = \tau_a T$$

ise T operatörüne öteleme operatörü ile değişmelidir denir. Mesela; $C^\infty(E^n)$ üzerinde; $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} C_\alpha D^\alpha$, sabit katsayılı lineer diferensiyel operatörler, öteleme operatörü ile değişmelidir, çünkü Lineer diferensiyel operatörlerin farkı ve bir sabitle çarpımı her ikisi de öteleme ile değiştirme olur. Bundan başka, konvolüsyon operatörleri de öteleme ile değiştirmedir. Özel olarak; $Tf = g * f = f * g$ ise. O zaman herhangi bir $a \in E^n$ için ,

$$\begin{aligned}
(T(\tau_a f))(x) &= (g * (\tau_a f))(x) \\
&= ((\tau_a f) * g)(x) \\
&= \int f(y-a)g(x-y)dy \qquad (z = y - a \ \ dersek) \\
&= \int f(z)g(x-a-z)dz \\
&= (f * g)(x-a) \qquad (Tf = f * g) \\
&= \tau_a(Tf)(x)
\end{aligned}$$

dir. O halde ;

$$(T(\tau_a f))(x) = (\tau_a(Tf))(x)$$

bulunur.

Bu düşünce bize singüler konvolüsyon operatörlerinin de öteleme ile değişmeli olduğunu gösterir. Yani;

$$\begin{aligned}
(K(\tau_a f))(x) &= p \cdot v \cdot \int k(x-y)f(y)dy \quad (y = z-a, dy = dz \ ve \ y = z+a) \\
&= p \cdot v \cdot \int k(x-a-z)f(z)dz \\
&= (Kf)(x-a) \\
&= (\tau_a(Kf))(x)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.0.37: $1 \leq p, q < \infty$ ve T öteleme operatörü ile değişmeli operatörü de L^p 'den L^q 'ya sınırlı lineer operatör olsun. O zaman T operatörü diferensiyeller ile yer değiştirir. Bundan başka her $k > 0$ için; T operatörü L^p_k 'den L^q_k 'ya sınırlıdır. Bilhassa

$$\|Tf\|_{q,k} \leq \|T\|\|f\|_{p,k}$$

dır. Burada $\|T\|$, L^p 'den L^q 'ya bir operatör olarak T 'nin normudur.

İspat . Her bir $k > 0$ için $L^p_k \subset L^p$ olduğundan T herhangi bir L^p_k uzayı üzerinde tanımlanmıştır. Önceden olduğu gibi teoremi $k = 1$ durumu için ispatlamak kafidir. $f \in L^p_1$ verilsin.

$$\left(T(\frac{\partial f}{\partial x_i})\right)(x) = \left(\frac{\partial(Tf)}{\partial x_i}\right)(x) \tag{3.0.5}$$

olduğu göstermeliyiz. Burada $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bir kuvvetli L^p -türevi gibi ve $\frac{\partial(Tf)}{\partial x_i}$ de bir kuvvetli L^q -türevi gibi düşünülmüştür.

T lineer ve öteleme ile değiştirme olduğundan

$$T\left(\frac{f(y+he_i)-f(y)}{h}\right)(x)=\frac{(Tf)(x+he_i)-(Tf)(x)}{h} \tag{3.0.6}$$

yazılır. Fakat, T 'nin sürekliliğine göre (3.0.6)'nın sol tarafı $h \longrightarrow 0$ iken L^q normunda (3.0.5)'in sol tarafına yakınsar. Bundan dolayı ,(3.0.6)'nın sağ tarafı L^q normunda ve kuvvetli L^q - türevinin tanımına göre (3.0.5)'in sağ tarafına yakınsayacaktır. Bu nedenle T operatörü diferensiyeller ile yer değiştirendir. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{q,1} &= \{\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^{\alpha}(Tf)\|_q^2\}^{1/2} \\
&= \{\sum_{|\alpha|\leq 1}\|T(D^{\alpha}f)\|_q^2\}^{1/2} \\
&\leq \|T\|\{\sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^{\alpha}f\|_q^2\}^{1/2} \\
&= \|T\|\|f\|_{p.1}
\end{aligned}$$

bulunur . Bu da ispatımızı tamamlar.

$n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tam sayılar olmak üzere $L_k^p(E^n)$ Banach uzaylarını gözönünde bulunduralım. Amacımız, $1 < p < \infty$ olmak üzere her p için L_k^p uzayının tamamen izomorfik olduğunu ispatlamak olacaktır. Bu düşünceyle ;

$$F(Jf)=d(\xi)^{-1}\hat{f}$$

formülü ile bütün f temperate dağılımlarının S^* uzayı üzerinde tanımlanmış J integrasyon operatörünün bir türünü vereceğiz. Burada $d(\xi)$ pozitiftir. $d(\xi)$, $|\xi| \geq 1$ için $|\xi|$ ile aynı olan sonsuz diferensiyellenebilir radyal fonksiyondur.

Başka bir deyişle; F ve F^{-1} sırasıyla Fourier ve ters Fourier dönüşümler olmak üzere J; $J = F^{-1}d(\xi)^{-1}F$ şeklinde tanımlanan bir Fourier çarpanıdır. J 'nin S^* üzerinde

$J^{-1} = F^{-1}d(\xi)F$ ile verilen iki taraflı inverse sahip olduğunu göstereririz.

Yani; $J \cdot J^{-1} = J^{-1} \cdot J = I$ dır. Her $1 \leq J \leq n$ için J . $R_j f$ Riesz dönüşümünün bir singüler konvolüsyon olduğu hatırlanırsa, teorem 2.0.5. ve teorem 3.0.14.'e göre

$1 < p < \infty$ ve bütün $k \leq 0$ tam sayıları için R_j Riesz dönüşümü L_k^p 'dan kendi içine bir sınırlı lineer dönüşümdür. Yani; $R_j : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ sınırlıdır. Bundan başka, eğer $f \in L^2$ ise $F(R_j f)(\xi) = \dfrac{\xi_j \hat{f}}{|\xi|}$ formülünü yazarız.

Lemma 3.0.38: Bütün sonlu $p \geq 1$ 'ler ve $k \geq 0$ tamsayıları için;

a) $J : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ dönüşümü süreklidir.

b) Eğer $1 < p < \infty$ ise o zaman; $j : L_k^p \longrightarrow L_{k+1}^p$ dönüşümü süreklidir.

İspat . Bu lemmanın ispatı tamamen ilk gösterilen; integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier dönüşümü $d(\xi)^{-1}$ 'e bağlıdır.

$U_1(\xi)$ fonksiyonu orijin komşuluğunda $U_1(\xi) = 1$ ve $|\xi| \geq 1$ için sıfıra eşitlenen D 'de bir fonksiyon olsun. O halde,

$$U_2(\xi) = d(\xi)^{-1} - |\xi|^{-1}(1 - U_1(\xi))$$

fonksiyonunu $d(\xi)^{-1}$ ile orijin komşuluğunda aynıdır. U_2 , $|\xi| \geq 1$ için sıfıra eşitlenir. Böylece D 'de U_1 ve U_2 ile

$$d(\xi)^{-1} = |\xi|^{-1}(1 - U_1(\xi)) + U_2(\xi) \qquad (3.0.7)$$

eşitliğini yazabiliriz. $n > 1$ olduğundan $|\xi|^{-1}$ 'in ters Fourier dönüşümünün bazı C sabitleri için; lokal integrallenebilir olan $C|x|^{1-n}$ fonksiyonu olduğunu biliyoruz [Neri, U., 1971]. Eğer V_1 ve V_2 sırasıyla U_1 ve U_2 'nin ve $J(x)$ de $d(\xi)^{-1}$ 'in ters Fourier dönüşümleri ise o zaman (3.0.7) eşitliği;

$$J(x) = C|x|^{1-n} - C(|x|^{1-n} * V_1) + V_2 \tag{3.0.8}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $V_1, V_2 \in S$ dir. Bundan başka ; $|x|^{1-n} * V_1$ fonksiyonu $|\xi|^{-1}U_1(\xi)$ integrallenebilir fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olduğundan, sınırlıdır. Bu da (3.0.8) formülü ile verilen $J(x)$ 'in lokal integrallenebilir olduğunu gösterir. $d(\xi)^{-1} = F(J(x))$ olduğundan, $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2}$ yazarsak,

$$\Delta^m d(\xi)^{-1} = F\left((2\Pi i)^{2m}|x|^{2m}J(x)\right) \tag{3.0.9}$$

olduğunu görürüz. Halbuki, yetrince büyük m tam sayıları için (3.0.9)'un sol tarafı integrallenebilirdir. Böylece (3.0.9)'un ters Fourier dönüşümü alınarak, keyfi olarak büyük m için $|x|^{2m}J(x)$ 'in sınırlı olduğu gösterilmiş olur . Bundan dolayı $J(x)$, sonsuzda hızla azalan lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Buradan da $J(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon olduğu sonucunu çıkarırız.

Şimdi $J(x) \in L^1$ olmak üzere ;

$$Jf = F^{-1}\left(d(\xi)^{-1}F(f)\right) = J * f$$

yazarız. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere bütün p 'ler için Young teoremi . $J : L^p \longrightarrow L^p$ 'nin bir sınırlı operatör olduğunu ifade eder. Yani; $x \in L^p$ için $\|Jx\| \leq C\|x\|$ olacak şekilde bir C sabiti vardır. Bundan başka, bir konvolüsyon operatörü olarak J , öteleme ile değiştirmedir. Böylece ,teorem 3.0.14.'e göre $1 \leq p < \infty$ ve bütün pozitif k tam sayıları için $J : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ dönüşümünün sınırlı olduğunu gösterir. Bu da a)'yı ispatlar.

b)'nin ispatı: $F(D_jJf)(\xi) = \xi_j d(\xi)^{-1}\hat{f}(\xi)$ olduğunu gözönünde bulundurup, (3.0.7) formülünü kullanarak;

$$F(D_jJf)(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi) - \frac{\xi_j}{|\xi|}U_1(\xi)\hat{f}(\xi) + \xi_j U_2(\xi)\hat{f}(\xi)$$

bulunur. Buradan ters Fourier dönüşümü alırsak;

$$D_jJf = R_jf - R_jK_1f + K_2f \tag{3.0.10}$$

buluruz. $K_1f = F^{-1}(U_1\hat{f}) = V_1 * f$ konvolüsyonu $V_1 = F^{-1}(U_1) \in S \subset L^1$ çekirdekli bir konvolüsyondur. Benzer olarak, $K_2f = F^{-1}(\xi_jU_2\hat{f}) = W_2 * f$ konvolüsyonu da $W_2 = F^{-1}(\xi_jU_2) \in S$ integrallenebilir çekirdekli bir konvolüsyondur. Sonuç olarak $j = 1,2,\cdots,n$ olmak üzere Young teoremi ve teorem 3.0.14.'e göre $k \geq 0$ bütün pozitif tam sayıları ve $1 \leq p < \infty$ şeklindeki bütün p 'ler için $K_i : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ dönüşümü süreklidir. Ayrıca bütün $1 < p < \infty$ ve $k \geq 0$ 'lar için $R_j : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ dönüşümünün sürekli olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $1 < p < \infty$, $k \geq 0$ ve $j = 1,2,\cdots,n$ için, $D_jJ : L_k^p \longrightarrow L_k^p$ dönüşümünün sürekli olduğunu (3.0.10)'dan çıkarırız. Bu sonuç ve a)'yı gözönünde bulundurursak b)'yi ispatlamış oluruz.

Lemma 3.0.39: Eger $1 < p < \infty$ ise o zaman,

$$J^{-1} : L_{k+1}^p \longrightarrow L_k^p$$

dönüşümü her $k \geq 0$ tam sayısı için süreklidir.

İspat . $f \in L_{k+1}^p$ olsun. Şimdi; $F(J^{-1}f) = d(\xi)\hat{f}$ ve lemma 3.0.15'te olduğu gibi,

$$d(\xi) = |\xi|\,(1 - U_1(\xi)) + U_2(\xi) \tag{3.0.11}$$

yazılımına sahibiz, burada $U_1, U_2 \in D$ dir. Buradan,

$$F(J^{-1}f) = |\xi|\hat{f} - |\xi|U_1(\xi)\hat{f} + U_2(\xi)\hat{f}$$

dir. Ve $|\xi| = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\xi}{|\xi|}$ olduğundan

$$\begin{aligned} F(J^{-1}f) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi}{|\xi|}(\xi_j \hat{f}) - U_1(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi}{|\xi|}(\xi_j \hat{f}) + U_2(\xi)\hat{f} \\ &= g - U_1 g + U_2 \hat{f} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak

$$J^{-1}f = F^{-1}(g) - F^{-1}(U_1 g) + F^{-1}(U_2 \hat{f}) \tag{3.0.12}$$

burada $g = \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi}{|\xi|}(\xi_j \hat{f})$ dir. Şimdi, $f \in L^p_{k+1}$ olduğundan $F^{-1}(\xi_j \hat{f}) = D_j f \in L^p_k$ dır. Böylece $F^{-1}(g) = \sum_{j=1}^{n} R_j(D_j f)$ de L^p_k içindedir. ve R_j Riesz dönüşümünün süreklilik özelliğinden, bazı k ve f 'den bağımsız $A_p > 0$ sabitleri için,

$$\|F^{-1}(g)\|_{p,k} \leq A_p \sum_{j=1}^{n} \|D_j f\|_{p,k} \leq A_p \|D_j f\|_{p,k+1} \tag{3.0.13}$$

yazabiliriz. U_1 ve U_2 'nin ters Fourier dönüşümünü V_1 ve V_2 ile gösterirsek $V_1, V_2 \in S \subset L^1$ olmak üzere,

$$F^{-1}(U_1 g) = V_1 * F^{-1}(g) \quad ve \quad F^{-1}(U_2 \hat{f}) = V_2 f$$

yazılabileceğini görürüz. Buradan, Young teoremini, teorem 3.0.14.'ü ve (3.0.13) formülünü kullanırsak,

$$\|F^{-1}(U_1 g)\|_{p,k} \leq \|V_1\|_1 * \|F^{-1}(g)\|_{p,k} \leq B_p \|f\|_{p,k+1} \tag{3.0.14}$$

buluruz. Sonuç olarak,

$$\|F^{-1}(U_2 \hat{f})\|_{p,k} \leq \|V_2\|_1 \|f\|_{p,k} \leq C\|f\|_{p,k+1} \tag{3.0.15}$$

olur. Bundan dolayı (3.0.12) formülünde (3.0.13), (3.0.14) ve (3.0.15)'i kullanırsak bütün $k \geq 0$ ve $1 < p < \infty$ 'ler için, $J^{-1} : L^p_{k+1} \longrightarrow L^p_k$ dönüşümünün sürekli olduğunu görürüz.

Kaynakça

[**CALDERON ,A.P. 1960**] *Integrales singulares y sus aplicationes a ecuaciones differenciales hiperbolicas.* Universidad de Buenos Aires,

[**CALDERON ,A.P.-ZYGMUND,A. 1957**] *Singular integral operators and differential equations.* Amer.J.Math.,79,901-921.

[**CALDERON ,A.P. 1961.**] *Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions.* Amer.Math.Soc.,Proc.Symp.Pure Math.,Vol.IV,33-49.

[**NERI,U. 1967.**] *Singular integrals.* University of Maryland Lecture.

[**SCHWARZ,L. 1966.**] *Mathematics for the physiccal sciences.* Hermann, Editeurs des sciences et des arts.Paris.

[**SAMKO,S.G.,KILBAS,A.A. and MARICHEV,O.I., 1987.**] *integrals and derivatives of fractional orders and its some applications.* Minsk (in Russian)

[**MIKHAILOV,V.P. 1976.**] *Partial differential equations.*Rusia.

[**SCHWARZ,L. 1957,1959.**] *Theorie des distributions.*Tome I,II.Hermann,Paris.

[**HÖRMANDER,L. 1960.**] *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces.* Acta Math.,104, 93-139.

[**HORVATH,J. 1966.**] *Topological vector spaces and distributions.*Vol.I.Addison-Wesley.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Çorum'un Alaca ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Alaca'da orta ve lise öğrenimini Yozgat ve Alaca'da tamamladı. Yüksek öğrenimini 1986 yılında girdiği Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. Daha sonra 1994 yılında Afyon Kocatepe üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi anabilim dalı'na Araştırma Görevlisi olarak atandı.Aynı yıl Kocatepe üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Halen bu bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.