İSTATİKSEL KENMOTSU MANİFOLDLARIN LEGENDRİAN ALTMANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ

Ruken Görünüş

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİKSEL KENMOTSU MANİFOLDLARIN LEGENDRİAN ALTMANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ

Ruken GÖRÜNÜŞ
0000-0002-1071-9831

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2019

TEZ ONAYI

Ruken GÖRÜNÜŞ tarafından hazırlanan "İSTATİKSEL KENMOTSU MANİFOLDLARIN LEGENDRİAN ALTMANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Prof.Dr.Cengizhan MURATHAN
0000-0002-2273-3243
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Prof.Dr. Ahmet YILDIZ
0000-0002-9799-1781
İnönü Universitesi,
Eğitim Fakültesi , İlköğretim Matematik Öğretmenliği

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../....

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/12/2019

Ruken GÖRÜNÜŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İSTATİKSEL KENMOTSU MANİFOLDLARIN LEGENDRİAN ALTMANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ

Ruken GÖRÜNÜŞ

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Bu Yüksek Lisans Tezi yedi temel bölüm içermektedir.
İlk bölüm giriştir. Bu bölümde Wintgen eşitsizliğinin tarihçesinden bahsedilmiştir.
İkinci bölümde temel tanım ve formüller tanıtılmıştır.
Üçüncü bölümde de altmanifoldlar teorisi hakkında bazı temel kavramlar tanıtıldı.
Dördüncü bölüm içsel ve dışsal değişmez bağıntılarından birisi olan ve kaynaklarda DDVV eşitsizliği olarak isimlendirilen Wintgen Eşitsizliği tanımlandı.
Beşinci bölüm iki temel parçadan oluşturuldu. Bölümün ilk parçasında istatiksel yapılardan oluşmakta ve ikinci parçada istatiksel altmanifoldlara yer verilmiştir.
Altıncı bölümde Hemen Hemen Kenmotsu istatistiksel manifoldlar tanımlandı.
Yedinci bölümde ise Hemen Hemen $\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$ – Kenmotsu İstatistiksel manifold için genelleştirilmiş wintgen eşitsizliği tanımlandı.

Anahtar Kelimeler: Riemann Manifold; Alt Manifoldlar; DDVV(Wintgen Eşitsizliği); Kenmotsu Manifold; Hemen Hemen Kenmotsu İstatistiksel Manifoldlar.

2019, vi+53 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A GENERALIZED WINTGEN INEQUALITY FOR LEGENDRIAN SUBMANIFOLDS IN KENMOTSU STATISTICAL MANIFOLDS

Ruken GÖRÜNÜŞ

Bursa Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN (Uludağ University)

This Master Thesis contains seven basic sections.
The first section is the introduction. In this section, it is introduced from the history of Wintgen inequalities.
In the second chapter, it is introduced basic definitions and formulas.
In the third chapter, some basic concepts about submanifolds theory are introducted.
In the fourth chapter, Wintgen inequality which is one of the intrinsic and extrinsic invariant relations and which is known as the DDVV will be given.
The fifth chapter has two basic parts.
The first subsection is consists of the statistical structuries and the second subsection is devoted the statistical submanifolds.
The almost Kenmotsu statistical submanifolds is introduced in the six chapter.
In the seventh chapter, generalized Wintgen inequality for Legendrian submanifolds in $\frac{f'(t)}{f(t)}-$Kenmotsu statistical manifolds.

Key Words: Riemann Manifold; Submanifolds; DDVV(Wintgen Inequality); Kenmotsu Manifold; Almost Kenmotsu statistical manifolds.

2019, vi+53pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, tez yazım aşamasında beni büyük sabırla dinleyen, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı anlamını asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN' a

Yine çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a, Doc. Dr. Betül BULCA'ya ve Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜPELİ ERKEN 'e

Bugünlere gelmemde büyük katkısı olan, benden desteğini ve bana olan güvenini benden esirgemeyen aileme,

Eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm hocalarıma,

Çalışmam boyunca yardımını hiç esirgemeyen ve her daim yanımda olan arkadaşım Sultan ÇETİN'e

sonsuz teşekkürlerimi sunarım

Ruken Görünüş

...../..../.....

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.. i
ABSTRACT.. ii
TEŞEKKÜR.. iii
İÇİNDEKİLER.. iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ... .. v
1. GİRİŞ.. 1
2. KURAMSAL TEMELLER.. 3
3. ALT MANİFOLDLAR…………………………………………………….. 13
4. WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ... 16
5. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR.. 23
5.1. İstatistiksel Yapılar.. 23
5.2. İstatistiksel Altmanifoldlar…………….. 26
6. HEMEN HEMEN KENMOTSU İSTATİKSEL MANİFOLDLAR ………… 29
7. HEMEN HEMEN $(\frac{f'(t)}{f(t)})$ - KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLD İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ…………………………….... 39
SONUÇ.. 49
KAYNAKLAR………………………………………………………………….. 50
ÖZGEÇMİŞ.. 53

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
ϕ	(1,1) tipinde tensör alanı
ξ	(1,1) tipinde vektör alanı
η	(1,1) tipinde 1-form
(g,∇,∇^*)	Dualistik yapı
$\mathcal{K}$	Fark tensör alanı
K	Gauss eğriliği
(ϕ,ξ,η)	Hemen hemen değme yapı
(M,ϕ,ξ,η)	Hemen hemen değme manifold
(ϕ,ξ,η,g)	Hemen hemen değme metrik yapı
(N^{2n},J,g)	Hemen hemen Hermitian manifold
$(N^{2n},g,J,\nabla,\nabla^*)$	Hemen hemen Hermitian istatiksel manifold
J	Hemen hemen kompleks yapı
(M,∇,g,J)	Holomorphik istatiksel manifold
φ	İzometrik immersiyon
$\bar{M}$	Katlı çarpım manifoldu
(M,J,g)	Kaehler manifold
$TM^{\perp}$	Normal demet
$\rho^{\perp}$	Normalleştirilmiş normal skaler eğrilik
ρ	Normalleştirilmiş skaler eğrilik
$\Vert H\Vert$	Ortalama eğrilik
H	Ortalama eğrilik vektörü
R	Riemann eğrilik tensörü
g	Riemann metriği
$\widetilde{M}$	Riemann manifold
$N^m(c)$	Riemann uzay formu
τ	Skaler eğrilik
A	Şekil operatörü
TM	Tanjant demeti
u	Tanjant vektörü
T_pM	Tanjant uzay
X,Y,Z,W	Vektör alanları

Kısaltmalar	**Açıklama**
∇^B	B üzerinde Riemann konneksiyon
$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B)$	$B\times\{q\}$ alt manifolduna teğet olan vektör alanları
$Q^n(c)$	c sabit eğrilikli n-boyutlu uzay formu
∇^*	Eşlenik konneksiyonu
H^f	f nin Hessieni
N_F	F ye göre Nijenhuis torsiyon

$K(\Pi)$	Π nin kesit eğriliği
Ψ	M bir antisimetrik (1,1) tensör alanı
(M^n, g)	M^n Riemann manifoldu
B	M^n nin ikinci temel formu
$R^{\perp}$	M^n nin normal yöndeki eğrilik tensörü
$\Gamma(M^n)$	M^n üzerindeki vektör alanlarının uzayı
∇	M^n üzerinde bir afin konneksiyon
N	M^n üzerinde bir normal vektör alanı
$\overline{\nabla}$	$\overline{M}$ üzerinde Riemann konneksiyon
M^n	n-boyutlu manifold
$B_1, \dots, B_m$	$n \times n$ tipinde izi sıfır olan simetrik matrisler
$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$	$\{p\} \times F$ alt manifolduna teğet olan vektör alanları
$C^{\infty}(M^n,R)$	reel değerli C^{∞}fonksiyonlarının halkası
Ω	(ϕ,ξ,η,g) nin temel 2-formu
Ƥ	$TM^{\perp}$ nin 2 $-$düzlem alt demeti
$\tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*$	$\Gamma(T^{\perp}M)$ ye indirgenmiş dual koneksiyonlar

1.GİRİŞ

Çevremize baktığımızda bazı nesnelerin (Riemann manifoldların) bir başka nesneler (uzay formların) içerisine dahil edildiğini (gömüldüğünü) görürüz. Örneğin bir küre (yüzeyi)'nin yaşadığımız 3-boyutlu Öklid uzayı içerisine dahil edildiğini kolayca gözlemleyebiliriz. Bu gözlem J.F.Nash'ın "bir Riemann manifoldun uygun bir boyuttaki Öklid uzayına dahil edilebileceği" ni ifade eden Nash imbeding teoeremi ile uyumlu olur (Nash 1956). Bu durumda dahil edilen manifold ile dahil edildiği uzay form arasında doğal bir etkileşimi ortaya çıkarır. Bu etkileşimi anlamak matematik açısından önem arz etmektedir.

Örneğin, (Chen 1996) bir $N^m(c)$ Riemann uzay formuna dahil edilen bir Riemann manifoldu (alt manifoldu) nun ortalama eğrilik vektörü H ve normalleştirilmiş skaler eğrilik ρ arasında

$$\|H\|^2 \geq \rho - c$$

eşitsizliğinin var olduğunu gösterdi.

Guadalupe ve ark. (1983) de m≥ 4 olamak üzere $N^m(c)$ Riemann uzay formunun 2 boyutlu bir M^2 Riemann alt manifoldu için $\rho^\perp$ normalleştirilmiş normal skaler eğrilik olmak üzere

$$\|H\|^2 + c \geq \rho + \rho^\perp$$

eşitsizliğinin varlığını doğruladılar. Bu eşitsizlik özel olarak $m = 4$ ve c=0 olduğu durumunda Wintgen (1979) da verilen eşitsizliğin bir genellemesi olarak karşımıza çıkar.

De Smet ve ark. (1999) da $N^{n+2}(c)$ Riemann uzay formunun M^n alt manifoldunun her noktası için

$$\|H\|^2 \geq \rho + \rho^\perp - c$$

eşitsizliğinin var olduğunu gösterdiler.

De Smet ve ark. (1999) DDVV sanısı olarak adlandırılan aşağıdaki sanıyı ortaya koydular.

DDVV Sanısı:M^n, $N^m(c)$ Riemann uzay formunun bir Riemann alt manifoldu olsun. O zaman M^n nin her noktasında

$$\|H\|^2 \geq \rho + \rho^\perp - c$$

eşitsizliği geçerlidir (De Smet ve ark. 1999).

Bu DDVV sanısının doğruluğu farklı uzay modelleri için Mihai (2014),(2017), Aydın ve ark.(2017), Murathan ve Şahin (2018), Aydın ve Ion (2019) ve Aquip ve Shahid

(2019) tarafından doğrulanmıştır. Bu DDVV tipi eşitsizliklerin cebirsel karşılıkları ise Ge (2014), Ge ve ark.(2017), Lu (2011) tarafından verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, teze temel oluşturacak kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1. M^n n-boyutlu bir C^∞ manifold ve üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\Gamma(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g: \Gamma(M^n) \times \Gamma(M^n) \to C^\infty(M^n,\mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı (0,2)-tipindeki tensör alanına M^n üzerinde bir metrik tensör ve (M^n,g) ikilisine bir Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin TM^n tanjant demetinin kesiti $\Gamma(M^n)$ nin elemanları M^n vektör alanları olarak adlandırılmak üzere,

$$\nabla: \Gamma(M^n) \times \Gamma(M^n) \to \Gamma(M^n)$$

$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü, $\forall f, g \in C^\infty(M^n, R)$, $\forall X, Y, \in \Gamma(M^n), \forall a, b \in R$ için

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z, \tag{2.1}$$

$$\nabla_{(fX+gY)} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \tag{2.2}$$

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \tag{2.3}$$

koşulları sağlanıyorsa ∇ ya M^nüzerinde bir afin konneksiyon denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.3.(M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerindeki bir afin konneksiyon ∇ olsun. Bu takdirde her $X, Y, Z \in \Gamma(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y$-$\nabla_Y X = [X, Y]$ (Torsiyonsuz özeliği)

(2) $X_g(Y, Z)$=$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metriğin parallel olma özeliği),

koşullarını sağlayan bir tek ∇ afin konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon M^n üzerinde bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin bir Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Riemann manifoldun düzlemden ne kadar ayrıldığını ölçen bir (1,3) tipinde tensör alanı tanıtılacaktır.

Tanım 2.4. (M^n,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$R: \Gamma(M^n) \times \Gamma(M^n) \times \Gamma(M^n) \to \Gamma(M^n)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, her $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ vektör alanları için, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,
(2) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,
(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,
(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g\big(R(Z,W)X,Y\big)$,

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Önerme 2.5. (M^n,g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve T (1.1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 2.6. (M^n,g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir G simetrik ve F ters simetrik tensör alanları olmak üzere, ve X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X G)Z),$$

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.7. (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W)-g(V,W)^2} \tag{2.4}$$

değerine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir. (O'Neill 1983).

Tanım 2.8. (M^n,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$Ric: \Gamma(M^n)\times \Gamma(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n,R)$$

$$(X,Y) \rightarrow S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki tensör alanına M^n nin Ricci Eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.9. (M^n,g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i,e_i)$$

$C^\infty(M^n,R)$ değerli fonksiyona M^n nin skaler eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.10. (Q^n, g) sabit c eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, Q^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{2.5}$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.11. c sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n-boyutlu bir Q^n uzay formu $Q^n(c)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.12.(Q^n, g) bir sabit c eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$Q^n(\mathrm{c})=\begin{cases} c = 0 \ \ ise \ \ Q^n(c) = E^n \text{ Ö}klid \ uzayı, \\ c = \frac{1}{r^2} \ \ ise \ \ Q^n(c) = S^n(r) \ küresi, \\ c = -\frac{1}{r^2} \ \ ise \ \ Q^n(c) = H^n(r) \ hiperbolik \ uzay, \end{cases}$$

dır (O’neill 1983).

Tanım 2.13. (B, g_B)ve(F, g_F) iki Riemann manifold ve B üzerinde diferensiyellenebilir pozitif değerli bir fonksiyon f olsun. $\pi_1 : B \times F \to B, \pi_2 : B \times F \to F$ sırasıyla birinci ve ikinci doğal izdüşüm dönüşümleri olmak üzere $\bar{M} = B \times F$ çarpım manifoldu üzerinde

$$< \bar{X}, \bar{Y} >= g_B((\pi_1)_* \bar{X}, (\pi_1)_* \bar{Y}) + (f o \pi_1)^2 g_N((\pi_2)_* \bar{X}, (\pi_2)_* \bar{Y}); \forall \bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma(\bar{M})$$

tanımlı iç çarpım ile birlikte $(\bar{M}, <,>)$ ikilisine katlı çarpım manifoldu ve f fonksiyonuna katlı çarpımın kıvrılma (warping) fonksiyonu denir ve katlı çarpım manifoldu $\bar{M} = B \times_f F$ile gösterilir (O'Neill 1983).

Her $(p, q) \in B \times F$ olmak üzere $(\pi_1)^{-1}(p) = \{p\} \times F$ ve $(\pi_2)^{-1}(q) = B \times \{q\}$ ye sırasıyla $\bar{M}$ nin lifleri ve yaprakları denir ve bunlarda $\bar{M}$ nin birer altmanifoldları olurlar (O'Neill 1983).

O zaman $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B)$ ile $B \times \{q\}$ altmanifolduna teğet olan vektör alanları ve $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$ ile de $\{p\} \times F$ alt manifolduna teğet vektör alanları cümlesi temsil edilecektir. $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B)$ nın elamanları yatay vektör alanları $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$ nin elemanları da dikey vektör alanları olarak isimlendirilir (O'Neill 1983). Böylece bir $\bar{X} \in \Gamma(\bar{M})$ vektör alanını $X \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B), U \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$ olmak üzere $\bar{X} = X + U$ şeklinde tek türlü yazılabilinir. O zaman $\Gamma(B)$ nin $\Gamma(\bar{M})$ ye kaldırılmışı $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B)$ ve $\Gamma(F)$ nin $\Gamma(\bar{M})$ ye kaldırılmışı $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$ olacaktır. Bir başka ifade ile

$$(\pi_1)_* \mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B) = \Gamma(B), (\pi_2)_* \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F) = \Gamma(F)$$

dir. İleride fazla gösterim karışıklığına yer vermemek için $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(B)$ ile $\Gamma(B)$ ve $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(F)$ ile $\Gamma(F)$ gösterimi kullanılacaktır (O'Neill 1983).

Önerme 2.14. $\bar{M} = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldu için $\bar{\nabla}$, ∇^B ve ∇^F konneksiyonları sırasıyla $\bar{M}$, Bve F üzerindeki Riemann konneksiyonları olmak üzere;

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla^B{}_X Y; X, Y \in \Gamma(B), \tag{2.6}$$

$$\bar{\nabla}_X U = \bar{\nabla}_U X = \frac{X(f)}{f} U;\ X \in \Gamma(B), U \in \Gamma(F), \tag{2.7}$$

$\bar{\nabla}_U V = \nabla^F{}_U V - \frac{<U,V>}{f} gradf; U, V \in \Gamma(F)$ (2.8)

dır (O'Neill 1983).

Burada $fo\pi_1$ için f ve $grad(fo\pi_1)$ ile de $gradf$ yazılarak gösterim sadeleştirilmiştir.

Tanım 2.15. (M^n, g) bir Riemann manifold olsun. f, M^n üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve ∇ M^n içinde tanımlı bir Levi-Civita konneksiyonu olur.

Her $X, Y \in \Gamma(M)$ için

$$H^f(X,Y) = XY(f) - (\nabla_X Y)f = g(\nabla_X(\nabla f), Y)$$

ye f nin Hessianı denir (Chen 2017).

Önerme 2.16. $\bar{M} = B \times_f F$ katlı çarpım manifoldu için Riemann eğrilik tensörü $R^{\bar{M}}$ve H^f, f nin Hessianı olmak üzere, $X, Y, Z \in \Gamma(B)$ve $U, V, W \in \Gamma(F)$ için

$R^{\bar{M}}(X,Y)Z = R^B(X,Y)Z,$ (2.9)

$R^{\bar{M}}(X,V)Y = \frac{H^f(X,Y)}{f} V,$ (2.10)

$R^{\bar{M}}(X,Y)V = R^{\bar{M}}(V,W)X = 0,$ (2.11)

$R^{\bar{M}}(X,U)V = -\frac{<U,V>}{f} \nabla^B{}_X(gradf)$ (2.12)

$R^{\bar{M}}(U,V)W = R^F(U,V)W + \frac{\|gradf\|^2}{f^2}\{< U, W > - < V, W >\}$ (2.13)

tensör denklemleri sağlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.17. M $(2n+1)$ boyutlu bir manifold,ϕ, ξ, η M üzerinde sırasıyla $(1,1)$ tipinde tensör alanı,vektör alanı ve 1 −form olsunlar.

Eğer ϕ,ξ ve η

$i)$ $\eta(\xi)$=1,

$ii)\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$ her $X \in \Gamma(M)$ için koşulları sağlanır ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde hemen hemen değme yapı ve (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsünede hemen hemen değme manifold denir (Blair 2002).

Teorem2.18. M^{2n+1}, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapıya sahip olsun. O zaman,

$$\phi(\xi) = 0, \eta \circ \phi = 0 \text{ ve } \mathrm{rank}(\phi) = 2n$$

dir (Blair 2002).

Tanım 2.19. (M^{2n+1}, g) Riemann manifoldu üzerindeki hemen hemen değme yapı (ϕ, ξ, η) olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(M)$vektör alanları için

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

denklemini sağlıyor ise g, ϕ ile uyumludur ve bu durumda (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne hemen hemen değme metrik yapı ve bu yapı ile donatılmış Riemann manifoldu M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme metrik manifoldu denir (Blair 2002).

Bu durumda $Y = \xi$ seçtiğimizde Teorem 2.18 den

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

eşitliği elde edilir (Blair 2002).

Sonuç 2.20. M^{2n+1} manifoldu durumda (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. O zaman,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y)$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Tanım 2.21. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı durumda (ϕ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Omega\,(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Ω dönüşümüne hemen hemen değme mertik yapısının temel 2-formu denir (Blair 2002).

Teorem 2.22. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer w 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y])$$

dır. Eğer Ω bir $2-$form ise

$$3d\,\Omega(\mathrm{X,Y,Z}) = \mathrm{X}(\Omega(\mathrm{Y,Z}) + \mathrm{Y}(\Omega(\mathrm{Z,X}) + \mathrm{Z}(\Omega(\mathrm{X,Y}) - \Omega([\mathrm{X,Y}],\mathrm{Z}) - \Omega([\mathrm{Y,Z}],\mathrm{X}) - \Omega([\mathrm{Z,X}],\mathrm{Y})$$

dır. (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.23. M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2=-I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapı ile dontılmış manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.24. (N^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. N^{2n} üzerinde her X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.25. M^n bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)-$tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y, \in \Gamma(M)$için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - [FX,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, N^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.24 yardımıyla N^{2n} üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$N_J(X,Y)$=$J^2[X,Y]$ +$[JX,JY]$−$J[JX,Y] - J[X,JY]$

$$=-[X,Y] +[JX,JY]-J[JX,Y] - J[X,JY]$$

biçimine indirgenir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.26. (N^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J (1,1) tensör alanı integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (Φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman,

$M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$ şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı ; t, R nin bir koordinatı ve $f, M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (Φ, ξ, η, g)bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right)\text{)=(}\ \Phi X - f.\xi\text{,}\eta(X)\frac{d}{dt}\text{)}$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca J^2=$-I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.27. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Blair 2002).

Önerme 2.28. M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \qquad (2.14)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada N_Φ, Φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Blair 2002).

Tanım 2.29. (M^{2n},J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için, Ω (X,Y)=$g(X, JY)$eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer d Ω =0 ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Blair 2002)

Tanım 2.30. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0,\ d\,\Omega = 2\alpha\eta\Lambda\,\phi$$

koşulları sağlanıyor ise M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu denir. $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Kenmotsu (1972) bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifoldun bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşulun ne olması gerektiğini aşağıdaki önerme ile vermiştir.

Önerme 2.31. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$bir hemen hemen değme metrik manifoldun Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\,\phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(\phi)X,\ \nabla_X\xi = -\phi^2 X;\ \forall X, Y \in \Gamma(TM^{2n+1}) \tag{2.15}$$

eşitliklerin sağlanmasıdır (Kenmotsu 1972).

Ayrıca Kenmotsu (1972) bir Kaehler maniflod N^{2n} manifold ile $2n+1$ $-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldun arasındaki ilgiyi aşağıdaki önerme ile vermiştir. Bu önerme Kaehler yapıyı kullanarak bir Kenmotsu yapı örneğini oluşturmada bir yöntem vermektedir.

Önerme 2.32. (N^{2n}, G, J) bir Kaehler manifold, I,ℝ de bir açık aralık,

$$g = (dt)^2 + e^{2s}G,\ \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

$\forall V \in \Gamma(N^{2n})$ için $\phi V = JV, \phi\xi = 0$ ve $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to f(t) = e^t\pi r^2 s \to f(s) = e^t I$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $M^{2n+1} = L \times_{e^t} N^{2n}$ katlı çarpım manifoldu bir Kenmotsu manifold yapısına sahip olur (Kenmotsu 1972).

Tanım 2.33. (M^{2n}, J, g_M) $2n$- reel boyutlu bir hemen hemen Hermityen manifold ve (N^n, g_N) (M^{2n}, J, g_M) nin bir Riemann alt manifold olsun. Eğer herhangi $p \in N$ noktası için $J(T_pN) \subset T_P^{\perp}N$ ise N^n ye M^{2n}bir Lagrangian altmanifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.34. $(\widetilde{M}^{2m+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold ve M^n, $\widetilde{M}^{2m+1}$ Rieamannian alt manifold olsun. Eğer her $p \in M^n$ için $\phi(T_pM^n)A \subset (T_pM^n)^{\perp}$ ise M^n ye anti-invaryant altmanifold ve şayet $\dim(\widetilde{M}) = \dim(M) + 1$ ve ξ_p tüm $p \in M^n$ için T_pM ye ortogonal ise M^n ye Legendre alt manifold denir (Yano ve Kon 1984).

3. ALT MANİFOLDLAR

Bu kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında bazı temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 3.1. M ve $\widetilde{M}$ iki diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\varphi: M \to \widetilde{M}$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $rank\ \varphi = boyM$ ise φ ye bir immersiyon ve $boy\widetilde{M} - boyM \geq 1$ pozitif tamsayısına M nin tamamlayıcı boyutu ve de M ye $\widetilde{M}$ nin altmanifoldu denir (Chen 2017).

$M, (\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldun alt manifoldu olsun. Her $p \in M$ noktasında ki her $v_p, w_p \in T_p\ M$ tanjant vektörleri için φ nin türev dönüşümü

$$\varphi_*: T_pM \to T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$$

olmak üzere

$$g_p(v_p, w_p) = \tilde{g}_{\varphi(p)}\left(\varphi_*(v_p), \varphi_*(w_p)\right)$$

tanımlı g M üzerinde bir Riemann metrik olur ve üstelik $\widetilde{M}$ dan $\tilde{g}$ yardımıyla M ye indirgenmiş Riemann metriği olarak isimlendirilir. Bu durumda (M, g) ikilisine $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ nin bir Riemann altmanifoldu ve φ immersiyonuna izometrik immersiyon denir (Chen 2017).

(M^n, g), $(\widetilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ nin bir Riemann alt manifoldu olsun. ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırasıyla, M^n ve $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita (Riemann) konneksiyonları olsun. O zaman, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, sırasıyla,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_Y X + \nabla_X^{\perp} N$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ye M^n nin ikinci temel formu denir ve N, M^n üzerinde bir normal vektör alanıdır. Eğer her $X, Y \in \Gamma(M^n)$ için, $B(X, Y) = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (O'Neill 1983).

İkinci temel form B ve A_γ şekil operatörü arasında

$$g(A_\gamma X,Y)=g(B(\mathrm{X,Y}),N_\gamma) \tag{3.1}$$

eşitliği vardır (O'neill 1983).

$\{N_\gamma : \gamma = 1, \dots, d\}$, $\Gamma(M^n)^\perp$ normal uzayın bir ortonormal bazı olmak üzere, ikinci temel formun baza göre (3.1) yardımıyla

$$B(X,Y)=\sum_{\gamma=1}^{d} g(A_\gamma X,Y)N_\gamma$$

formunda yazılır (O'neill 1983).

Tanım 3.3. (M^n,g), $(\widetilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i,e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M^n manifolduna minimaldir denir. H ortalama eğrilik vektörünün normuna M^n nin ortalama eğriliği denir. Burada $\{e_1,\dots,e_i\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal bazdır (O'Neill 1983).

Tanım 3.4. $(\widetilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M^n,g) olsun. Her $X, Y \in \Gamma(M^n)$ olmak üzere, M^n nin ikinci temel formu

$$B(X,Y) = g(X,Y)H$$

şeklinde ifade ediliyorsa M^n, $\widetilde{M}^{n+d}$ nin total umbilik altmanifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 3.5. (M^n,g), $(\widetilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$R^\perp(X,Y)=\nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp - \nabla_{[X,Y]}^\perp$$

şeklinde tanımlı $R^\perp$ dönüşümüne M^n nin normal yöndeki eğrilik tensörü denir (O'Neill 1983).

Teorem 3.6. (M^n,g) $(\widetilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman her $X, Y, Z \in \Gamma(M^n)$ için

$$R(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(X,Y,Z,W) + \tilde{g}\big(B(X,W),B(Y,Z)\big) - \tilde{g}\big(B(X,Z),B(Y,W)\big) \qquad (3.2)$$

$$\big(\tilde{R}(X,Y)Z\big)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X \mathrm{B})(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) - (\overline{\nabla}_Y \mathrm{B})(X,\mathrm{Z}) \qquad (3.3)$$

Burada $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$, $\big(\tilde{R}(X,Y)Z\big)^{\perp}$, $\tilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşeni ve

$$(\overline{\nabla}_X \mathrm{B})(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = \nabla_X^{\perp} B(Y,Z) - B(\nabla_X Y,Z) - B(Y,\nabla_X Z) \qquad (3.4)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

(3.3) denklemi *M* nin ikinci temel formunun van der Waerden-Bortolotti koneksiyonuna göre kovaryant türevi olarak adlandırılır. Daha fazlası Gauss ve Weingarten denklemleri yardımı ile

$$\tilde{g}(R^{\perp}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{U},\mathrm{V}) = \tilde{g}\big(\tilde{R}(X,Y)U,V\big) + g([A_U,A_V]X,Y)$$

Ricci denklemi elde edilir (O’Neill 1983).

4.WINTGEN EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde içsel ve dışsal değişmez bağıntılarından birisi olan ve kaynaklarda DDVV eşitsizliği olarak isimlendirilen Wintgen Eşitsizliği tanıtılacaktır.

Wintgen Eşitsizliği ana dışsal değişmezlerden olan dış normal eğrilik ve ortalama eğrilik vektör alanının normunun karesi ile ana iç değişmezlerden olan Ricci eğrilik ve skaler eğriliklerinden meydana gelir.

Örneğin E^4 de M^2 yönlü yüzeyinin ortalama eğriliği $\|H\|^2$ ve normal eğrilik $K^{\perp}$olmak üzere K Gauss eğriliğini kapsayan,

$$K \leq \|H\|^2 - |K^{\perp}| \qquad (4.1)$$

eşitsizlik literatürde Wintgen Eşitsizliği olarak ifade edilir (De Smet ve ark. 1999).

Tanım 4.1. M^2, $Q^n(c)$ uzay formda bir yüzey olsun. $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzaydaki birim çemberin ikinci temel form altındaki $(T_pM)^{\perp}$ normal uzayın

$$E_p = \{B_p(u,u) \,|\, u \in T_pM, \|u\| = 1\}$$

alt uzayına $p \in M^2$ noktasındaki eğrilik elipsi, (elips göstergesi veya normal göstergesi) denir (Moore, C.L.E ve ark. 1916).

Herhangi $u \in T_pM$ tanjant vektörünün T_pM tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2\}$ ortonormal baza göre yazılımı

$$u = (cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2, \theta \in [0,2\pi]$$

şeklinde olur. Böylece herhangi bir $u \in T_pM$ tanjant vektörü yönündeki ikinci temel form

$$B_p(u,u) = H(p) + (\cos 2\theta)\frac{b_{11} - b_{22}}{2} + (\sin 2\theta)b_{12}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.2. $M^n, Q^m(c)$ uzay formunun n boyutlu bir Riemann alt manifoldu olsun. M^n nin tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$, normal uzayının bir ortonormal bazı $\{u_{n+1}, \ldots, u_m\}$ ve skaler eğriliği τ olmak üzere

$$\rho = \frac{2\tau}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \le i \le j \le n} g\big(R(e_i, e_j)e_j, e_i\big) \tag{4.2}$$

$C^{\infty}(M^n, R)$ değerli fonksiyona M^n nin tanjant demeti TM nin normalize edilmiş skaler eğriliği ve

$$\rho^{\perp} = \frac{2}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{1 \le i \le j \le n} \sum_{1 \le \alpha \le \beta \le m} \langle R^{\perp}(e_i, e_j)u_\alpha, u_\beta \rangle^2} \tag{4.3}$$

değerine ise M^n nin normal demeti $TM^{\perp}$nin normalize edilimiş skaler eğriliği denir (De Smet ve ark. 1999).

Önerme 4.3. $Q^m(c)$ uzay formunda bir M^2 Riemann yüzeyinin bir p noktasındaki eğrilik elipsi dejenere değil ise $b_{11} - b_{22}$ ve b_{12} lineer bağımsızdırlar. Burada TM tanjant demetteki bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2\}$ olmak üzere $b_{ij} = B(e_i, e_j)$dir (Guadalupe,I.V. ve ark. 1983).

Eğer $R^{\perp}$ sıfırdan farklı ise Q^m(c) uzay formunda bir M^2 yüzeyinin normal demeti $TM^{\perp}$ nin $u = \frac{b_{11}-b_{22}}{2}$ ve $v = b_{12}$ lineer bağımsız vektörler tarafından üretilen 2-düzlem alt demeti Ƥ de yarı eksen uzunlukları $\|u\|$ ve $\|v\|$ olan elipsin alanı $e_3 = \frac{u}{\|u\|}, e_4 = \frac{v}{\|v\|}$ olmak üzere

$$A = \pi\|u\|\|v\| = \pi \left\|\frac{b_{11} - b_{22}}{2}\right\| \|b_{12}\| = \frac{\pi}{2} < \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \wedge b_{12}, e_3 \wedge e_4 >$$

dır. TM tanjant demetteki bir ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_2\}$ ye göre

$$\begin{aligned} K^E = \tilde{g}(R^{\perp}(e_1, e_2)u, v) &= \tilde{g}\big(\tilde{R}(e_1, e_2)u, v\big) + g([A_u, A_v]e_1, e_2) \\ &= c\big(\tilde{g}(e_1, u)\tilde{g}(e_2, v) - \tilde{g}(e_1, v)\tilde{g}(e_2, u)\big) \\ &\quad + g([A_u, A_v]e_1, e_2) \\ &= g(A_u A_v - A_v A_u)e_1, e_2) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$K^E = \tilde{g}(R^{\perp}(e_1, e_2)u, v) = g(A_v e_1, A_u e_2) - g(A_u e_1, A_v e_2) \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. M^2 yüzeyinin $\{e_1, e_2\}$ tanjant ortonormal çatı alanına göre A şekil operatörünün yazılımı

$$\begin{cases} A_{e_3}e_1 = b_{11}^3 e_1 + b_{12}^3 e_2, \;\; A_{e_3}e_2 = b_{11}^3 e_1 + b_{22}^3 e_2 \\ A_{e_4}e_1 = b_{11}^4 e_1 + b_{12}^4 e_2, \;\; A_{e_4}e_2 = b_{11}^4 e_1 + b_{22}^4 e_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

şeklinde olur. (4.4) ve (3.1) denklemi yardımıyla

$$< R^{\perp}(e_1, e_2)e_3, e_4 > = < A_{e_3}e_2, A_{e_4}e_1 > - < A_{e_2}e_1, A_{e_4}e_1 >$$

$$= < B(e_1, A_{e_3}e_2), e_4 > - < B\big(A_{e_3}e_1, e_1\big), e_4 > \tag{4.6}$$

eşitliğine ulaşılır. $b_{ij} = B\big(e_i, e_j\big)$ gösterimi ile birlikte $B\big(e_i, e_j\big)$ nin $\{e_3, e_4\}$ normal ortonormal çatı alanına göre yazılımı

$$b_{11} = B(e_1, e_1) = < B(e_1, e_1), e_3 > e_3 + < B(e_1, e_1), e_4 >, e_4$$

$$= b_{11}^3 e_3 + b_{11}^4 e_4,$$

dır. Benzer şekilde

$$b_{22} = b_{22}^3 e_3 + b_{11}^4 e_4$$

$$b_{12} = b_{12}^3 e_3 + b_{12}^4 e_4$$

elde edilir. Böylece (4.4) denklemi yardımıyla

$$< R^{\perp}(e_1, e_2)e_3, e_4 > = < B(e_1, b_{12}^3 e_1 + \alpha_{22}^3 e_2), e_4) - (B(b_{11}^3 e_1 + b_{12}^3 e_2, e_2), e_3 >$$

$$= b_{12}^3 < B(e_1, e_1), e_4 > + b_{22}^3 < B(e_1, e_1), e_4 >$$

$$- b_{11}^3 < B(e_1, e_2), e_4 > - b_{22}^3 < B(e_2, e_2) e_4 >$$

ve böylece

$$< R^{\perp}(e_1, e_2)e_3, e_4 > = b_{12}^3 b_{11}^4 + b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{12}^3 b_{22}^4 \tag{4.7}$$

dir. Diğer taraftan

$$< \tfrac{b_{11} - b_{22}}{2} \wedge b_{12}, e_3 \wedge e_4 > = < [(b_{11}^3 - b_{22}^3)e_3 + (b_{11}^4 - b_{22}^4)e_4] \Lambda [(b_{12}^3 e_3 + b_{12}^4 e_4), e_3 \Lambda e_4]$$

$$= < (b_{11}^3 - b_{22}^3) b_{12}^4 e_3 \Lambda e_4 - (b_{11}^4 - b_{22}^4) b_{12}^3 e_3 \Lambda e_4, e_3 \Lambda e_4 >$$

$= (b_{11}^3 - b_{22}^3)b_{12}^4 - (b_{11}^4 - b_{22}^4)b_{12}^3$

ve sonuç olarak

$$< \frac{b_{11}-b_{22}}{2} \wedge b_{12}, e_3 \wedge e_4 >= b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 + b_{22}^4 b_{12}^3 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) denklemleri karşılaştırılırsa

$$A = \pi \left\| \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \right\| \|b_{12}\|$$
$$= \frac{\pi}{2} < \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \wedge b_{12}, e_3 \wedge e_4 >$$
$$= \frac{\pi}{2} < R^{\perp}(e_1, e_2)e_3, e_4 >$$
$$= \frac{\pi}{2} K^E$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece

$$K^E = \|b_{11} - b_{22}\| \|b_{12}\| \quad (4.9)$$

bağıntısı elde edilir.

Diğer taraftan ortalama eğrilik vektör alanı tanımı gereğince

$$4\|H\|^2 = \|b_{11} + b_{22}\|^2 \quad (4.10)$$

dir. Q^m(c) uzay formunda bir M^2 yüzeyinin Gauss eğriliğini hesaplamak için

$$R(e_1, e_2, e_2, e_1) = \tilde{R}(e_1, e_2, e_2, e_1) + \tilde{g}\big(B(e_1, e_1), B(e_2, e_2)\big) - \tilde{g}\big(B(e_1, e_2), B(e_1, e_2)\big)$$

bağıntısı kullanılarak

$$K = c + \tilde{g}(b_{11}, b_{22}) - \|b_{12}\|^2 \quad (4.11)$$

denklemine ulaşılır.

$$0 \leq (\|b_{11} - b_{22}\| - 2\|b_{12}\|)^2$$
$$= \|b_{11} - b_{22}\|^2 + 4\|b_{12}\|^2 - 4\|b_{11} - b_{22}\| \|b_{12}\|$$
$$= \|b_{11}\|^2 + \|b_{22}\|^2 - 2\tilde{g}(b_{11}, b_{22})$$

$$+4\|b_{12}\|^2 - 4\|b_{11} - b_{22}\|\|b_{12}\|$$

$$= \|b_{11}\|^2 + \|b_{22}\|^2 - 2\tilde{g}(b_{11}, b_{22}) + 4\|b_{12}\|^2 - K^E$$

$$= \|b_{11}\|^2 + \|b_{22}\|^2 + 4\|b_{12}\|^2$$

$$-2K + 2c - 2\|b_{12}\|^2 - K^E$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir. Böylece

$$0 \leq \|B\|^2 - 2K - K^E + 2c \tag{4.12}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Diğer taraftan

$$4\|H\|^2 = \|b_{11} + b_{22}\|^2$$

$$= \|b_{11}\|^2 + \|b_{22}\|^2 + 2\tilde{g}(b_{11}, b_{22})$$

$$= \|b_{11}\|^2 + \|b_{22}\|^2 + 2\|b_{12}\|^2 + 2K - 2c$$

dır. Sonuç olarak

$$4\|H\|^2 = \|B\|^2 + 2K - 2c \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4.11) ve (4.12) denklemlerinden Wintgen Eşitsizliği olarak isimlendirilen

$$\|H\|^2 + c \geq \quad K + K^E \tag{4.14}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik durumu ancak $u = \frac{b_{11}-b_{22}}{2}$, $v = b_{12}$ olması durumunda geçerli olurki buda elipsin çember olmasıdır.

Böylece aşağıdaki teoreme ulaşırız.

Teorem 4.4. M^2, Q^4(c) Riemann uzay formunun bir Riemann alt manifoldu olsun. O zaman skalar eğrilik K, ortalama eğrilik $\|H\|$ ve normal skalar eğrilik K^E arasında

$$\|H\|^2 + c \geq \quad K + K^E$$

eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu elips eğriliğinin çember olması durumunda geçerlidir (Guadalupe,I.V. ve ark. 1983).

Daha sonraları (De Smet ve ark. 1999) Q^{n+2} (c) reel uzay formunun M^n de n-boyutlu Riemann altmanifoldu için Wintgen Eşitsizliği geçerli olduğunu aşağıdaki teoremle ifade ettiler.

Teorem 4.5. $M^n, Q^{n+2}(c)$ reel uzay formunun n-boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. O zaman normalize edilmiş skaler eğriliği ρ ortalama eğrilik $\|H\|$ ve normalize edilmiş normal $\rho^{\perp}$ skalar eğrilik arasında

$$\rho \leq \|H\|^2 - \rho^{\perp} + \mathrm{c} \tag{4.15}$$

eşitsizliği vardır (De Smet ve ark. 1999).

De Smet ve ark. (1999) aşağıdaki sanıyı ortaya koydular.

Sanı 4.6. $M^n, Q^{n+p}(c)$ reel uzay formunun n-boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. O zaman

$$\rho \leq \|H\|^2 - \rho^{\perp} + c \tag{4.16}$$

eşitsizliği geçerlidir (De Smet ve ark. 1999).

Bu tür eşitsizlik literdürde DDVV olarak bilinir hale geldi. DDVV varsayımının özel bir versiyonu,

$$\rho \leq \|H\|^2 + c,$$

Chen (1996**)** tarafından ispat edildi.

Dillen ve ark. (2007) DDVV varsayımının cebirsel bir hesaplamaya denk olduğunu aşağıdaki teoremle ispatladılar.

Varsayım 4.7. $M^n Q^{n+p}(c)$ reel uzay formunun n-boyutlu Riemann alt manifoldu olsun. $B_1, \dots, B_m$ $n \times n$ tipinde izi sıfır olan simetrik matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir;

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \left\| \left[B_\alpha, B_\beta \right] \right\|^2 \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \|B_\alpha\|^2 \right)^2 \tag{4.17}$$

Burada $B_\alpha = A_\alpha - \langle H, u_\alpha \rangle$ ve $\{u_\alpha : n+1 \leq \alpha \leq n+p\}$ M^n nin normal uzayının ortonormal bazı olarak belirlenirse (4.4) , (4.3) denktir (Dillen ve ark. 2007).

Bir başka deyişle (4.4) eşitsizliği aşağıdaki şekilde okunabilinir.

$$\rho \leq \|H\|^2 - \rho^\perp + c \Leftrightarrow (\rho^\perp)^2 \leq (\|H\|^2 - \rho + c)^2 \Leftrightarrow \sum_{\alpha,\beta} \left\| B_\alpha, B_\beta \right\|^2 \leq (\sum_\alpha \|B_\alpha\|^2)^2.$$

Son zamanlarda DDVV varsayımı bağımsız olarak (Lu 2011, Ge ve ark. 2008)

tarafından ayrıntılı olarak ispatı verilip ve ayrıcada eşitlik durumunda da (şekil operatör) matrislerin bileşenlerin neler olması gerektiğini gösterdiler.

Son yıllarda, Mihai (2014, 2017**)** sırasıyla kompleks uzay formlarındaki Lagrange altmanifoldlar için DDVV varsayımını kanıtladı ve Sasakian uzay formlarındaki Legendre almanifoldlar için Wintgen Eşitsizliğini elde etti.

Diğer taraftan, Q.Chen ve Q.Cui (Chen, Q. ve ark. 2011) $S^n(c) \times R$ ve $R \times H^n$(c) çarpım uzayların içinde DDVV eşitsizliğini bir başka deyişle genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliklerini elde etmişlerdir. Daha sonra Roth (2017) DDVV eşitsizliğini $R \times_f M^n$(c) katlı çarpım manifoldunun alt manifolduna genişletti.

5. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

Bu bölüm iki ana bölümden oluşacaktır. İlk bölümde istatiksel yapılar ve ikinci bölümünde ise 7.bölümde kullanacağımız istatiksel altmanifoldlar tanıtılacaktır.

5.1 İstatiksel Yapılar

Tanım 5.1. (M,g) bir Riemann manifold ∇,∇^* M torsiyonsuz iki afin konneksiyon olsun. Eğer her $X,Y,Z\in\Gamma(M)$ vektör alanları için

$$Zg(X,Y)=g(\nabla_Z X,Y)+g(X,\nabla_Z^* Y) \tag{5.1}$$

denklemi sağlanıyor ise ∇^*,∇ nın eşlenik konneksiyonu ve (g,∇,∇^*) üçlüsüne dualistik (eşlenik) yapı denir (Nomizu ve ark. 1992).

Tanım 5.2. (M,g) bir Riemann manifold,(g,∇,∇^*) M üzerinde bir dualistik yapı olmak üzere (M,g,∇,∇^*) dörtlüsüne Lauritzen anlamında istatiksel manifold denir (Lauritzen 1987).

Dikkat edilirse $\nabla=\nabla^*$ olarak seçilirse afin koneksiyon Levi-Civita konneksiyon olur. Böylece her Riemann manifold üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ile birlike aşikar bir istatiksel manifolddır

Tanım 5.3. (M,g,∇,∇^*)bir istatiksel manifold ve M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ∇^0olsun. $X,Y,Z\in\Gamma(M)$ vektör alanları için

$$\mathcal{K}_X Y=\mathcal{K}(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_X^0 Y \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlı (1,2) tipindeki $\mathcal{K}$ tensör alanına fark tensör alanı denir (Lauritzen 1987).

∇ ve ∇^0 torsiyonsuz olduklarından

$$\mathcal{K}_X Y=\mathcal{K}_Y X \text{ ve } g(\mathcal{K}_X Y,Z)=g(Y,\mathcal{K}_X Z) \tag{5.3}$$

denklemleri elde edilir (Lauritzen 1987).

Daha fazlası (5.1), (5.2) ve (5.3) denklemleri yardımıyla

$\mathcal{K}_X Y = \mathcal{K}(X,Y) = \nabla_X^0 Y - \nabla_X^* Y$ (5.4)

eşitliği bulunur.

(5.2) (5.3) ve (5.4) denklemlerinden

$g(\mathcal{K}_X Y, Z) = (\nabla_X g)(Y,Z)$ (5.5)

denklemine ulaşılır.

Böylece (5.1) denklemi yardımıyla her $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ vektör alanları için aşağıdaki Codazzi denklemi

$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z)$ (5.6)

elde edilir (Amari,1985).

(5.2) ve (5.4) kullanarak

$2\mathcal{K}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_X^* Y$ (5.7)

ve

$\nabla^0 = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$ (5.8)

eşitlikleri bulunur (Amari 1985).

∇ ve eşlenik ∇^* koneksiyonlarına göre (1,3) tipindeki eğrilik tensör alanları sırasıyla R ve R^* olmak üzere her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$g(R(X,Y)Z, W = -g\,(Z, R^*(X,Y)W)$ (5.9)

denklemine ulaşılır (Lauritzen 1987).

Todjihounde (2006) katlı çarpım manifoldu üzerinde ikili bir yapı kurmak için bir yöntem verdi. $I \times_f N$ için bu yöntem kullanarak aşağıdaki önermeye ulaşılır.

Önerme 5.4. $(\mathbb{R}, dt, \nabla)$ bir aşikar istatistiksel manifold ve $(N, g_N, \nabla^N, \nabla^{*N})$ bir istatistiksel manifold olsun. $\bar{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}^*$ bağlantıları $\mathbb{R} \times N$deki aşağıdaki koşulları sağlarsa

(a) $\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t} \bar{\partial}_t = \nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$,

(b) $\bar{\nabla}_{\bar{\partial}_t}\bar{X}=\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\partial}_t=\frac{f'(t)}{f(t)}\ X,$

(c) $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}=\nabla^N_X Y-\frac{<X,Y>}{f}f'(t)\partial_t,$

(i) $\bar{\nabla}^*_{\bar{\partial}_t}\bar{\partial}_t=\nabla^*_{\partial_t}\partial_t=0,$

(ii) $\bar{\nabla}^*_{\bar{\partial}_t}\bar{X}=\bar{\nabla}^*_{\bar{X}}\bar{\partial}_t=\frac{f'(t)}{f(t)}$X

(iii) $\bar{\nabla}^*_{\bar{X}}\bar{Y}=\nabla^{*N}_X Y-\frac{<X,Y>}{f(t)}f'(t)\partial_t$

$(\mathbb{R}\times_f N,<,>,\bar{\nabla},\bar{\nabla}^*)$ bir istatiksel manifolddur. Burada $\bar{X},\bar{Y}$nin $X,Y\in\Gamma(TN)$ dikey kaldırılmış vektör alanları ve $\bar{\partial}_t=\frac{\bar{\partial}}{\partial_t}$, ∂_t nin yatay kaldırılmış vektör alanıdır (Todjihounde 2006).

$(\mathbb{R},dt,\nabla)$ aşikar istatistiksel manifold ve $\mathbb{R}\times N$ üzerindeki $(<,>,\bar{\nabla},\bar{\nabla}^*)$ eşlenik (dual) yapıya göre eğrilik tensörlerini R ve R^* olsun. O zaman Önerme 5.4 yardımıyla

Yardımcı Teorem 5.5. $(\widetilde{M}=\mathbb{R}\times_f N,<,>,\bar{\nabla},\bar{\nabla}^*)$ bir istatiksel katlı bir çarpım manifold olsun. O zaman her $U,V,W\in\Gamma(N)$ için

(a) $R(V,\partial_t)\ \partial_t=-\frac{f''(t)}{f(t)}V,$

(b) $R(V,U)\partial_t=0,$

(c) $R\ (\partial_t,V)W=-\frac{f''(t)}{f(t)}<V,W>\partial_t,$

(d) $R(V,W)U=R^N(V,W)U-\frac{\left(f'(t)\right)^2}{\left(f(t)\right)^2}[<W,U>V-<V,U>W],$

ve

(a^*) $R^*(V,\partial_t)\partial_t=-\frac{f''(t)}{f(t)}V,$

(b^*) $R^*(V,U))\partial_t=0,$

(c^*) $R^*(\partial_t,V)W=-\frac{f''(t)}{f(t)}<V,W>\partial_t,$

(d^*) $R^*(V,W)U=R^{*N}(V,W)U-\frac{\left(f'(t)\right)^2}{\left(f(t)\right)^2}[<W,U>V-<V,U>W],$

dir (Todjihounde 2006, Murathan ve¸ark. 2018).

5.2 İstatiksel Altmanifoldlar

Bu bölümde istatiksel altmanifoldların temel gösterimleri ve formülleri verilecektir.

Teorem 5.6.(M^n, g), $(\widetilde{M}^{n+d}, <,>, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$ istatiksel manifoldun bir Riemann alt manifoldu olsun. M^nnin herhangi vektör alanları X ve Y için tan($\tilde{\nabla}_X Y$)=$\nabla_X Y$ nor$\left(\tilde{\nabla}_X Y\right) = B(X,Y)$ ve benzer şekilde tan($\tilde{\nabla}_X^* Y$)=$\nabla_X^* Y$ nor$\left(\tilde{\nabla}_X^* Y\right) = h^*(X,Y)$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\nabla, \nabla^*: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \;\to \Gamma(TM)$$

M^n üzerinde eşlenik konneksiyonlardır ve

$$B, B^*: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(T^{\perp}M)$$

simetrik tensörleridir ve dual ikinci temel form olarak adlandırılırlar (Vos 1989).

Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve her$\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olmak üzere

$$A_\xi: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ve

$$A_\xi^*: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

lineer dönüşümleri

$$g\left(A_\xi X, Y\right) =< B^*(X,Y), \xi >,$$

$$g\left(A_\xi^* X, Y\right) =< B(X,Y), \xi >$$

koşullarını sağlayacak şekilde tanımlı olsunlar.

Teorem 5.7.(M^n, g), $(\widetilde{M}^{n+d}, <,>, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$ istatiksel manifoldun bir Riemann alt manifoldu olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve her$\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

tan($\tilde{\nabla}_X^* \xi$)=$-\, A_\xi X$, tan $(\tilde{\nabla}_X \xi) = -\, A_\xi^* X$

dir (Vos 1989).

Teorem 5.8.(M^n, g), $(\widetilde{M}^{n+d}, <,>, \widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}^*)$ istatiksel manifoldun bir Riemann alt manifoldu olsun. O zaman her $X \in \Gamma(TM)$ ve her $\xi \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$D,D^*: \Gamma(TM) \times \Gamma(T^{\perp}M) \to \Gamma(T^{\perp}M)$$

$\widetilde{\nabla}, \widetilde{\nabla}^*$ nın $\Gamma(T^{\perp}M)$ ye indirgenmiş dual konneksiyonlarıdır (Vos 1989).

Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\xi, \eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için aşağıdakiler geçerlidir:

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z),$$

ve

$$X < \xi, \eta > = < D_X \xi, \eta > + < \xi, D_X^* \eta >,$$

(Vos 1989).

Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri olarak adlandırılan denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde olurlar

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y), \widetilde{\nabla}_X^* Y = \nabla_X^* Y + B^*(X,Y) \tag{5.10}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi, \widetilde{\nabla}_X^* \xi = -A_\xi^* X + D_X^* \xi \tag{5.11}$$

(Vos 1989).

Ayrıca

M nin ortalama eğrilik vektör alanları sırasıyla

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) \text{ ve} H^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B^*(e_i, e_i)$$

olarak tanımlanır (Vos 1989). Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, M nin TM tanjant demetinin yerel ortonormal çatısıdır.(5.10) ve (5.11) denklemleri yardımıyla ile

$$2B^0 = B + B^* \text{ ve } 2H^0 = H + H^*$$

eşitlikleri elde edilir. Burada B^0 ve H^0 sırasıyla $\widetilde{\nabla}^0$ Levi-Civita koneksiyona göre ikinci temel formu ve ortalama eğrilik vektör alanıdır.

Önerme 5.9. $(\widetilde{M}^{m+n}, <,>, \tilde{\nabla}, \tilde{\nabla}^*)$ nin istatiksel manifoldu $(M^m, g, \nabla, \nabla^*)$ olsun. $\tilde{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}^*$ konneksiyonlarına göre $\widetilde{M}^{m+n}$ nin eğrilik tensör alanları sırasıyla $\tilde{R}$ ve $\tilde{R}^*$ ve de ∇, ∇^* konneksiyonlarına göre eğrilik tensör alanları sırasıyla R ve R^* ise her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ ve $\xi, \eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için

$$< \tilde{R}(X,Y)Z, W >= g_M(R(X,Y)Z, W)$$

$$+< B(X,Z), B^*(Y,W) > -< B^*(X,W), B(Y,Z) > \tag{5.12}$$

$$< \tilde{R}^*(X,Y)Z, W >= g_M(R^*(X,Y)Z, W) +$$

$$+< B^*(X,Z), B(Y,W) > -< B(X,W), B^*(Y,Z) > \tag{5.13}$$

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y B)(X,Z) \tag{5.14}$$

$$(\tilde{R}^*(X,Y)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_X^* B^*)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y^* B^*)(X,Z) \tag{5.15}$$

$$< (R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta >=< \tilde{R}(X,Y)\xi, \eta > +g_M([A_\xi^*, A_\eta]X, Y), \tag{5.16}$$

$$< (R^{*\perp}(X,Y)\xi, \eta >=< \tilde{R}^*(X,Y)\xi, \eta > +g_M([A_\xi, A_\eta^*]X, Y) \tag{5.17}$$

dir. Burada $R^{\perp}$ ve $R^{*\perp}$, D ve D^* eşlenik koneksiyonlarına göre eğrilik tensörleridir ve daha fazlası

$$[A_\xi, A_\eta^*] = A_\xi A_\eta^* - A_\eta^* A_\xi,$$

$$[A_\xi^*, A_\eta] = A_\xi^* A_\eta - A_\eta A_\xi^*$$

dır (Vos 1989).

6. HEMEN HEMEN KENMOTSU İSTATİKSEL MANİFOLDLAR

Bu bölümde istatiksel Kenmotsu manifoldları tanıtılacaktır.

Tanım 6.1.(M, J, g) bir Kaehler manifold ve ∇M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer

i) (M, ∇, g),bir istatiksel manifold ve

ii) Ω=g$(*, J\, *)$, ∇ ya göre paralel 2-form ise

(M, ∇, g, J) ye holomorphik istatiksel manifold denir (Furuhata 2009).

Tanım 6.2. $(N^{2n}, g, \nabla, \nabla^{*})$ bir istatiksel manifold olsun. Eğer $(N^{2n}, , J, g)$ bir hemen hemen Hermitian manifold ise $(N^{2n}, g, J, \nabla, \nabla^{*})$ 'ye hemen hemen Hermitian istatiksel manifold denir (Yazla ve ark. baskıda)

Yardımcı Teorem 6.3. $(N^{2n}, g, J, \nabla, \nabla^{*})$ hemen hemen nir Hermitian istatistiksel manifoldu ve her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Omega)(Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z) - 2g(\mathrm{K}_X JY, Z),$$

$$(\nabla_X^{*} \Omega)(Y, Z) = g((\nabla_X^{*} J)Y, Z) + 2g(\mathrm{K}_X JY, Z)$$

dir (Yazla ve ark. baskıda).

Sonuç 6.4. $(N^{2n}, g, J, \nabla, \nabla^{*})$ hemen hemen bir Hermitian istatistiksel manifoldu olsun. O zaman

$$(\nabla_X \Omega)(Y, Z) = (\nabla_X^{0} \Omega)(Y, Z) - g(\mathrm{K}_X JY + J\mathrm{K}_X Y, Z),$$

$$(\nabla_X^{*} \Omega)(Y, Z) = (\nabla_X^{0} \Omega)(Y, Z) + g(\mathrm{K}_X JY + J\mathrm{K}_X Y, Z); \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

dir (Yazla ve ark. baskıda).

Yardımcı Teorem 6.3 ve Sonuç 6.4 yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 6.5. (M, ∇, g, J) bir holomorfik istatistiksel manifold ve herhangi $X, Y, \in \Gamma(TM)$ için $\mathrm{K}_X JY + J\mathrm{K}_X Y = 0$ olsun. O zaman ifadeler denktir:

i) (M,g,∇,J) bir holomorfik istatistiksel manifolddur,

ii) (M,g,∇^*,J) bir holomorfik istatistiksel manifolddur,

iii) (M,g,∇^0,J) bir Kaehler manifolddur.

(Furuhata 2009, Yazla ve ark. baskıda)

Tanım 6.6. (M^{2n+1},g, ∇, ∇^*) bir istatistiksel manifold olsun. Eğer (M^{2n+1},ϕ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme manifoldu ise M^{2n+1} hemen hemen istatistiksel değme metrik manifold denir (Yazla ve ark. baskıda)

Sonuç 6.7. (M^{2n+1},ϕ,ξ,η,g) bir hemen hemen değme istatiksel manifold olsun. O zaman her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(((\nabla_X \phi)Y, Z) - 2g(K_X \phi Y, Z),$$

$$(\nabla_X^* \Phi)(Y, Z) = g((\nabla_X^* \phi)Y, Z) + 2g(K_X \phi Y, Z)$$

dir (Yazla ve ark. baskıda).

Sonuç 6.8. (M^{2n+1},ϕ,ξ,η,g) bir hemen hemen istatistiksel değme metrik manifoldu olsun. O zaman her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$vektör alanları için

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = (\nabla_X^0 \Phi)(Y, Z) - g(K_X \phi Y + \phi K_X Y, Z),$$

ve

$$(\nabla_X^* \Phi)(Y, Z) = (\nabla_X^0 \Phi)(Y, Z) + g(K_X \phi Y + \phi K_X Y, Z)$$

dir (Yazla ve ark. baskıda)

Önerme 6.9. (M^{2n},g,∇,∇^*) istatistiksel bir manifold ve M de Ψ bir antisimetrik (1,1) tensör alanı olsun.O zaman

$$g(\mathcal{K}_X \Psi Y + \Psi \mathcal{K}_X Y, Z) + g(\mathcal{K}_Z \Psi X + \Psi \mathcal{K}_Z X, Y) + g(\mathcal{K}_Y \Psi Z + \Psi \mathcal{K}_Y Z, X) = 0$$

(Yazla ve ark. baskıda)

Sonuç 6.7 ve Önerme 6.9 yardımıyla her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y \Phi)(Z,X)$$
$$= (\nabla_X^0 \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z^0 \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y^0 \Phi)(Z,X)$$
$$- 2(g(\mathcal{K}_X \phi Y + \phi \mathrm{K}_X Y, Z) + g(\mathcal{K}_Z \phi X + \phi \mathrm{K}_Z X, Y)$$
$$+ g(\mathrm{K}_Y \phi Z + \phi \mathrm{K}_Y Z, X))$$
$$= (\nabla_X^0 \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z^0 \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y^0 \Phi)(Z,X)$$

eşitliği elde edilir.

Diğer tarftan ∇^0 bir Riemann konneksiyonu olmak üzere Φ temel 2 formun dış türevi

$$3d\,\Phi\,(X,Y,Z) = (\nabla_X^0 \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z^0 \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y^0 \Phi)(Z,X) \quad (6.1)$$

dir (Chinea ve ark.1990).

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y \Phi)(Z,X)$$
$$= (\nabla_X^0 \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z^0 \Phi)(X,Y) + +(\nabla_Y^0 \Phi)(Z,X)$$

eşitliği ve (6.1) denklemi yardımıyla

$$3d\,\Phi\,(X,Y,Z) = (\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_Z \Phi)(X,Y) + (\nabla_Y \Phi)(Z,X) \quad (6.2)$$

denklemi elde edilir (Yazla ve ark. baskıda).

Önerme 5.4, Carriazo ve Perez-Garcia (2017) ve Murathan ve Şahin (2018) daki tartışmaları kullanarak istatiksel hemen hemen Kenmotsu manifoldu aşağıdaki şekilde inşa edilebilir.

(N, ∇, g, J) hemen hemen Hermitian bir istatistiksel manifold ve $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ aşikar bir istatistiksel manifold olsun. $(\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N, <,> = dt^2 + f^2 g)$ istatiksel katlı çarpım manifoldu üzerinde $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ karaketeristik vektör alanı ile birlikte $\widetilde{M}$ üzerinde keyfi bir $\tilde{X}$ vektör alanını $\tilde{X} = \eta(\tilde{X})\xi + X$ ile ifade edilir. Burada X vektör alanı $\tilde{X}$ ın $\Gamma(TN)$ ye izdüşümü ve $dt = \eta$ dir. N de tanmlanmış olan (1,1) tipindeki J tensör alanı yardımıyla, $\widetilde{M}$ de yeni bir (1,1) tindeki tensör alanı ϕ,

$$\phi \tilde{X} = JX, \quad X \in \Gamma(TN), \quad (6.3)$$

şekilde tanımlanırsa her $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$\phi\,\xi=0,\ \eta o\,\phi=0,\ \phi^2\tilde{X}=-\tilde{X}+\eta(\tilde{X})\xi$ (6.4)

ve

$<\phi\tilde{X},\tilde{Y}>=-<\tilde{X},\phi\tilde{Y}>$ (6.5)

dir. Daha fazlası (6.5) denklemi yardımıyla

$<\phi\tilde{X},\phi\tilde{Y}>=<\tilde{X},\tilde{Y}>-\eta(\tilde{X})\eta(\tilde{Y})$ (6.6)

denklemi elde edilir.

Böylece ($\widetilde{M}$,<,>, ϕ,ξ,η) manifoldu hemen hemen değme metrik manifolddur. Önerme 5.4. ve Carriazo ve Perez-Garcia (2017) deki tartışmayı kullanırsak

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi)\tilde{Y} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi\tilde{Y}-\phi\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\\
&= \tilde{\nabla}_{X+\eta(\tilde{X})\frac{\partial}{\partial t}}\phi\left(Y+\eta(\tilde{Y})\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&\quad -\phi(\tilde{\nabla}_{X+\eta(\tilde{X})\frac{\partial}{\partial t}}Y+\eta(\tilde{Y})\frac{\partial}{\partial t})\\
&= \tilde{\nabla}_X\phi Y+\eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\phi Y\\
&\quad -\phi(\tilde{\nabla}_XY+X(\eta(\tilde{Y}))\frac{\partial}{\partial t}+\eta(\tilde{Y})\tilde{\nabla}_X\frac{\partial}{\partial t}+\eta(\tilde{X})\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}Y\\
&\quad +\eta(\tilde{X})\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta(\tilde{Y})\right)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(\tilde{X})\,\eta(\tilde{Y})\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t})
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve buda

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi)\tilde{Y} &= \nabla_XJY-\frac{f'(t)}{f(t)}<X,JY>\frac{\partial}{\partial t}+\eta(\tilde{X})\frac{f'(t)}{f(t)}JY\\
&\quad -J(\nabla_XY)-\eta(\tilde{Y})\frac{f'(t)}{f(t)}JX-\eta(\tilde{X})\frac{f'(t)}{f(t)}JY
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

denklemine ulaştırır. Sonuç olarak

$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi)\tilde{Y}=(\nabla_XJ)Y-\frac{f'(t)}{f(t)}<\tilde{X},\phi\tilde{Y}>\xi-\frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y})\phi\tilde{X}$ (6.8) denklemi elde edilir.

Önerme 5.4. kullanılırsa

$\widetilde{K}_X\, Y = K_X\, Y,\ \ \widetilde{K}_X\xi = \widetilde{K}_\xi X = 0,\ \ \widetilde{K}_\xi\xi = 0,$ (6.9)

elde edilir. Burada $K_X Y = \nabla_X Y - \nabla_X^0 Y$ ve $\widetilde{K}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_X^0 Y$.

(6.8) denkleminin her iki tarafına <,> katlı çarpım metrik tensörünü uygulayacak ve Yardımcı Teorem 6.3 kullanacak olursak

$$< (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\phi)\tilde{Y},\tilde{Z} > = <(\nabla_X J)Y, Z > -\frac{f'(t)}{f(t)} < \tilde{X},\phi\tilde{Y} > \eta(\tilde{Z}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y}) < \phi\tilde{X},\tilde{Z} >$$

$$= f^2(\nabla_X\Omega)(Y,Z) + 2f^2 g(K_X JY, Z)$$

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} < \tilde{X},\phi\tilde{Y} > \eta(\tilde{Z}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y}) < \phi\tilde{X},\tilde{Z} >$$

eşitliği elde edilir. Sonuç 6.7'yi eşitliğin sol tarafına uygulanırsa

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\Phi)(\tilde{Y},\tilde{Z}) + 2 < \widetilde{K}_{\tilde{X}}\phi\,\tilde{Y},\tilde{Z} > = f^2(\nabla_X\Omega)(Y,Z) + 2f^2 g(K_X JY, Z)$$

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} < \tilde{X},\phi\tilde{Y} > \eta(\tilde{Z}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y}) < \phi\tilde{X},\tilde{Z} >$$

eşitliği elde edilir. (6.9) denkleminin yardımıyla,

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\Phi)(\tilde{Z},\tilde{Y}) = f^2(\nabla_X\Omega)(Z,Y) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Z})\,\Phi(\tilde{X},\tilde{Y}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y})\Phi(\tilde{Z},\tilde{X}) \tag{6.10}$$

denklemi bulunur. (6.10) yardımıyla,

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\Phi)(\tilde{Y},\tilde{Z}) = f^2(\nabla_X\Omega)(Y,Z) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y})\,\Phi(\tilde{X},\tilde{Z}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Z})\Phi(\tilde{Y},\tilde{X}) \tag{6.11}$$

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\Phi)(\tilde{X},\tilde{Y}) = f^2(\nabla_Z\Omega)(X,Y) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{X})\,\Phi(\tilde{Z},\tilde{Y}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Y})\Phi(\tilde{X},\tilde{Z}) \tag{6.12}$$

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\Phi)(\tilde{Z},\tilde{X}) = f^2(\nabla_Y\Omega)(Z,X) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{Z})\,\Phi(\tilde{Y},\tilde{X}) - \frac{f'(t)}{f(t)}\eta(\tilde{X})\Phi(\tilde{Z},\tilde{Y}) \tag{6.13}$$

denklemleri elde edilir. (6.11),(6.12) ve (6.13) den

$$3d\Phi(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\Phi)(\tilde{Y},\tilde{Z}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\Phi)(\tilde{X},\tilde{Y}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\Phi)(\tilde{Z},\tilde{X})$$

$$= f^2((\nabla_X\Omega)(Y,Z) + (\nabla_Z\Omega)(X,Y) + (\nabla_Y\Omega)(Z,X))$$

$$-\frac{f'(t)}{f(t)}(\eta(\tilde{Y})\,\Phi(\tilde{X},\tilde{Z}) + \eta(\tilde{Z})\Phi(\tilde{Y},\tilde{X})$$

$$+\eta(\tilde{X})\,\Phi(\tilde{Z},\tilde{Y}) + \eta(\tilde{Y})\Phi(\tilde{X},\tilde{Z})$$

$$+\eta(\tilde{Z})\,\Phi(\tilde{Y},\tilde{X}) + \eta(\tilde{X})\Phi(\tilde{Z},\tilde{Y})) \qquad (6.14)$$

bulunur.

$$3d\Phi(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}) = 3f^2 d\Omega(X,Y,Z)$$

$$+2\frac{f'(t)}{f(t)}(\eta(\tilde{X})\,\Phi(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \eta(\tilde{Z})\,\Phi(\tilde{X},\tilde{Y}) + \eta(\tilde{Y})\Phi(\tilde{Z},\tilde{X}) \qquad (6.15)$$

elde edilir.

Böylece sonuç olarak

$$3d\,\Phi = 3f^2 d\Omega + 2\frac{f'(t)}{f(t)}\eta\Lambda\Phi \qquad (6.16)$$

denklemi bulunur. Önerme 5.4 ve (6.16) denklemi yardımıyla Teorem 6.9'a ulaşırız.

Teorem 6.9. $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ aşikar bir istatistiksel manifold olsun. $(\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N, <,>= dt^2 + f^2 g)$ istatiksel katlı çarpımı hemen hemen $\frac{f'(t)}{f(t)} -$ istatistiksel Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter koşul (N, ∇, g, J) hemen hemen Kaehler istatistiksel manifold olmasıdır. Daha fazlası $\widetilde{\mathcal{K}}_X Y = \mathcal{K}_X Y$, $\widetilde{\mathcal{K}}_X \xi$=$\widetilde{\mathcal{K}}_\xi X = 0, \widetilde{\mathcal{K}}_\xi \xi$=0 dir (Görünüş ve ark. 2018).

Uyarı 6.10. Furuhata ve ark. (2017) de istatistiksel Kenmotsu manifoldları tanıttılar .Eğer N bir holomorfik istatistiksel yapıya sahipse, $(M = \mathbb{R} \times_{e^t} N, <,>, \phi, \xi)$ $\widetilde{\mathcal{K}}_X Y = \mathcal{K}_X Y$, $\widetilde{\mathcal{K}}_X \xi$=$\widetilde{\mathcal{K}}_\xi X = 0, \widetilde{\mathcal{K}}_\xi \xi$=$\lambda\xi$ özeliğini sağlayan yapının istatiksel Kenmotsu manifold olduğu ispatladılar. Bu tezde ise istatiksel Kenmotsu manifoldların elde edilebilmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Lawn ve Ortega (2015) , Murathan ve Şahin (2018) deki benzer hesaplamaları kullanarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 6.11. $N(c)$ holomorfik istatiksel manifold , $I \subset \mathbb{R}$ ise aşikar istatistiksel manifold olmak üzere $\widetilde{M}$=$I \times_f N(c)$ istatistiksel katlı çarpım manifoldunun $\tilde{R}$ ve $\tilde{R}^*$ istatiksel eğrilikleri

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\widetilde{W}) = \tilde{R}^*(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\widetilde{W}) = \left[\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right][<\tilde{Y},\tilde{Z}><\tilde{X},\widetilde{W}> - <\tilde{X},\tilde{Z}><\tilde{Y},\widetilde{W}>] + [\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2} + \frac{f''}{f}][<\tilde{X},\tilde{Z}><\tilde{Y},\partial_t><\widetilde{W},\partial_t>$$

$$-<\tilde{Y},\tilde{Z}><\tilde{X},\partial_t><\widetilde{W},\partial_t>$$

$$+<\tilde{Y},\widetilde{W}><\tilde{X},\partial_t><\tilde{Z},\partial_t>$$

$$-<\tilde{X},\widetilde{W}><\tilde{Y},\partial_t><\tilde{Z},\partial_t>]$$

$$+\frac{c}{4f^2}[<\tilde{X},\phi\tilde{Z}><\phi\tilde{Y},\widetilde{W}> - <\tilde{Y},\phi\tilde{Z}><\phi\tilde{X},\widetilde{W}>$$

$$+2<\tilde{X},\phi\tilde{Y}><\phi\tilde{Z},\widetilde{W}>]$$

şeklinde olur ve daha fazlası $[\mathcal{K},\mathcal{K}] = 0$ dır. Burada $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\widetilde{W} \in \Gamma(\widetilde{M})$ ve $\partial_t \in \Gamma(\mathbb{R})$ dir (Görünüş ve ark. 2018).

Örnek 6.12. ($\mathbb{R}^2$,$\tilde{g} = dx^2 + dy^2$) Öklid uzayı üzerinde

$$J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}$$

olarak tanımlı J (1,1) tensör alanı bir hemen hemen kompleks yapı tanımlar. Daha fazlası

$$\tilde{g}\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) = 1 = \tilde{g}(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}),$$

$$\tilde{g}\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = 0 = \tilde{g}(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}),$$

$$\tilde{g}\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) = 1 = \tilde{g}(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}),$$

dır. Böylece $(\mathbb{R}^2, J, \tilde{g})$ bir hemen hemen Hermitian manifold olur. $\tilde{g}$ Öklid metriğine göre Levi-Civita konneksiyonu

$$\nabla^0_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \nabla^0_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{6.17}$$

şeklinde olur. Böylece $\nabla^0 J = 0$ ve dolayısıyla $(\mathbb{R}^2, J, \tilde{g})$ bir Kaehler manifold olur (Yano ve Kon 1984).

Şimdi $(\mathbb{R}^2, J, \tilde{g})$ Kaehler manifoldu üzerinde bir istatiksel yapı inşa etmeye çalışalım. torsiyonsuz afin konneksiyonları $\tilde{\nabla}^2$ ve $\tilde{\nabla}^{2*}$ sırasıyla

$$\tilde{\nabla}^2{}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}, \tilde{\nabla}^2{}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \tag{6.18}$$

$$\tilde{\nabla}^2{}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \tilde{\nabla}^2{}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.19}$$

$$\tilde{\nabla}^{2*}{}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}, \tilde{\nabla}^{2*}{}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{6.20}$$

$$\tilde{\nabla}^{2*}{}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \tilde{\nabla}^{2*}{}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \tag{6.21}$$

şeklinde tanımlı olsun. O zaman (1,1) tipindeki fark tensör alanı К nın lokal baz vektör alanları üzerindeki değerleri

$$\mathcal{K}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}, \mathcal{K}(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x} \text{ ve } \mathcal{K}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.22}$$

biçiminde tanımlı olurlar. Böylece $(\mathbb{R}^2, \tilde{g} = dx^2 + dy^2, \tilde{\nabla}^2)$ bir reel 2-boyutlu istatistiksel manifold olur. Daha fazlası

$$\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} J \frac{\partial}{\partial x} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} + J\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} = 0,$$

$$\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} J \frac{\partial}{\partial y} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} - J\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} = 0,$$

$$\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial y}} J \frac{\partial}{\partial y} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = -\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} + J\mathcal{K}_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $(\mathbb{R}^2, J, \tilde{g} = dx^2 + dy^2, \tilde{\nabla}^2)$ bir reel 2-boyutlu holomorphik istatiksel manifold olur.

Şimdi $(\mathbb{R}, dt^2)$ aşikar bir istatiksel manifold olsun. O zaman $(\mathbb{R}, dt^2)$ üzerinde tanımlı torsiyonsuz afin koneksiyonları $\tilde{\nabla}^{\mathbb{R}}$ ve $\tilde{\nabla}^{\mathbb{R}*}$ sırasıyla

$$\tilde{\nabla}^{\mathbb{R}}{}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = 0,\ \tilde{\nabla}^{\mathbb{R}*}{}_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

şeklinde olur.

Öte yandan, $(R \times_{e^t} R^2, <,>= dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2)$ üzerinde

$$e_1 = \frac{1}{e^{2t}}\frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{1}{e^{2t}}\frac{\partial}{\partial y}, e_3 = \ \xi = \frac{\partial}{\partial t},$$

ortonormal baz vektörleri göz önüne alınsın. $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ üzerinde (1,1) tipindeki ϕ tensör alanının baz vektörleri üzerindeki değerleri

$$\phi e_1 = e_2, \phi e_2 = -e_1, \phi\xi = 0$$

olacak şekilde ve η 1-formu $\eta = dt$ olarak tanımlanırsa $(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2, \phi, \eta, \xi, <,>)$ doğal Kenmotsu yapısına sahiptir (Kenmotsu 1972). Böylece Önerme 2.14 ve (6.17) denklemiyle beraber $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2$ üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu baz vektörleri üzerinde

$$\overline{\nabla}^0_{e_1} e_1 = -e_3, \overline{\nabla}^0_{e_1} e_2 = 0, \overline{\nabla}^0_{e_1} e_3 = e_1 \tag{6.23}$$

$$\overline{\nabla}^0_{e_2} e_1 = 0, \overline{\nabla}^0_{e_2} e_2 = -e_3, \overline{\nabla}^0_{e_2} e_3 = e_2 \tag{6.24}$$

$$\overline{\nabla}^0_{e_3} e_1 = e_1, \overline{\nabla}^0_{e_3} e_2 = e_2, \overline{\nabla}^0_{e_3} e_3 = 0 \tag{6.25}$$

şeklinde bulunur.

$(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2, \phi, \eta, \xi, <,>)$ manifoldu üzerinde Önerme 5.4 ve (6.18)-(6.19) denklemleri yardımıyla torsiyonsuz afin konneksiyonu $\bar{\nabla}$

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_3 = 0\ ,\ \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = \ e_1\ , \bar{\nabla}_{e_3} e_2 = \ e_2 \tag{6.23}$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \ e^{-t} e_1 - e_3\ , \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = -e^{-t} e_2, \bar{\nabla}_{e_1} e_3 = e_1, \tag{6.24}$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_1 = -e^{-t}\, e_2\, , \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = -e^{-t} e_1 - e_3, \bar{\nabla}_{e_2} e_3 = e_2, \tag{6.25}$$

olarak tanımlansın. O zaman (6.23)-(6.25) denklemlerinin yardımıyla fark tensör alanı $\bar{\mathcal{K}}$ nin baz vektörleri üzerindeki değerleri i=1,2,3 olmak üzere

$$\bar{\mathcal{K}}(e_1, e_1) = e^{-t} e_1, \bar{\mathcal{K}}(e_1, e_2) = -e^{-t} e_2, \bar{\mathcal{K}}(e_2, e_2) = -e^{-t} e_1\, , \bar{\mathcal{K}}(e_i, e_3) = 0 \tag{6.26}$$

biçiminde bulunur.

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_1} \phi e_1 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_1 = \bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_2 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_1 = -e^{-t} e_2 + e^{-t} e_2 = 0,$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_1} \phi e_2 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_2 = -\bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_1 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_1} e_2 = -e^{-t} e_1 + e^{-t} e_1 = 0,$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_2} \phi e_1 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_1 = \bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_2 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_1 = -e^{-t} e_1 + e^{-t} e_1 = 0,$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_2} \phi e_2 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_2 = -\bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_1 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_2} e_2 = e^{-z} e_2 - e^{-z} e_2 = 0,$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_i} \phi e_3 + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_i} e_3 = 0, i = 1,2,3$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{e_3} \phi e_i + \phi \bar{\mathcal{K}}_{e_3} e_i = 0, i = 1,2,3$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $(\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^2, \phi, \eta, \xi, <,>, \bar{\nabla})$ bir holomorphik istatiksel Kenmotsu manifold olur.

7.HEMEN HEMEN $(\frac{f'(t)}{f(t)})$ - KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLD İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ WİNTGEN EŞİTSİZLİĞİ

2015 yılında arxiv.org da arxiv:1511.04987 no ile duyurulan çalışmada, Aydın ve Ion (2019) istatiksel yüzeyler için Wintgen Eşitsizliğini elde ettiler. Bu çalışmanın hemen arkasından Aydın ve ark. (2015) de sabit eğrilikli istatiksel manifoldların istatiksel alt manifoldları için genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliğini elde ettiler. Daha sonra Murathan ve Şahin (2018), Roth (2017) çalışmasından esinlenerek istatiksel katlı çarpım manifoldların istatiksel alt manifoldları için genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliğini verdiler.

Boyom ve ark. (2017) de holomofik istatiksel uzay formların Lagrangian alt manifoldları için genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliğini aşağıdaki teoremle karşıladılar.

Teorem 7.1. $\bar{M}^m(c)$ holomorfik istatistiksel uzay formunun bir Lagrangian alt manifoldu M^n olsun. Bu durumda

$$(\rho^{\perp})^2 \geq \frac{c}{n(n-1)}(p-\frac{c}{4})+\frac{c}{(n-1)^2}[g(H^*,H)-\|H\|\|H^*\|]$$

dır (Boyom ve ark. 2017)

Mihai (2014,2017) bir $M^m(4c)$ kompleks uzay formunun Lagrangian altmanifoldlar ve Sasakian uzay formlarında Legendrian alt manifoldlarda için genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği olarak bilinen denklemleri DDVV eşitsizliğini sırasıyla aşağıdaki şekilde verdi.

$$(\rho^{\perp})^2 \leq (\|H\|^2-\rho+c)^2+\frac{4}{n(n-1)}(\rho-c)+\frac{2c^2}{n(n-1)},$$

$$(\rho^{\perp})^2 \leq (\|H\|^2-\rho+c)^2+\frac{4}{n(n-1)}\left(\rho-\frac{c+3}{4}\right)\frac{c-1}{4}+\frac{(c-1)^2}{8n(n-1)}.$$

Yukarıda bahsedilen bu motivasyonlar altında orijinal sonuçlar içeren bu bölümde istatiksel Kenmotsu manifoldların $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ aşikar bir istatistiksel manifold ile bir N holomorfik istatiksel manifoldun katlı çarpım olarak yazılabileceği gerçeğinden yola çıkarak bu çeşit istatiksel manifoldların Legendre istatiksel alt manifoldlar için genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliği elde edilecektir.

Teorem 7.2. $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ aşikar istatistiksel manifold ve $N(c)$ holomorfik istatistiksel uzay formu olsun. M^n, istatistiksel katlı çarpım manifoldu olan $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N(c)$ nın bir Legendrian alt manifolduysa

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq 2\rho^{\nabla,\nabla^*} - 8\rho^0 + \frac{1}{4f^2}(2f|c| - c + 4(f')^2) + 4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Görünüş ve ark. 2018).

İspat. $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N(c)$ $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen $(\frac{f'(t)}{f(t)})$-Kenmotsu istatistiksel alt manifoldunun n-boyutlu Legendrian alt manifoldu M^n olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal çatı ve $T^{\perp}M^n$normal demetin lokal ortonormal çatısı $\{e_{n+1} = \phi e_1, e_{n+2} = \phi e_2, \dots, e_{2n} = \phi e_n, e_{2n+1} = \xi\}$ olsun. (5.12) denklemi ve Sonuç 6.4 ile birlikte her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g_M(R(X,Y)Z,W) &= < \tilde{R}(X,Y)Z,W > \\ &+ < B^*(X,W), B(Y,Z) >< B(X,Z), B^*(Y,W) > \\ &= [\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}][< Y,Z >< X,W > - < X,Z >< Y,W >] \\ &+ < B^*(X,W), B(Y,Z) > - < B(X,Z), B(Y,W) > \end{aligned} \quad (7.1)$$

ve

$$\begin{aligned} g_M(R^*(X,Y)Z,W) &= [\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}][< Y,Z >< X,W > - < X,Z >< Y,W >] \\ &+ < B(X,W), B^*(Y,Z) > - < B^*(X,Z), B(Y,W) >. \end{aligned} \quad (7.2)$$

eşitlikleri elde edilir.

(7.1) ve (7.2) denklemlerinde $X = e_i = W, Y = e_j = Z$ alınırsa

$$g_M\big(R(e_i, e_j)e_j, e_i\big) = (\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2})(< e_j, e_j >< e_i, e_i > - < e_i, e_j >< e_i, e_j >)$$

$$+< B^*(e_i,e_i), B(e_j,e_j) > -< B(e_i,e_j), B^*(e_i,e_j) > \tag{7.3}$$

ve

$$g_M(R^*(e_i,e_j)e_j,e_i) = (\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2})(< e_j,e_j >< e_i,e_i > -< e_i,e_j >< e_i,e_j >)$$

$$+< B(e_i,e_i), B^*(e_j,e_j) > -< B^*(e_i,e_j), B(e_i,e_j) > \tag{7.4}$$

bulunur.

(5.16) de (7.1) i kullanarak

$$(R^{\perp}(X,Y)U,V) = \frac{c}{4f^2}(-< \phi X, U >< \phi Y, V > +< \phi X, V >< \phi Y, U >)$$

$$+g_M([A_U^*, A_V]X, Y), \tag{7.5}$$

(5.17) de (7.2) eşitliğini kullanarak

$$(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta) = \frac{c}{4f^2}(-< \phi X, U >< \phi Y, V > +< \phi X, V >< \phi Y, U >)$$

$$+g_M([A_\xi, A_\eta^*]X, Y) \tag{7.6}$$

denklemlerine ulaşılır.

$< \tilde{R}(X,Y)Z,W) >$, Z,W ye göre anti simetrik olmadığından $\tilde{M}$ üzerindeki kesit eğriliği $\tilde{R}$ tanımlanması mümkün değildir. Fakat $< R(X,Y)Z,W > +< R^*(X,Y)Z,W >$ Z,W ye göre anti simetriktir. Yani kesit eğriliği

$$K^{\nabla,\nabla^*}(X\Lambda Y) = \frac{1}{2}[< R(X,Y)Y,X > +< R^*(X,Y)Y,X >],$$

şeklinde anlamlı olur (Aydın ve Mihai 2017).

$p \in M$ noktasında $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{e_{n+1} = \phi e_1, \dots, e_{2n} = \phi e_n, e_{2n+1} = \xi\}$ sırasıyla T_pM ve $T_p^{\perp}M$ nin ortonormal bazı olsun. O zaman normalleştirilmiş skaler eğrilik ρ^{∇,∇^*} ve normalleştirilmiş normal skaler eğrilik $\rho^{\perp\nabla,\nabla^*}$sırasıyla

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i,j\leq n} K^{\nabla,\nabla^*}(e_i \Lambda e_j)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i,j\leq n} < R(e_i,e_j)\, e_j, e_i > + < R^*(e_i,e_j)\, e_j, e_i >$$

ve

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_{n+1\leq\alpha<\beta\leq 2n+1} \sum_{1\leq i<j\leq n} [< R^{\perp}(e_i,e_j)e_\alpha, e_\beta > + < R^{*\perp}(e_i,e_j)e_\alpha, e_\beta >]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

şekilde tanımlanabilinir (Aydın ve Mihai 2017).

(7.2) ve (7.3) denklemlerinin yardımıyla,

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i\neq j} [(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}) + < B^*(e_i,e_i), B(e_j,e_j) > - < B(e_i,e_j), B^*(e_i,e_j) >$$

$$+\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + < B(e_i,e_i), B^*(e_j,e_j) > - < B^*(e_i,e_j), B(e_i,e_j) >$$

$$=\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i\neq j} [< B^*(e_i,e_i), B(e_j,e_j) > + < B(e_i,e_i), B^*(e_j,e_j) > -2 < B(e_i,e_j), B^*(e_i,e_j) >$$

$$=\left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{2n(n-1)} \sum_{i\neq j} [< B(e_i,e_i) + B^*(e_i,e_i), B^*(e_j,e_j) + B(e_j,e_j) > - < B(e_i,e_i), B(e_j,e_j) > - < B^*(e_j,e_j), B^*(e_j,e_j) > -(< B(e_i,e_j) + B^*(e_i,e_j), B(e_i,e_j) + B^*(e_i,e_j) > - < B(e_i,e_j), B(e_i,e_j) > - < B^*(e_i,e_j), B^*(e_i,e_j) >)$$

elde edilir.

$2B^0 = B + B^*$ ve $2H^0 = H + H^*$ nedeniyle,

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i\neq j}[4 < B^0(e_i,e_i), B^0(e_j,e_j) >$$

$$-< B(e_i,e_i), B(e_j,e_j) > -< B^*(e_j,e_j), B^*(e_j,e_j) >$$

$$-(4< B^0(e_i,e_j), B^0(e_i,e_j) > -< B(e_i,e_j), B(e_i,e_j) >$$

$$-< B^*(e_i,e_j), B^*(e_i,e_j) >)$$

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{2n(n-1)}[4n^2\|H^0\|^2 - n^2\|H\|^2 - n^2\|H^*\|^2$$

$$-4(\|B^0\|^2 - \|B\|^2 - \|B^*\|^2]$$

denklemleri bulunur.

İkinci temel formların izi sıfır (izsiz) kısımlarını $\tau^0 = B^0 - H^0 g, \tau = B - Hg$ ve $\tau^* = B^* - H^* g$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda $\|\tau^0\|^2 = \|B^0\|^2 - n^2\|H^0\|^2$,$\|\tau\|^2 = \|B\|^2 - n^2\|H\|^2$ ve $\|\tau^*\|^2 = \|B^*\|^2 - n^2\|H^*\|^2$ ifadeleri elde edilir. Böylece

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \left(\frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{2n(n-1)}[4n^2\|H^0\|^2 - n^2\|H\|^2 - n^2\|H^*\|^2$$

$$-4(\|\tau^0\|^2 + 4n\|H^0\|^2 - \|\tau\|^2 - n\|H\|^2 - \|\tau^*\|^2 - n\|H^*\|^2).$$

denklemi elde edilir. Bu son denklem

$$\rho^{\nabla,\nabla^*} = \frac{c}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}$$

$$+2\|H^0\|^2 - \frac{2}{n(n-1)}\|\tau^0\|^2$$

$$-\frac{1}{2}\|H\|^2 + \frac{1}{2n(n-1)}\|\tau\|^2$$

$$-\frac{1}{2}\|H^*\|^2 + \frac{1}{2n(n-1)}\|\tau^*\|^2 \qquad (7.7)$$

denklemine ulaştırır.

(7.5) ve (7.6) ' dan, normalleştirilmiş normal skaler eğrilik

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} = \frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{1\le r<s\le n+1}\sum_{1\le i<j\le n}\left[g\left(\left[A^*_{e_{n+r}}, A_{e_{n+s}}\right]e_i, e_j\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. g\left(\left[A_{e_{n+r}}, A^*_{e_{n+s}}\right]e_i, e_j\right) + \frac{2c}{4f^2}\begin{pmatrix} -< \Phi e_i, e_{n+r} >< \Phi e_j, e_{n+s} > \\ +< \Phi e_i, e_{n+s} >< \Phi e_j, e_{n+r} > \end{pmatrix}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.8}$$

formuna döner.

Önerme 5.1 ve (5.10), (5.11) denklemleriyle beraber

$$A_\xi X = A^*_\xi X = -\frac{f'(t)}{f(t)}X \tag{7.9}$$

dir.

Böylece (7.9) yardımıyla

$$\begin{aligned} g\left(\left[A^*_\xi, A_{e_{n+s}}\right]e_i, e_j\right) &= g\left(A^*_\xi, A_{e_{n+s}}e_i, e_j\right) - g\left(A_{e_{n+s}}, A^*_\xi e_i, e_j\right) \\ &= -\frac{f'(t)}{f(t)}g\left(A_{e_{n+s}}e_i, e_j\right) + \frac{f'(t)}{f(t)}g\left(A_{e_{n+s}}e_i, e_j\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.10}$$

ve benzer hesaplamalar yaparak

$$\left(\left[A_{e_{n+r}}, A^*_{e_{n+s}}\right]e_i, e_j\right) = 0 \tag{7.11}$$

denklemleri elde edilir.

Tekrar

$$< \phi X, \xi >= 0 \tag{7.12}$$

denklemi hatırlansın.

(7.10), (7.11), (7.12) denklemlerini (7.8) denkleminde kullanarak

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*}=\frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{1\le r<s\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\begin{bmatrix} g\left(\left[A^*_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)\\ +g\left(\left[A_{e_{n+r}},A^*_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)\\ -\frac{2c}{4f^2}\left(\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}\right)\end{bmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.13}$$

ve bu denkleme eşdeğer olan denklem

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*}=\frac{1}{n(n-1)}\left\{\sum_{1\le r<s\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\begin{bmatrix} 4g\left(\left[A^0_{e_{n+r}},A^0_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)\\ +g\left(\left[A_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)\\ +g\left(\left[A^*_{e_{n+r}},A^*_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)\\ -\frac{2c}{4f^2}\left(\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}\right)\end{bmatrix}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.14}$$

denklemi bulunur. Burada $2A^0_{\xi_r}=A_{\xi_r}+A^*_{\xi_r}$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla aşağıdaki cebirsel eşitsizliği biliyoruz

$$(\lambda+\mu+\nu+w)^2\le(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+w^2),\forall\lambda,\mu,\nu,w\in\mathbb{R}. \tag{7.15}$$

kolayca elde edilir.

(7.15) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*}\le\frac{2}{n(n-1)}\left\{\sum_{1\le r<s\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\begin{matrix} 16g\left(\left[A^0_{e_{n+r}},A^0_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)^2\\ +g\left(\left[A_{e_{n+r}},A_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)^2\\ +g\left(\left[A^*_{e_{n+r}},A^*_{e_{n+s}}\right]e_i,e_j\right)^2\\ +\frac{c^2}{4f^2}\left(\delta_{ir}\delta_{js}-\delta_{is}\delta_{jr}\right)^2\end{matrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{c^2}{4f^2}n^2(n-1)^2+\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{m}\begin{matrix}16g\left(\left[A^0_{\xi_r},A^0_{\xi_s}\right]e_i,e_j\right)^2\\ +g\left(\left[A_{\xi_r},A_{\xi_s}\right]e_i,e_j\right)^2\\ +g\left(\left[A^*_{\xi_r},A^*_{\xi_s}\right]e_i,e_j\right)^2\end{matrix}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{2}{n(n-1)}\left\{\begin{matrix}\frac{c^2}{4f^2}n^2(n-1)^2\\ +\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{n}(16\left\|\left[A^0_{\xi_r},A^0_{\xi_s}\right]\right\|^2+\left\|\left[A_{\xi_r},A_{\xi_s}\right]\right\|^2+\left\|\left[A^*_{\xi_r},A^*_{\xi_s}\right]\right\|^2\end{matrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Şimdi T_pM üzerinde iz sıfır operatörleri ile simetrik olan $\{S_1^0, \dots, S_n^0\}$, $\{S_1, \dots, S_n\}$ ve $\{S_1^*, \dots, S_n^*\}$, kümelerininin elemanları aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$< S_\alpha^0 X, Y >=< \tau^0(X,Y), \xi_\alpha >,$$

$$< S_\alpha X, Y >=< \tau(X,Y), \xi_\alpha >,$$

$$< S_\alpha^* X, Y >=< \tau^*(X,Y), \xi_\alpha >, X, Y \in T_pM, p \in M.$$

Açıkçası

$$S_\alpha^0 = A_{\xi_\alpha}^0 -< H^0, \xi_\alpha > I,$$

$$S_\alpha = A_{\xi_\alpha} -< H, \xi_\alpha > I,$$

$$S_\alpha^* = A_{\xi_\alpha}^* -< H^*, \xi_\alpha > I$$

ve

$$\left[S_\alpha^0, S_\beta^0\right] = \left[A_{\xi_\alpha}^0, A_{\xi_\beta}^0\right],$$

$$\left[S_\alpha, S_\beta\right] = \left[A_{\xi_\alpha}, A_{\xi_\beta}\right],$$

$$\left[S_\alpha^*, S_\beta^*\right] = \left[A_{\xi_\alpha}^*, A_{\xi_\beta}^*\right]$$

dir. Böylece

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq \frac{2}{m(m-1)} \left\{ \frac{c^2}{4f^2} n^2(n-1)^2 + \frac{1}{4} \sum_{r,s=1}^{n} (16\|[S_\tau^0, S_s^0]\|^2 + \|[S_\tau, S_s]\|^2 + \|[S_\tau^*, S_s^*]\|^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.16}$$

denklemi elde edilir.

Lu (2011) aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 7.3. Her bir $\{B_1, \dots, B_2\}$ kümesi için iz sıfır ile $(n \times n)$- simetrik matrisleri aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left\|B_\alpha, B_\beta\right\|^2 \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \|B_\alpha\|^2\right)^2.$$

Teorem (7.3) yardımıyla (7.16) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq \frac{|c|}{2f} + \frac{4}{n(n-1)}\sum_{\tau=1}^{n}\|S_\tau^0\|^2 + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\tau=1}^{n}\|S_\tau\|^2 + \frac{1}{n(n-1)}\sum_{\tau=1}^{n}\|S_\tau^*\|^2$$

$$\leq \frac{|c|}{2f} + \frac{4}{n(n-1)}\|\tau^0\|^2 + \frac{1}{n(n-1)}\|\tau\|^2 + \frac{1}{n(n-1)}\|\tau^*\|^2. \qquad (7.17)$$

(7.7) ' de (7.17) kullanarak,

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq \frac{|c|}{2f} + \frac{8}{n(n-1)}\|\tau^0\|^2 + 2\rho^{\nabla,\nabla^*} - \frac{2C}{4f^2} + \frac{2(f')^2}{f^2}$$

$$-4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2 \qquad (7.18)$$

elde edilir.

Diğer yandan ∇^0 Levi-Civita bağlantısına göre M^m nin normal skaler eğriliği ρ^0, (Roth 2017) aşağıdaki şekilde bulundu

$$\rho^0 = \left(\frac{C}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \frac{1}{n(n-1)}[n^2\|H^0\|^2 - \|B^0\|^2]. \qquad (7.19)$$

Şimdi eğer (7.19) da $\|\tau^0\|^2 = \|B^0\|^2 - n\|H^0\|^2$ eşitliği kullanılırsa

$$\rho^0 = \left(\frac{C}{4f^2} - \frac{(f')^2}{f^2}\right) + \|H^0\|^2 - \frac{1}{n(n-1)}\|\tau^0\|^2 \qquad (7.20)$$

bulunur.

(7.18), (7.19) ve (7.20) denklemlerininin ışığı altında ispat edilmesi gereken

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq 2\rho^{\nabla,\nabla^*} - 8\rho^0 + \frac{1}{4f^2}(2f|c| - c + 4(f')^2)$$

$$+4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2$$

Genelleştirilmiş Wintgen eşitsizliğine ulaşılır ve bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 7.4. $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ bir aşikar istatistiksel manifold ve $N(c=0)=\mathbb{C}^n$ bir holomorfik istatistiksel uzay form olsun. Eğer $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{C}^n$ Kenmotsu istatiksel manifoldunun bir Legendrian alt manifoldu M^n ise,

$$\rho^{\perp \nabla, \nabla^*} \leq 2\rho^{\nabla, \nabla^*} - 8\rho^0 + 4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2 + 1$$

olur (Görünüş ve ark. 2018).

Bu durumda $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{C}^n$, $H^{2n+1}(-1)$ hiperbolik uzayı için lokal izometriktir.

Sonuç 7.5. $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ bir aşikar istatistiksel manifold ve $N(c=0)=\mathbb{C}^n$ bir holomorfik istatistiksel uzay form olsun. Eğer $\mathbb{R} \times N(c)$ Kenmotsu istatiksel manifoldunun bir Legendrian alt manifoldu M^n ise,

$$\rho^{\perp \nabla, \nabla^*} \leq 2\rho^{\nabla, \nabla^*} - 8\rho^0 + 4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2 + \frac{1}{4}(2|c| - c)$$

dir (Görünüş ve ark. 2018).

8. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde istatiksel katlı çarpım manifoldlardan yola çıkarak $(\mathbb{R}, dt, \nabla^{\mathbb{R}})$ aşikar istatiksel manifold ve $N(c)$ holomorfik istatiksel uzay formu yardımıyla tanımlanan hemen hemen istatiksel Kenmotsu manifoldunun istatiksel katlı çarpım temsili olan $\widetilde{M} = \mathbb{R} \times_f N(c)$ nın bir Legendrian alt manifoldu için

$$\rho^{\perp\nabla,\nabla^*} \leq 2\rho^{\nabla,\nabla^*} - 8\rho^0 + \frac{1}{4f^2}(2f|c| - c + 4(f')^2) + 4\|H^0\|^2 + \|H\|^2 + \|H^*\|^2$$

Genelleştirilmiş Wintgen Eşitsizliği elde edildi.

KAYNAKLAR

Amari, S. 1985. Differential-Geometrical Methods in Statistics. Lecture Notes in Statistics. 28 Springer, Berlin. 294 pp.

Aydın, M.Evren, Mihai, I. 2017. On Generalized Wintgen Inequality for statistical submanifolds in statistical manifolds of constant curvature. *Bull. Math. Sci*. 7 (1): 155-166.

Aydın, M.Evren, Mihai, I. 2019. On Wintgen Inequality for statistical surfaces. *Math. Inequal. Appl*. 22 (1): 123-132.

Aquib, M., Shaid, M.H. 2019. Generalized Wintgen Inequality for submanifolds in Kenmotsu space forms. *Tamkang J. Math*. 50 (2): 155-164.

Blair D. E. 2002. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds. Boston. Birkhâuser. 260 pp.

Boyom M.N., Aquib M., Shahid M.H., Jamali M. 2017. Generalized Wintegen type inequalityfor Lagrangian submanifolds in holomorphic statistical space forms: Geometric Science of Information Third International Conference. Eds: Nielsen,F., Barbaresco, F. November 79, Proceedings. GSI 2017 Paris, France, pp.162-169.

Carriazo, A. , Perez-Garcia, M.J. 2017., Slant submanifolds in neutral almost contact pseudo-metric manifolds. *Differ. Geom. Appl*. 54: 71–80.

Chen, B.Y. 1996. Mean curvature and shape operatör of isometric immersions in real space forms. *Glasgow Math.J.* 38: 87,97.

Chen, B.Y. 2017. Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, Singapore, 482 pp.

Chen, Q., Cui, Q. 2011. Normal scalar curvature and a pinching theorem in $S^m \times \mathbb{R}$ ve $H^m \times \mathbb{R}$, *Science China Math*. 54 (9) :1977- 1984

Chinea D. , Gonzalez C. 1990. A classification of almost contact metric manifolds. *Ann. Mat. Pura Appl*. 156 (4): 15-36.

De Smet ,P.J., Dillen F., Verstraelen L. and Vrancken L. 1999. A pointwise inequality in submanifold theory. *Arch. Math. (Brno).* 35 (2):115–128.

Dillen,F., Fastenakels, J. and Van Der Vekens, J. 2007. Remarks on an inequality involving the normal scalar curvature, *Pure and Applied Diffrential Geometry-PADGE*: 83-92.

Furuhata, H. 2009. Hypersurfaces in statistical manifolds. *Diff. Geom. Appl*. 27: 420-429

Furuhata, H., Hasegawa, I., Okuyama, Y., Sato, K. (2017). Kenmotsu statistical manifolds and warped product. *J. Geom*. 108: 1175–1191

Ge, J. 2014. DDVV-type inequality for skew-symmetric matrices and Simons-type inequality for Riemannian submersions. *Adv. Math*. 251: 62-86.

Ge, J., Xu, S., You, H., Zhou, Y. 2017. DDVV-type inequality for Hermitian matrices. Linear Algebra Appl. 529:133-147.

Ge,J. Q., Tang Z. Z. 2008. A proof of the DDVV conjecture and its equality case, *Pacific J Math.*, 23: 87-95.

Görünüş, R., Küpeli Erken,İ., Yazla, A., Murathan, C. 2018. A generalized Wintgen inequality for Legendrian submanifolds in slmost Kenmotsu manifolds**.** *Int. Electron. J. Geom.*12 (1), 43-56.

Guadalupe, I.V. , Rodriguez,**L. 1983.** Normal curvature of surfaces in space forms. *Pacific J. Math*., 106: 95-103.

Kenmotsu, K. 1972. A class of contact Riemannian manifold. Tohoku Math. J. 24: 93-103.

Lauritzen S.L. 1987. Statistical Manifolds, Lecture Notes--Monograph Series, Volume 10 Hayward, CA: 165-197

Lawn, M., Ortega, M. 2015. A fundamental theorem for hypersurfaces in semi-Riemannian warped products. *J. Geom. Phys*. 90: 55-70.

Lu Z. Q. 2011. Normal scalar curvature conjecture and its applications. *J.Funct Anal.*, 261:1284-1308.

Mihai, I. 2014. On the generalized Wintgen Inequality for submanifolds in Sasakian space forms. Riemannian Geometry and Applications-Proceedings RIGA, 153-158, Editura Univ. Bucur.,Bucharest, 2014.

Mihai, I. 2014. On the generalized Wintgen inequality for Lagrangian submanifolds in complex space forms. *Nonlinear Anal*. 95: 714-720.

Mihai, I., 2017. On the generalized Wintgen inequality for Legendrian submanifolds in Sasakian space forms. *Tohoku Math. J*. 6: 43-53

Moore, C.L.E.,Wilson,E.B. 1916. Differential geometry of two-dimensional surfaces in hyper spaces, *Proc. of the American Academy of Arts and Sciences*, 52: 267- 368.

Murathan, C. and Sahin B. 2018. A study of Wintgen like inequality for submanifolds in statistical warped product manifolds. *J. Geom*. 109 (30): 18 pp.

Nash J.1956. The imbedding problem for Riemannian manifolds. Ann. of Math. 63 (2): 20–63.

Nomizu K., Simon U. 1992. Conjugate connections. Geometry and Topology of Submanifolds IV, World Scientific Singapore, 152-172.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry. Accademic Press, Inc. New York, 468 pp.

Roth, J., A. 2017. DDVV Inequality for submanifolds of warped products. *Bull. Aust. Math. Soc*. 95: 495–499.

Todjihounde, L. 2006. Dualistic structures on warped product manifolds. *Diff.Geom.-Dyn. Syst*. 8: 278-284.

Vos, P. W. 1989. Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction. *Ann. Inst. Stat. Math*. 41(3) :429–450

Yano, K., Kon, M. 1984. Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore. 508 pp.

Yazla, A.,Küpeli Erken, ˙I. and Murathan, C. 2019. Almost cosymplectic statistical manifolds. *Quaestiones Mathematicae*. doi.org/10.2989/16073606.2019.1576069.

Wintgen, P. 1979. Sur I'in 'egelit'e de Chen-Willmore. C. R. Acad. Sc. Paris 288, 993-995.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ruken Görünüş
Doğum Yeri ve Tarihi : Van, 05.01.1992
Yabancı Dili : İngilizce

Lise : Yıldırım Beyazıt Lisesi, 2006-2010
Lisans : Yüzüncü Yıl Üniversitesi 2011-2015
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi 2016-…

İletişim (e-posta) : rkngorunus@gmail.com

Yayın : **Görünüş, R., Küpeli Erken,İ., Yazla, A., Murathan, C. 2018.** A generalized Wintgen inequality for Legendrian submanifolds in slmost Kenmotsu manifolds **,** *Int. Electron. J. Geom***.**12 (1), 43-56.