T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ SAYI DİZİSİNDE BALANS (DENGE) SAYILARININ VARLIĞI

Kübra NAİR
0000-0002-4388-9597

Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Kübra NAİR tarafından hazırlanan "FİBONACCİ SAYI DİZİSİNDE BALANS (DENGE) SAYILARININ VARLIĞI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Musa DEMİRCİ **İmza**
0000-0002-6439-8439
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Gökhan SOYDAN **İmza**
0000-0002-6321-4132
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ **İmza**
0000-0003-2924-5397
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN

Enstitü Müdürü

26/09/2019

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı
- beyan ederim.

26/09/2019

Kübra NAİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
FİBONACCİ SAYI DİZİSİNDE BALANS (DENGE) SAYILARININ VARLIĞI
Kübra NAİR
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

Dört bölümden oluşan bu çalışmada Fibonacci sayılarının balans sayıları ile arasında olan ilişkiler ele alınmış, özellikle Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili çeşitli özdeşlikler verilmiştir. Bu çalışmadaki ana problem Fibonacci sayıları içinde balans sayılarının var olup olmadığıdır.

Giriş bölümünde tezde yer alan özel sayı dizileri ile ilgili ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde Lucas sayıları ve Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Aynı zamanda Leonardo Fibonacci'nin hayatından bahsedilmiş ve Fibonacci sayılarının ortaya çıkışı anlatılmıştır. Fibonacci sayı dizisinin altın oran ile olan ilişkisinden bahsedilip teoremlerle birlikte birkaç özdeşlik verilmiştir.

Üçüncü bölümde balans sayılarının tanımı yapılmış, sağladıkları birkaç özdeşlik ve teorem verilmiştir. Bölümün sonunda ise balans sayı dizisine benzer olarak kobalans sayı dizisi de tanımlanıp bu diziye ait olan tek Fibonacci sayısının 1 olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölüm ise sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, balans sayıları, kobalans sayıları.

2019, vii + 27 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis
EXISTENCE OF BALANCING NUMBERS IN FIBONACCI NUMBER SEQUENCE
Kübra NAİR
Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

In this study consisting of four sections, the relations between Fibonacci numbers and Balancing numbers are handled and espacially various identities related to Fibonacci and Lucas numbers are given. The main problem in this work is whether or not the balancing numbers exist within Fibonacci numbers.

In the Introduction, preliminary information about the subjects in the thesis is given.

In Section 2, Lucas numbers and Fibonacci numbers are defined. At the same time, the life of Leonardo Fibonacci is mentioned and the occurence of Fibonacci numbers is explained. The relation between Fibonacci numbers and the golden ratio is mentioned and a few equations together with some theorems are given.

In Section 3, balancing numbers are defined and several identities and theorems on them are given. At the end of the chapter, the cobalancing numbers are defined similarly to the balancing numbers and it is shown that the only Fibonacci number included in this sequence is 1.

Section 4 is the conclusion part.

Key words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, balancing numbers, cobalancing numbers.

2019, vii + 27 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren, sonsuz sabırla beni her zaman çalışmaya teşvik eden ve güven veren, karşımıza çıkan olumsuzluklara rağmen umutsuzluğa kapılmadan yoluma devam etmeye ikna eden ve hiçbir desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Musa DEMİRCİ'ye en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Çalışmam esnasında, ihtiyaç duyduğum her anda bilgi ve tecrübesiyle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Prof. Dr. Gökhan SOYDAN'a teşekkür ederim.

Beni bu yaşa getiren, desteklerini her zaman yanımda hissettiğim ve her şeyleriyle arkamda duran anneme ve babama, zor zamanlarımda varlıklarıyla hayatıma neşe katan ve destekleriyle beni güçlendiren kardeşlerime içtenlikle teşekkür ediyorum.

Kübra NAİR
26/09/2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
B_n	n. Balans Sayısı
F_n	n. Fibonacci Sayısı
L_n	n. Lucas Sayısı
Φ	Altın Oran ($\sim$1,618)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

Bu çalışmada özel sayılar ailesinin içinde yer alan bazı sayı sınıfları ve bu sayılar yardımıyla ifade edilen matematiksel özdeşlikler ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Modern çağda matematikle ilgisi olsun ya da olmasın birçok insan tarafından duyulmuş, aşina olunan çeşitli sayılar ve kavramlar vardır. Bunların en bilinenlerinden biri de Fibonacci sayılarıdır. Tarihsel olarak çok derin bir geçmişe sahip olan bu sayılar ile ilgili detaylar sadece matematikçiler tarafından bilinir. Ancak değişik alanlarda çalışanlar da bu sayılar ve bu sayılar yardımıyla elde edilen özdeşlik ya da oranları duymuşlardır.

Matematik biliminde belirli özellikleri ile diğer sayı sınıflarından ayrılan ve kendilerine has kurallara sahip olan birçok özel sayı sınıfı ve özel dizi yer almaktadır. $2^n - 1$ şeklinde ifade edilebilen Mersenne sayıları, 1 eksiği 4'e tam bölünebilen Hilbert sayıları, 1'den büyük x ve y tamsayıları için $x^y + y^x$ şeklinde ifade edilebilen Leyland sayıları, n bir doğal sayı olmak üzere $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ şeklinde ifade edilen Catalan sayıları ve kendisi hariç bütün pozitif bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan mükemmel sayılar özel sayılara verilebilecek örneklerden birkaçıdır.

Elbette yukarıda ifade edilmeyen, matematik bilimi dışındaki diğer bilim dallarında da fazlasıyla ilgi gören, matematik literatüründe haklarında oldukça fazla sayıda tartışma yapılmış ve çok sayıda yayın yapılmış olan iki özel sayı dizisi de Lucas ve Fibonacci sayılarıdır. Bu iki sayı dizisini ilgi çekici kılan en önemli nokta altın oran olarak adlandırılan $\Phi = 1{,}618\ldots$ sayısı ile olan ilgileridir. Bu sayı (ya da bu oran) Fibonacci'den en az on altı yüzyıl önce Yunanlılarca biliniyordu ve "altın kesim" olarak adlandırılıyordu. Yunanlılara göre göze en hoş gelen orana verilen ad "altın kesim" di. Altın kesimin estetik özelliği eski Yunan'ın mimarlarını, ressamlarını, heykeltıraşlarını etkilemiştir. Geçmişten günümüze ulaşmış olan birçok büyük yapı, tapınak veya anıtta kullanılan kapı, pencere ya da duvarlarda boy en oranına bakıldığında ortaya çıkan değerin altın orana yani "Φ"ye eşit ya da bu orana çok yakın olduğu görülmektedir.

2. LUCAS VE FİBONACCİ SAYILARI

2.1. Lucas Sayıları

Lucas sayıları $L_0 = 2\,, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan sayılardır. Bu sayıların "altın oran" olarak bilinen Φ sayısı ile ilişkisi vardır. Öyle ki Φ sayısının ardışık kuvvetleri alındığında elde edilen sonuçların sırasıyla bir Lucas sayısına yakın değerler olduğu görülür. Ancak bilim dünyasında her zaman Fibonacci sayıları daha ilgi çekici olmuştur. Bu çalışmada da daha çok Fibonacci sayıları ve Fibonacci sayılarının özellikleri incelenmiştir.

Fibonacci sayılarına ilk kez 13. yüzyılın başlarında Leonardo Fibonacci'nin "Liber Abaci" adlı kitabında rastlanmıştır.

2.2. Leonardo Fibonacci

Leonardo Pisano veya Pisa Leonard olarak da bilinen Leonardo Fibonacci, Orta çağ Avrupasının en seçkin matematikçilerinden biridir. Hayatı hakkında matematiksel çalışmalarında vermiş olduğu birkaç bilgi dışında çok az şey bilinir.
Fibonacci, 1170 yılında Pisa'da Bonacci ailesinin bir ferdi olarak dünyaya gelmiştir. Fibonacci kelimesi "Filius Bonacci" yani Bonacci'nin oğlu kelimesiyle bağlantılıdır. Babası Guglielma(William) oğlunun ticaret ile ilgilenmesini isteyen başarılı bir tüccardı. Guglielma, Cezayir şehri Bugie'de gümrük kolektörü olarak atandığı 1190 yılında hesaplama sanatını öğrenmesi için Leonardo'yu Cezayir'e götürdü. Fibonacci temel eğitimini onu Hint-Arap sayısal sistemi ve Hint-Arap hesaplama teknikleriyle tanıştıran Müslüman bir okul yöneticisinden aldı. Leonardo Liber Abaci'de hocasından "Dokuz Hint Rakamı Sanatını" öğrenirken hissettiği mutluluğa değinmiştir. Ayrıca Fibonacci'yi Pers matematikçi El-Khowarizmi'nin (825) yazdığı cebir ile ilgili, "Hisdb al-jabr w'al mugabiah" adlı bir kitapla tanıştırdı (Cebir kelimesi bu kitabın başlığından gelmektedir.). Fibonacci yirmili yaşlarında Mısır, Suriye, Yunanistan, Fransa ve Konstantinapolis'e sık sık iş gezileri yaptı. Burada kullanılmakta olan çeşitli aritmetik sistemleri inceledi ve yerli akademisyenlerle görüş alışverişinde bulundu. Fibonacci

1200 yıllarında Pisa'ya geri döndü. Roma numaralandırma sistemine göre, Hint-Arap sisteminin zarafet ve pratik üstünlüğünü anlatarak İtalya'da kullanımına ikna etmeye çalıştı. Fibonacci 1202'de öncü kitabı olan "Liber Abaci" adlı kitabını yayınladı (Liber Abaci, "çörkü (= abaküs= sayı boncuğu) kitabı" anlamına geliyor. Bilindiği gibi Arap rakamlarının Avrupa'ya girmesinden önce, Avrupa'da Roma rakamları kullanılıyordu. Bu rakamlarla dört işlem yapmak, hemen hemen olanaksız olduğu için hesap çörkülerle yapılırdı. Bu nedenle de abakus sözcüğü adeta hesap sözcüğüyle özdeşleşmişti. Avrupa'ya daha önce bilmedikleri bir hesap yöntemi getiren ve çörküyü ortadan kaldıran bu kitabın bu ad ile anılması ilginçtir). Bu kitap Hint-Arap numaralandırma sistemini ve aritmetik algoritmalarını Avrupa'ya tanıtmıştır. Fibonacci'nin Liber Abaci'yi yayımladığı yıllarda, Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini okumuş birkaç kişi dışında Hindu-Arap sayıları, Avrupa'da bilinmiyordu. Leonardo eserinde bu rakamları şu şekilde anlatmaya başlar: "Dokuz Hint rakamı "987654321" dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesiyle, aşağıda anlatılacağı gibi herhangi bir sayı yazılabilir." Kitabın ilk yedi bölümü bildiğimiz 10'lu sayı düzenini ve bu sayılarla dört işlemi anlatır. Daha sonra bu düzen, kâr hadleri, takas, para değiştirme, ağırlık ve hacim ölçülerinin birbirine çevrilmesi, ortaklar arasında bölüşme ve faiz gibi pratik ticaret problemlerine uygulanır (Koshy 2001) .

Liber Abaci 13'üncü yüzyılda Avrupa'da büyük bir ilgiyle karşılanır, çok sayıda kopyalanır ve Kilise'nin yasaklarına rağmen Arap sayıları İtalyan tacirler arasında yayılır. Kitap, bilime düşkünlüğü ile bilinen Kutsal Roma imparatoru 2. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilim adamlarını koruması sebebiyle Stupor Mundi (Dünya Harikası) adı ile de bilinir. 1220'de Fibonacci imparatorun huzuruna çağrılır. Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava tabi tutulur. Tüm bunlar Fibonacci'nin göze girmesinde etkili olur. Yıllarca imparator ve imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225'te Liber Quadratorum'u (Kare Sayıların Kitabı) yazar ve imparatora ithaf eder. "İkinci dereceden Diyofantus denklemleri"ne ayrılan bu kitap Fibonacci'nin başyapıtıdır.

1228’de Fibonacci Liber Abaci’yi yeniden gözden geçirir ve kitabın bu ikinci basımını imparatorun baş bilimcisi Michael Scott’a ithaf eder. Bu tarihten 1240’a kadar Fibonacci hakkında hiçbir şey bilinmiyor. 1240’ta Pisa, kente hizmetlerinden dolayı kendisine 20 Pisa lirası yıllık bağlar.
Bu anlatılanların dışında iki kitabı daha vardır; Practica Geometriae ve Flos. Bugün Fibonacci heykeli, Pisa kulesinin yakınında, Arno Nehri’nin karşısındaki bir bahçede duruyor.

Fibonacci’nin yaklaşık 1240’ta ölümünden kısa bir süre sonra İtalyan tüccarlar Hint-Arap sisteminin gücünü anlamaya başladı ve yavaş yavaş ticari işlemler için kabul etti. 16’ncı yüzyılın sonunda, Avrupa’nın çoğu onu kabul etmişti. Liber Abaci iki yüzyıldan fazla bir süre Avrupa standardı olarak kaldı ve Hint-Arap sisteminin hantal Roma numaralandırma sisteminin yerini almasında önemli bir rol oynadı (Koshy 2001) .

2.3. Fibonacci Sayı Dizisinin Doğuşu

Fibonacci sayıları Liber Abaci’de yer alan bir problemin sonucunda ortaya çıkmıştır. “Tavşan Problemi” olarak bilinen problem şu şekildedir;
Kapalı bir alanda biri erkek diğeri dişi olmak üzere iki yeni doğan tavşan olduğunu varsayalım. Bir yılda üretilen tavşan sayısı şu durumlarda bulunur;

1. Her bir çiftin olgunlaşması bir ay sürer.
2. Her bir çift ikinci aydan itibaren her ay bir çift üretir.
3. Yıl boyunca hiç tavşan ölmediği kabul edilir.

Çizelge 2.1. Aylara göre tavşan çifti sayıları

Çiftlerin Sayıları	1.Ay	2.Ay	3.Ay	4.Ay	5.Ay	6.Ay	7.Ay	8.Ay
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	13
Bebek	1	0	1	1	2	3	5	8
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21

Çizelgede hesaplanan en alt satırdaki sayılara Fibonacci sayıları ve bu sayıların oluşturduğu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … şeklinde devam eden sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Bu dizi Fransız Matematikçi Gabriel Lamé'den sonra "Lame Dizisi" olarak bilinirken 1876 yılında Fransız matematikçi François Edouard Anatole Lucas tarafından "Fibonacci Dizisi" olarak isimlendirilmiştir (Koshy 2001) .

Fibonacci dizisine yakından bakıldığında ilk ikisi hariç, her Fibonacci sayısının hemen önceki iki Fibonacci sayısının toplamı olduğunun ve her terimin kendisinden bir önceki terime bölümünün sonucunun terimler büyüdükçe altın oran olan Φ'ye yaklaştığının gözlemlenmesi Fibonacci sayılarının etkileyici bir özelliğe sahip olduğunu ortaya koyuyor.

Fibonacci sayı dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

2.3.1. Tanım: $F_1 = F_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 3$ iken

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

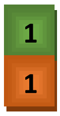
şeklinde bir tekrarlama bağıntısına sahip olan sayılara Fibonacci sayıları denir ve F_n ile temsil edilir.

Bu noktadan sonra Fibonacci sayılarından faydalanılarak altın oranı elde etmek adına geometrik bir yaklaşım sergilenmek istendiğinde kenar uzunluğu Fibonacci dizisinin elemanları olan kareler çizilerek işe başlanır. Dizinin elemanlarının 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… şeklinde sıralandığı hatırlanır ve ilk önce birinci elemana karşılık gelen kare çizilirse:

Şekil 2.1. Kenarı 1 Birim olan kare

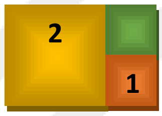
elde edilir.

Fibonacci dizisinin ikinci elemanı da 1 olduğundan şimdi de 1 birim uzunluklu bir kare çizilir ve bu bir önceki kare ile birleştirilirse:



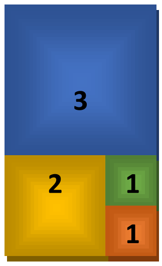
Şekil 2.2. Kenarları 1 Birim olan iki kare

elde edilen uzun kenarı 2 ve kısa kenarı da 1 birim olan bir dikdörtgendir. Fibonacci dizisinin üçüncü elemanı kullanılarak kenar uzunluğu 2 birim olan bir kare çizilip bu bir üstte çizilen şekil ile birleştirilirse:



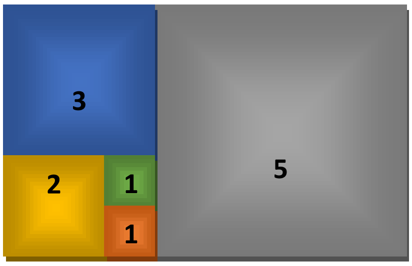
Şekil 2.3. Kenarı 2 birim olan karenin şekle eklenmesi

son eklenen kare ile birlikte uzun kenarı 3 birim ve kısa kenarı da 2 birim olan bir dikdörtgen oluşur. Şimdi dizinin dördüncü elemanı kullanılarak aynı mantıkla kenarı 3 birim olan bir kare çizilip, bir önceki şeklin uzun kenarına ilave edilirse:



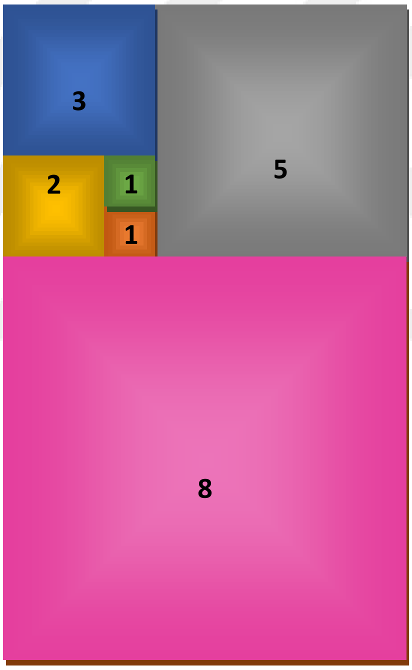
Şekil 2.4. Kenarı 3 birim olan karenin şekle eklenmesi

son çizim ile uzun kenarı 5 birim ve kısa kenarı da 3 birim olan bir dikdörtgen elde edilir. Bir sonraki Fibonacci sayısı 5. Aynı şekilde 5 birim kenar uzunluğuna sahip bir kare çizilip uzun kenarın yanına eklenirse:



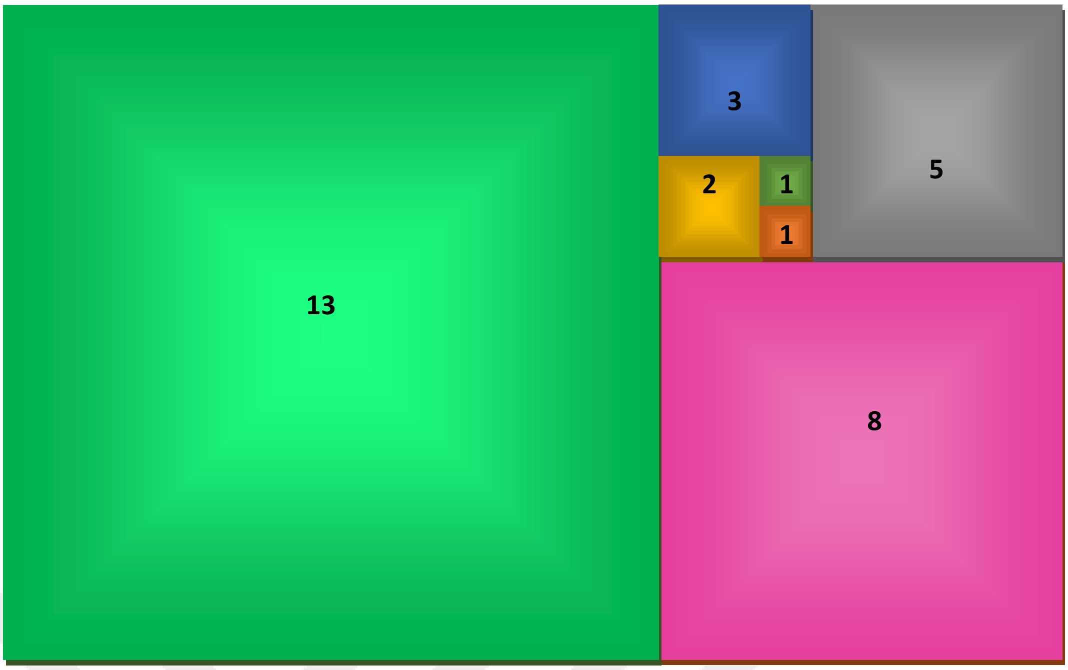
Şekil 2.5. Kenarı 5 birim olan karenin şekle eklenmesi

elde edilen dikdörtgenin uzun ve kısa kenarı sırasıyla 8 ve 5 birim olur. Şimdi Fibonacci dizisinin altıncı üyesi için aynı işlem uygulanıp bir kenarı 8 birim uzunluklu kare çizildikten sonra bir üstteki şekle ilave edilirse;



Şekil 2.6. Kenarı 8 birim olan karenin şekle eklenmesi

uzun kenarı 13 ve kısa kenarı 8 birim olan bir dikdörtgen elde edilir. Bu işlem, yedinci Fibonacci sayısı 13 ile devam edilerek son bir kez daha tekrarlanırsa; 13 birim kenar uzunluğuna sahip kare son şekle ilave edilerek:



Şekil 2.7. Kenarı 13 birim olan karenin şekle eklenmesi

21 birim ve 13 birim uzunluğunda uzun ve kısa kenara sahip bir dikdörtgen elde edilir. Bu işlemlerden sonra elde edilen dikdörtgenlerin uzun kenarlarının kısa kenarlarına oranlarına bakıldığında;

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13}\dots$$

olduğu görülür. Kolayca fark edilebileceği gibi kesirlerin payları ve paydaları Fibonacci sayılarından oluşmaktadır. Hatta paydaki değerler, paydadaki değerlerin diziye göre ardışığı konumundadır. Bu kesirlerin (ve bu işleme devam ederek elde edilen diğer kesirlerin) ondalık değerlerine bakılırsa şimdi verilecek olan çizelge elde edilir.

Çizelge 2.2. Ardışık Fibonacci sayılarının oranları

${F_2}/{F_1}$	${1}/{1}$	1,0000000000
${F_3}/{F_2}$	${2}/{1}$	2,0000000000
${F_4}/{F_3}$	${3}/{2}$	1,5000000000
${F_5}/{F_4}$	${5}/{3}$	1,6666666666
${F_6}/{F_5}$	${8}/{5}$	1,6000000000
${F_7}/{F_6}$	${13}/{8}$	1,6250000000
${F_8}/{F_7}$	${21}/{13}$	1,6153846154
${F_9}/{F_8}$	${34}/{21}$	1,6190476190
${F_{10}}/{F_9}$	${55}/{34}$	1,6176470588
${F_{11}}/{F_{10}}$	${89}/{55}$	1,6181818182
${F_{12}}/{F_{11}}$	${144}/{89}$	1,6179775281
${F_{13}}/{F_{12}}$	${233}/{144}$	1,6180555556

Değerlerin önce artıp sonra azaldığı ve bunun böyle devam ettiği çizelgeden kolayca görülebilir. Bu artma ve azalmada değişim giderek küçülüyor ve terimler büyüdükçe (yani n değeri arttıkça) elde edilen oran belirli bir değere yaklaşıyor. 13’üncü terimin 12’nci terime oranına ve bundan sonra gelen oranlara bakılacak olursa, elde edilen değerin ilk beş hanesinin $1{,}6180'$de sabitlendiği ve değişimlerin diğer basamaklarda yani daha küçük aralıklarda gerçekleştiği gözlemlenebilir. Kısaca terimler büyüdükçe değişim daha küçük aralıklarda gerçekleşir ve oran sabit bir sayıya doğru yaklaşır.

Matematikte yaklaşılan bu sayı;

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

şeklinde ifade edilir. Yani n değeri sonsuza gittikçe bir başka deyişle dizinin terimleri çok büyüdükçe hesaplanan oran yaklaşılan sayıdır ve bu sayı altın oran olarak da bilinen sayının kendisidir.

Fibonacci sayı dizisinin terimlerini ifade etmek için kullanılan bir ifade de Binet Formülüdür. Bu formül;

$$x^2 - x - 1 = 0$$

karakteristik denkleminin kökleri olan;

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ,\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

değerleri dikkate alınarak ifade edilir. Karakteristik denklemin kökleri α ve β olduğundan $\alpha + \beta = 1$, $\alpha.\beta = -1$dır.

α' nın sıralı kuvvetleri;

$$\alpha = 1.\alpha + 0$$
$$\alpha^2 = 1.\alpha + 1$$
$$\alpha^3 = 2.\alpha + 1$$
$$\alpha^4 = 3.\alpha + 2$$
$$\vdots$$

şeklinde olup eşitliğin sağ tarafında bulunan cebirsel ifadelerin katsayılarının Fibonacci sayıları olduğu görülür. Bu özellikten faydalanarak bir sonraki sonuç yazılabilir.

2.3.2. Sonuç: $n \geq 0$ *olmak üzere*

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}, \qquad \beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$$

dir (Koshy 2001) .

Böylece Fibonacci sayı dizisi Binet formülü olarak isimlendirilen formül ile aşağıda verilen teoremdeki gibi ifade edilebilir.

2.3.3. Teorem: $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin pozitif kökü α, negatif kökü ise β olsun. Bu taktirde $n \geq 1$ iken

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dır (Koshy 2001) .

Bir önceki teoremde Fibonacci sayı dizisinin n. terimi F_n'i ifade etmek için verilmiş olan formüle Fibonacci sayıları için Binet formülü denir. Fibonacci sayıları için sadece tekrarlama bağıntısından bahsedilemez. Buna benzer olarak verilmiş bazı temel özdeşlikler vardır. Bu özdeşliklerden ikisi sıradaki sonuçta ifade edilmiştir.

2.3.4. Sonuç: $n \geq 0$ olmak üzere

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$
$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

dir (Koshy 2001) .

Fibonacci sayıları için olduğu gibi Lucas sayıları için de bir Binet formülü vardır.

2.3.5. Teorem: $n \geq 1$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir (Koshy 2001) .

Bu teoremde verilmiş olan Lucas dizisinin $n.$ terimini ifade eden formüle Lucas dizisi için Binet formülü denir. Fibonacci ve Lucas sayıları için verilen iki Binet formülü kullanılarak çeşitli özdeşlikler elde edilebilir. Ayrıca bu iki sayı dizisi arasında bağlantı mevcut olduğundan birbiri cinsinden ifade etmek mümkündür. Bu durumu gösteren özdeşliklerden bazıları bir sonraki sonuçta verilmiştir.

2.3.6. Sonuç:

$$F_{2n} = F_n L_n \tag{2.2}$$

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n \tag{2.3}$$

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{2.4}$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{2.5}$$

Sonuç 2.3.6'da verilen (2.2) ve (2.3) özdeşlikleri kullanılarak ilginç bir eşitlik elde edilebilir. $m \geq 1$ iken $2n = 2^m$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} F_{2^m} &= L_{2^{m-1}} F_{2^{m-1}} \\ &= L_{2^{m-1}} (L_{2^{m-2}} F_{2^{m-2}}) = L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} F_{2^{m-2}} \\ &= L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} (L_{2^{m-3}} F_{2^{m-3}}) = L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} L_{2^{m-3}} F_{2^{m-3}} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemler uygulanmaya devam edilirse

$$F_{2^m} = L_{2^{m-1}} L_{2^{m-2}} \ldots L_8 L_4 L_2 L_1$$

eşitliği elde edilir (Koshy 2001) .

Örneğin; $F_{32} = L_{16} L_8 L_4 L_2 L_1$

$= 2207.47.3.1 = 2{,}178{,}309$.

Fibonacci sayıları arasında tekrarlama bağıntısı, özdeşlikler olduğu gibi bir başka önemli olan durum da birbirleriyle ilişkileridir. Bu ilişkiye örnek olarak aşağıdaki sonuç ve teoremler verilebilir.

2.3.7. Teorem: $n \geq 1$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir (Cassini Formülü) (Koshy 2001) .

2.3.8. Sonuç: Herhangi iki ardışık Fibonacci sayısı aralarında asaldır. Yani her $n \geq 0$ için $(F_{n+1}, F_n) = 1$ dir (Koshy 2001) .

2.3.9. Teorem: Bir pozitif n sayısı Fibonacci sayısıdır ancak ve ancak $5n^2 \pm 4$ bir tam karedir (Koshy 2001) .

3. FİBONACCİ SAYILARI İLE BALANS SAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

3.1. Temel Kavramlar, Fibonacci ve Balans (Denge) Sayıları

3.1.1. Tanım: Bazı $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayısına Balans (denge) sayısı denir. Burada r'ye ise n Balans sayısına karşılık gelen dengeleyici sayı denir.

Örneğin r'nin 2, 14 ve 84 değerlerine karşılık sırasıyla n Balans (denge) sayıları olarak 6, 35 ve 204 değerleri elde edilir.

Eğer r dengeleyici sayısı ile n bir Balans sayısı ise (3.1) denkleminden;

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

elde edilir ve böylece

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

olduğu görülür.

Bir önceki tanımda ifade edilen Balans (denge) sayılar kendilerine has bir tekrarlama bağıntısına sahiptir. Öyle ki; Balans sayı dizisi $B_0 = 1$ ve $B_1 = 6$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısına sahiptir.

Balans (denge) sayıları için var olan tekrarlama bağıntısı aşağıda verilen iki ifadenin taraf tarafa toplanması ile elde edilir. Yani $B_0 = 1$ ve B_n, n'inci terim olmak üzere

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

ve

$$B_{n-1} = 3B_n - \sqrt{8B_n^2 + 1}$$

eşitlikleri alt alta toplandığında Balans (denge) sayıları için yukarıda ifade edilen tekrarlama bağıntısı elde edilir (Behera ve Panda 1999) .

Bir Balans (denge) sayısına sahip olunduğunda buradan hareketle yeni Balans (denge) sayıları elde etmeyi sağlayan Balans (denge) üreteç fonksiyonları vardır. Eğer x herhangi bir Balans (denge) sayısı ise;

$F(x) = 2x\sqrt{8x^2 + 1}$, $G(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$ ve $H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 1}$

fonksiyonları daima Balans (denge) sayıları üretir (Behera ve Panda 1999) .

Balans sayıları ile ilgili olarak aşağıdaki teoremler de verilebilir.

3.1.2. Teorem: n' nin bir Balans sayısı olması için gerek ve yeter şart n^2 nin bir üçgensel sayı olmasıdır (Dickson 1952) .

3.1.3. Teorem: n bir Balans (denge) sayısıdır ancak ve ancak $8n^2 + 1$ bir tam karedir (Behera Panda 1999) .

Behera ve Panda (1999), 1'i bir Balans sayısı olarak kabul ederlerken n'inci Balans sayısı için B_n sembolünü kullanarak $B_0 = 1$, $B_1 = 6$ v.b. olduğunu kabul etmişlerdir. Balans sayılarının gösterimi Fibonacci sayılarının standart gösterimi ile eşitlenmek istenirse $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ v.b. ayarlanarak Balans sayıları yeniden düzenlenir.

Behera ve Panda tarafından ortaya konan bazı sonuçlar bu yeni durum ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

İkinci mertebeden lineer tekrarlama bağıntısı;

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \,; \quad n = 2,3,\ldots \tag{3.2}$$

Birinci mertebeden lineer olmayan tekrarlama bağıntısı;

$$B_{n+1} = 3B_n + \sqrt{8B_n^2 + 1} \,; \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Balans sayıları ayrıca;

$$B_n = B_{r+1}B_{n-r} - B_rB_{n-r-1} \,; \quad r = 1,2,\ldots,n-2 \tag{3.4}$$

özdeşliği ile de ifade edilebilir.

Fibonacci ve Lucas sayılarına benzer olarak Balans sayıları için bir Binet Formülü bulunmak istenirse; $B_{n+1} - 6B_n + B_{n-1} = 0$ eşitliğinin karakteristik denklemi olan

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$$

denkleminin $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}\,, \lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ kökleri kullanılarak

$$B_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \,, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

elde edilir (Behera ve Panda 1999) .

Balans sayıları arasında bir başka özdeşlik;

$$B_{n+1}B_{n-1} = (B_n + 1)(B_n - 1) \qquad (3.6)$$

şeklindedir.

Şimdi ikinci mertebeden lineer denklem (3.2) kullanılarak $B_0 = B_2 - 6B_1 = 6 - 6 \times 1 = 0$ olarak elde edilir (Panda 2006) .

3.1.4. Teorem: m ve n birer doğal sayı ve $m > n$ ise

$$(B_m + B_n)(B_m - B_n) = B_{m+n}B_{m-n} \qquad (3.7)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Balans sayıları için verilen Binet formülü (3.5) kullanılır ve $\lambda_1\lambda_2 = 1$ olduğu akılda tutulursa;

$$\begin{aligned}
B_{m+n}B_{m-n} &= \frac{(\lambda_1^{m+n} - \lambda_2^{m+n})(\lambda_1^{m-n} - \lambda_2^{m-n})}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \\
&= \frac{(\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m})-(\lambda_1^{m+n}\lambda_2^{m-n}+\lambda_1^{m-n}\lambda_2^{m+n})}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\
&= \frac{(\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m})-(\lambda_1^{2n}+\lambda_2^{2n})}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\
&= \frac{(\lambda_1^{2m}+\lambda_2^{2m}-2\lambda_1^{m}\lambda_2^{m})-(\lambda_1^{2n}+\lambda_2^{2n}-2\lambda_1^{n}\lambda_2^{n})}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\
&= \left[\frac{\lambda_1^{m}-\lambda_2^{m}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]^2 - \left[\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2}\right]^2 \\
&= B_m^2 - B_n^2 = (B_m + B_n)(B_m - B_n)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Panda 2006) .

Uyarı: Fibonacci sayıları da benzer olarak aşağıdaki eşitliği sağlar (Hoggatt Jr. 1969) .

$$F_{m+n}F_{m-n} = F_m^2 - (-1)^{m+n}F_n^2 \qquad (3.8)$$

Teorem 3.1.4'deki (3.7) özdeşliği (3.8) eşitliğinden daha simetrik görünür.

n bir doğal sayı iken $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$, $2+4+\cdots+2n=n(n+1)$ ve $1+2+\cdots+2n=n(2n+1)$ eşitliklerinin sağlandığı bilinir. Bir sonraki teoremde Balans sayılarının da benzer özdeşliklere sahip olduğu gösterilecektir.

3.1.5. Teorem: n bir doğal sayı ise;

$$B_1 + B_3 + \cdots + B_{2n-1} = B_n^2\,,$$
$$B_2 + B_4 + \cdots + B_{2n} = B_n B_{n+1}\,,$$
$$B_1 + B_2 + \cdots + B_{2n} = B_n(B_n + B_{n+1})$$

eşitlikleri sağlanır (Panda 2006) .

3.2. Fibonacci Dizisi İçinde Balans ve Kobalans Sayıları

Burada temel tartışmalardan biri de Fibonacci sayılarının Balans (denge) sayıları olup olmayacağıdır.

Fibonacci dizisi içinde bir Balans sayısı F_m olsun. F_m bazı s değerleri için

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1} = F_{m+1} + F_{m+2} + \cdots + F_{m+s}$$

eşitliğini sağlar. Ama

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1} = F_{m+1} - 1$$

olduğu bilinir.

Böylece her m doğal sayısı için

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{m-1} < F_{m+1}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak Fibonacci dizisi içinde herhangi bir Balans sayısı yoktur.

Tanım 3.2.1: Bazı r doğal sayıları için

$$1 + 2 + \cdots + n = (n+1) + (n+2) + \cdots (n+r)$$

eşitliğini sağlayan n pozitif sayısına Kobalans sayısı denir.

Benzer şekilde Fibonacci dizisi içinde bir Kobalans sayısına F_m denirse, F_m bazı s değerleri için

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_m = F_{m+1} + F_{m+2} + \cdots + F_{m+s}$$

eşitliğini sağlar. $m > 2$ için

$$F_{m+1} < F_1 + F_2 + \cdots + F_m < F_{m+1} + F_{m+2}$$

eşitsizliğine bakıldığında Kobalans sayısı olabilecek bir Fibonacci sayısının olmadığı görülür. $m \leq 2$ için

$$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 = F_3$$

olduğundan Fibonacci dizisi içindeki tek Kobalans sayısı $F_2 = 1$ dir (Panda 2007).

Fibonacci sayılarının indisleri Balance sayılar gibi düşünülerek yüksek dereceleri incelendiğinde ise şu durumlar gözlemlenir.

3.2.2. Teorem: Eğer $k \leq l$ ise $n \geq 2$ olmak üzere n ve r pozitif tamsayıları için;

$$F_1^k + F_2^k + \cdots + F_{n-1}^k = F_{n+1}^l + F_{n+2}^l + \cdots + F_{n+r}^l$$

Diophant denkleminin çözümü yoktur.

İspat: $k \leq l$ için $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ eşitliği kullanılırsa

$$F_1^k + F_2^k + \cdots + F_{n-1}^k \leq (F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1})^k = (F_{n+1} - 1)^k < F_{n+1}^k \leq F_{n+1}^l$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da verilen şartlarda eşitliğin sağlanmadığını gösterir (Behera ve ark. 2011).

Bir sonraki teoremin ifadesinin ve ispatının anlaşılabilmesi için aşağıdaki iki yardımcı teorem ve sonuç verilmek durumundadır.

3.2.3. Yardımcı Teorem: u_0 pozitif bir tamsayı olsun. $i = 1,2$ için

$$\delta_i = \log_\alpha \left(\left(1 + (-1)^{i-1} \left(\frac{|\beta|}{\alpha} \right)^{u_0} \right) / \sqrt{5} \right)$$

dir. Böylece tüm $u \geq u_0$ tamsayıları için $\alpha^{u+\delta_2} \leq F_u \leq \alpha^{u+\delta_1}$ eşitsizliği sağlanır (Behera ve ark. 2011) .

3.2.4. Sonuç: Eğer $u_0 \geq 6$ ise $\delta_1 < -1{,}66$ ve $\delta_2 > -1{,}68$ dir (Behera ve ark. 2011) .

3.2.5. Yardımcı Teorem: $a > 0$ ve $b \geq 0$ gerçek sayılar, u_0 bir pozitif gerçek sayı olmak üzere her $u \geq u_0$ için $\kappa = \log_\alpha \left(a + \frac{b}{\alpha^{u_0}} \right)$ iken $a\alpha^u + b \leq \alpha^{u+\kappa}$ dir (Behera ve ark. 2011) .

3.2.6. Teorem: $n\ ve\ r$ pozitif tamsayıları için $n \geq 2$ iken

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2 = F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+r}$$

Diophant denkleminin çözümü yoktur.

İspat: $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ ve $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ eşitlikleri kullanılarak

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2 = F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+r}$$

denkleminin

$$F_{n-1}F_n + F_{n+2} = F_{n+r+2} \tag{3.9}$$

denklemine eşit olduğu görülür.

$n = 2,3, \ldots ,6$ için $F_{n-1}F_n + F_{n+2}$ ifadesi bir Fibonacci sayısına eşit olmadığından $n \geq 7$ olduğu varsayılabilir. Sonuç 3.2.4 kullanılarak (3.9) eşitliğinin her iki tarafının alt ve üst sınırları bulunabilir.

İlk olarak

$$F_{n-1}F_n + F_{n+2} > F_{n-1}F_n > \alpha^{n-1,68}\alpha^{n-1-1,68} = \alpha^{2n-4,36} \tag{3.10}$$

olduğu gözlemlenir.

Diğer yandan

$$F_{n-1}F_n + F_{n+2} < \alpha^{n-1,66}\alpha^{n-1-1,66} + \alpha^{n+2-1,66} = \alpha^{n+0,34}(\alpha^{n-4,66} + 1) \tag{3.11}$$

dir.

$a = b = 1$ alınarak Yardımcı Teorem 3.2.5 kullanılırsa $\kappa < 0{,}68$ elde edilir. (3.11) deki eşitsizlik nedeniyle

$$F_{n-1}F_n + F_{n+2} < \alpha^{n+0{,}34}(\alpha^{n-4{,}66} + 1) < \alpha^{n+0{,}34}\alpha^{n-4{,}66+0{,}68} = \alpha^{2n-3{,}64} \qquad (3.12)$$

olur.

Tekrar Sonuç 3.2.4'den

$$\alpha^{n+r+0{,}32} = \alpha^{n+r+2-1{,}68} < F_{n+r+2} < \alpha^{n+r+2-1{,}66} = \alpha^{n+r+0{,}34} \qquad (3.13)$$

elde edilir.

Böylece eğer n ve r pozitif tamsayıları için (3.9) eşitliği sağlanıyorsa

$$2n - 4{,}36 < n + r + 0{,}34$$

ve

$$n + r + 0{,}32 < 2n - 3{,}64$$

eşitsizliklerinin sağlanması ve (3.12) , (3.13) eşitsizlikleri nedeniyle

$$max\{2n - 4{,}36\,, n + r + 0{,}32\} < min\{2n - 3{,}64\,, n + r + 0{,}34\}$$

sonucu elde edilir.

Böylece $r = n - 4$ iken n ve r pozitif tamsayıları

$$n - 4{,}7 < r < n - 3{,}96$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece $n \geq 7$ ise (3.9) eşitliği

$$F_{n-1}F_n + F_{n+2} = F_{2n-2}$$

eşitliğine dönüşür.

Ancak $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ kuralı $F_{n-1}F_n + F_{n+2} = F_{2n-2}$ denklemini basitleştirerek

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_{n-2}$$

denklemine dönüştürür.

$n = 8,9,10$ için $F_{n+2} = F_{n-1}F_{n-2}$ denkleminin doğru olmadığı kolayca görülür. Eğer $n > 10$ alınırsa, örneğin $n + 2 > 12$ ise ilkel bölen teoreminden (Carmichael 1913) dolayı F_{n+2} , F_{n-1} ve F_{n-2} den herhangi birini bölmeyen bir asal çarpana sahiptir. Böylece her $n \geq 7$ için $F_{n+2} = F_{n-1}F_{n-2}$ eşitliği sağlanmaz ve bu nedenle $F_{n-1}F_n + F_{n+2} = F_{n+r+2}$ denkleminin çözümü yoktur (Behera ve ark. 2011) .

3.2.7. Teorem: $n \; ve \; r$ pozitif tamsayıları için $n \geq 2$ iken

$$F_1^3 + F_2^3 + \cdots + F_{n-1}^3 = F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots + F_{n+r}$$

Diophant denkleminin çözümü yoktur (Behera ve ark. 2011) .

3.2.8. Teorem: $n \; ve \; r$ pozitif tamsayıları için $n \geq 2$ iken

$$F_1^3 + F_2^3 + \cdots + F_{n-1}^3 = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + \cdots + F_{n+r}^2$$

Diophant denkleminin çözümü yoktur (Behera ve ark. 2011) .

Fibonacci sayıları için Balans sayıları ile ilişkisine benzer olarak Lucas sayıları ile olan ilişkisi kullanılıp çeşitli indis ve üslerle şimdi verilecek olan eşitlikler elde edilebilir.

3.2.9. Teorem: n ve k tam sayılar olsun.

$$F_n^4 + ((-1)^{k+1}L_{2k} + 1)F_{n+k}^4 + ((-1)^{k+1}L_{2k} + 1)F_{n+2k}^4 + F_{n+3k}^4$$
$$= F_k L_{2k} F_{3k} F_{2n+3k}^2 + 10(-1)^k F_{k-1} F_k^4 F_{k+1}$$

(Melham 2010) .

3.2.10. Teorem: n ve k tam sayılar olsun.

$$(-1)^{k+1}F_n^6 + (L_{4k} + 1)F_{n+k}^6 + (-1)^{k+1}(L_{4k} + 1)F_{n+2k}^6 + F_{n+3k}^6$$
$$= F_k F_{3k} F_{5k} F_{2n+3k}^3 + 15(-1)^k F_{k-1} F_k^4 F_{k+1} F_{3k} F_{2n+3k}$$

(Melham 2010).

3.2.11. Teorem: a_i , $0 \leq i \leq 5$ ve b_i , $0 \leq i \leq 2$ şöyle tanımlansın;

$a_0 = a_5 = 1$;
$a_1 = a_4 = (-1)^{k+1}(L_{6k} + L_{2k}) + 1$;
$a_2 = a_3 = L_{8k} + (-1)^{k+1}L_{6k} + L_{4k} + (-1)^{k+1}L_{2k} + 2$;
$b_0 = F_k F_{3k} L_{4k} F_{5k} F_{7k}$;
$b_1 = 4(-1)^k F_k^4 F_{3k} F_{5k}(L_{8k} + 3(-1)^k L_{6k} + 6L_{4k} + 10(-1)^k L_{2k} + 9)$;
$b_2 = 2F_k^7 F_{3k}(L_{10k} + 6(-1)^k L_{8k} + 21L_{6k} + 56(-1)^k L_{4k} + 99L_{2k} + 117(-1)^k)$

Böylece

$$a_0 F_n^8 + a_1 F_{n+k}^8 + a_2 F_{n+2k}^8 + a_3 F_{n+3k}^8 + a_4 F_{n+4k}^8 + a_5 F_{n+5k}^8$$
$$= b_0 F_{2n+5k}^4 + b_1 F_{2n+5k}^2 + b_2$$

eşitliği sağlanır (Melham 2010).

4.SONUÇ

Bu çalışmada özel sayılardan Fibonacci ve Lucas sayıları ele alınmış, Fibonacci sayıları ile Balans sayıları arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu konular ile ilgili gerekli literatür taraması yapılmış ve çalışmanın esas kısmını oluşturan Balans sayıları ile ilgili olarak çeşitli makaleler incelenmiştir. İlk olarak "Balancing with Fibonacci Powers" (Behera ve ark. 2011) başlıklı makaleye ve daha sonrasında da Behera ve Panda'nın 1999 yılında yapmış olduğu "On the Square Roots of Triangular Numbers" adlı makaleler ele alınmıştır. Özellikle "On the Square Roots of Triangular Numbers" başlıklı makalenin Teorem 2.1 ve Teorem 7.1'de bulunan ifadelerinden motivasyon alınıp benzer özelliklerin Fibonacci sayıları için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır. Böylece ilgili makaleler ve kitaplardan faydalanılarak bir derleme yapılmıştır.

KAYNAKLAR

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Framingham, Massachusetts, 652 pp.

Dickson, L. E. 1952. History of the Theory of Numbers II: Diophantine Analysis. Chelsea, New York, 803 pp.

Hoggat Jr. , V. E. 1969. Fibonacci and Lucas Numbers. Houghton Mifflin Company, 100 pp.

Behera, A., Panda, G. K. 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 37(2): 98-105.

Panda, G. K. 2006. Some Fascinating Properties of Balancing Numbers. *Fibonacci Numbers and Their Applications*, 10: 1-7.

Panda, G. K. 2007. Sequence Balancing and Cobalancing Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 45(3): 265-271.

Behera, A., Liptai, K., Panda, G. K., Szalay, L. 2011. Balancing with Fibonacci Powers. *The Fibonacci Quarterly*, 49(1): 28-33.

Melham, R. S. 2010. On Certain Combinations of Higher Powers of Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 48(3): 256-259.

Carmichael, R. D. 1913. On the Numerical Factors of the Arithmetic Forms $\alpha^n \pm \beta^n$. *Annals of Mathematics*, 15(2): 30-70.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Kübra NAİR
Doğum Yeri ve Tarihi	: Yenimahalle 1991
Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) :

Lise	: Alparslan Anadolu Lisesi 2004-2008
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi 2011-2016
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi 2016-

İletişim (e-posta) : kubranair@gmail.com