58145

L^2 DE HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ

Birol TOPÇU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

1997

58145

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Birol TOPÇU'nun YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " L^2 de Hilbert Dönüşümleri " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

10.07.1997

Tez Danışmanı : Yard.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM

Diğer Jüri Üyeleri : Yard.Doç.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Yard.Doç.Dr. İsmail ÖZKAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17.07.1997 gün ve 8/10......sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Yard.Doç.Dr. Ahmet SERTESER
Enstitü Müdürü

T.C.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

L^2 DE HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ

Birol TOPÇU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu Tez 10.07.1997..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından (.......85...............)
Not Takdir Edilerek Oy Birliği İle......Kabul...........Edilmiştir.

Yard.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM Y.Doç.Dr.İSMAİL ÖZKAN Y.Doç.Dr.İsmail EKİNCİOĞLU

Danışman

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

L^2 DE HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ

Birol TOPÇU

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM
1997, Sayfa:39

Jüri: Yard.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM
Yard.Doç.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Yard.Doç.Dr. İsmail ÖZKAN

Bu tez üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm temel kavramlara ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan Hilbert dönüşümü tanımlanarak, Poisson çekirdeği, Poisson integralinin tanımı, Riezs operatörü, Riezs dönüşümü, Calderon-Zygmund operatörü ve Calderon-Zygmund çekirdeği ile ilgili bilgiler verildi. L^2 uzayında Konjuge Poisson integrali ile bu uzaydaki bir fonksiyonun Hilbert dönüşümünün Poisson integralinin hemen hemen her yerde karşılaştırılabileceği gösterildi. Üçüncü bölümde; çarpım operatörü, genişleme operatörü ve Calderon-Zygmund çekirdekleri ile verilen Singüler İntegral Operatörleri tanımlanarak özellikleri incelendi. Sonuç olarak Riezs dönüşümlerinin geometrik karakterizasyonu ile ilgili bir teorem verildi.

ANAHTAR KELİMELER:

Hilbert Dönüşümü
Calderon-Zygmund Çekirdeği
Calderon-Zygmund Operatörü
Poisson Çekirdeği
Çarpım Operatörü
Riezs Dönüşümü

ABSTRACT

MSc. Thesis

HİLBERT TRANSFORMS IN L^2

Birol TOPÇU

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
1997, Page:39

Jury : Assoc. Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM
Assoc. Prof. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU
Assoc. Prof. Dr. İsmail ÖZKAN

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, we dealt with the basic concepts . In the second chapter, by defining the Hilbert Transform which is required for our study, information about the Poison Kernel, definition of Poisson Integral, The Riezs Operator, Riezs Transform, Calderon-Zygmund Operator and Calderon-Zygmund Kernel were given. It was shown that in L^2 space, almost everywhere, It was comparable a Poissn integral of Hilbert Transform of a function with conjugate Poisson integral. In the third chapter, the multiplier operator, extension operator, the Singular İntegral Operator that was obtained by Calderon-Zygmund Kernels, and their specialities were defined. Consequently, a theorem Geometric Characterization of the Riezs Transforms were illustrated.

KEY WORDS: Hilbert Transform
Calderon-Zygmund Kernel
Calderon-Zygmund Operator
Poisson Kernel
Multiplier Operator
Riezs Transform

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yard.Doç.Dr. HÜSEYİN YILDIRIM'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

L^p	:	*p. kuvvetten (mertebeden) integrallenebilen fonksiyonların cümlesi*
$L_{loc}(R^n)$	:	R^n *de lokal (bölgesel) integrallenebilir fonksiyonların sınıfı*
$L^1 = L$	:	*İntegrallenebilir fonksiyonların sınıfı*
$L^p(\log^+ L)^q$	:	*Zygmund sınıfı*
L^∞	:	$f \in L^\infty(R^n)$ *icin* R^n *üzerinde sınırlı fonksiyonların cümlesidir*
R^n	:	$n -$ *boyutlu öklid uzayı,* $x = (x_1, ..., x_n)$, $x \in R^n$
R_+	:	$(0, \infty)$ *aralığı*
R_n^+	:	*Üst yarı uzay* : $\{x : x = (x_1, ..., x_n), \ \ x_n > 0\}$
$\widehat{f}, F(f)$	:	f *fonksiyonunun Fourier dönüşümü*
T	:	*Birim daire*
k	:	*Calderon – Zygmund cekirdeği*
$Q(x,r)$	:	*Eksenlere paralel kenarlı* x *merkezli* r *yarıcaplı bir küp*
$S(x,r)$	:	x *merkezli* r *yarıcaplı bir küre*
H	:	*Hilbert dönüşüm operatörü*
K	:	*Singüler integral operatörü*
R_j	:	*Riesz dönüşüm operatörü*
$\Gamma_\alpha(x_0)$	:	R_+^{n+1}*de,* $x_0 \in R^n$ *tepeli ve* α *catılı bir koni*
$\|E\|$	:	E *cümlesinin Lebesgue ölcüsü*

χ_E : *E cümlesinin karakteristik fonksiyonu*

P.V. : *Esas değer*

$\sum$: R^n *de birim küre*

$\sum^+$: *Yarı küre*

τ_h : R^n *de genişleme operatörü*

Δ : *Laplace operatörü*

$\Lambda' f(x)$: *Farklı merkezli Hardy – Littlewood maksimal fonksiyonu*

$\Lambda^\sharp$: *Sharp maksimal operatörü*

BMO : *Bounded mean oscillation fonksiyonlarının sınıfı*

$\Lambda^\sharp f(x)$: *Sharp maksimal fonksiyonu*

L_f : *f in Lebesgue cümlesi*

$f * g$: *konvolüsyon*

$H^1(T)$: *Hardy uzayı*

$Q_r(t)$: *T de konjuge Poisson cekirdeği*

$Q_y(x)$: R^n *de konjuge Poisson cekirdeği*

$P_r(t)$: *T de Poisson cekirdeği*

$P_y(x)$: R^n *de Poisson cekirdeği*

GİRİŞ

Singüler İntegraller konusu Mihlin, Calderon, Zygmund ve Riezs'in çalışmaları sonucuna dayanarak 1930 lardan sonra önemli gelişmeler göstermiştir. Singüler İntegrallerin, Fourier serileri, Kısmi diferensiyel denklemler, Fonksiyonlar teorisi ve Analizin benzer dallarında yapılan çalışmalarla önemli ilişkileri vardır. Singüler İntegrallere örnek olarak genelde bir f fonksiyonunun Hilbert Dönüşümü olarak bilinen,

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt , \quad -\infty < x < \infty$$

dönüşümü verilir. Buradaki f fonksiyonu integrallenebilir olsabile, integral içerisindeki ifade $x = t$ durumunda singülerite olduğu için bu ,integral mevcut değildir. Bu durumda singülerlik noktasının, simetrik bir komşuluğunun çıkarılmasıyla integral esas değer anlamında (*principal value* $= p.v.$)

$$\tilde{f} = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt$$

integralini gözönüne alabiliriz. Bu esas değer integrali analitik fonksiyonların sınır değer çalışmalarında karşımıza çıkar.

Bu çalışmamızda yukarıda belirtildiği gibi Hilbert dönüşümünü gözönüne alarak Poisson integrali ve konjuge Poisson integraliyle ilişkilerini araştırdık. Daha sonra L^2 teorisinde n boyutlu Hilbert uzayını gözönüne alarak, bu uzaydaki Calderon-Zygmund Operatörünü ve özelliklerini inceledik.

Sonuç olarakta; Riesz Dönüşümlerinin geometrik karakterizasyonu ile ilgili bir teorem verdik.

BöLÜM I

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1: Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşümlere *operatör* denir.

Tanım 1.1.2:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörüne R^n de *Laplace operatörü* denir.

Tanım 1.1.3: Eğer bir $f(x)$ için h.h.h.yerde $f(x) \geq 0$ iken h.h.h. yerde $Tf(x) \geq 0$ ise T operatörüne *pozitif operatör* denir [*Samko* 1993].

Tanım 1.1.4: Eğer, her $f \in L^2(R^n)$ için,

$$(Tf)^{\wedge}(x) = \sigma(x)\widehat{f}(x)$$

ise, $T : L^2(R^n) \to L^2(R^n)$, $n \geq 1$ operatörüne $\sigma(x) \in L^\infty(R^n)$ sembollü bir *çarpım operatörü* denir. Burada, $\sigma(x) = -i sgn\, x$ dir [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.5:

$$Kf = f * P.V.\, k(x) = P.V. \int_{R^n} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x-t|>\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt$$

singüler integralinde $\Omega_j(x) = \frac{x_j}{|x|}$ alınırsa R_j *Riesz operatörü* elde edilir [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.6 (Genişleme operatörü):

$$\tau_\rho(f(x)) = f(\rho x)$$

ile tanımlanan τ_ρ operatörüne *genişleme operatörü* denir [*Stein* 1970].

Tanım 1.1.7 (Lineer operatör): L ve L^1 aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \to L^1$ operatörü,

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \ \ \alpha \in F$$

şartlarını sağlıyorsa T ye *lineer operatör* denir [*Bayraktar* 1996].

Tanım 1.1.8: G, R^n in açık irtibatlı alt cümlesi ve $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ de G de tanımlı $n-$ *değişkenli* bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

denklemine *Laplace denklemi* veya *potansiyel denklemi* denir. Bu denklemin çözümlerine *potansiyel fonksiyonları* veya *harmonik fonksiyonlar* denir.

Tanım 1.1.9 (Destek-Support): Bir f fonksiyonunun desteği,

$$Supp\ f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır [*Schwarz* 1966].

Tanım 1.1.10: Her $\lambda > 0$ ve $x \in R^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise, $K(x)$ çekirdeğine α. *dereceden homogendir* denir.

Tanım 1.1.11: $\forall\alpha$ reel değeri için $\{x : f(x) > \alpha\}$ cümlesi ölçülebilir ise f fonksiyonu R^n de *lebesgue ölçülebilirdir.*

Tanım 1.1.12: f ve K, R^n de tanımlı ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$h(x) = (f * K)(x) = \int_{R^n} f(y)K(x-y)dy$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonuna f ve K nın *konvolüsyonu* denir. Eğer, $\alpha = n$ ise $h(x)$ integraline *singüler integral* denir. Burada α, K nın homogenlik mertebesi ve n uzayın boyutudur. Ayrıca,

$$F(f * g) = Ff\, Fg$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 1.1.13 (L^p Uzayı): f, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$L^p = L^p(R^n) = \left\{ f : \int_{R^n} |f(x)|^p\, dx < \infty,\ 1 \leq p < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir [*Neri* 1971].

Tanım 1.1.14: $x, y \in R^n$ olmak üzere,

a. (Fourier Dönüşümü): $x.y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ şeklinde tanımlansın. Bu halde, $f \in L(R^n)$ için, f fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$Ff(x) = \widehat{f}(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi ixy} f(y)dy$$

ile verilir [*Schwarz* 1966].

b. (Ters Fourier Dönüşümü): $f \in L(R^n)$ olmak üzere f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü,

$$f(x) = \int_{R^n} \widehat{f}(y) e^{i(x \cdot y)} dy$$

şeklinde tanımlanır [*Neri* 1971].

Tanım 1.1.15: $(-h, h)$ aralığında,

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (-h, h) \\ \\ 0 & , x \notin (-h, h) \end{cases}$$

ise $\chi_h(x)$ e *karakteristik fonksiyondur* denir [*Neri* 1971].

Tanım 1.1.16: $f : X \to R$ tanımlı bir fonksiyon ve A bir ölçülebilir uzay olsun. Bu durumda $\forall \alpha > 0$ için,

$$f^{-1}\left(]-\infty, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

oluyorsa f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

Tanım 1.1.17 (Lebesgue Cümlesi): $r \to 0$ iken,

$$\frac{1}{r^n} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\, dt \to 0$$

olacak şekildeki $x \in R^n$ noktalarının cümlesine *Lebesgue cümlesi* denir. Bununla birlikte $f \in L_{loc}$ fonksiyonunun Lebesgue cümlesini L_f ile tanımlayacağız [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.18 (Radial Fonksiyon): Verilen bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$f(x) = f(|x|)$$

sağlanıyorsa $f(x)$ e *radialdir* denir. Bu tanım uyarınca bir radial fonksiyon orjin etrafındaki dönmeler altında invaryanttır (değişmez) $\left(|x|^\alpha, e^{|x|^\alpha}\right)$ [*Samko* 1993].

Tanım 1.1.19 (Dağılım-Distribution): Kompakt desteğe sahip ve C^∞ sınıfına ait fonksiyonların sınıfı D olsun. Bu halde $T : D \to R$ yada $T : D \to C$ fonksiyonelleri lineer ve sürekli ise, T fonksiyoneli bir *dağılım* adını alır. $f \in D$ ve ϕ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\langle \phi, f \rangle = \langle T_\phi, f \rangle = \int_{R^n} f(x)\phi(x) dx$$

şeklinde tanımlanır [*Schwarz* 1966].

Tanım 1.1.20: $\mu > 0$, (X, μ) ölçülebilir bir uzay ve f, X üzerinde μ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Her $\alpha > 0$ için,

$$E_\alpha = E_\alpha(f) = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$$

ölçülebilir ve R^+ dan R^+ ya tanımlanan,

$$f_*(\alpha) = \mu(E_\alpha)$$

fonksiyonuna f in dağılım fonksiyonu denir [*Sadosky* 1979].
Tanım 1.1.21 (Zayıf tip): T, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere, $L^p(R^n)$ den $L^q(R^n)$ e bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$M\left\{x : |Tf(x) > \alpha| \leq \left(\frac{A\|f\|_p}{\alpha}\right)^q,\ \alpha > 0\right\}$$

ise, T, (p, q) *zayıf tipindedir.* Burada, $f \in L^p(R^n)$ ve A bir sabittir [*Stein* 1970].
Tanım 1.1.22 (Norm): N bir lineer uzay olsun. $\|\ \ \| : N \to R$ fonksiyonunun X deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\|\ \ \|$ ye N de *norm* denir.
N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.
N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad (\alpha \in F)$
N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir. [*Bayraktar* 1996].
Tanım 1.1.23 (Poisson çekirdeği): $\varepsilon > 0$ olmak üzere $e^{-2\pi\varepsilon|t|}$ ifadesine Fourier dönüşümü uygulandığında, bu sonucu P ile gösterirsek bu durumda,

$$P(x, \varepsilon) = P_\varepsilon(x) = c_n \frac{\varepsilon}{\left(\varepsilon^2 + |x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}},\ c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$$

olur. $P(x, \varepsilon)$ a *Poisson çekirdeği* denir [*Sadosky* 1979].
Tanım 1.1.24 (Weierstrass çekirdeği): $\varepsilon > 0$ olmak üzere $e^{4\pi^2\varepsilon|t|^2}$ ifadesine Fourier dönüşümü uygulandığında, bu sonucu W ile gösterirsek bu durumda,

$$W(x, \varepsilon) = W_\varepsilon(x) = (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4\varepsilon}}$$

olur. $W(x, \varepsilon)$ a *Weierstrass çekirdeği* denir [*Sadosky* 1979].
Tanım 1.1.25: R_+^{n+1} de tanımlı $u(x, t)$ fonksiyonu, eğer $\forall\alpha > 0$ ve herhangi bir C sabiti için,

$$\Gamma_\alpha(x_0) \cap \left\{(x, t) \in R_+^{n+1} : t \leq C\right\}$$

de sınırlı ise, $u(x, t)$ fonksiyonuna $x_0 \in R^n$ de *nontangentially sınırlıdır* denir [*Sadosky* 1979].
Tanım 1.1.26: R_+^{n+1} de tanımlı $u(x, t)$ fonksiyonu, eğer her $\alpha > 0$ için,

$$\lim u(x, t) = l$$

limiti var ve bununla birlikte (x,t) noktası $\Gamma_\alpha(x_0)$ konisinin içindeki $(x_0,0)$noktasına dönüşüyor ise, $x_0 \in R^n$ noktasında *nontangential limite* sahiptir denir [$Sadosky$ 1979].

Tanım 1.1.27: Eğer,

$$F = u + iv$$

fonksiyonu harmonik ise, burada ki u ve v fonksiyonlarına *harmonik eşleniklerdir (konjuge harmonik)* denir [$Sadosky$ 1979].

Tanım 1.1.28: $f(x)$, R^n de ölçülebilir ve $\exists x_0 \in R^n$ için $\forall |x-x_0| > \varepsilon > 0$ cümlesi üzerinde mutlak integrallenebilir olsun.

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x-x_0|>\varepsilon} f(x)dx$$

var ve sonlu ise $f(x)$, R^n üzerinde esas değer anlamında integrallenebilirdir denir [$Sadosky$ 1979].

Tanım 1.1.29: R^n de tanımlı bir f fonksiyonu verildiğinde,

$$c_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

olmak üzere,

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|t|>\varepsilon} f(x-t) \frac{t_j}{|t|^{n+1}} dt$$

ifadesine f fonksiyonunun *Riesz dönüşümü* denir [$Sadosky$ 1979].

Tanım 1.1.30: $\Lambda^\sharp f \in L^\infty$ ve $\|f\|_{BMO} = \left\|\Lambda^\sharp f\right\|_\infty$ ise o zaman, $f \in L_{loc}$ fonksiyonu *"bounded mean oscillation"* dır [$Sadosky$ 1979].

Tanım 1.1.31 (Dirac fonksiyonu): $x \in R^n$ olmak üzere,

$$\delta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & , x = 0 \end{array} \right\}$$

$$\int\limits_{R^n} \delta(x)dx = 1, \int\limits_{R^n} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \int\limits_{R^n} \delta(x)\varphi(x-a)dx = \varphi(a)$$

şeklinde tanımlanan δ fonksiyonuna *Dirac fonksiyonu* denir [$Schwarz$ 1966].

Tanım 1.1.32: $T_y f(x) = f(x+y)$ ile gösterilen x noktasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre R de *adi öteleme* denir.

Tanım 1.1.33: L, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, L nin bir alt cümlesi olsun. B nin elemanları lineer bağımsız ve B, L yi geriyorsa B ye (F *üzerinde*) L nin *bazı (tabanı)* denir [$Bayraktar$ 1996].

Tanım 1.1.34: Eğer kompleks değişkeni z olan bir f fonksiyonunun türevi hem z_0 noktasında hemde z_0 noktasının bir komşuluğunun her noktasında varsa bu durumda f ye z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Tanım 1.1.35: Kompleks düzlemin tamamında analitik olan fonksiyona *holomorfiktir* denir.

Tanım 1.1.36: $f \in L^p(E^1)$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere f fonksiyonu için aşağıdaki *P.V.* (esas değer) konvolüsyonunu gözönüne alalım.

$$\tilde{f}(x) = P.V.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt$$

Bu ifade, f fonksiyonunun *Hilbert dönüşümü* olarak adlandırılır [*Neri* 1971] .

Tanım 1.1.37: A keyfi bir cümle ve (f_n), A da tanımlı skaler değerli fonksiyonların dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise (f_n) dizisi f ye *noktasal yakınsaktır* denir [*Bayraktar* 1996] .

Tanım 1.1.38: $(G, \circ)$ bir cebirsel yapı olsun. $(G, \circ)$, aşağıdaki şartları sağlıyorsa G ye ($\circ$ *işlemine göre*) *grup* denir.

G1. Her $a, b, c \in G$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir.

G2. Her $a \in G$ için $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

G3. Her $a \in G$ için $a \circ a' = a' \circ a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır.

$(G, \circ)$ grubundaki $\circ$ ikili işlemi değişmeli ise yani her $a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ oluyorsa bu gruba *değişmeli (abel veya komütatif) grup* denir [*Bayraktar* 1996] .

Tanım 1.1.39: R boş olmayan bir cümle ve R de toplama $(+)$ ve çarpma $(.)$ denilen iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Bu $(R, +, .)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa$(R, +, .)$ ya *halka* denir.

H1. $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

H2. $(R, +, .)$ daki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani her $a, b, c \in R$ için $a.(b.c) = (a.b).c$ dir.

H3. $(R, +, .)$ daki çarpma toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Yani her $a, b, c \in R$ için $(a + b).c = a.c + b.c$ ve $a.(b + c) = a.b + a.c$ dir [*Bayraktar* 1988] .

Tanım 1.1.40: R bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpmaya göre tersi varsa x e R de *aritmetik birim* denir [*Bayraktar* 1988] .

Tanım 1.1.41: Birim elemanlı ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise bu halkaya *cisim* denir [*Bayraktar* 1988] .

Tanım 1.1.42 (Lineer Uzay): $\Re$ boş olmayan bir cümle ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\Re$ ye F üzerinde *lineer uzay (veya vektör uzayı)* denir.

A. $\Re$, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x, y \in \Re$ için $x + y \in \Re$ dir.
G2. Her $x, y, z \in \Re$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
G3. Her $x \in \Re$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde $0 \in \Re$ vardır.
G4. Her $x \in \Re$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde $-x \in \Re$ vardır.
G5. Her $x, y \in \Re$ için $x + y = y + x$ dir.
B. $x, y \in \Re$ ve α, $\beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:
L1. $\alpha.x \in \Re$ dir.
L2. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3. $(\alpha + \beta)x = \alpha.x + \beta.x$ dir.
L4. $(\alpha.\beta)x = \alpha.(\beta.x)$ dir.
L5 $1.x = x$ dir [*Bayraktar* 1996].

Tanım 1.1.43 (Banach Uzayı): L bir lineer uzay olsun. L bir norm metriğine göre tam ise L ye *Banach uzayı* denir.

Tanım 1.1.44 (Hilbert Uzayı): H Hilbert uzayı, x ve y nin skaler çarpımı (x, y) olmak üzere,

$$\|x\| = (x.x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklindeki skaler çarpımı ile bir Banach uzayıdır [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.45 (Poisson integrali): f, $\Phi \in L^1$ ve $\phi = \widehat{\Phi}$ ise o zaman $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\int \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} \Phi(\varepsilon x) dx = \int f(x) \phi_\varepsilon(x - t) dx$$

dir: Burada $\Phi(\varepsilon x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ olmak üzere,

$$\int \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} e^{-2\pi\varepsilon|x|} = \int f(x) P(x - t, \varepsilon) dx = f * P_\varepsilon(t)$$

ifadesine *Poisson integrali* denir [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.46: Her mertebeden türevi var ve sürekli olan fonksiyonlara *good-function* (*iyi-fonksiyon*) denir.

Tanım 1.1.47 (Zygmund Sınıfı): $\Phi(t)$, $t \geq 0$ non-negatif azalmayan bir fonksiyon olsun.

$$\int_X \Phi(|f(x)|) dx < \infty$$

olacak şekildeki $x \in X \subset R^n$, $f(x)$ fonksiyonlarının sınıfını $\Phi_X(L)$ tanımlayacağız. Eğer bir belirsizlik yok ise basitçe $\Phi(L)$ yazacağız. $\Phi_{loc}(L)$ anlamı açıktır. Buna göre $s \geq 0$ ve $\Phi(s) \leq \Psi(s)$ olmak üzere $\Phi_{loc}(L) \supset \Psi_{loc}(L)$ yazılır. $p > 0$, $\Phi(t) = t^p$ verilsin. Bu durumda L^p sınıfı özellikle önemlidir. Fakat,

$$\int_X |f|^p (\log^+ |f|)^q dx < \infty$$

olacak şekilde f fonksiyonlarının $L^p(\log^+ L)^q$ sınıfına $p = 1$ için Zygmund sınıfı denir. Burada,

$$\log^+ t = \begin{cases} \log t & ,t > 1 \\ 0 & ,0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dir [*Sadosky* 1979].

Tanım 1.1.48 (Lipschitz Şartı): Bazı C için,

$$|g(x) - g(x_0)| \leq C\,|x - x_0|$$

dır.

Önerme 1.1.49: $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(R^n)$ ve $u(x,t)$ Poisson integrali olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in R^n$ için $u(x,t)$ nin nontangentially limiti vardır ve $f(x)$ e eşittir.

Teorem 1.1.50: $u(x,y)$, tüm $y > 0$ için p, $1 \leq p \leq \infty$, $\|u(.,y)\|_p \leq c$, $c > 0$ olacak şekilde R_+^{n+1} da harmonik bir fonksiyon olsun.
i. $1 < p \leq \infty$ ise $u(x,y)$, $f \in L^p(R^n)$ nin Poisson integralidir.
ii. $p = 1$ ise, $u(x,y)$; $\mu \in M(R^n)$ in Poisson-Stieltjes integralidir. Ayrıca $\{u(.,y)\}_{y>0}$ $y \to 0$ iken L^1 de Cauchy ise, $u(x,y)$ fonksiyonu $f \in L^1(R^n)$ nin Poisson integralidir.

Teorem 1.1.51: $\int \phi = 1$ olmak üzere $\phi \in L^1$ ve $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\psi(x) = \sup\limits_{|y| \geq |x|} |\phi(y)|$ olsun. Eğer, $\psi \in L^1$ ise $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ için,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \phi_\varepsilon(x) = f(x)$$

dir. Burada, x, f nin Lebesgue cümlesinin elemanıdır.

Teorem 1.1.52: Eğer f, $\Phi \in L^1$ ve $\phi = \widehat{\Phi}$ ise tüm $\varepsilon > 0$ için,

$$\int \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} \Phi(\varepsilon x) dx = \int f(x) \phi_\varepsilon (x - t) dx$$

dir [*Sadosky* 1979].

Teorem 1.1.53 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi): $f(x,h)$ toplanabilir majoranta sahip olsun. $|f(x,h)| \leq F(x)$, burada $F(x)$, h parametresinden bağımsız ve $F(x) \in L_1(\Omega)$ dır. Eğer, $h \to 0$ iken $f(x,h)$ fonksiyonunun hemen hemen her x için limiti varsa o zaman,

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Omega} f(x,h)dx = \int_{\Omega} \lim_{h\to 0} f(x,h)dx$$

dir [*Samko* 1993].

Teorem 1.1.54 (F. Riesz Representation Teoremi): $C_{[a,b]}$ uzayında, her sürekli lineer φ fonksiyoneli,

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)d\Phi(x)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Φ, $[a,b]$ üzerinde sınır dönüşümlerinin bir fonksiyonudur ve üstelik,

$$\|\varphi\| = V_a^b(\Omega)$$

dir.

Teorem 1.1.55 (Plancherel Teoremi): Eğer $f \in L^2$ ve $\{f_k\} \subset L^1 \cap L^2$ de L^2 normuna göre f e yakınsıyorsa, $\left\{\widehat{f_k}\right\}$ da L^2 normuna göre $\widehat{f} \in L^2$ fonksiyonuna yakınsar. $F : f \to \widehat{f}$, L^2 de birim operatördür ve onun tersi, F^{-1} olmak üzere, her $f \in L^2$ için,

$$\left(F^{-1}f\right)(t) = (Ff)(-t)$$

dir. Özel olarak, $f \in L^2$ için $\{h_k\}$,

$$h_k(t) = \int_{|x|\leq k} \widehat{f}(x)e^{2\pi ixt}dx$$

şeklinde verilmiş ise,

$$\|h_k - f\|_2 \to 0,\ k \to \infty$$

dır.

Lemma 1.1.56: $n > 1$ için,

$$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

ve

$$\Omega_n = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

dir.

BÖLÜM II

2.1. L^2 DE HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ

Lebesgue integralinin aşağıdaki tanımı çalışmamız boyunca önemli bir yer tutacaktır. $f(x), R^n$ de ölçülebilir ve bazı $x_0 \in R^n$ için, tüm $|x - x_0| > \varepsilon > 0$ cümlesi üzerinde mutlak integrallenebilir olsun. Eğer,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x-x_0|>\varepsilon} f(x)dx \qquad (2.1.1)$$

var ve sonlu ise, $f(x)$ fonksiyonuna esas değer anlamında R^n üzerinde integrallenebilirdir denir. Bu limitin değeri,

$$P.V. \int_{R^n} f(x)dx \qquad (2.1.2)$$

ile tanımlanacaktır. $n = 1$ durumunda,

$$P.V. \int_{R^n} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty} \right) f(x)dx$$

dir. R^n nin alt cümlelerinde tanımlanan f için uygulamalar kolayca yapılır. Örnek olarak, $f(x), (a, b) \subset R^1$ aralığında tanımlı ise, $x_0 \in (a, b)$ olmak üzere,

$$P.V. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} \right) f(x)dx \qquad (2.1.3)$$

dir. Böylece $n = 1$ *ve* $f(x) = \frac{g(x)}{x-x_0}$ olduğunda tanımdan,

$$P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x-x_0}dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{g(x)}{x-x_0}dx \qquad (2.1.4)$$

olur. (2.1.4) ün sağ tarafındaki iki integral $1 \leq p < \infty$, $g \in L^p(-\infty, \infty)$ ya da $g \in L^1(-\infty, \infty)$ ise Lebesgue anlamında mevcuttur. Açıkça, (2.1.4) deki limitin varlığı, bazı $\eta > 0$ sabiti için,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon<|x-x_0|\leq\eta} \frac{g(x)}{x-x_0}dx \qquad (2.1.5)$$

limitinin var olmasıyla ilgilidir. Bu durumda, (2.1.5) deki integral için,

$$\int_{\varepsilon<|x-x_0|\leq\eta} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}dx + g(x_0) \int_{\varepsilon<|x-x_0|\leq\eta} \frac{dx}{x-x_0} = \int_{\varepsilon<|x-x_0|\leq\eta} \frac{g(x)g(x_0)}{x-x_0}dx$$

yazılır. g, x_0 için *Lipschitz şartını* sağlıyorsa, (*yani bazı C icin* $|g(x)-g(x_0)| \leq C|x-x_0|$) (2.1.5) deki limit mevcut, $g'(x_0)$ var ve sonludur. O halde, $g \in L^p(-\infty,\infty), 1 \leq p < \infty$ için (2.1.4) deki integral mevcut ve x_0 da *Lipschitz şartı* sağlanır. Buradan da, (2.1.4) integrali, x_0 noktasında g nin *Hilbert dönüşümü* olarak adlandırılır. Bu çalışma boyunca,

$$H_\varepsilon g(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-x_0|>\varepsilon} \frac{g(x)}{x-x_0} dx \tag{2.1.6}$$

ve

$$Hg(x_0) = \lim_{\varepsilon \to +0} H_\varepsilon g(x_0) \tag{2.1.6a}$$

notasyonlarını kullanacağız. Bu bölümde amacımız Hg nin özelliklerini, genişlemelerini ve genel şartlar altında daha yüksek boyutlara genellemelerini ele almaktır. Hilbert dönüşümleri analitik fonksiyonlar teorisinde doğal olarak bulunur.
$g(x) \in L^p(-\infty,\infty), 1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-z} dt \tag{2.1.7}$$

integralini gözönüne alalım. Burada $y > 0$ *ve* $z = x + iy, R^2_+$ üst yarı düzleminde bir kompleks sayıdır. Bu her zaman doğru değildir. Uygun durumlarda genellemeyi bozmaksızın $g(x)$ i reel değerli olarak farzedebiliriz. Açıkça, her bir $N > 0$ için,

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-N}^{N} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

fonksiyonu R^2_+ de holomorfiktir ve $y \geq y_0 > 0$ yarı düzlemine ait olan z için $N \to \infty$ iken,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-z} dt \tag{2.1.8}$$

dir. Dolayısıyla bu integral R^2_+ de holomorfiktir. Burada $z \in R^2_+$ olarak alabiliriz. $\frac{1}{i(t-z)}$ yi reel ve imajiner kısımlarına ayırırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i(t-z)} &= \frac{i}{z-t} = \frac{i}{x+iy-t} = \frac{i}{x-t+iy} \\
&= \frac{i[(x-t)-iy]}{(x-t)^2+y^2} \\
&= \frac{i(x-t)+y}{(x-t)^2+y^2} \\
&= \frac{y}{(x-t)^2+y^2} + \frac{i(x-t)}{(x-t)^2+y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{y}{(x-t)^2+y^2} dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt \\
&= \frac{1}{2} (g * P_y)(x) + \frac{i}{2} (g * Q_y)(x)
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

yazabiliriz. Burada $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$, R^2_+ de Poisson çekir*de*ğidir ve

$$Q_y(x) \;= \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \qquad (2.1.10)$$

R^2_+ de konjuge Poisson çekirdegi olarak adlandırılır.

$$u(x,y) = (g * P_y)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t).y}{(x-t)^2+y^2}dt$$

Yukarıdaki bu integral, g nin *Poisson integrali* olarak ifade edilecektir. Bu hipotez altında g reel değerli olduğundan,

$$u(x,y) = Re\ F(z)$$

dir.

$$v(x,y) \;= Im\ F(z) \;= (g * Q_y)(x) \;= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}dt \qquad (2.1.11)$$

ifadesine g nin *konjuge Poisson integrali* denir.

Teorem 2.1.1: $\forall g \in L^p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ ve hemen hemen her x için g nin konjuge Poisson integrali nontangentially olarak $z \to x$ iken sonlu bir limite yaklaşır.

İspat: g yi pozitif ve negatif kısımlarına ayırırsak ispat için $g \leq 0$ almak yeterli olacaktır. Böylece $u \leq 0$ olmak üzere, $G(z) = e^{(u+iv)}$ regüler ve mutlak değeri,

$$\begin{aligned}
|G(z)| &= \left|e^{(u+iv)}\right| \\
&= |e^u|.|e^{iv}| \\
&= |e^u|.|\cos v + i\sin v| \\
&= |e^u|.(\cos^2 v + \sin^2 v) \\
&= |e^u| \;\; (u \leq 0\ olmak\ \ddot{u}zere) \\
&= \tfrac{1}{e^u} \leq 1
\end{aligned}$$

dir. *Önerme* 1.1.49 ve *Teorem* 1.1.50 den hemen hemen her $z \to x$ iken $G(z)$ nontangential limite sahiptir. Bu limit pozitif ölçülü cümle içerisinde sıfır olamaz. Çünkü bu durumda u, pozitif ölçülü cümle içersinde $-\infty$ a nontangential yaklaşır ve u, L^p deki bir fonksiyonun Poisson integralidir. Bundan dolayı $v(x,y)$ nin limiti nontangential şekilde mevcuttur ve hemen hemen her yerde sonludur.

Teorem 2.1.2: $\forall g \in L^p(-\infty,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ için $Hg(x)$ Hilbert dönüşümü vardır ve hemen hemen her yerde sınırlıdır. Bununla birlikte $Hg(x), g$ nin L_g Lebesgue cümlesinin her bir noktasında g nin konjuge Poisson integralinin limitine eşittir. Yani, $x \in \mathrm{L}_g$ ise,

$$\lim_{y \to +0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} dt - \int_{|x-t|>y} \frac{g(t)}{x-t} dt \right) = 0 \qquad (2.1.12)$$

dir.

İspat: (2.1.12) deki iki integralin farkını,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)\Phi_y(t)dt \qquad (2.1.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\Phi_y(t) = y^{-1}\Phi(y^{-1}t)$$

ve

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t} & , |t| > 1 \ ise \\ \frac{t}{t^2+1} & , |t| \leq 1 \ ise \end{cases}$$

dir.

$$\Psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\Phi(t)| = \begin{cases} \frac{1}{|x|(1+x^2)} & , |x| > 1 \ ise \\ \frac{1}{2} & , |x| \leq 1 \ ise \end{cases}$$

olduğundan Ψ, $(-\infty,\infty)$ da integrallenebilirdir. Böylece *Teorem* 1.1.54 den (2.1.13) deki integral $\forall x \in \mathrm{L}_g$ üzerinde $g(x)$ e yaklaşır. Φ tek olduğu için $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)dt = 0$ dır ve bu da teoremin ispatıdır.

Hatırlatma 2.1.3: *Teorem* 2.1.1 ve *Teorem* 2.1.2 de $p = \infty$ hali gözönüne alınmayacaktır. Örneğin $g(x) \equiv 1$ olmak üzere, g sadece sınırlı ise Hg nin mevcut oluşunun gösterilmesine ihtiyacımız yoktur. Eğer g nin sınırlılığını ve $\int_{|x|>1} \left|\frac{g(x)}{x}\right| dx$ integralinin sonlu oluşunu farzedersek $Hg(x)$ in mevcut ve hemen hemen her yerde sonlu olduğu görülebilir. Bu halde $g \in L^p(R^1), 1 \leq p < \infty$ için $H : g \to Hg$ Hilbert dönüşüm operatörünü tanımlayabiliriz. Bu operatörün $1 < p < \infty$ için L^pde sınırlı olduğunu ispatlayacağız. Fakat burada $p = 2$ olması durumunda ispatı basit bir şekilde vereceğiz.

Teorem 2.1.4: $g \in L^2(-\infty,\infty)$ ise,

$$(Hg)^{\wedge}(x) = (-isgn\, x)\widehat{g}(x) \qquad (2.1.14)$$

dir. Burada, x in signumu $sgn\,x$ ile tanımlanmıştır. Özel olarak $\forall g \in L^2(-\infty,\infty)$ için,

$$\|Hg\|_2 = \|g\|_2 \tag{2.1.15}$$

dir.
İspat: İspatı,

$$\widehat{Q}_y(x) = (-isgnx)e^{-2\pi|yx|} \tag{2.1.16}$$

formülüne dayanarak yapacağız ve bu formülün doğruluğunu daha sonra göstereceğiz. Gerçekten (2.1.16),

$$\begin{aligned}(Q_y * g)^{\wedge}(x) &= \widehat{Q}_y(x).\widehat{g}(x)\\ &= (-isgnx).e^{-2\pi|yx|}.\widehat{g}(x)\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

ile verilir ve *Plancherel Teoreminden* dolayı, L^2 de $y \to +0$ iken, $Q_y{*}g$ yakınsaması vardır. Bir L^2 fonksiyonu için Fourier dönüşümü $(-isgn\,x).\widehat{g}(x)$ dir. Fakat *Teorem* 2.1.2 den dolayı $y \to +0$ iken hemen hemen her yerde $(Q_y * g)(x)$, $Hg(x)$ e yakınsadığından ve bu yakınsama L^2 de olduğundan (2.1.14) elde edilir. (2.1.16) yı elde etmek için $z = x + iy$ ise,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(P_y(x) + iQ_y(x)\right) &= I(z) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\pi}\tfrac{y}{x^2+y^2} + i\tfrac{1}{\pi}\tfrac{x}{x^2+y^2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2\pi(x^2+y^2)}(y+ix)\\ &= \tfrac{1}{2\pi z\bar{z}}(y+ix)\\ &= \tfrac{1}{2\pi i z\bar{z}}(iy-x)\\ &= \tfrac{1}{2\pi i z\bar{z}}.-(x-iy)\\ &= -\tfrac{1}{2\pi i z}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$P_y(x) = 2\ Re\ I(z)$$

ve

$$Q_y(x) = 2\ Im\ I(z) \tag{2.1.18}$$

dir. Çünkü $y > 0$ için,

$$\begin{aligned}I(z) &= \int_0^\infty e^{2\pi izt}dt\\ &= \int_0^\infty e^{2\pi ixt}.e^{-2\pi yt}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I(z) &= \int_0^{\infty} e^{2\pi ixt-2\pi yt}dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-t(2\pi y-2\pi ix)}dt \\
&= \frac{1}{-(2\pi y-2\pi ix)} e^{-t(2\pi y-2\pi ix)} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{(2\pi ix-2\pi y)}(-1) \\
&= -\frac{1}{i(2\pi x+2\pi iy)} \\
&= -\frac{1}{2\pi iz}
\end{aligned}
$$

olur. (2.1.18) ifadelerini gözönüne alırsak,

$$P_y(x)+iQ_y(x)=2\ I(z)$$

ve

$$
\chi_-(t) = \begin{cases} 1 & ,t\in(-\infty,0) \\ 0 & ,t\notin(-\infty,0) \end{cases}
$$

$$
\chi_+(t) = \begin{cases} 1 & ,t\in[0,+\infty) \\ 0 & ,t\notin[0,+\infty) \end{cases}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
P_y(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi(ixt-|yt|)}\chi_-(t)dt+\int_0^{\infty} e^{2\pi(ixt-|yt|)}\chi_+(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi(ixt-|yt|)}\chi_-(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi(ixt-|yt|)}\chi_+(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi(ixt-|yt|)}\left(\chi_-(t)+\chi_+(t)\right)dt
\end{aligned}
$$

eşitliğini yazarız. Benzer biçimde $Q_y(x)$ de hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
P_y(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixt}e^{-2\pi|yt|}\left(\chi_+(t)+\chi_-(t)\right)dt \\
Q_y(x) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixt}e^{-2\pi|yt|}\left(\chi_+(t)-\chi_-(t)\right)dt
\end{aligned}
\tag{2.1.19}
$$

yazılabilir. Burada χ_+ ve χ_- sıra ile $[0,+\infty)$ ve $(-\infty,0)$ ın karakteristik fonksiyonlarıdır. $\chi_+(t)+\chi_-(t) \equiv 1$ ve $t \neq 0$ için $\chi_+(t)-\chi_-(t) = sgn\, t$ olduğundan (2.1.19) ifadeleri için aşağıdaki eşitlikleri yazmak her zaman mümkündür.

$$\widehat{P}_y(t) \quad = e^{-2\pi|yt|}$$

$$\widehat{Q}_y(y) \quad = (-isgn\, t)e^{-2\pi|yt|}$$

Böylece teoremin ispatı için gerekli olan eşitliği göstermiş olduk. Bu da teoremin ispatıdır. Bu sonuç L^2 deki bir fonksiyonun, konjuge Poisson integrali ile bu fonksiyonun Hilbert dönüşümünün Poisson integralinin hemen hemen her yerde karşılaştırılabileceğini gösterir.

Sonuç 2.1.5: $y > 0$ için $g \in L^2(-\infty, \infty)$ ise hemen hemen her yerde

$$(g * Q_y)(x) \quad = (Hg * P_y)(x) \qquad (2.1.20)$$

dir.

İspat: (2.1.20) formülü hemen hemen her yerde

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)\frac{t}{t^2+y^2}dt \quad = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Hg(x-t)\frac{y}{t^2+y^2}dt \qquad (2.1.20a)$$

eşitliğini sağlar. (2.1.20a) nın iki yanı karşılaştırıldığında Fourier dönüşümüne sahiptir ve $(-isgn\, x)\, e^{-2\pi|yx|}\widehat{g}(x)$ e eşittir. $H^2 g = H(Hg)$ ise (2.1.14) den,

$$\begin{aligned} H\,(Hg(x)) &= F^{-1}\,(-isgn\, x)\, Fg(x) \\ &= F^{-1}\,(-isgn\, x)\, F\,(F^{-1}\,(-isgn\, x)\, Fg(x)) \\ &= F^{-1}\,(-isgn\, x)\,(-isgn\, x)\, Fg(x) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ise,

$$H^2 = -I$$

dır. Burada I, L^2 de özdeş operatördür. (2.1.15) ile birlikte H, $L^2(R^1)$ de birim operatördür.

Hatırlatma 2.1.6: $1 \leq p < \infty, \forall g \in L^p(R^1)$ reel değerli fonksiyonu için (2.1.8) den dolayı R^2_+ de tanımlı $F(z)$ analitik fonksiyonuna sahibiz. öyle ki $z = x + iy$ için $x \in R^1$ olmak üzere $F(z)$ ifadesi,

$$F(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{i}{2}Hg(x)$$

olur. Ayrıca, $g \in L^2$ ve (2.1.14) den $x < 0$ iken,

$$\widehat{g}(x) + i(Hg)^\wedge(x) \quad = 0 \qquad (2.1.21)$$

dir. Gözönüne alınan R^1 de tanımlı fonksiyonların durumlarını tartıştık ve gelecek adımda neticeleri R^n deki fonksiyonlara genişleteceğiz. Fakat bundan önce fonksiyonların diğer bölgelerde tanımlı olduğu durumları kısaca ele alacağız ki bunun en basit hali dairesel bir bölgedir. Biz kendimizi bir tek boyuta ve birim dairenin yüzeyi üzerinde tanımlanan fonksiyonlara kısıtlayacağız. $u = \{z : |z| < 1\}$ diski içinde z noktalarını ve u da tanımlı $f(z)$ fonksiyonlarını gözönüne alacağız. $T = \{z : |z| = 1\}$ yüzeyi üzerinde tanımlanan $g(t) = f\left(e^{it}\right)$ fonksiyonları gibi. $f(z) = f\left(re^{it}\right), U$ içinde analitik olsun. $0 < r < R < 1$ için,

$$\begin{aligned} f(z) = f\left(re^{it}\right) &= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{|\Im|=R} \tfrac{f(\Im)d\Im}{\Im - z} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(Re^{i\theta}\right) \tfrac{Re^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta} - re^{it}} \end{aligned}$$

Cauchy formülünü yazarız ve $R \to 1$ iken limite geçersek $g(\theta) = \lim_{R\to 1} f\left(Re^{i\theta}\right)$ yazılır ve

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \tfrac{e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta} - re^{it}} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \tfrac{d\theta}{e^{-i\theta}\left(e^{i\theta} - re^{it}\right)} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \tfrac{d\theta}{e^{-i\theta + i\theta} - re^{-i(t-\theta)}} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \tfrac{d\theta}{1 - re^{i(t-\theta)}} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) C_r(t-\theta) d\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $C_r(t) = \dfrac{1}{1 - re^{it}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{int}$ Cauchy çekirdeğidir.

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} &= \left(C_r(t) + \overline{C_r(t)}\right) - 1 \\ &= Re\left(\tfrac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) \\ &= \left[\tfrac{1}{1-re^{it}} + \overline{\left(\tfrac{1}{1-re^{it}}\right)}\right] - 1 \\ &= \left[\tfrac{1}{1-r(\cos t + i\sin t)} + \overline{\left(\tfrac{1}{1-r(\cos t + i\sin t)}\right)}\right] - 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int} &= \left(\frac{1}{1-r\cos t-ir\sin t}+\overline{\frac{1}{1-r\cos t-ir\sin t}}\right)-1 \\
&= \frac{1}{1-r\cos t-ir\sin t}+\frac{1}{1-r\cos t+ir\sin t}-1 \\
&= \frac{1-r\cos t+ir\sin t+1-r\cos t-ir\sin t}{(1-r\cos t)^2+(r\sin t)^2} \\
&= \frac{2-2r\cos t}{1-2r\cos t+r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}-1 \\
&= \frac{2-2r\cos t}{1-2r\cos t+r^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}-1 \\
&= \frac{2-2r\cos t-1+2r\cos t-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}
\end{aligned}
$$

ifadesi düşünülsün. Bu son fonksiyon genellikle $P_r(t) = P(r,t)$ ile tanımlanır ve daireler için Poisson çekirdeği olarak adlandırılır. Onun konjuge harmonikliği,

$$
\begin{aligned}
Q_r(t) &= Q(r,t) = Im\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) \\
&= Im\left(\frac{1+r(\cos t+i\sin t)}{1-r(\cos t+i\sin t)}\right) \\
&= Im\left(\frac{1+r\cos t+ir\sin t}{1-r\cos t-ir\sin t}\right) \\
&= Im\left[\frac{(1+r\cos t+ir\sin t)(1-r\cos t+ir\sin t)}{(1-r\cos t)^2+(r\sin t)^2}\right] \\
&= Im\left(\frac{1-r\cos t+ir\sin t+r\cos t-r^2\cos^2 t+ir^2\sin t\cos t+ir\sin t-ir^2\sin t\cos t-r^2\sin^2 t}{1-2r\cos t+r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}\right) \\
&= Im\left(\frac{1+ir\sin t-r^2\cos^2 t+ir\sin t-r^2\sin^2 t}{1-2r\cos t+r^2}\right) \\
&= Im\left(\frac{1+2ir\sin t-r^2(\cos^2 t+r^2\sin^2 t)}{1-2r\cos t+r^2}\right) \\
&= Im\left(\frac{1-r^2+2ir\sin t}{1-2r\cos t+r^2}\right) \\
&= \frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2} \qquad (2.1.22)
\end{aligned}
$$

dir. Bu son ifade ise, daire için konjuge Poisson çekirdeği olarak adlandırılır. $P_r(t)$ ve $Q_r(t)$ çekirdekleri R_+^2 için benzer özelliklere sahiptir. Daha önce $P_y(x)$ ve $Q_y(x)$ ifadelerini vermiştik bunların $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ olması halinde benzer olduklarını görmek mümkündür. Bir peryod üzerinde integrallenebilen ve 2π peryotlu peryodik $g(t)$, $-\infty < t < \infty$ fonksiyonu için $\frac{1}{2\pi}\left(g * C_r\right)(t)$, $\frac{1}{2\pi}\left(g * P_r\right)(t)$,

$\frac{1}{2\pi}(g * Q_r)(t)$ ifadeleri sırasıyla g nin Cauchy integrali, Poisson integrali, Konjuge Poisson integrali olarak adlandırılır. Reel değerli g fonksiyonu için sırasıyla g nin Konjuge Poisson integrali ve Poisson integralini, g nin Cauchy integralinin reel ve imajiner kısmı olarak kolayca ifade edebiliriz. Daha önceden de bilindiği gibi $1 \leq p \leq \infty, \forall g \in L^p(0, 2\pi)$ için g nin Poisson integrali $r \to 1$ iken hemen hemen her yerde g ye yaklaşır. *Teorem* 2.1.1. in ispatı gösterir ki $\forall g \in L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < \infty$ için g nin Konjuge Poisson integrali diye adlandırılan diziye benzer durumda bir daireye sahibiz ve g nin Konjuge Poisson integrali hemen hemen her yerde nontangentially olarak sonlu bir limite yaklaşır.

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to 1} Q_r(t) &= \frac{\sin t}{1-\cos t} \\
&= \frac{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{1-\left(2\cos^2\frac{t}{2}-1\right)} \\
&= \frac{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{1-2\cos^2\frac{t}{2}+1} \\
&= \frac{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \\
&= \cot\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan bu limitin hemen hemen her yerde

$$Hg(t) = \tilde{g}(y) \quad = \frac{1}{2\pi} P.V. \int_0^{2\pi} g(\theta)\cot\frac{t-\theta}{2}d\theta \qquad (2.1.23)$$

olduğunu göstermek zor değildir ve bu ifade g nin Konjuge fonksiyonu olarak adlandırılır. $g \in L^2$ nin reel değerlerinin Fourier serilerine genişletilmesi gözönüne alındığında,

$$g(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)e^{int}$$

dir. Buna göre,

$$(P_r * g)(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(n)r^{|n|}e^{int}$$

ve $(P_r + iQ_r) * g$ nin analitik fonksiyon olmasından dolayı,

$$(Q_r * g)(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (-isgn\ n)\widehat{g}(n)r^{|n|}e^{int}$$

ifadesini vermek mümkündür. Burada, *Teorem* 2.1.4. den dolayı,

$$(\widetilde{g})^{\wedge}(n) \quad = (-isgn)\widehat{g}(n) \qquad (2.1.14a)$$

ve

$$(g + i\widetilde{g})^{\wedge}(n) \quad = 0 \quad , n < 0 \qquad (2.1.21a)$$

dır. Bir integrallenebilen peryodik $h(t)$ fonksiyonuna eğer $h(t)$ nin Fourier dönüşümünün $\widehat{h}(n)$ Fourier katsayısı $n < 0$ için yok yada $\widehat{h}(n)$ e eşit ve disk içinde $h(t) = F(e^{it})$ şeklinde tanımlanan $F(z) = F(re^{it})$ bir analitik fonksiyonunun sınır fonksiyonu ise bu fonksiyona $H^1(T)$ Hardy-uzayına ait fonksiyon denir.(2.1.21a) formülünden $g + i\widetilde{g} \in H^1(T)$ dir. Şimdi $n-$ *boyutlu* durumu gözönüne alalım. $\frac{1}{x}$ fonksiyonu R^1 de iken $\frac{x}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^{n+1}}$ yazılabilir. $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $n-$ *boyuttaki* yapısı,

$$k_j(x) \quad = \frac{x_j}{|x|^{n+1}} \quad , j = 1, ...n \qquad (2.1.24)$$

şeklindedir. Şöyle ki R^n deki Hilbert dönüşümüne benzer olarak,

$$R_j f(x) \quad = c_n P.V. \int_{R^n} f(x-t)\frac{t_j}{|t|^{n+1}}dt \qquad (2.1.25)$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifadeye f in Riesz dönüşümü denir. R^1 de yukarıdaki bu ifade,

$$\frac{1}{x} = \frac{sgnx}{|x|} = \frac{\Omega(x)}{|x|}$$

şeklindedir. Burada $\Omega(x)$,

$$\Omega(x) + \Omega(-x) \quad = 0 \qquad (2.1.26)$$

olacak şekilde homogen bir fonksiyondur. Bu ifade R^n de Hilbert dönüşümünün diğer bir genelleştirilmesidir. (2.1.26) şartı sağlanmak üzere $\frac{1}{x}$ in integralinin $P.V.$ nin var olması şartı ile,

$$\int_{\Sigma} \Omega(x)dx \quad = 0 \qquad (2.1.26a)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\sum = \sum_1 = \{-1, 1\}$, R^1 de birim küredir. Böylece gözönüne alacağımız $n > 1$, R^n de,

$$k(x) \quad = \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \qquad (2.1.27)$$

tipindeki k çekirdeğini, Ω üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir çekirdek olarak gözönüne alalım.

i. Ω homogen,

$$\Omega(\lambda x) \quad = \Omega(x) \quad , \forall\lambda > 0 \qquad (2.1.27a)$$

ii. Ω, birim küre üzerinde sıfır ortalama değerine sahip,

$$\int_{\sum} \Omega(x)dx = 0 \qquad (2.1.27b)$$

Buradaki k çekirdeği $Calderon-Zygmund$ çekirdeği olarak adlandırılır ve kısaca bundan böyle $C-Z$ çekirdeği olarak tanımlanacaktır. $x' \in \sum$ için $\Omega(x) = \Omega(x')$ olduğundan Ω yı $\sum$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak gözönüne alabiliriz. Her bir k, $C-Z$ çekirdeğini,

$$Kf = f * P.V.\ k(x) = P.V. \int_{R^n} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x-t|>\varepsilon} f(x-t)\frac{\Omega(t)}{|t|^n}dt \qquad (2.1.28)$$

singüler integrali olarak alabiliriz ve $K : f \to Kf$ operatörü, $C-Z$ operatörü olarak adlandırılır. $\Omega_j(x) = \frac{x_j}{|x|}$ için R_j Riesz operatörünü elde ederiz. (2.1.28) in mevcut olması Hilbert dönüşümünün benzer özelliklerinin elde edilmesini sağlar. C^1 e yada Lipschitz sınıfına ait olan Ω yı elde etmek için Ω üzerinde bir düzgün şarta ihtiyacımız vardır.$\Omega \in Lip\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ olduğundan $\omega(\rho) \leq C_\rho^\alpha$ ortalaması vardır. Burada,

$$\omega(\rho) = \sup\left\{\left|\Omega(x') - \Omega(y')\right| : x', y' \in \sum, \left|x' - y'\right| < \rho\right\} \qquad (2.1.29)$$

$\sum$ üzerinde Ω nın süreklilik modülüdür ve $\omega(\rho) \leq C_\rho, \Omega \in C^1(\sum)$ yı gerektirir. Bu iki şart,

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho\right) < \infty \qquad (2.1.30)$$

sonucunu verir. Ω , "*Dini tipi*" şartı olarak bilinen (2.1.30) şartını sağlar. Böylece daha genel olarak $\Omega \in C^1$ yada $\Omega \in Lip\alpha$ ve C-Z çekirdeklerinin ele alınması için önemlidir. Eğer Ω, (2.1.30) u sağlar ise bu durumda $\Omega \in L^\infty(\sum)$ dır.

BÖLÜM III

3.1. L^2 TEORİSİ VE SİNGÜLER İNTEGRALLER

$L^2(R^n)$ deki $C-Z$ operatörlerini incelerken ilk olarak çarpım operatörlerinin bazı önemli özelliklerine ihtiyacımız olacak.

Tanım 3.1.1: Eğer $\forall f \in L^2(R^n)$ için,

$$(Tf)^\wedge(x) = \sigma(x)\widehat{f}(x) \qquad (3.1.1)$$

ise o zaman $T : L^2(R^n) \to L^2(R^n), n \geq 1$ operatörüne $\sigma(t) \in L^\infty(R^n)$ sembollü çarpım operatörü denir.

Uyarı 3.1.2: Eğer E_N, $N-$ *boyutlu* Hilbert uzayı ve $e_1, ..., e_N, E_N$ için bir baz ise o zaman E_N deki her T operatörü bu baz içerisinde bir (t_{jk}) matrisi olarak verilebilir. Eğer $j \neq k$ için $t_{jk} = \sigma_i\delta_{jk}$, $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jk} = 0$ ise T bu baz içerisinde diagonal operatördür. Her $x = \sum c_j e_j \in E_N$ için $T = \sum \sigma c_j e_j$ ye sahibiz. Bu T_x ın koordinatları σ_j ve x in çarpımından elde edilir. $L^2(T)$ sonlu boyutlu uzayında $e_n = e^{int}, n \in Z$ şeklinde verilen sonlu baza sahibiz. f in bir dizisi $f = \sum\limits_n c_n e^{int}$ olduğu zaman $Tf = \sum\limits_n \sigma_n c_n e^{int}$ olacak biçimde T operatörü, bir diagonal operatörün benzeridir. Yani $(Tf)^\wedge(n) = \sigma_n\widehat{f}(n)$ dir. Burada T, bir çarpım operatörü ve $\{\sigma_n\}$ dizisi T nin sembolü yada çarpanı olarak adlandırılır.

Uyarı 3.1.3: (2.1.14) deki formülde kullanılan $H; L^2(R^1)$ de $\sigma(x) = -i sgn\, x$ sembolü ile bir çarpım operatörüdür.

Önerme 3.1.4: $L^2(R^n)$ üzerinde verilen sınırlı lineer Toperatörü için aşağıdaki şartlar vardır.

1. T, bir çarpım operatörüdür.
2. T, ötelemeler ile değişmelidir.
3. $\forall\varphi, \psi \in L^2(R^n)$ için $T\varphi * \psi = \varphi * T\psi$

İspat:

1 $\Rightarrow$ 2 $: (Tf)^\wedge(x) = \sigma(x)\widehat{f}(x)$ olsun. $\forall\tau_h, h \in R^n$ öteleme operatörünün tanımından, $\tau_h f(x) = \left(e^{2\pi iht}f(t)\right)^\wedge(x)$ bağıntısından,

$$\begin{aligned}(T(\tau_h, f))^\wedge(x) &= \sigma(x)e^{-2\pi ixh}\widehat{f}(x)\\ &= e^{-2\pi ixh}\sigma(x)\widehat{f}(x)\\ &= e^{-2\pi ixh}(Tf)^\wedge(x)\\ &= (\tau_h(Tf))^\wedge(x)\end{aligned}$$

elde ederiz ve dolayısıyla L^2 de $T\tau_h = \tau_h T$ dir.
2 ⇒ 3 :$\forall g \in L^2$ ve $\varphi, \psi \in L^1 \cap L^2$ için,

$$\begin{aligned}\langle T\varphi * \psi, g\rangle &= \int (T\varphi * \psi)(x) g(x) dx \\ &= \int \left(\int T\varphi(x-t)\psi(t)dt\right) g(x)dx \\ &= \int\int \tau_t (T\varphi)(x)\psi(t)g(x)dxdt \\ &= \int \left(\int T(\tau_t\varphi)(x)g(x)dx\right)\psi(t)dt \qquad (3.1.2)\end{aligned}$$

olur. Fakat *F.Riesz representation teoreminden* dolayı $\langle Tf, g\rangle = \langle f, g_1\rangle$ olacak şekilde $g_1 \in L^2$ varolduğundan (3.1.2) den,

$$\begin{aligned}\langle T\varphi * \psi, g\rangle &= \int \left(\int \tau_t\varphi(x)g_1(x)dx\right)\psi(t)dt \\ &= \int\int \varphi(x-t)\psi(t)g_1(x)dtdx \\ &= \int (\varphi * \psi)(x) g_1(x)dx\end{aligned}$$

dir. Benzer olarak,

$$\langle \varphi * T\psi, g\rangle = \int (\varphi * \psi)(x) g_1(x)dx$$

olur. Böylece $\forall g \in L^2$ için,

$$\langle T\varphi * \psi, g\rangle = \langle \varphi * T\psi, g\rangle \qquad (3.1.3)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.1.3) eşitliğinin dağılım fonksiyonları için eşitlik tanımı kullanılarak,
(*yani* $\langle Tf, h\rangle = \langle g, h\rangle$ *olduğunda* $Tf = g$ *olmasından*) $\forall \varphi, \psi \in L^1 \cap L^2$ için $T\varphi * \psi = \varphi * T\psi$ olur ve (**3**) sağlanır.
(**3**) ⇒ (**1**) : $f \in L^2, \forall x$ için $f(x) \neq 0$ ve $\psi = \widehat{f}$ olsun. $\forall \varphi \in L^2$ için $T\varphi * \psi = \varphi * T\psi$ iken $(T\varphi)^\wedge \widehat{\psi} = \widehat{\varphi}(T\psi)^\wedge$ ve $\forall \varphi \in L^2$ için $(T\varphi)^\wedge = \widehat{\varphi}\frac{(T\psi)^\wedge}{\widehat{\psi}}$ olacaktır. $\frac{(T\psi)^\wedge}{\widehat{\psi}} = \sigma$ olarak alırsak $\sigma \in L^\infty$ olduğunu söyleriz. Gerçekten $\forall \varphi \in L^2$ için $\|\sigma\widehat{\varphi}\|_2 = \left\|(T\varphi)^\wedge\right\|_2 = \|T\varphi\|_2 \leq \|T\| \cdot \|\widehat{\varphi}\|_2$ ve böylece eğer
$E = \{x : |\sigma(x)| > \|T\|\}$ ise $|E| > 0$ olmayabilir. Çünkü $\widehat{\varphi} = \chi_E$,
$\|\widehat{\varphi}\|_2 = \|\chi_E\|_2 = \left(\int |\chi_E(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_E dx\right)^{\frac{1}{2}} = |E|^{\frac{1}{2}}$ ve $\|\sigma\widehat{\varphi}\|_2 > \|T\| \cdot |E|^{\frac{1}{2}}$ için bir çelişkiye yol açar. Fakat $|E| = 0$ ortalamalı, σ da iddiamız gibi esas sınırlıdır.

Sonuç 3.1.5: Eğer $k \in L^1 \cap L^2$ ve K, k çekirdeğinin konvolüsyon operatörü ise bu durumda K değişimli birleşmelidir ve $\widehat{k}$ sembollü bir çarpım operatörüdür.

Sonuç 3.1.6: Eğer $\{T_n\}, \forall n$ için hemen hemen her yerde $\sigma_n(x) \to \sigma(x)$ ve $\|\sigma_n\|_\infty \leq C$ olacak biçimde $\{\sigma_n\}$ sembollü çarpım operatörünün bir dizisi ise, o zaman σ sembollü çarpım operatörü olan T ve $\forall f \in L^2$ için,

$\|T_n f - Tf\|_2 \to 0$ dır.
İspat:İlk olarak L^2 de,

$$\begin{aligned}\|T_n f - Tf\|_2^2 &= \left\|(T_n f)^\wedge - (Tf)^\wedge\right\|_2^2 \\ &= \left\|\sigma_n \widehat{f} - \sigma \widehat{f}\right\|_2^2 \\ &= \int_{R^n} |\sigma_n(x) - \sigma(x)|^2 \left|\widehat{f}(x)\right|^2 dx\end{aligned}$$

olduğundan, bu son eşitlikte limite geçilir ve *Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi* uygulanırsa istenen sonuç elde edilir. Ötelemeler R^n de bir grup oluşturur, pozitif genişlemelerde aynı şekildedir. Her iki grupla ilişkili olan operatörler aşağıdaki sonuçtan dolayı homogen fonksiyonlar ile yakından bağlantılıdır. Eğer bir f fonksiyonu için,

$$F(\lambda\alpha) = \lambda^\alpha F(x) \quad ,\forall\lambda > 0 \qquad (3.1.4)$$

sağlanıyor ise, bu fonksiyona α. dereceden homogen bir fonksiyon denir.
Önerme 3.1.7: $L^2(R^n)$ üzerindeki etki eden bir sınırlı lineer T operatörünün R^n nin tüm ötelemeler ve pozitif genişlemeler ile değişmeli olması için gerek ve yeter şartın T, sembolü sıfırıncı dereceden homogen bir fonksiyon olan çarpım operatörü olmasıdır.
İspat: *Önerme* 3.1.4. den dolayı ispatı yapmak için T çarpım operatörünün (*genişlemeler ile yer değiştirmede*) sıfırıncı dereceden homogen bir fonksiyon olduğunu göstermek gerek ve yeterdir. Burada,

$$\sigma(\lambda x) = \sigma(x) \quad ,\forall\lambda > 0 \qquad (3.1.5)$$

olduğu aşikardır. Gerçekten $\tau_h f(x) = \left(e^{2\pi iht} f(t)\right)^\wedge(x)$ bağıntısından dolayı bir $a > 0$ için,

$$(\delta_a(Tf))^\wedge(x) = a^{-n}(Tf)^\wedge\left(\frac{x}{a}\right) = a^{-n}\sigma\left(\frac{x}{a}\right)\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

eşitliğini yazarız ve aynı zamanda,

$$(T(\delta_a f))^\wedge(x) = \sigma(x)(\delta_a f)^\wedge(x) = \sigma(x)a^{-n}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$$

dır. Dolayısıyla,

$$T\delta_a = \delta_a T \ \textit{olması gerek ve yeter şart} \ \forall a > 0 \ \textit{icin} \ \sigma\left(\frac{x}{a}\right) = \sigma(x) \ \textit{olmasıdır.}$$

Yukarıda bilinen bu sonuçlar ve $(2.1.6a)$ ile $L^2(R^1)$ de tanımlı H Hilbert

operatörünü gözönüne alalım. $H, \sigma(x) = -isgn\, x$ sembollü bir çarpım operatörü olarak gösterildiği için *Önerme* 3.1.7., H ın aşağıdaki iki esas özelliğinden ortaya çıkar.
I. Ötelemeler ile H değişmelidir.
II. Genişlemeler ile H değişmelidir.
III. H yansıma ile negatif değişmelidir. Yani $H(\rho f) = -\rho(Hf)$ dir.
Eğer $\rho : f(x) \to f(-x)$ ise,

$$\begin{aligned}
H(\rho f)(x) &= \tfrac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{f(-t)}{x-t} dt \\
&= -\tfrac{1}{\pi} P.V. \int_{\infty}^{-\infty} \tfrac{f(u)}{x+u} du \\
&= \tfrac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{f(u)}{x+u} du \\
&= -\tfrac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{f(u)}{-x-u} du \\
&= -\tfrac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{f(t)}{-x-t} dt \\
&= -Hf(-x) \\
&= -(\rho Hf)(x)
\end{aligned}$$

dir. *I* ve *II* özellikleri $\forall \varepsilon \neq 0$ için,

$$\delta_{\varepsilon^{-1}} H \delta_{\varepsilon} = (sgn\, \varepsilon) H \qquad (3.1.6)$$

eşitliği geçerlidir.
Teorem 3.1.8: $L^2(R^1)$ üzerinde etki eden sınırlı lineer bir T operatörü verilsin. T nin *I*, *II*, *III* şartlarını sağlaması için gerek ve yeter şart T, H ın sabit bir katı ve Hilbert operatörü olmasıdır.
İspat: H ; *I*, *II* ve *III* şartlarını sağladığından biz yalnızca teoremin ikinci kısmını göstermeliyiz. *I*, *II* ve *Önerme* 3.1.7. den dolayı T, σ homogenlik sembollü bir çarpım operatörüdür. Böylece $x > 0$ için, $\sigma(x) = c$ ve $x < 0$ için $\sigma(x) = c'$ dir. Fakat *III* den dolayı,

$$T(\rho f)(x) = -\rho(Tf)(x)$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
[T(\rho f)(x)]^{\wedge} &= -[\rho(Tf)(x)]^{\wedge} \\
\sigma(x)(\rho f)^{\wedge}(x) &= -\rho\left(\sigma(x)\widehat{f}(x)\right)
\end{aligned}$$

ya da

$$\sigma(x)\widehat{f}(-x) = -\sigma(-x)\widehat{f}(-x)$$

dir. Böylece $\sigma(x) = -\sigma(x), c' = -c$ ve $\sigma(x) = c sgn\, x$ dir. Burada H ın benzer sembolü $-i sgn\, x$ dir. Böylece sabit ic alındığında teorem ispatlanmış olur.

Uyarı 3.1.9: $Df(x) = f'(x)$ ile verilen D diferensiyel operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

I. D ötelemeler ile değişmelidir.

II.$'$ $D(\delta_a f) = a\delta_a(Df)$

III. D yansımalı değişmeli değildir.

Böylece, II nin yerine II' alınırsa, D operatörü H Hilbert operatörü gibi bazı özellikleri sağlar. Sıfırıncı dereceden fark operatörü olan D_0(*özdeş operatör*), I ve II yi sağlar. Fakat III ün yerine III' $D_0(\rho f) = \rho(D_0 f)$ i sağlar. Çünkü bu yansımalıdır. Böylece H, *"sıfırıncı mertebeden simetrik olmayan fark operatörü"* olduğu düşünülebilir ve bu R^1 de fark operatörünün genişlemesidir. Böylece H kapsanır. Benzer durum R^n de ortaya çıkar. Şimdi $n > 1$ için $L^2(R^n)$ e dönelim ve (2.1.28) de tanımlı $C-Z$ çekirdekleri ile verilen singüler integral operatörlerini gözönüne alalım. Bunun için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.1.10: Ω , aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde R^n de tanımlı bir fonksiyon olsun.

i. Ω , sıfırıncı dereceden homogendir. Yani $\Omega, \sum$ birim küre üzerindeki değerleri ile hesaplanabilir.

ii. $\Omega, \sum$ birim küre üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Yani,

$$\int\limits_{\sum} \Omega(x')dx' = 0$$

dır.

iii. Ω , *"Dini tipi"* şartını sağlar. Yani,

$$\omega(\rho) = \sup\{|\Omega(x') - \Omega(y')| : x', y' \in \textstyle\sum, |x' - y'| < \rho\}$$

ise ω,

$$\int\limits_0^1 \left(\tfrac{\omega(\rho)}{\rho}\right) d\rho \ < \infty \qquad (2.1.30)$$

olacak şekilde $\rho > 0$ ın bir pozitif artan fonksiyonudur. Bu hipotez altında $\forall f \in L^2(R^n)$ için,

$$Kf(x) \ = P.V. \int\limits_{R^n} f(x-t)\tfrac{\Omega(t)}{|t|^n}dt \qquad (2.1.28)$$

fonksiyonu vardır ve L^2 dedir. $K : f \to Kf$,

$$\sigma(x) \ = -\left(\tfrac{i\pi}{2}\right) \int\limits_{\sum} sgn\,(x'.t')\,\Omega(t')dt' + \int\limits_{\sum} \log\,(x'.t')^{-1}\,\Omega(t')dt' \quad (3.1.7)$$

ile verilen σ sembollü bir çarpım operatörüdür.
İspat: $K(x) = \Omega(x)\,|x|^n$, $C-Z$ çekirdeği integrallenemez olduğundan, ilk olarak Fourier dönüşümlerini elde etmek için parçalı yazacağız. Böylece $0 < \varepsilon < \eta < \infty$ için,

$$k_{\varepsilon\eta} = \begin{cases} \Omega(x)\,|x|^{-n} & ,\varepsilon < |x| < \eta \\ 0 & ,diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{3.1.8}$$

olsun. $k_{\varepsilon\eta} \in L^1(R^n)$ olduğundan $\forall f \in L^2$ için $k_{\varepsilon\eta} * f \in L^2$ yazabiliriz ve $\widehat{k}_{\varepsilon\eta}.\widehat{f} \in L^2$ dir. $\widehat{k}_{\varepsilon\eta}$ aşağıdaki iki temel özelliğe sahiptir.
A. ε ve η dan bağımsız, $\sup\limits_x \left|\widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x)\right| \le C$
B. $\forall x \neq 0$ için $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x) = \sigma(x) \in L^\infty$
Bu ispata göre, $k_{\varepsilon\eta}(x)$ nın Fourier dönüşümleri içinde $x = Rx', y = ry'$, $R = |x|, r = |y|, x', y' \in \sum$ olmak üzere kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned} \widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x) &= \int_{R^n} k_{\varepsilon\eta}(x) e^{-2\pi i x.t} dt \\ &= \int_{\varepsilon<|t|<\eta} \Omega(t)\,|t|^{-n}\, e^{-2\pi i x.t} dt \\ &= \int_{\sum} \Omega(t') \left(\int_{\varepsilon}^{\eta} e^{-2\pi i Rrx'.t'} r^{-n} r^{n-1} dr \right) dt' \end{aligned}$$

$Rr = s \Rightarrow r = \frac{s}{R}, Rdr = ds \Rightarrow dr = \frac{ds}{R}$

$$\begin{aligned} &= \int_{\sum} \Omega(t') \left(\int_{\varepsilon R}^{\eta R} e^{-2\pi i s x'.t'} \frac{R}{s}\frac{ds}{R} \right) dt' \\ &= \int_{\sum} \Omega(t') \left(\int_{\varepsilon R}^{\eta R} e^{-2\pi i s x'.t'} \frac{ds}{s} \right) dt' \end{aligned}$$

$\int_{\sum} \Omega = 0$ iken,

$$\widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x) = \int_{\sum} \Omega(t') g_{\varepsilon,\eta,x}(t') dt' \tag{3.1.9}$$

yazabiliriz. Burada,

$$g_{\varepsilon,\eta,x}(t') = \int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{e^{-2\pi i s x'.t'} - \cos 2\pi s}{s} ds \tag{3.1.10}$$

dir. $\forall x$ için $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} g_{\varepsilon,\eta,x}(t')dt'$ varlığını ve bazı $C > 1$ için,

$$|g_{\varepsilon,\eta,x}(t')| \le C \log |x'.t'|^{-1} + C$$

olduğunu iddia ediyoruz. $g_{\varepsilon,\eta,x}$ in imajiner kısmı,

$$Im\left(g_{\varepsilon,\eta,x}(t')\right) = -\int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{\sin 2\pi s x' t'}{s} ds$$

$$2\pi s x' t' = u \Rightarrow s = \frac{u}{2\pi x' t'},\ ds = \frac{du}{2\pi x' t'},\ -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$= -sgn\ (x'.t') \int_{2\pi x' t' R\varepsilon}^{2\pi x' t' R\eta} \frac{\sin u}{u} du$$

dır. Yukarıdaki ifade düzgün sınırlı ve integrasyon limitten bağımsız olduğu için $\varepsilon \to 0, \eta \to \infty$ iken $-\frac{\pi}{2} sgn\ (x'.t')$ ne yakınsar. Burada, $g_{\varepsilon,\eta,x}$ in reel kısmı için $\varepsilon R \leq 1 \leq \eta R$ durumu gözönüne alınmış olsun. O zaman,

$$Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}(t')\right) \int_{R\varepsilon}^{R\eta} \frac{\cos 2\pi s x'.t' - \cos 2\pi s}{s} ds$$

$$= \int_{R\varepsilon}^{1} + \int_{1}^{R\eta}$$

$$= I_1 + I_2 \qquad (3.1.11)$$

dir. $\left(|\cos x - \cos y| = 2\left|\sin \frac{x+y}{2} . \sin \frac{x-y}{2}\right|\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |\cos 2\pi s x'.y' - \cos 2\pi s| &= 2\left|\sin \pi s\,(x'.y'+1)\sin \pi s\,(x'.y'-1)\right| \\ &\leq 2\pi s\,|x'.y'+1|\,2\pi s\,|x'.y'-1| \\ &\leq 8\pi^2 s^2 \end{aligned}$$

dir yine,

$R = |x| \quad |x'| = \frac{|x|}{R} = \frac{R}{|R|} = 1$

$(|x'|\,|y'|) \leq 2$

$|x'y' - 1| < 1$

$\left|\frac{x}{R}.\frac{y}{r} - 1\right| = \left|\frac{xy - Rr}{Rr}\right| < 1$

olduğundan,

$$|I_1| = \leq 8\pi^2 \int_{R\varepsilon}^{1} s ds = 4\pi^2\left(1 - (R\varepsilon)^2\right) \leq 4\pi^2$$

yazarız. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left|\int_{1}^{R\eta} \frac{\cos 2\pi s x'.t' - \cos 2\pi s}{s} ds\right| \\ &\leq \int_{1}^{R\eta} \left|\frac{\cos 2\pi s x'.t'}{s}\right| ds + \int_{1}^{R\eta} \left|\frac{\cos 2\pi s}{s}\right| ds \end{aligned}$$

$$sx'.t' = u \Rightarrow x'.t'ds = du$$
$$\left.\begin{array}{l} u = x'.t' \\ u = x'.t'R\eta \end{array}\right. \Rightarrow s = \tfrac{u}{x'.t'}$$

$$= \int_{x'.t'}^{x'.t'.R\eta} \left|\frac{\cos 2\pi u}{\frac{u}{x'.t'}} \cdot \frac{du}{x'.t'}\right| + \int_{1}^{R\eta} \left|\frac{\cos 2\pi s}{s}\right| ds$$

$$= \int_{x'.t'}^{x'.t'.R\eta} \left|\frac{\cos 2\pi u}{u}\right| du + C$$

$$|I_2| \quad \leq \left|\int_{x'.t'}^{x'.t'.R\eta} s^{-1} \cos 2\pi s ds\right| + C$$

dir. Eğer $(x'.t')\, R\eta > 1$ ise, $C = \sup\limits_{R} \int_{1}^{R} \frac{\cos u}{u} du$ olmak üzere,

$$|I_2| \leq \int_{x'.t'}^{1} \frac{ds}{s} + \int_{1}^{(x'.t')R\eta} \frac{\cos 2\pi s}{s} ds \leq \log \frac{1}{|x'.t'|} + 2C$$

dir. Eğer $0 < (x'.t')\, R\eta \leq 1$ ise,

$$|I_2| \leq \int_{x'.t'}^{1} \frac{ds}{s} = \log \frac{1}{|x'.t'|}$$

olur. $x'.t' < 0$ için benzer bir sonuç sağlanır. $\varepsilon R \leq 1 \leq \eta R$ ise,

$$Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}(t')\right) \leq 2\log|x'.t'|^{-1} + 4\pi^2 + 2C$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca eğer $R\varepsilon > 1$ ise,

$$Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}\right) = \int_{R\varepsilon}^{R\eta} = \int_{1}^{R\eta} - \int_{1}^{R\varepsilon}$$

var ve böylece,

$$\left|Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}\right)\right| \leq 2\log|x'.t'|^{-1} + 4C$$

elde edilir. Benzer olarak $R\eta < 1$ ise,

$$Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}\right) = \int_{R\varepsilon}^{1} - \int_{R\eta}^{1}$$

ve

$$\left|Re\left(g_{\varepsilon,\eta,x}\right)\right| \leq 8\pi^2$$

dir. Buradan, tüm durumlar için,

$$|Re\,(g_{\varepsilon,\eta,x})| \quad \leq C_1 \log |x'.t'|^{-1} + C_2 \qquad (3.1.12)$$

olur. Böylece $g_{\varepsilon,\eta,x}(y'), \sum$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ile ε ve η dan bağımsız majorizedir. $\Omega, \sum$ üzerinde sınırlı olduğundan biz (3.1.9) dan $C = \int\limits_{\sum} \Omega(y') \left(1 + \log |x'.t'|^{-1}\right) dt$ ile $\widehat{k}_{\varepsilon\eta}$ için **A** şartını elde ederiz. Eğer h yeterince iyi bir fonksiyon ise, $\forall\, \lambda, \mu > 0$ için,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \tfrac{h(\lambda s)-h(\mu s)}{s} ds \quad = h(0) \log \tfrac{\mu}{\lambda} \qquad (3.1.13)$$

vardır. (3.1.13) e; $h(s) = \cos 2\pi s,\ \lambda = x^{'}t^{'},\ \mu = 1$ uygulandığında,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \int_{R\varepsilon}^{R\eta} \left(\cos 2\pi s x^{'} t^{'} - \cos 2\pi s\right) \left(\frac{ds}{s}\right) = \log \left|x^{'}t^{'}\right|^{-1}$$

elde ederiz. (3.1.9) da $\varepsilon \to 0, \eta \to \infty$ iken limite geçer, **A** şartını uygular ve *Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini* gözönüne alırsak,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to\infty}} \widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x) \quad = \int\limits_{\sum} \Omega(t') \left(-\tfrac{i\pi}{2} sgn(x'.t') + \log |x'.t'|^{-1}\right) dt'$$

$$= \sigma(x)$$

ile **B** deki limitin varlığı görülür. Eğer $K_{\varepsilon\eta}$ operatörü $k_{\varepsilon\eta}$ çekirdekli konvolüsyon olarak veriliyor ise, $\forall \varepsilon, \eta, K_{\varepsilon\eta}$ için *Sonuc* 3.1.5. den bir çarpım operatörü ve$\forall\varepsilon, \eta$ için **A** ile $\left\|\widehat{k}_{\varepsilon\eta}(x)\right\|_{\infty} \leq C$ dir. Böylece $\{K_{\varepsilon\eta}\}$, *Sonuc* 3.1.6. ün şartlarını sağlar ve $\varepsilon \to 0, \eta \to \infty$ iken $K_{\varepsilon\eta}, \sigma$ sembollü bir çarpım operatörüne yakınsar. Diğer taraftan, eğer $f \in L^2$ ise,

$$K_{\varepsilon\eta} f(x) = k_{\varepsilon\eta} * f(x) = \int\limits_{\varepsilon<|t|<\eta} f(x-t) k(t) dt$$

dir. Böylece $\forall x$ için,

$$\lim_{\eta\to\infty} K_{\varepsilon\eta} f(x) = \int\limits_{\varepsilon<|t|} f(x-t) k(t) dt$$

olur. Buradan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\lim_{\eta\to\infty} K_{\varepsilon\eta} f(x)\right) \quad = P.V. \int\limits_{R^n} f(x-t) k(t) dt$$

$$= K f(x)$$

L^2 de mevcuttur. Buraya kadar yapılanlardan $(Kf)^\wedge = \sigma(x)\widehat{f}(x)$ olduğu için teorem ispatlanmış olur.

Uyarı 3.1.11: *Teorem* 3.1.10. nun ispatı Ω üzerindeki genel şartlar altında sağlanır. Gerçekten, $\Omega = \Omega_0 + \Omega_e$ yazılır. Burada Ω_0, Ω nın tek kısmı, Ω_e de çift kısmıdır. $Im\,(g_{\varepsilon,\eta,x})$ in düzgün sınırlılığı yalnızca $\int\limits_{\sum} |\Omega_0(y')|\, dy' < \infty$ olması yeter. Yani, $\Omega_0 \in L^1(\sum)$. $Re\,(g_{\varepsilon,\eta,x})$ in hesaplanması için yapılan ispatta,

$$\int\limits_{\sum} |\Omega_e(y')| \log |x'.y'|^{-1}\, dy' \qquad (3.1.14)$$

düzgün sınırlılığına ihtiyaç duyulur. Eğer k, tek çekirdek (*yani,* $k(-x) = -k(x)$) ise $-n.$ *dereceden* homogendir. Böylece $\Omega, \sum$ üzerinde de tektir. K operatörünün (2,2) tipinde olduğunu garanti etmek için yalnızca $\Omega \in L^1(\sum)$ ya ihtiyaç duyulacaktır. k nın tek oluşunun zorunlu olmaması için daha genel hipotezler altında (3.1.14) ifadesinin sağlanması Zygmund sınıfında $\Omega \in L\log^+ L(\sum)$ dır. Gerçekten, *Young dış bükey eşitsizliğinden* dolayı $\left(ab \leq \int\limits_0^a \psi(s)ds + \int\limits_0^b \psi(t)dt\right)$ ki bu eşitsizlik $\exists\, a, b \geq 0$ için $ab \leq a\log(a+1) + e^b$ dir. $\lambda > 0$ için, $a = |\Omega(y')|\,, b = \lambda \log |x'.y'|^{-1}$ alındığında,

$$|\Omega(y')| \log |x'.y'|^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} |\Omega(y')| \log (1 + |\Omega(y')|) + \frac{1}{\lambda} |x'.y'|^{-\lambda}$$

dir. Burada $0 < \lambda < 1$ için $|x'.y'|^{-\lambda} = |\cos\varphi|^{-\lambda}$, $\sum$ üzerinde integrallenebilir olduğunda, $|\Omega| \log (1 + |\Omega|)$ nın integrallenebildiğini garanti etmeye yeterlidir. Bu $|\Omega| \log^+ |\Omega| \in L^1(\sum)$ a eşittir ve $\sum$ kompaktır. Buradan $\Omega \in L\log^+ L$, (3.1.14) in düzgün sınırlılığını garanti eder. $\sum$ üzerinde Ω nın sıfır ortalama değeri ile birlikte bu hipotez [*Calderon, A.P. and Zygmund, A.* 1952] de gösterilen ispata göre, $1 < p < \infty$ için K operatörünün L^p sınırlılığını garanti eder.

Uyarı 3.1.12: $\int\limits_{\sum} \Omega = 0, \sum$ üzerinde sıfır ortalama değer şartı ihmal edilemez. Çünkü,

$$\int\limits_{R^n} \Omega(y)\, |y|^{-n} f(x-y)dy = \int\limits_{|y|\leq 1} + \int\limits_{|y|>1}$$

ve Ω nın yalnızca $\sum$ üzerinde integrallenebilen ikinci bir integrali vardır. Asıl zorluk birinci integralin ifade edilmesidir. Örnek olarak eğer $\Omega \equiv 1, f$ sabit ve bir x_0 noktasının komşuluğunda sıfır ise o zaman bu komşulukta ilk integral ıraksaktır. Yakınsaklığı elde etmek için Ω üzerinde sıfır ortalama değerine olan ihtiyaçtan dolayı bir tür çıkarmaya ihtiyaç vardır. Şimdi K operatörünün σ sembolünü gözönüne alalım.

Uyarı 3.1.13: $\sigma(x)$ sembolü, (3.1.7) formülünden görüldüğü gibi sıfırıncı dereceden bir homogen fonksiyondur. Bu sadece R^n deki $\alpha.$ dereceden homogen herhangi fonksiyonların Fourier dönüşümünün, $\alpha - n.$ *dereceden* homogen olduğu gerçeğini verir.

Uyarı 3.1.14: (3.1.7) formülünden σ, birim küre üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir. Çünkü,

$$\int_{\Sigma} \sigma(x')dx' = \int_{\Sigma} \left(\int_{\Sigma} \Omega(t') \left[\left(-\tfrac{\pi i}{2}\right) sgn\,(x'.t') + \log |x'.t'|^{-1} \right] dt' \right) dx'$$

$$= \int_{\Sigma} \Omega(t') \left(\int_{\Sigma} \left(-\tfrac{\pi i}{2}\right) sgn\,(x'.t') + \log |x'.t'|^{-1} dx' \right) dt'$$

dir. Burada kolayca görüldüğü gibi içteki integral t den bağımsızdır ve $\Omega, \sum$ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir.

Uyarı 3.1.15: Eğer $k(x)$ tek bir fonksiyon ise (3.1.7) formülü,

$$\sigma(x) = -\left(\tfrac{\pi i}{2}\right) \int_{\Sigma} \Omega(t') sgn\,(x'.t') dt'$$

$$= -\pi i \int_{\Sigma^+(x)} \Omega(t') dt' \qquad (3.1.15)$$

formülüne indirgenir. Burada, $\sum^+(x), x'.t' \geq 0$ olmak üzere yarı küre olarak adlandırılır. *Teorem* 3.1.10 daki singüler integrallerin bir özel durumu olarak Riesz dönüşümlerini gözönüne alabiliriz. *Teorem* 3.1.8 de ifade edildiği gibi H ile gösterilen Hilbert dönüşümlerinin $n > 1$ için R^n deki benzeri olan dönüşümlerini görebilmemizi sağlayan semboller için benzer terimler elde ederiz.

Tanım 3.1.16: R^n de tanımlanan bir f fonksiyonu verildiğinde onun Riesz dönüşümü $j = 1, ..., n$ olmak üzere,

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|t|>\varepsilon} f(x-t) \tfrac{t_j}{|t|^{n+1}} dt \qquad (2.1.25)$$

dir ve $\Omega_j(x) = c_n x_j |x|^{-1}$ olmak üzere,

$$k_j(x) = \Omega_j(x) |x|^{-n} \qquad (2.1.24)$$

Riesz çekirdeğidir. Bu ifadelerde,

$$c_n = \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right) \qquad (3.1.16)$$

dir. (2.1.24) den dolayı $\Omega_j(x), \forall j = 1, ..., n$ için tek ve sıfırıncı dereceden homogen bir fonksiyondur, $\sum$ üzerinde sıfır ortalama değerine sahiptir, $x = 0$ da sürekli değildir ve $\sum$ üzerinde düzgündür. Her Ω_j, *Teorem* 3.1.10. nun şartlarını sağlar ve böylece R_j ile beraber bir çarpım operatörü tanımlar. (3.1.15) de olduğu gibi σ_j,

$$\sigma_j(x) = -\pi i c_n \int_{\Sigma^+(x)} t'_j dt' \qquad (3.1.17)$$

şeklinde verilir. σ_j yı hesaplamada, j sabit, R^n de bazı $\{l_1, ..., l_n\}$ ortonormal bazı için, $t' = \sum_{k=1}^{n} (t'.l_k)\, l_k$ olmak üzere $t'_j = t'.x_j$ dir. Bu durumda,

$$t'_j = \sum_{k=1}^{n} (t'.l_k)\,.\,(l_k.x_j)$$

dir. Belirli bir x sabiti için $l_j = x'$ olacak şekilde l_k lar seçilmiş olsun. Bu durumda $c_k = l_k.x_j$ olmak üzere,

$$t'_j \quad = (t'.x')x'_j + \sum_{k \neq j} c_k(t'.l_k) \qquad (3.1.18)$$

şeklindedir. $\sum^{+}(x)$ üzerinde (3.1.18) integrallendiğinde,

$$\sigma_j(x) = -\pi i c_n x'_j \int (x'.t')\, dt' - \pi i c_n \sum_{j \neq k} c_k \int (t'.l_k)\, dt'$$

eşitliği yazılır. Burada ilk integral R^{n-1} deki birim kürenin hacmi olan Ω_{n-1} e eşittir ve diğer integral ihmal edilir. Dolayısıyla *Lemma* 1.1.56 ve (3.1.16) dan, $\forall j = 1, ..., n$ için,

$$\sigma_j(x) \quad = -\pi i c_n x'_j \Omega_{n-1} = -i x'_j \qquad (3.1.19)$$

dir. (3.1.19) dan $H^2 = -I$ olacak şekilde (I *birim operatör*) $L^2(R^1)$ deki Hilbert dönüşümlerinden birine benzer özellikte bir Riesz dönüşümü elde edebiliriz. Gerçekten, $f \in L^2(R^n)$ için her $R_j f$, $L^2(R^n)$ e ait olduğundan ve $(R_j f)^{\wedge}(x) = -i x_j\, |x|^{-1} \widehat{f}(x)$ olduğundan $R_j^2 f = R_j(R_j f)$ yazılabildiğinden aşağıdaki eşitlik daima vardır.

$$\left(R_j^2 f\right)^{\wedge}(x) \quad = -i x_j^2\, |x|^{-2} \widehat{f}(x) \qquad (3.1.20)$$

Böylece,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f\right)^{\wedge}(x) \quad = -\widehat{f}(x) \qquad (3.1.21)$$

ve dolayısıyla bu ifade, $L^2(R^n)$ de $\sum R_j^2 = -I$ gibi yorumlanabilir. Bundan başka, (3.1.20) ve *Plancherel Teoremi*,

$$\sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

ifade eder. R^n üzerinde tanımlanan fonksiyonların $(v_1(x), ..., v_n(x))$ $n - lisi$ $\forall j$ için,

$$v_j\left(A^{-1}(x)\right) = \sum_k a_{jk} v_k(x)$$

var ise $A = (a_{jk})\,,\quad j, k = 1, ..., n$ dönmesi altında bir vektörel dönüşümdür. Riesz dönüşümlerinin diğer önemli bir özelliği, onların $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ sembolleri, R^n deki dönmeler altında bir vektörel dönüşüm olmasıdır. Bu gerçek Riesz dönüşümü için şöyledir.

Lemma 3.1.17: $(m_1, ..., m_n)$, R^nin her dönmesi altında bir vektör gibi dönüşümler olacak şekilde eğer $m_1(x), ..., m_n(x)$ sıfırıncı mertebeden homogen fonksiyonlar ise bazı c sabiti ve $j = 1, ..., n$ için $m_j(x) = cx_j\,|x|^{-1}$ dir.

İspat: Bu hipotezden dolayı $x \in \sum$ yı gözönüne almak yeterlidir. R^n in kabul edilen kanonik bazı $e_1, ..., e_n$ ve $c = m_1(e_1)$ olsun. $j \neq 1$ için $m_j(e_1) = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten, $A = (a_{jk}), e_1$ i sabit bırakan bir dönme ise $j \neq 1$ için,

$$m_j(e_1) = m_j(A^{-1}e_1) = \sum_{k=2}^{n} a_{jk} m_j(e_1)$$

ve $(m_2(e_1), ..., m_n(e_1))$ R^{n-1} in her dönmesi altında sabit bir vektördür ve sıfır vektörü olmak zorundadır. Böylece, $j = 2, ..., n$ için $m_j(e_1) = 0$ dır. Eğer, A, R^n de genel bir dönme ise o zaman,

$$m_j(Ae_1) = a_{j1} m_1(e_1) + \sum_{k=2}^{n} a_{jk} m_j(e_1) = a_{j1} m_1(e_1)$$

dir. Fakat $Ae_1 = x \in \sum$ ise o zaman $a_{j1} = x_j$ dir. Böylece $m_j(x) = cx_j$ ve lemma ispatlanmış olur. Çünkü $|x| = 1$ dir.

Teorem 3.1.18 (Riesz Dönüşümlerinin Geometrik Karakterizasyonu): $L^2(R^n)$ de etki eden bir $(T_1, ..., T_n)$ n-tane sınırlı lineer operatörleri verilsin. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

I R^n deki bütün ötelemeler ile $\forall T_j, j = 1, ..., n$ değişmelidir.

II. R^n deki bütün genişlemeler ile $\forall T_j, j = 1, ..., n$ değişmelidir.

III. R^n deki $\forall A = (a_{jk})$ dönmesi için, $(T_1, ..., T_n)$, bir vektör dönüşümüdür. Yani, $AT_jA^{-1} = \sum_k a_{jk} T_k$, $j = 1, ..., n$ gerek ve yeter şart $T_j = cR_j, j = 1, ..., n$ olacak şekilde c sabitinin olmasıdır. Burada, R_j Riesz dönüşüm operatörüdür.

İspat: $j = 1, ..., n$ için R_j, (3.1.19) da verilen σ_j sembollü homogen bir çarpım operatörü olduğundan R_j, genişlemeler ve ötelemeler ile değişmelidir ve *III* ü sağlar. Tersine $(T_1, ..., T_n)$ nın, *I*, *II* ve *III* ü sağladığını varsayalım. *I* ve *II* den herbir T_j, $j = 1, ..., n$; m_j sembollü homogen bir çarpım operatörüdür ve *Lemma* 3.1.17 den *III* ile $m_j(x) = cx_j\,|x|^{-1}$ sağlanır. (3.1.19) dan olayı teorem ispatlanır.

Riesz dönüşümleri, çok değişkenli harmonik fonksiyonlar teorisine Poisson integralleri ile bağlıdır. 2.Bölümde Hilbert dönüşümünün konjuge harmonik fonksiyonunun sınır değerlerine bağlı olarak nasıl ortaya çıktığını gördük. Çok boyutlu durumun benzerliğini ortaya koymak için, tek kompleks değerli analitik fonksiyonun iki reel değişkenli harmonik fonksiyonun gradiantı olarak düşünülebileceğine dikkat edelim ve aynı şekilde çok boyutlu harmonik fonksiyonların gradiantlarını, çok değişkenli analitik fonksiyonların genelleştirilmesi olarak düşünmek doğaldır. $j = 1, ..., n$, $u_j \in C^2(R^n)$ olacak biçimde $\{u_1(x), ..., u_n(x)\}$,

$n-$ *boyutlu* fonksiyonlar R^n de konjuge fonksiyonların sistemi olsun ve

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=0 \quad , \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j}, (j\neq k \ icin) \qquad (3.1.22)$$

ile ifade edilen genelleştirilmiş *Cauchy – Riemann eşitliklerini* sağlasın. Basit irtibatlı bir bölge içinde, ikinci eşitlik $\{u_1,...,u_n\}$, $n-$ *değişkenli* bir fonksiyonun varlığını ifade eder ve gradiantdır. Aynı zamanda birinci eşitlik bu fonksiyonun harmonik olduğunu ifade eder. R^n de konjuge fonksiyonlar sisteminin varlığı lokal olarak $h(x)$ harmonik fonksiyonunun varlığını gösterir. Öyleki $x\in R^n$ ve $j=1,...,n$ için $u_j(x)=\dfrac{\partial h}{\partial x_j}$ dir. *Bölüm* 3 de yaptığımız Poisson integralleri çalışmasına dayanarak Riesz dönüşümleri açısından konjuge fonksiyonlar sisteminin aşağıdaki karakterizasyonuna sahibiz.

Teorem 3.1.19: $(n+1)$ tane $f, f_1,...,f_n\in L^2(R^n)$, fonksiyonları ve Poisson integralleri $u_0=P_y{*}f, u_j=P_y{*}f_j,\ j=1,...,n$ verilsin. $\{u_0(x,y),u_1(x,y),...,u_n(x,y)\}$nin R^{n+1} de konjuge fonksiyonların sistemi olması için gerek ve yeter şart

$$f_j \ =R_jf \quad , j=1,...,n \qquad (3.1.23)$$

(R^{n+1} *de* x_0 *rolünü oynayan bir* y *degişkeni*) olmasıdır.

İspat: Eğer (3.1.23) sağlanırsa, o zaman (3.1.19) dan,

$$\widehat{f_j}(x)=-ix_j\,|x|^{-1}\,\widehat{f}(x)$$

dir. *Teorem*1.1.52, Fourier dönüşümünün Abel ortalamalarından elde edilen fonksiyonun Poisson integralini ifade eder ve $j=1,...n$ için,

$$u_j(x,y)=P_y*f_j(x)=-i\int\widehat{f}(t)t_j\,|t|^{-1}\,e^{2\pi ix.t}.e^{-2\pi|t|y}dt$$

şeklindedir. Bu integraller yakınsaktır. Böylece integral işareti altında türev alma kaidesi gerçeklenmiştir ve (3.1.20) eşitlikleri doğrulanmıştır. Tersine olarak $\forall j=1,...n$ için,

$$u_j(x,y)=P_y*f_j(x)=\int\widehat{f_j}(t)e^{2\pi ix.t}.e^{-2\pi|t|y}dt$$

ve

$$u_0(x,y)=P_y*f(x)=\int\widehat{f}(t)e^{2\pi ix.t}.e^{-2\pi|t|y}dt$$

olsun. (3.1.20) eşitliği ile $\frac{\partial u_0}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_0}=\frac{\partial u_j}{\partial y}$ den dolayı,

$$2\pi it_j\widehat{f}(t)e^{-2\pi|t|y}=2\pi\,|t|\,\widehat{f_j}(t)e^{-2\pi|t|y}$$

dir. Böylece, $j=1,...n$ için $f_j(x)=R_jf(x)$ ve

$$\widehat{f_j}(t)=it_j\,|t|^{-1}\,\widehat{f}(t)$$

eşitlikleri elde edilir.

Uyarı 3.1.20: Bu sonuç $L^p(R^n), 1 < p < \infty$ [*Horvath, J.*, 1953]deki fonksiyonlar için genelleştirilmiştir. $p = 1$ durumu $L^1(R^n)$ nin alt sınıfı içinde $H^1(R^n)$ Hardy uzayının karakterizasyonudur. H^1 ve BMO birbirinin dualidir.

KAYNAKLAR

[HARDY, G.H. and LITTLEWOOD, J.E. 1930.] *Acta Math.*, 54 : 81

[STEIN, E.M. and WEIS; G. 1971.] *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces.* Princeton *New Jersey*, Princeton *Univ.* Press.

[STEIN, E.M. 1970.] *Singular Integrals Differential* Properties *of Functions.* Princeton *University* Press, Princeton, *New Jersey.*

[JOHN, F. and NÍRENBERG, L. 1961] *Comm. Pure Appl.Math.*, 14 : 415

[NERI, U. 1977.] *Studia Math*, 61 : 63

[FEFFERMAN, C. and STEIN, E.M. 1972] *Acta Math.*, 129 : 137

[REIMANN, H.M. and RYCHENER, T. 1975.] *Funktionen Beschrankter Mittlerer Oszillation Lecture Notes in Math.* ♯ 487, *Springer Verlag, New York Heidelberg – Berlin.*

[SADOSKY, C. 1979.] *Interpolation of operators and* sin*gular integrals.*

[HELMS, L.L. 1969.] *Introduction to Potentýal theory. Department of Mathematýcs University of Illinois, Urbana.*

[SCHWARZ, L. 1966.] *Mathematics for the physiccal sciences Hermann, Edituers des sciences et des arts Paris.*

[NERI, U. 1971.] *Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag, Berlin. Heidelberg. New York.*

[SAMKO, S. G., KILBAS, A. A. and MARICHEV, O. I. 1993.] *Integrals and derivatives of fractional orders and its some applications United states of America.*

[LANG, S. 1993.] *Real and functional analysis santa clara University U. S. A.*

[*KOLMOGOROV, A. N and FOMIN, S. V.*] *Introductory Real Analysis.*

[*DONALD, L. ,COHN* 1980.] *Measure Theory.*

[*BAYRAKTAR, M.* 1996.] *Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları No* : 789 *Erzurum.*

[*HORVATH, J.* 1953.] *Indag. Math.* 15 : 17.

[*CALDERON, A. P. and ZYGMUND, A.* 1952.] *Acta. Math.* 88 : 85.

[*CALDERON, A. P. and ZYGMUND, A.* 1956.] *Amer. J. Math.* 78 : 310.

[*BAYRAKTAR, M.* 1988.] *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi Yayınları No* : 650 *Erzurum.*

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Ankara'da doğdum. İlk, orta ve lise tahsilimi Ankara'da tamamladım. 1990 yılında girdiğim Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1994 yılında mezun oldum. 1995 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. Halen aynı fakültede çalışmaktayım.