$PSL(2, R)$ GRUBU VE AYRIK ALT GRUPLARI

Şerife ÇAKIRTAŞ

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSL(2, *R*) GRUBU VE AYRIK ALT GRUPLARI

Şerife ÇAKIRTAŞ
0000-0002-3515-6975

Prof. Dr. Osman BİZİM

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Şerife ÇAKIRTAŞ tarafından hazırlanan "$PSL(2, \mathbb{R})$ GRUBU VE AYRIK ALT GRUPLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Osman BİZİM
https://orcid.org/0000-0001-5236-4023

Başkan : Prof. Dr. Osman BİZİM
https://orcid.org/0000-0001-5236-4023
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
https://orcid.org/0000-0002-5341-0009
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Ahmet YILDIZ
https://orcid.org/0000-0002-9799-1781
İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../....

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/09/2019

Şerife ÇAKIRTAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$PSL(2, \boldsymbol{R})$ GRUBU VE AYRIK ALT GRUPLARI

Şerife ÇAKIRTAŞ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Osman BİZİM

Bu çalışmada $PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve bu grubun ayrık alt gruplarının özellikleri ele alınmıştır. Bu grup ve hiperbolik geometri arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun ayrık alt grupları olan Fuchs grupları ve modüler grubun cebirsel yapıları ele alınmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, daha sonra ihtiyaç duyulacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun özellikleri ele alınmış ve bu grubun üst yarı düzlem üzerindeki hareketi incelenmiştir. Bu bölümde hiperbolik geometrinin üst yarı düzlem modeli oluşturulmuş ve $PSL(2, \boldsymbol{R})$ deki dönüşümlerin hiperbolik uzaklığı ve hiperbolik alanı değişmez bıraktığı görülmüştür.

Beşinci bölümde $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun ayrık alt grupları olan Fuchs grupları incelenmiştir. Bu gruplar için temel bölge ve döşeme kavramları ele alınmıştır. Fuchs gruplarının bölüm uzayları oluşturulmuş ve bu bölüm uzayları ile kompakt Riemann yüzeyleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Son bölümde modüler grup ele alınmıştır. Modüler grubun üreteçleri, temel bölgesi ve temsili verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $PSL(2, \boldsymbol{R})$, Fuchs grubu, hiperbolik geometri, modüler grup
2019, vi + 72 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

THE GROUP $PSL(2, \boldsymbol{R})$ AND ITS DISCRETE SUBGROUPS

Şerife ÇAKIRTAŞ

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Osman BİZİM

In this work, the discussed the properties of the group $PSL(2, \boldsymbol{R})$ and its discrete subgroups. We considered the relation between this group and hyperbolic geometry. Moreover, we studied algebraic structures of Fuchsian groups which are discrete subgroups of $PSL(2, \boldsymbol{R})$ and modular group.

In the second chapter, some definitions and theorems which will be used later in the work are given.

In the fourth chapter, the properties of $PSL(2, \boldsymbol{R})$ are considered and the action of this group on the upper half plane is studied. In this chapter the upper half plane model of the hyperbolic geometry is constructed. It is seen that the hyperbolic distance and the hyperbolic area are invariant under transformations of $PSL(2, \boldsymbol{R})$

In the fifth chapter, Fuchsian groups, which are the discrete subgroups of $PSL(2, \boldsymbol{R})$ are considered. The concept of fundamental regions and tessellations for these groups are given. The quotient spaces of these groups are constructed. The relations between quotient spaces of these groups and compact Riemann surfaces are studied.

In the last chapter, the modular group is considered. The generators, fundamental region and representation of the modular group are given.

Key words: $PSL(2, \boldsymbol{R})$, Fuchsian group, hyperbolic geometry, modular group
2019, vi + 72 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında beni bilgisiyle yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsü ve desteği ile her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Osman BİZİM' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans dönemi boyunca manevi desteğini benden esirgemeyen eşime de teşekkürlerimi sunarım.

Şerife ÇAKIRTAŞ
27/09/2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
Ω	$\boldsymbol{C}$ de kafes
$\mu(E)$	E kümesinin H-Alanı
$\overset{\circ}{F}$	F nin içi
Γ	Fuchs Grubu
$\boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}]$	Gauss Tamsayılar Halkası
$\boldsymbol{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$PSL(2, \boldsymbol{C})$	Karmaşık katsayılı Möbiüs dönüşümlerinin grubu
$PSL(2, \boldsymbol{Z})$	Modüler Grup
$PSL(2, \boldsymbol{R})$	Reel katsayılı Möbiüs dönüşümlerinin grubu
$\boldsymbol{R}$	Reel sayılar kümesi
Σ	Riemann Küresi
$PSL(2, \boldsymbol{Z}[\boldsymbol{i}])$	Picard modüler grubu
$\wp(z)$	Weierstrass $\wp$ fonksiyonu
$\boldsymbol{U}$	Üst yarı düzlem
$\rho(z, w)$	z ve w noktaları arasındaki hiperbolik uzaklık
Γ_z	z noktasının Γ yörüngesi
$\overline{B_\varepsilon(z_0)}$	z_0 merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı hiperbolik disk
$h(\gamma)$	γ eğrisinin hiperbolik uzunluğu
$L(\Gamma)$	Γ nın limit noktalarının kümesi
$D_p(\Gamma)$	Γ için p merkezli Dirichlet bölgesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu ve bu grubun ayrık alt grupları olan Fuchs grupları ele alınmıştır. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu reel katsayılı Möbiüs dönüşümlerinin grubu olarak bilinir. Bu grubun üst yarı düzlem üzerindeki hareketleri oldukça önemlidir. Ayrıca $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun hiperbolik geometri ile olan ilişkileri de oldukça önemlidir. Öklid tarafından M. Ö. 300' lü yıllarda yazılmış olan 'Elementler' isimli kitapta geometrinin temel kavramları tanımlanmış ve çeşitli aksiyomlar ifade edilmiştir. Zamanla bu aksiyomlardan paralellik postulatı olarak bilinen beşinci postulat üzerine itirazlar oluşmaya başlamış ve bu durum Öklidyen olmayan geometrilerin doğmasına zemin hazırlamıştır. Öklidyen olmayan geometriler üzerine olan ilk çalışmalar ise hiperbolik geometri ile başlamıştır. Hiperbolik geometrinin özellikleri ve Öklid geometrisi ile hiperbolik geometri arasındaki farklar matematikte önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır.

Fuchs grupları $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun ayrık alt gruplarıdır ve bunların içinde en çok çalışılanı modüler gruptur. Modüler grubun matematiği birçok dalı ile özellikle sayılar teorisi ile yakın bir ilişkisi vardır, dolayısıyla matematiğin en çok çalışılan konularından birisidir.

Hiperbolik geometri ve modüler grup daha önce çok defa çalışılmış olsa da $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun hiperbolik geometri ile ilişkisi ve $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun ayrık alt grupları olan Fuchs grupları ile ilgili Türkçe yazılmış yeterince çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma ile bu alandaki eksikliğin giderilmesi amaçlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda bu çalışmada kullanılacak bazı temel kavramlar ve teoremler ifade edilecektir. Çalışmanın ilk kısmında *PSL*(2, ***R***) ve ayrık alt grupları çalışılacağından öncelikle ayrık küme, topolojik grup ve ayrık grup kavramları tanımlanacaktır.

2.1. Tanım. Δ bir topolojik uzayın alt kümesi olsun. Eğer her $x \in \Delta$ noktasının $U \cap \Delta = \{x\}$ olacak şekilde bir *U* komşuluğu varsa Δ kümesine *ayrık küme* denir (Jones ve Singerman 1987).

Örneğin;

i) ***Z*** tamsayılar kümesi ***R*** nin bir ayrık alt kümesidir.

ii) $\boldsymbol{R}^n$ nin her sonlu alt kümesi ayrıktır.

2.2. Tanım. *G*, bir topolojik uzay ve aynı zamanda bir grup olmak üzere

$$m : G \times G \to G,\; m(g,h) = gh$$

$$i : G \to G,\; i(g) = g^{-1}$$

olarak tanımlanan grup çarpımı ve ters alma işlemleri sürekli ise *G* kümesine *topolojik grup* denir (Jones ve Singerman 1987).

2.3. Tanım. *G* bir topolojik grup olmak üzere *G* grubunun elemanlarının hiçbirisi *G* nin bir yığılma noktası değil ise *G* grubuna *ayrık grup* denir (Başkan 1980).

2.4. Tanım. *f*, ***C*** üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $z \in \boldsymbol{C}$ için $f(z + \omega) = f(z)$ olacak şekilde bir $\omega \in \boldsymbol{C}$ sayısı var ise $\omega \in \boldsymbol{C}$ sayısına *f* fonksiyonunun bir *periyodu*, eğer *f* fonksiyonunun bir $\omega \neq 0$ periyodu varsa *f* fonksiyonuna *periyodik fonksiyon* denir (Jones ve Singerman 1987).

2.5. Tanım. ω_1, $\omega_2 \in \boldsymbol{C}$, $\omega_1/\omega_2 \notin \boldsymbol{R}$ olmak üzere

$$\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid m,\ n \in \boldsymbol{Z}\} \subset \boldsymbol{C}$$

kümesine $\boldsymbol{C}$ de bir *kafes* denir (Jones ve Singerman 1987).

Tanımda $\omega_1/\omega_2 \notin \boldsymbol{R}$ olması, ω_1 ve ω_2 karmaşık sayılarının aynı doğru üzerinde olmaması gerektiğini belirtmektedir. $\{\omega_1, \omega_2\}$ kümesine Ω kafesinin bir *bazı* denir ve bir bazı $\{\omega_1, \omega_2\}$ olan Ω kafesi $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ ile gösterilir. $\{\omega_1, \omega_2\}$, Ω kafesi için bir üreteç çiftidir. Ω kafesi için $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazından başka bazlar da vardır. Örneğin $\{\omega_1, \omega_1 + \omega_2\}$ kümesi de $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi için bir bazdır. Gerçekten herhangi bir $\omega \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ karmaşık sayısı, $m - n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ olmak üzere,

$$\omega = m\omega_1 + n\omega_2 = (m-n)\omega_1 + n(\omega_1 + \omega_2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Daha genel olarak eğer ω_1', $\omega_2' \in \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ise

$$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1$$

$$\omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$$

olacak biçimde a, b, c, $d \in \boldsymbol{Z}$ sayıları vardır. Bu durumda ω_1', ω_2' yukarıdaki eşitlikler ile verilen sayılar olmak üzere $\{\omega_1', \omega_2'\}$ kümesinin Ω kafesinin bir bazı olması için gerek ve yeter koşul $ad - bc = \pm 1$ olmasıdır. $ad - bc = \pm 1$ eşitliğini gerçekleyen sonsuz çoklukta a, b, c, d tamsayıları bulunabileceğinden her Ω kafesi için sonsuz sayıda baz vardır. Kafesler Öklid eşmetrilerinin yani uzaklık koruyan dönüşümlerin ayrık gruplarıdır.

2.6. Teorem. Ω, G topolojik grubunun ayrık alt grubu ve K, G nin kompakt bir alt kümesi ise $\Omega \cap K$ sonludur (Jones ve Singerman 1987).

2.7. Sonuç. Kompakt bir topolojik grubun her ayrık alt grubu sonludur (Jones ve Singerman 1987).

2.8. Tanım. *X* bir küme ve *G* bir grup olmak üzere; her $g \in G$ ve her $x \in X$ için

$$* : G \times X \to X \quad *(g,x) = g * x$$

olarak tanımlanan $*$ dönüşümü

i) her $x \in X$ için $e * x = x$

ii) her $g, h \in G$ ve $x \in X$ için $*(gh, x) = (gh) * x = g * (h * x)$

koşullarını gerçekliyorsa $(G, X, *)$ üçlüsüne *grup etkisi* denir. Bu durumda *G grubu X kümesi üzerine* "$*$" *dönüşümü ile etki eder* denir. *X* kümesine de bir *G-kümesi* adı verilir (Gezer ve Bizim 2017).

2.9. Tanım. *X* bir *G*-kümesi olmak üzere "$\sim_G$" denklik bağıntısına göre *X* kümesinin her bir denklik sınıfına *X* kümesinin bir *G-yörüngesi* veya *X* kümesinin *yörüngesi* denir (Gezer ve Bizim 2017).

X, *G* grubunun etki ettiği herhangi bir uzay olmak üzere bu denklik bağıntısı *X* uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bütün *G* yörüngelerinin kümesi *X/G* ile gösterilir ve *X/G* ye *bölüm uzayı* denir.

2.10. Tanım. $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$ şekinde ifade edilen seri 2 mertebeli bir eliptik fonksiyonu temsil eder. Bu fonksiyona *Weierstrass* $\wp$ *fonksiyonu* denir (Jones ve Singerman 1987).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Ayrık gruplar teorisi, matematiğin analiz ve fonksiyonlar teorisi ile cebir ve sayılar teorisinin ortak teorilerinden birisidir. Bu konu ile ilgili kitap ve makale sayısı oldukça kısıtlıdır. Çalışmanın önemli amaçlarından birisi bu alanda Türkçe yazılmış bir çalışma ortaya koymaktır.

Belirtilen amaca ulaşabilmek için kapsamlı bir kaynak taraması yapılsa da amaca uygun bulunan kaynak sayısının oldukça az olduğu görülmüştür. Çalışma hazırlanırken ayrık gruplar teorisini oldukça geniş bir persfektiften ele alan ve bu alandaki yayınlanmış hemen hemen tüm kitap ve makaleleri incelemiş olan "Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint" isimli kitap temel olarak alınmıştır. Çalışmanın hazırlanması sırasında bu kitabın her bölümü ayrıntılı olarak incelenmiş, gerekli görülmesi halinde başka kaynaklar ile konular desteklenmiştir. Çalışma, kaynaklarda belirtilen çalışmalar teorik olarak ele alınarak yapılan düzenli seminerler ile oluşturulmuştur.

4. *PSL*(2, *R*) VE HİPERBOLİK GEOMETRİ

Bu kısımda *PSL*(2, ***R***) nin dönüşümlerinin özellikleri, hiperbolik geometrinin ortaya çıkışı ve hiperbolik metrik ile *PSL*(2, ***R***) arasındaki ilişkiler üzerinde durulacaktır.

4.1. *PSL*(2, *R*) ve Özellikleri

PSL(2, ***R***) = $\{T \mid T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in$ ***R*** ve $ad - bc = 1\}$ olmak üzere

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbf{R},\ ad - bc > 0 \tag{4.1}$$

dönüşümü verilmiş olsun. Bu dönüşümün a, b, c, d reel katsayılarının her biri $\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse

$$T(z) = \frac{(a/\sqrt{\Delta})z + (b/\sqrt{\Delta})}{(c/\sqrt{\Delta})z + (d/\sqrt{\Delta})}$$

elde edilir. Ayrıca $(a/\sqrt{\Delta})(d/\sqrt{\Delta}) - (b/\sqrt{\Delta})(c/\sqrt{\Delta}) = 1$ olduğundan $T \in$ *PSL*(2, ***R***) dir. Özel olarak *PSL*(2, ***R***), $z \rightarrow az + b = \dfrac{(\sqrt{a})z + (b/\sqrt{a})}{0.z + (1/\sqrt{a})}$ $(a, b \in \mathbf{R}, a > 0)$ dönüşümlerinin hepsini içerir. *PSL*(2, ***R***) nin bir diğer önemli dönüşümü $z \rightarrow -1/z$ dönüşümüdür.

4.1.1. Teorem. $T \in$ *PSL*(2, ***R***) ise T dönüşümü üst yarı düzlemi üst yarı düzleme resmeder (Jones ve Singerman 1987).

İspat. T dönüşümü (4. 1) ile verilen dönüşüm olmak üzere

$$T(z) = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{(acz\bar{z}+bd)+(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $z = x + iy$ ve $T(z) = u + iv$ olarak alınırsa

$$v = \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2}$$

elde edilir. $ad - bc > 0$ olduğundan $y > 0$ olduğunda $v > 0$ olur. Bu ise T

dönüşümünün üst yarı düzlemi üst yarı düzleme resmettiğini gösterir. Diğer taraftan $ad - bc < 0$ olursa T dönüşümü, $\boldsymbol{U}$ yu konform (açıların büyüklüklerini ve yönlerini koruyan dönüşüm), birebir ve örten olarak alt yarı düzleme resmeder.

4.2. Geçişlilik, Eşlenik ve Merkezleştiriciler

4.2.1. Tanım. X bir küme ve G bir grup olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in X$ için $g(\alpha) = \beta$ olacak biçimde bir $g \in G$ varsa G grubuna X üzerinde *geçişli hareket ediyor* denir. Daha genel olarak $(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ ve $(\beta_1, ..., \beta_k)$, X kümesinin $i \neq j$ iken $\alpha_i \neq \alpha_j$ ve $\beta_i \neq \beta_j$ koşulunu gerçekleyen elemanları olsun. j = 1, 2, …, k için $g(\alpha_j) = \beta_j$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa G grubuna X üzerinde *k-geçişli hareket ediyor* denir (Jones ve Singerman 1987).

4.2.2. Teorem. *i*) $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişlidir.

ii) $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çifte geçişlidir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. *i*) Eğer $ai + b \in \boldsymbol{U}$ ise $a > 0$ dır. Bu durumda $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü $T(z) = az + b$ biçiminde seçilirse $T(i) = ai + b$ olur. Böylece $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun etkisi altında i noktasının yörüngesi $\boldsymbol{U}$ dur. Dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişli hareket eder, yani belli bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ ile $\boldsymbol{U}$ da herhangi iki nokta birbirine resmedilebilir.

ii) $a, b \in \boldsymbol{R}$ ve $a > b$ olsun. Eğer S dönüşümü $S(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$ biçiminde seçilirse bu dönüşüm (a, b) ikilisini $(0, \infty)$ ikilisine resmeder. Diğer yandan $T(z) = -1/z$ dönüşümü $(0, \infty)$ ikilisini $(\infty, 0)$ a, $V(z) = z + b$ dönüşümü de $(0, \infty)$ u (b, ∞) a resmeder. Böylece $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun etkisi altında $(0, \infty)$ un yörüngesi (a, b) ikililerinden ibarettir. Bu ise $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde çifte geçişli hareket ettiğini gösterir.

Şimdi $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun elemanlarının eşleniklik sınıfları belirlenecektir. Bunun için öncelikle eşlenik eleman kavramının hatırlatılması faydalı olacaktır.

4.2.3. Tanım. G herhangi bir grup $g, h \in G$ olsun. Eğer $g = aha^{-1}$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa g ve h elemanlarına *eşlenik elemanlardır* denir (Jones ve Singerman 1987).

PSL(2, ***R***) deki dönüşümler, izlerine göre parabolik, eliptik ve hiperbolik olarak sınıflandırılır. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve iz(T) = a + d olmak üzere

iz²(T) = 4 ise T dönüşümüne *parabolik dönüşüm*

iz²(T) < 4 ise T dönüşümüne *eliptik dönüşüm*

iz²(T) > 4 ise T dönüşümüne *hiperbolik dönüşüm*

denir.

PSL(2, ***R***) de dönüşümlerin sabit noktaları eşleniklik sınıflarını belirlemede önemli bir role sahiptir. a, b, c, d katsayılarının her biri reel sayı olmak üzere $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eşitliğini gerçekleyen noktalar T dönüşümünün sabit noktalarıdır. Bu durumda a, b, c, d katsayılarının her biri reel sayı olduğundan üç durum söz konusudur:

i) Parabolik T dönüşümünün $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir sabit noktası vardır.

ii) Hiperbolik T dönüşümünün $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde iki farklı sabit noktası vardır.

iii) Eliptik T dönüşümünün sabit noktaları reel olmayan karmaşık eşlenik sayılardır.

Bu haller dikkate alınarak aşağıdaki sınıflandırma yapılacaktır.

1. Parabolik Elemanlar (|*a* + *d*| = 2). T sabit noktası $\alpha \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ olan bir parabolik dönüşüm olsun. *PSL*(2, ***R***), $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde çifte geçişli hareket ettiğinden $S(\alpha) = \infty$ olacak şekilde bir $S \in$ *PSL*(2, ***R***) dönüşümü vardır. O halde STS^{-1} dönüşümü de sabit noktası ∞ olan bir parabolik dönüşümdür. Dolayısıyla bu dönüşüm,

$$W = STS^{-1}: z \rightarrow z + t \; (t \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\})$$

biçimindedir. Eğer $V(z) = (1/|t|)z$ ise $VWV^{-1}: z \rightarrow z \pm 1$ olur (işaret $t < 0$ veya $t > 0$ olmasına göre değişir). O halde, $z \rightarrow z + 1$ ile $z \rightarrow z - 1$ dönüşümleri *PSL*(2, ***R***) de eşlenik olmadığından, $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin parabolik elemanlarının iki eşleniklik sınıfı vardır.

2. Hiperbolik Elemanlar (|a + *d*| > 2). *T* sabit noktaları $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ olan bir hiperbolik eleman olsun. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde çifte geçişli olduğundan α noktasını 0 noktasına, β noktasını ∞ noktasına resmeden bir $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. O halde $\lambda \neq 1$ iken $U_\lambda = \lambda z$ olmak üzere

$$U_\lambda(z) = STS^{-1}(z) = \lambda z \ (\lambda \in \boldsymbol{R} \setminus \{0,1\})$$

biçimindedir. Eğer $B(z) = -1/z$ ise $BU_\lambda B^{-1} = U_{1/\lambda}$ olur. Böylece U_λ ile $U_{1/\lambda}$ dönüşümleri $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de eşlenik olurlar. $\kappa \neq \lambda$ veya $\kappa \neq 1/\lambda$ ise $U\kappa$ ile U_λ dönüşümleri eşlenik olmadığı için $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin her bir hiperbolik elemanı U_λ biçimindeki bir tek elemanla eşleniktir.

3. Eliptik Elemanlar (|*a* + *d*| < 2). *T* sabit noktası $\xi \in \boldsymbol{U}$ olan bir eliptik eleman olsun. $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U}$ üzerinde geçişli olduğundan $S(\xi) = i$ olacak şekilde bir $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü vardır. Bu durumda $S(\bar{\xi}) = \bar{i} = -i$ olacağından $W = STS^{-1}$ dönüşümü sabit noktaları i ve $-i$ olan bir eliptik dönüşümdür. Dolayısıyla W dönüşümü

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = \lambda \frac{z-i}{z+i}$$

şeklinde ifade edilebilir. $W \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümü $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesini kendi üzerine resmettiğinden $W(\alpha) \in \boldsymbol{R}$ olacak şekilde bir $\alpha \in \boldsymbol{R}$ vardır. Dolayısıyla,

$$\left|\frac{W(\alpha)-i}{W(\alpha)+i}\right| = \left|\frac{\alpha-i}{\alpha+i}\right| = 1$$

olacağından $\lambda = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ olur. Böylece T dönüşümü ile

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\theta} \frac{z-i}{z+i} \tag{4. 2}$$

(4. 2) eşitliğini gerçekleyen W dönüşümü eşlenik olur. (4. 2) eşitliğinde

$$z' = \frac{z-i}{z+i},\ w' = \frac{W(z)-i}{W(z)+i}$$

olarak alınırsa $w' = e^{i\theta}z'$ olur. Bu ise z' ve w' noktalarının birim diskte olduğunu gösterir. O halde $PSL(2, \boldsymbol{C}) = \{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$ ve $ad - bc = 1\}$ olmak üzere T dönüşümü $PSL(2, \boldsymbol{C})$ nin bir elemanıdır ve üstelik birim diskin θ kadar olan bir dönmesine eşleniktir.

4.2.4. Tanım. G bir grup ve $g \in G$ olmak üzere

$$C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$$

kümesine g elemanının G grubundaki *merkezleştiricisi* denir (Jones ve Singerman 1987).

$C_G(g)$, G grubunun bir alt grubudur ve $k \in G$ olması durumunda

$$C_G(kgk^{-1}) = kC_G(g)k^{-1}$$

dir, yani bir elemanın eşleniğinin merkezleştiricisi ile merkezleştiricisinin eşleniği birbirine eşittir. O halde $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin elemanlarının merkezleştiricilerinin yapısının belirlenmesi için eşlenik sınıfının temsilcilerinin merkezleştiricilerine bakmak yeterlidir. Hesaplamalar herhangi bir dönüşüm grubunda geçerli olan aşağıdaki uyarı ile daha kolay hale getirilebilir.

4.2.5. Uyarı 1. $T, S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ ve $ST = TS$ ise S dönüşümü T dönüşümünün sabit noktalarının kümesini kendi üzerine resmeder. p, T dönüşümünün sabit noktası yani $T(p) = p$ olsun. O halde

$$S(p) = S(T(p)) = (ST)(p) = (TS)(p) = T(S(p))$$

yani T dönüşümü $S(p)$ noktasını sabit bırakır.

2. $T(z) = z + 1$ parabolik elemanı dikkate alınsın. Bu durumda eğer $S \in C_{PSL(2,\boldsymbol{R})}(T)$ ise $ST = TS$ olur. T dönüşümünün tek sabit noktası ∞ ve $ST = TS$ olduğundan $S(\infty) = \infty$ olur. Yani S dönüşümü ∞ u sabit bırakır. Dolayısıyla S dönüşümü $S(z) = az + b$ biçimindedir. Ancak $ST = TS$ olacağı dikkate alınırsa $a = 1$ olduğu görülür. Böylece,

$$C_{PSL(2,\,\boldsymbol{R})}(T) = \{\, z \to z + k \mid k \in \boldsymbol{R}\}$$

dir. Benzer şekilde $T(z) = z - 1$ içinde

$$C_{PSL(2,\,\boldsymbol{R})}(T) = \{\, z \to z + k \mid k \in \boldsymbol{R}\}$$

olduğu görülür.

3. $T(z) = \lambda z$ ($\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$) hiperbolik elemanının merkezleştiricisi belirlenmek istenirse T dönüşümünün sabit nokta kümesi $\{0, \infty\}$ olduğundan T dönüşümünün merkezleştiricisi bu kümeyi kendi üzerine resmedecek hiperbolik dönüşümlerden oluşmalıdır. Dolayısıyla $\mu > 0$ olmak üzere bu dönüşümler $S(z) = \mu z$ biçimindeki dönüşümlerdir, yani

$$C_{PSL(2,\,\boldsymbol{R})}(T) = \{\, z \to \mu z \mid \mu > 0\}$$

olur.

4. Sabit noktaları i ve $-i$ olan T eliptik dönüşümünün merkezleştiricisi ise

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\phi}\,\frac{z-i}{z+i} \quad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

dir. Böylece oldukça sık kullanılacak olan aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

4.2.6. Sonuç. $T, S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ özdeşlikten farklı iki dönüşüm olsun. $TS = ST$ olması için gerek yeter koşul onların aynı sabit nokta kümesine sahip olmasıdır (Jones ve Singerman 1987).

4.2.7. Sonuç. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunda bir hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşümün merkezleştiricisi, özdeşlik elemanı ile birlikte bu dönüşüm ile aynı sabit nokta kümesine sahip olan tüm hiperbolik (parabolik, eliptik) dönüşümlerden oluşur (Jones ve Singerman 1987).

4.3. Hiperbolik Metrik

Öklidyen olmayan geometriler üzerindeki çalışmalar Bolyai ve Lobachevsky tarafından tanımlanmış olan hiperbolik geometri ile başlamıştır. Öklid tarafından yazılmış olan ‘Elementler’ isimli kitapta geometrinin temel kavramları tanımlanmış, aksiyomlar ve bu aksiyomlara dayanan teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Kapsam ve içerik bakımından bu kitap o güne kadar yazılmış en iyi kitaptır ve güncelliğini halen korumaktadır.

Öklid, geometrisini kurarken beş tane postulat (belit) ifade etmiştir.

1. Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.

2. Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.

3. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.

4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5. Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldığında kesişir (Sertöz 2018).

Bu postulatlardan en fazla açıklanmaya muhtaç olanı, üzerinde en fazla kafa yorulanı paralellik postulatı olarak bilinen beşinci postulattır. Bu postulat “Bir L doğrusu üzerinde bulunmayan bir P noktasından L doğrusuna paralel bir tek doğru çizilebilir” şeklinde de ifade edilebilir. Bu postulat yaklaşık 2000 yıl boyunca bir çok matematikçinin kafasında soru işareti oluşturmuş ve bu postulatın yanlış olduğunu ispatlamaya çalışmışlardır.

$PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu ile hiperbolik geometri arasındaki ilişki ilk olarak Henri Poincare tarafından keşfedildi ve 1882 de yayınlandı. Fuchs fonksiyonlarını tanımlamak için reel katsayılı Möbiüs dönüşümleri kullanıldı. Öklidyen olmayan geometri ise birbirinden bağımsız olarak Bolyai ve Lobachevsky tarafından hiperbolik geometri olarak tanımlandı. “Bir L doğrusu üzerinde bulunmayan bir P noktasından L doğrusuna paralel bir tek doğru çizilebilir” şeklindeki Öklid in paralellik postulatı, hiperbolik geometride “Bir L doğrusu üzerinde bulunmayan bir P noktasından L doğrusuna paralel sonsuz sayıda doğru çizilebilir” şeklinde değiştirildi. Bu bölümde hiperbolik doğrunun tanımı yapılacak ve hiperbolik geometride üst yarı düzlem modeli oluşturulacaktır.

Parçalı diferensiyellenebilir bir γ eğrisinin hiperbolik uzunluğunu tanımlamadan önce parçalı diferensiyellenebilir bir eğrinin Öklidyen uzunluğunun nasıl hesaplanıldığının hatırlatılması faydalı olacaktır. x, y parçalı diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $I=[0,1]$ olmak üzere $\beta : I \to \boldsymbol{R}^2$, $\beta(t)=(x(t),y(t))$ olarak verilmiş olsun. β eğrisinin Öklidyen uzunluğu

$$e(\beta) = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

olarak tanımlanır.

4.3.1. Tanım. $\gamma : [0,1] \to \boldsymbol{U}$, $\gamma(t)=z(t)=x(t)+iy(t)$ parçalı diferensiyellenebilir eğrisinin hiperbolik uzunluğu

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y} dt$$

olarak tanımlanır (Jones ve Singerman 1987).

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında, Öklid uzunluk elemanı $ds^2 = dx^2 + dy^2$ olduğu halde hiperbolik uzunluk elemanının $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2} = \dfrac{|dz|^2}{y^2}$ olduğu görülür.

4.3.2. Teorem. $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ ise $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$ dır, yani hiperbolik uzunluk $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin dönüşümleri altında değişmez kalır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, $ad - bc = 1$) dönüşümü verilmiş olsun. O halde

$$\frac{dT}{dz} = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer $z = x + iy$, $T(z) = u + iv$ olarak alınırsa ve

$$v = \frac{y}{|cz+d|^2}$$

olduğu sonucu kullanılırsa

$$\left|\frac{dT}{dz}\right| = \frac{v}{y}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|}{v}dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dT}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right|}{v}dt = \int_0^1 \frac{v.\left|\frac{dz}{dt}\right|}{yv}.dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y}dt = h(\gamma)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi ***U*** da herhangi iki nokta arasında en kısa hiperbolik uzunluğa sahip bir tek yol olduğu gösterilecek ve bu yol belirlenecektir. Bu tür yollar daha sonra *hiperbolik doğru parçaları* ya da *H-doğru parçaları* olarak adlandırılacaktır.

İlk önce imajiner eksen üzerindeki *ia*, *ib* ($b > a$) noktalarını birleştiren H-doğru parçasının, imajiner eksenin bu noktaları birleştiren kısmı olduğu gösterilecektir.

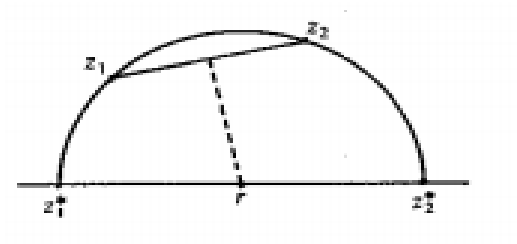
$\kappa : I \to \boldsymbol{U}$, $\kappa(t) = (0, y(t))$, $dy/dt > 0$, $y(0) = a$, $y(1) = b$ olarak tanımlansın.

$$h(\kappa) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)}dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)}.dt = \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)}dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$$

elde edilir. Eğer $\tilde{\kappa} : I \to \boldsymbol{U}$, $\tilde{\kappa}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, *ia* noktası ile *ib* noktasını birleştiren başka bir parçalı diferensiyellenebilir eğri ise,

$$h(\tilde{\kappa}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\tilde{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt}\right)^2}}{\tilde{y}(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{d\tilde{y}}{dt}\right|}{\tilde{y}(t)}dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{d\tilde{y}}{dt}}{\tilde{y}(t)}dt = h(\kappa)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitlik ancak $d\tilde{x}/dt = 0$ ve $d\tilde{y}/dt \geq 0$ olması halinde gerçeklenir. Ayrıca $\tilde{\kappa}$ parçalı diferensiyellenebilir olduğundan, $\tilde{\kappa}$, *ia* ve *ib* noktalarını birleştiren Öklid doğru parçasıdır. Eğer z_1 ve z_2 aynı reel kısma sahipse o halde onları birleştiren bir tek H-doğru parçasının onları birleştiren bir tek Öklid doğru parçası olduğu yukarıdaki hesaplamalarla görülebilir.



Şekil 4.1. ***U*** da iki farklı noktayı birleştiren hiperbolik doğru parçası (Jones ve Singerman 1987)

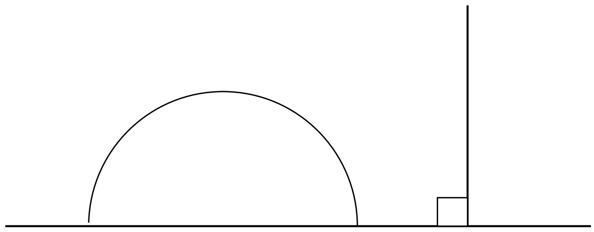
Şimdi z_1 ve z_2 noktalarının aynı reel kısma sahip olmadığı varsayılsın. O halde bu noktaları birleştiren Öklid doğru parçasının orta dikmesi reel ekseni bir r noktasında keser ve Şekil 4.1. de gösterildiği gibi merkezi r olan z_1 ve z_2 noktalarından geçen reel eksene dik bir tek Q Öklid çemberi elde edilir.

Q Öklid çemberinin $\boldsymbol{R}$ yi z_1^* ve z_2^* noktalarında kestiği varsayılsın. O halde $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerinde çifte geçişli olduğundan $T(z_1^*) = 0$, $T(z_2^*) = \infty$ olacak şekilde $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ vardır. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin dönüşümleri çemberleri çemberlere konform olarak resmeder. Bu durumda $T(Q)$, imajiner eksen ve dolayısıyla $T(z_1)$ ve $T(z_2)$ noktalarını birleştiren H-doğru parçası da imajiner eksenin bu noktaları birleştiren parçasıdır. Böylece hiperbolik uzunluk $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin dönüşümleri altında değişmez kaldığından herhangi z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren bir tek H-doğru parçası vardır. Böylece ***U*** da Q Öklid çemberi üzerindeki z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren H-doğru parçası Q Öklid çemberinin z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren yayıdır. Şimdi bütün H-doğru parçaları belirlenecektir.

4.3.3. Teorem. H-doğru parçaları merkezleri reel eksen üzerinde olan Öklidyen çember yaylarının üst yarı düzlemde kalan kısımları veya reel eksene dik olan Öklidyen doğru parçalarının üst yarı düzlemde kalan kısımlarıdır (Jones ve Singerman 1987).

4.3.4. Tanım. ***C*** deki, reel eksen ***R*** ye dik bir Öklid doğrusunun ya da merkezi reel eksen üzerinde olan bir Öklid çemberinin ***U*** ile kesişimine bir *hiperbolik doğru* (*H-doğru*) denir (Anderson 2005).

Dikey hiperbolik doğruların ∞ da bir bitiş noktasına sahip olduğu kabul edilir, dolayısıyla her H-doğru $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da iki bitiş noktasına sahiptir. Hiperbolik doğru örnekleri Şekil 4.2. de gösterilmektedir.



Şekil 4.2. Hiperbolik doğrular

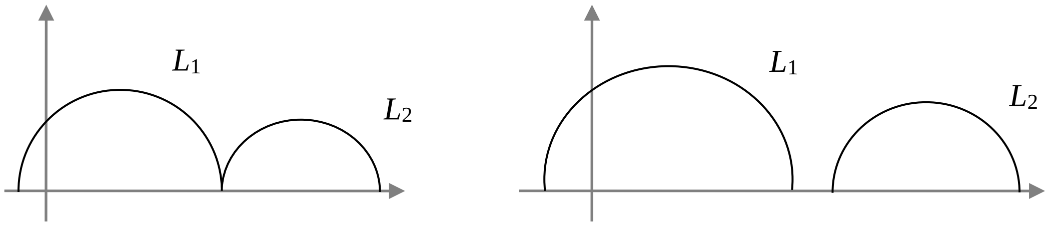
4.3.5. Teorem. $PSL(2, \boldsymbol{R})$, bütün H-doğruların kümesi üzerinde geçişli hareket eder (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Q ve Q' iki H-doğru olsun. Eğer Q H-doğrusu $s,\ t \in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da bitiş noktalarına sahipse ve Q' hiperbolik doğrusu da $s', t' \in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da bitiş noktalarına sahipse $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde çifte geçişli olduğundan $T(s) = s'$, $T(t) = t'$ olacak şekilde bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ vardır. Bitiş noktaları bir H-doğruyu tek bir şekilde belirlediğinden $T(Q) = Q'$ sonucu elde edilir.

z ve w noktaları $\boldsymbol{U}$ da iki nokta olmak üzere aralarındaki *hiperbolik uzaklık* bu noktaları birleştiren H-doğru parçasının H-uzunluğu olarak tanımlanır. Böylece üst yarı düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık belirlenmiş olur. Bu ise $\boldsymbol{U}$ üzerinde tanımlanan bir metrik belirtir. Bu metrik ρ ile gösterilir. Bu metrik ile birlikte $\boldsymbol{U}$ bir metrik uzaydır. Bir hiperbolik doğru parçası, iki nokta arasındaki en kısa uzaklığa sahip bir tek yol olduğundan üçgen eşitsizliği de gerçeklenir. Böylece ρ metriği ile üst yarı düzlem hiperbolik düzlemin bir modelidir.

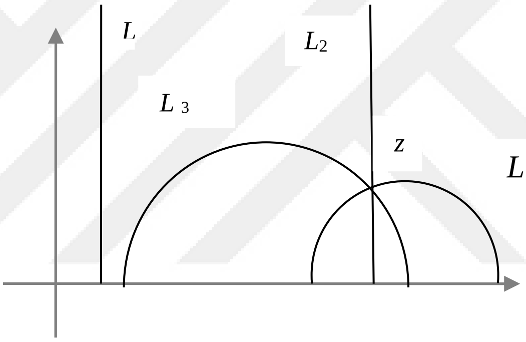
4.3.6. Tanım. Ayrık olan iki hiperbolik doğruya *paralel hiperbolik doğrular* denir (Anderson 2005).

Tanımdan üst yarı düzlemde ortak noktası olmayan doğrulara paralel hiperbolik doğru denileceği anlaşılmaktadır. Şekil 4.2. de gösterilen hiperbolik doğrular paraleldir. Ayrıca Şekil 4.3. te gösterilen L_1 ve L_2 doğruları da paraleldir.



Şekil 4.3. Paralel hiperbolik doğrular

4.3.7. Teorem. Bir L hiperbolik doğrusunun üzerinde olmayan bir z noktasından geçen ve L doğrusuna paralel olan sonsuz sayıda farklı hiperbolik doğru vardır (Anderson 2005).



Şekil 4.4. z noktasından geçen ve L ye paralel hiperbolik doğrular

Bu teorem Öklid geometrisi ile hiperbolik geometri arasındaki en büyük farkı ortaya koymaktadır. Aşağıdaki teorem, hiperbolik uzunluğun $PSL(2, \boldsymbol{R})$ altında değişmez kaldığını göstermektedir.

4.3.8. Teorem. Her $z, w \in \boldsymbol{U}$ ve her $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ için $\rho(T(z),T(w)) = \rho(z,w)$ dır (Jones ve Singerman 1987).

4.4. $\rho(z,w)$ Değerinin Hesaplanması

Eğer ia, ib ($b > a$) imajiner eksen üzerindeki iki nokta ise, bu noktaları birleştiren hiperbolik eğri parçasının uzunluğu hesaplanarak $\rho(ib, ia) = \ln\frac{b}{a}$ olduğu sonucu elde edilmişti. Eğer z, w, $\boldsymbol{U}$ da herhangi iki nokta ise $\rho(z,w)$ yı hesaplamak genellikle daha zordur. Bu yüzden bu bölümde hiperbolik uzaklık için daha basit formüller verilecektir.

4.4.1. Lemma. $z, w \in \boldsymbol{U}$, $(z \neq w)$ ve Q, z ve w noktalarını birleştiren ve $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ da bitiş noktaları z^*, w^* olan hiperbolik doğru olsun. z noktası da z^* ile w arasında kalacak şekilde seçilsin. O halde $T(z^*) = 0$, $T(w^*) = \infty$ ve $T(z) = i$ olacak şekilde tek bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ vardır. Ayrıca $T(w) = ri$ $(r > 1)$ ve $\rho(z,w) = \ln r$ dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. z^* ve w^* noktalarının her ikisinin de ∞ olmadığı varsayılsın ve $z^* > w^*$ olacak şekilde alınsın. Eğer $S(\zeta) = \dfrac{\zeta - z^*}{\zeta - w^*}$ olarak seçilirse $S \in PSL(2, \boldsymbol{R})$, $S(z^*) = 0$, $S(w^*) = \infty$ olur. Böylece S dönüşümü Q hiperbolik doğrusunu imajiner eksene resmeder. Eğer $S(z) = ki$ ise o halde $U_\lambda = \lambda z$ olmak üzere $T = U_{1/k} \circ S$ dönüşümü kullanılabilir. Farklı noktaların üçlülerini yine farklı noktaların üçlülerine resmeden bir tek T dönüşümü vardır. Ayrıca z noktası z^* ve w arasında olduğundan $T(z) = i$ noktası da $T(z^*) = 0$ ve $T(w)$ noktaları arasındadır. Böylece $T(w) = ri$ $(r > 1)$ olur. Hiperbolik uzunluk $PSL(2, \boldsymbol{R})$ altında değişmez kaldığından,

$$\rho(z,w) = \rho(T(z), T(w)) = \rho(i, ri) = \ln r$$

sonucu elde edilir.

4.4.2. Tanım. $z_i \in \boldsymbol{U}$ olmak üzere $g(z_1, z_2, ..., z_n)$ fonksiyonu verilsin. Her $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ için

$$g(T(z_1), T(z_2), ..., T(z_n)) = g(z_1, z_2, ..., z_n)$$

ise g ye bir *H-değişmez fonksiyon* denir (Jones ve Singerman 1987).

Yukarıdaki teoreme göre $\rho(z,w)$ fonksiyonu bir hiperbolik değişmezdir.

4.4.3. Lemma. *i*) z, w, z^*, w^* olarak tanımlanan dört noktanın çapraz oranı

$$\eta(z,\ w) = (w,\ z^*;\ z,\ w^*) = \frac{(w - z^*)(z - w^*)}{(z^* - z)(w^* - w)}$$

bir hiperbolik değişmezdir.

ii) Her $z,\ w \in \boldsymbol{U}$ için

$$\tau(z,w) = \left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|$$

bir hiperbolik değişmezdir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. *i*) $PSL(2, \boldsymbol{R})$ H-doğruları resmettiği için $T(z)$ ve $T(w)$ noktalarını birleştiren H-doğru, $T(z^*)$ ve $T(w^*)$ bitiş noktalarına sahiptir ve dolayısıyla bu sonuç Möbiüs dönüşümleri ($T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ şeklindeki dönüşümler) altında çapraz oranın değişmez olmasından elde edilir.

ii) Her $z,\ w \in \boldsymbol{U}$ için $\tau(z,w)$ değerinin bir hiperbolik değişmez olduğu

$$|T(z) - T(w)| = |z-w|\,|T'(z)T'(w)|^{1/2}$$

eşitliğinden elde edilir.

z, w, r lemmada tanımlanan sayılar olmak üzere

$$\eta(z,w) = (ri, 0; i, \infty) = r$$

ve böylece

$$\rho(z,w) = \ln \eta(z,w)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tau(z,w) = \tau(i, ri) = \frac{r-1}{r+1} = \frac{e^{\rho(z,w)} - 1}{e^{\rho(z,w)} + 1}$$

ve bu eşitlikten elde edilen

$$\rho(z,w)=\ln\left\{\frac{1+\tau(z,w)}{1-\tau(z,w)}\right\}=\ln\left\{\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}\right\}$$

eşitliği hiperbolik uzaklık için oldukça kullanışlı bir formüldür.

Aşağıdaki özdeşlikler ve $\tau(z,w)$ fonksiyonu kullanılarak hiperbolik uzaklık için daha kullanışlı bir formül de elde edilebilir.

$$\frac{e^u-1}{e^u+1}=\tanh\frac{u}{2}, \qquad \sinh^2\frac{u}{2}=\frac{\tanh^2\frac{u}{2}}{1-\tanh^2\frac{u}{2}}$$

olduğundan

$$\sinh^2\frac{\rho(z,w)}{2}=\frac{\tau(z,w)^2}{1-\tau(z,w)^2}=\frac{|z-w|^2}{|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi

$$|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2=(z-\overline{w})(\overline{z}-w)-(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=-(z-\overline{z})(w-\overline{w})=4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)$$

olduğundan

$$\sinh^2\frac{\rho(z,w)}{2}=\frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$$

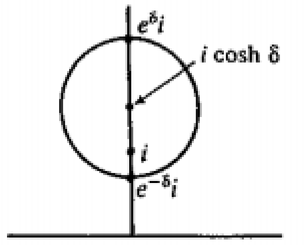
sonucuna ulaşılır. Merkezi i ve yarıçapı δ olan hiperbolik çember

$$\{z \mid \sinh^2\frac{\rho(z,i)}{2}=\sinh^2\frac{\delta}{2}\} = \{z \mid |z-i|^2=4y\sinh^2\frac{\delta}{2}\} \ (z = x + iy)$$

$$= \{z \mid x^2+y^2+1=2y(2\sinh^2\frac{\delta}{2}+1)=2y\cosh\delta\}$$

$$= \{z \mid x^2+(y-\cosh\delta)^2=\cosh^2\delta-1=\sinh^2\delta\},$$

yani Şekil 4.5. te görüldüğü gibi bu çember merkezi (0, $\cosh\delta$) ve yarıçapı $\sinh\delta$ olan bir Öklid çemberidir.



Şekil 4.5. Merkezi i ve yarıçapı δ olan hiperbolik çember (Jones ve Singerman 1987)

$PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun elemanları düzlemdeki bir çemberi yine bir çembere resmeder. Dolayısıyla $\boldsymbol{U}$ da ki bir Öklid çemberinin bu elemanlar altındaki resimleri de $\boldsymbol{U}$ da bir Öklid çemberidir, böylece H-çemberler de H-çemberlere resmedilmiş olur. Bundan başka her H-çember bir Öklid çemberidir. Üstelik her Öklid çemberi de bir H-çemberdir. Böylece tüm açık Öklid disklerinin ailesi ile açık hiperbolik diskler ailesi çakıştığından aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.4. Teorem. $\boldsymbol{U}$ üzerine hiperbolik metrik tarafından indirgenen topoloji ile Öklid metriği tarafından indirgenen topoloji aynıdır (Jones ve Singerman 1987).

4.5. Hiperbolik Alan ve Gauss-Bonet Formülü

$E \subseteq \boldsymbol{U}$ olmak üzere $\iint_E \frac{dxdy}{y^2}$ integrali mevcut ise E kümesinin H-alanı

$$\mu(E) = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}$$

olarak tanımlanır (Jones ve Singerman 1987).

4.5.1. Teorem. Her $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ için $\mu(T(E)) = \mu(E)$ dir, yani hiperbolik alan $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin dönüşümleri altında değişmez kalır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \boldsymbol{R}, ad - bc = 1)$ dönüşümü verilmiş olsun. $z = x + iy$ ve $w = T(z) = u + iv$ alınsın. Cauchy-Riemann eşitlikleri ve Jacobiyen kullanılarak

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{dT}{dx}\right|^2 = \left|\frac{dT}{dz}\right|^2 = \frac{1}{(cz+d)^4}$$

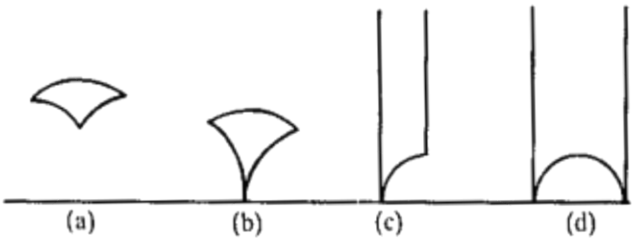
eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$\mu(T(E)) = \iint\limits_{T(E)} \frac{dudv}{v^2} = \iint\limits_{E} \frac{\partial(u,v)dxdy}{\partial(x,y)v^2} = \iint\limits_{E} \frac{1}{|cz+d|^4}\frac{|cz+d|^4}{y^2}dxdy = \mu(E)$$

sonucuna ulaşılır.

4.5.2. Tanım. ***U*** nun kapanışında *n* tane hiperbolik doğru parçasıyla sınırlı kapalı kümelere *n kenarlı hiperbolik poligon* denir. İki hiperbolik doğru parçasının kesiştiği noktaya ise *poligonun bir köşesi* denir (Jones ve Singerman 1987).

Bir poligonun $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ üzerinde bir köşesi olabilir ancak reel eksenin bir parçası bir hiperbolik poligonun kenarı olamaz. Örneğin Şekil 4.6. de sırasıyla üçgenin 0, 1, 2 ya da 3 köşesinin $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ a ait olup olmadığına bağlı olarak 4 tip hiperbolik üçgen çizilmiştir.



Şekil 4.6. Hiperbolik üçgenler (Jones ve Singerman 1987)

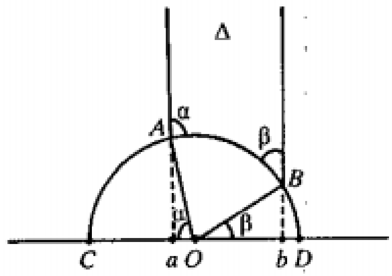
Bir hiperbolik üçgenin hiperbolik alanı Gauss-Bonet formülüne göre sadece onun açılarına bağlıdır. ***U*** da iki hiperbolik doğru arasındaki *açı,* onların kesişme noktasındaki teğetleri arasındaki açı olarak tanımlanır. İki hiperbolik doğru $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da ki bir noktada kesişiyorlarsa aralarındaki açı 0 dır.

4.5.3. Teorem (*Gauss-Bonet*). Δ açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen olsun. O halde

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. *1. hal.* İlk olarak Δ üçgeninin iki kenarının dikey H-doğrular olduğu durum incelenecektir. Bu halde Δ üçgeninin tabanı bir Öklidyen yarı çemberin bir parçasıdır. $z \to z + \kappa,\ \kappa \in \boldsymbol{R}$ ve $z \to \lambda z$, $(\lambda > 0)$ dönüşümleri uygulanarak bu yarı çemberin yarıçapı 1 ve merkezi 0 olarak alınabilir. Bu dönüşümler *PSL*(2, ***R***) nin dönüşümleri olduğu için hiperbolik alanı değiştirmez ve dikey kenarlar hala dikey kaldığı için 0 açıları korunur. Diğer açılar da *PSL*(2, ***R***) dönüşümlerinin konformluk özelliğinden korunur. Böylece Δ H-üçgeni, yarı çemberin yarıçapı 1 olmak üzere Şekil 4.7. de gösterildiği gibi alınabilir.



Şekil 4.7. İki kenarı dikey H-doğrular olan Δ H-üçgeni (Jones ve Singerman 1987)

Burada $A\hat{O}C$ ve $B\hat{O}D$ açıları sırasıyla α ve β dır. *A* ve *B* boyunca dikey H-doğruların sırasıyla *x* = *a* ve *x* = *b* olduğu varsayılsın. O halde Δ üçgeninin alanı

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{dxdy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

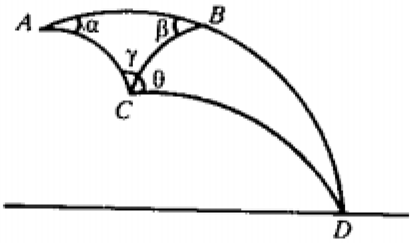
olur. $0 \le \theta \le \pi$ olmak üzere $x = \cos\theta$ dönüşümü yapılırsa

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta d\theta}{\sin\theta} = \pi - (\alpha + \beta)$$

elde edilir.

2. Hal. Δ H-üçgeninin bir köşesi Şekil 4.6. nın (b) sinde olduğu gibi reel eksen üzerinde olsun. *PSL*(2, ***R***) nin bir dönüşümü uygulanarak bu köşe ∞ a resmedilebilir (hiperbolik alan ya da açılar değiştirilmeden). Böylece Δ nın 0 olmayan açıları α ve β ise o halde 1. Halden $\mu(\Delta)=\pi-(\alpha+\beta)$ olur.

3. Hal. Δ nın hiçbir köşesi $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da olmasın. Eğer *AB*, H-doğru parçası ***R*** yi bir *D* noktasında kesecek şekilde uzatılırsa Δ_1 köşeleri *A*, *C*, *D* olan H-üçgen olmak üzere $\Delta=\Delta_1\setminus\Delta_2$ olur, burada Δ_2 köşeleri *B*, *C*, *D* olan H-üçgendir.



Şekil 4.8. Bir köşesi ***R*** de olan Δ H-üçgeni (Jones ve Singerman 1987)

Böylece $\mu(\Delta)=\mu(\Delta_1)-\mu(\Delta_2)=\pi-\alpha-(\gamma+\theta)-[\pi-\theta-(\pi-\beta)]=\pi-\alpha-\beta-\gamma$ sonucu elde edilir.

Bu teorem kullanılarak Gauss-Bonet formülü poligonlara da genişletilebilir.

4.5.4. Tanım. $C \subset \boldsymbol{U}$ olsun. Eğer her $P \in C$ için *O* ve *P* noktalarını birleştiren H-doğru parçaları *C* de kalacak biçimde *C* nin içinde bir *O* noktası var ise *C* ye *hiperbolik yıldızıl bölge* denir (Jones ve Singerman 1987).

Hiperbolik yıldızıl kümelerin en önemli özelliği hiperbolik konveks kümeler olmalarıdır. $P,\ Q \in C$ herhangi iki nokta olmak üzere *C* bir hiperbolik konveks küme ise, *P* ve *Q* noktalarını birleştiren hiperbolik doğru *C* de kalır.

4.5.5. Sonuç. Eğer $\prod$ açıları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olan *n* kenarlı bir hiperbolik yıldızıl poligon ise

$$\mu(\prod) = (n-2)\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_n$$

dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. A_1, A_2, …, A_n, $\prod$ poligonunun köşeleri ve O noktası OA_1, OA_2, …, OA_n H-doğru parçaları $\prod$ poligonunun içinde kalacak şekilde $\prod$ nin içinde bir nokta olsun. Böylece OA_1A_2, OA_2A_3, …, OA_nA_1 üçgenlerinin H-alanları toplanarak istenilen sonuç elde edilir.

5. FUCHS GRUPLARI ve TEMEL BÖLGELER

5.1. Fuchs Grupları ve Süreksizlik

$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü $(a, b, c, d) \in \boldsymbol{R}^4$ noktası ile özdeşlenerek $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubu aynı zamanda bir topolojik uzay olarak ele alınabilir.

$$SL(2, \boldsymbol{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \boldsymbol{R} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

olmak üzere $SL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}^4$ uzayının

$$X = \{(a, b, c, d) \in \boldsymbol{R}^4 \mid ad - bc = 1\}$$

alt kümesi ile özdeşlenebilir.

$$\delta : X \to X,\ \delta(a,b,c,d) = (-a,-b,-c,-d)$$

olarak tanımlanan δ dönüşümü bir homeomorfizmdir ve üstelik $\{i, \delta\}$, X üzerinde hareket eden 2 mertebeli devirli gruptur. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ üzerindeki topoloji aşağıdaki gibi tanımlanan bölüm topolojisi olarak alınır ve dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{R}^2 \times S^1$ çarpım uzayına homeomorfik olan bir topolojik uzay olur.

$$q: SL(2, \boldsymbol{R}) \to PSL(2, \boldsymbol{R}),$$

$$q\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T,\ T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

olarak tanımlanan q dönüşümü kullanılarak

$$\tau_{PSL(2,\boldsymbol{R})} = \{A \subset PSL(2, \boldsymbol{R}) \mid q^{-1}(A) \subset SL(2, \boldsymbol{R})\}$$

olarak tanımlanan bölüm topolojisi ile q fonksiyonu süreklidir. Gerçekte grup çarpma işlemi ve ters alma işlemleri de sürekli olduğundan $PSL(2, \boldsymbol{R})$ bir topolojik gruptur.

5.1.1. Tanım. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin ayrık alt gruplarına *Fuchs grubu* denir (Jones ve Singerman).

Modüler grup ve üçgen grupları gibi bazı özel örnekleri daha önce araştırılmış olsa da Fuchs grupları sistematik olarak ilk defa 1880 yılında Poincare tarafından çalışılmıştır. Poincare, L. Fuchs´un diferensiyel denklemler üzerine yazılmış bir makalesini okuduktan sonra Fuchs grupları ile ilgili çalışmalar yapmaya yönelmiştir.

Fuchs grupları birçok açıdan kafeslerle ilişkilidir. Kafesler Öklid eşmetrilerinin ayrık gruplarıdır ve bölüm uzayları tora homeomorf olan kompakt Riemann yüzeyleridir. Kafesler altında değişmez kalan fonksiyonlar yani eliptik fonksiyonlar önemli bir fonksiyon ailesi oluşturur. Benzer şekilde Fuchs grupları altında değişmez kalan fonksiyonlar olan otomorf fonksiyonlar ailesi de oldukça önemli bir fonksiyon ailesidir. Bütün bu benzerliklerin yanında kafesler ve Fuchs grupları arasında önemli bir fark vardır. Sonsuz sayıda farklı kafes olmasına rağmen bunların hepsi topolojik olarak benzerdir. Çünkü bunların bölüm uzaylarının hepsi birer tordur. Diğer taraftan küre, tor, düzlem veya delinmiş düzlemden farklı olan her bir yönlendirilebilir yüzey $\boldsymbol{U}$ üzerinde sabit noktasız hareket eden Fuchs gruplarının bölüm uzaylarıdır. Bu nedenle Fuchs gruplarının geometrik ve cebirsel yapıları oldukça zengindir.

Fuchs grupları çok çeşitlilik göstermesine rağmen açıkça yazılabilecek birkaç Fuchs grubu örneği vardır. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bütün devirli alt grupları bir Fuchs grubudur. Bir hiperbolik dönüşüm ile örneğin $\lambda > 1$ olmak üzere $z \to \lambda z$ hiperbolik dönüşümü ile üretilmiş olan devirli hiperbolik gruplar, özdeşlik elemanı ve hiperbolik dönüşümlerden oluşan bir Fuchs grubudur.

Örneğin $z \to z+1$ parabolik dönüşümü parabolik devirli bir grup üretir. Eliptik dönüşümler tarafından üretilen devirli gruplar da eliptik devirli gruplardır, fakat bu gruplar her zaman bir Fuchs grubu değildir. Bir eliptik devirli grubun Fuchs grubu olması için gerekli ve yeter koşul grubun üretecinin, dolayısıyla grubun mertebesinin sonlu olmasıdır.

Devirli Fuchs gruplarından başka Fuchs grupları da vardır. Örneğin,

$$PSL(2, \boldsymbol{Z}) = \{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{Z} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

olarak tanımlanan modüler grup $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun bir ayrık alt grubudur, dolayısıyla bir Fuchs grubudur. Modüler grup, Fuchs gruplarının içinde en çok çalışılan gruptur. Bu grubun özellikleri üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır.

Kafeslerin $\boldsymbol{C}$ üzerindeki hareketlerinin en önemli özelliği bu hareketin süreksiz olmasıdır, yani her $z \in \boldsymbol{C}$ noktasının her $\omega \in \Omega \setminus \{e\}$ için $\omega(U) \cap U = \varnothing$ olacak şekilde bir U komşuluğu vardır. Benzer durum Fuchs grupları için genellikle söz konusu değildir. Eğer Fuchs grubunda bir eliptik dönüşüm var ise bu eliptik dönüşümün üst yarı düzlemdeki sabit noktası için belirtilen özellikte bir komşuluk bulmak mümkün değildir. Dolayısıyla Fuchs grupları aşağıda tanımı verilecek anlamda süreksiz gruplardır.

5.1.2. Tanım. Y bir topolojik uzay ve G, Y topolojik uzayının homeomorfizmlerinin (birebir, örten, tersi ve kendisi sürekli olan dönüşümlerinin) bir grubu olsun. Her bir $y \in Y$ noktasının

“$g \in G$ için $g(V) \cap V \neq \varnothing$ ise $g(y) = y$ dir.”

özelliğinde bir V komşuluğu var ise G grubuna Y üzerinde has süreksiz hareket ediyor denir (Jones ve Singerman 1987).

Tanımdan tüm Fuchs gruplarının $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket ettiği sonucu elde edilir. Bundan başka her süreksiz grup has süreksiz olarak hareket eder. Bununla birlikte $z \to e^{2\pi i/n} z$ (n = 2, 3, …) ile üretilmiş olan $\boldsymbol{C}$ nin homeomorfizmlerinin sonlu grubu $\boldsymbol{C}$ üzerinde has süreksiz hareket ettiği halde süreksiz hareket etmez.

5.1.3. Lemma. K, $\boldsymbol{U}$ nun kompakt bir alt kümesi olmak üzere $w \in \boldsymbol{U}$ verilmiş olsun. O halde

$$E = \{T \in PSL(2, \boldsymbol{R}) \mid T(w) \in K\}$$

kümesi kompakttır (Jones ve Singerman 1987).

5.1.4. Sonuç. $w \in$ ***U*** olmak üzere *K*, ***U*** nun kompakt bir alt kümesi olsun. Eğer Γ bir Fuchs grubu ise $\{T \in \Gamma \mid T(w) \in K\}$ kümesi sonludur (Jones ve Singerman 1987).

5.1.5. Teorem. Γ, $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bir alt grubu olsun.

i) Γ bir Fuchs grubudur $\Leftrightarrow$ Γ, ***U*** üzerinde has süreksiz hareket eder.

ii) Γ bir Fuchs grubu ve $p \in$ ***U*** noktası Γ nın belli bir elemanının sabit noktası olsun. *p* noktasının öyle bir *W* komşuluğu vardır ki, *W* komşuluğunun *p* noktasından farklı hiçbir noktası Γ nın özdeşlikten farklı bir elemanının sabit noktası olamaz (Jones ve Singerman 1987).

İspat. İlk olarak bir Γ Fuchs grubunun ***U*** üzerinde has süreksiz hareket ettiği görülecektir. $z_o \in$ ***U*** ve $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$, z_o merkezli, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı kapalı hiperbolik disk olsun. Hiperbolik metrik tarafından indirgenen topoloji ile Öklid metriği tarafından indirgenen topoloji aynı olduğundan $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ kompakttır. O halde yukarıda elde edilen sonuç gereği

$$\{T \in \Gamma \mid T(z_0) \in \overline{B_\varepsilon(z_0)}\}$$

kümesi sonlu bir kümedir. O halde $\overline{B_\delta(z_0)}$, z_o noktasının Γ-yörüngesinden başka bir nokta bulundurmayacak şekilde bir $0 < \delta < \varepsilon$ sayısı vardır. Eğer $V = \overline{B_{\delta/2}(z_0)}$ olarak alınırsa, belli $S \in \Gamma$ için $V \cap S(V) \neq \varnothing$ olması halinde $S(z) \in V$ olacak biçimde bir $z \in V$ vardır. Böylece

$$\rho(z, z_0) < \frac{\delta}{2}, \; \rho(S(z), z_0) < \frac{\delta}{2}$$

ve dolayısıyla

$$\rho\big(z_o, S(z_o)\big) \leq \rho\big(z_o, S(z)\big) + \rho\big(S(z), S(z_o)\big) = \rho\big(z_0, S(z)\big) + \rho\big(z, z_0\big) < \delta$$

olur, ancak $\delta > 0$ sayısının tanımı dikkate alınırsa, $S(z_o) = z_o$ olduğu görülür. Dolaysıyla Γ, ***U*** üzerinde has süreksiz hareket eder.

i) kısmının ispatını tamamlamadan önce ii) yi görelim, bunun için $S \neq I$ olmak üzere p noktasının S dönüşümünün sabit noktası olduğu varsayılsın. İspatın ilk kısmından, p noktasının $W \cap S(W) \neq \emptyset$ olması halinde $S(p) = p$ olduğu bilinen bir W komşuluğu vardır. Eğer $q \in W$ noktası bir $T \neq I$ dönüşümü ile sabit bırakılıyor ise $W \cap T(W) \neq \emptyset$ dır ve böylece $T(p) = p$ olur. $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin özdeşlikten farklı bir elemanının $\boldsymbol{U}$ da en fazla bir sabit noktası olabilir. O halde $p = q$ olur.

Şimdi de ispatın i) kısmı tamamlanacaktır, yani $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eden bir $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ alt grubunun ayrık, yani Fuchs grubu olduğu görülecektir. Tersine Γ grubunun ayrık olmadığı varsayılsın. Γ grubunun özdeşlikten farklı herhangi bir elemanı ile sabit bırakılamayan belli bir $s \in \boldsymbol{U}$ noktası seçilsin. Böyle bir noktanın varlığı ii) den görülür. Γ ayrık olmadığından Γ grubunun farklı elemanlarından oluşan $T_k \to I$ özelliğinde bir (T_k) dizisi vardır. Böylece $T_k(s) \to s$ olur. s noktası Γ nın özdeşlikten farklı herhangi bir elemanının sabit noktası olmadığından $(T_k(s))$ dizisinin terimleri farklıdır. O halde, yakınsama gereği, s noktasının her bir komşuluğu, s noktasının Γ-yörüngesinden sonsuz çoklukta eleman bulundurur. Bu ise Γ nın has süreksiz olmadığını gösterir ki bu bir çelişkidir.

5.1.6. Sonuç. $\Gamma \subset PSL(2, \boldsymbol{R})$ olsun. Γ bir Fuchs grubudur $\Leftrightarrow$ her $z \in \boldsymbol{U}$ için z noktasının Γ yörüngesi Γ_z, $\boldsymbol{U}$ nun bir ayrık alt kümesidir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. İlk olarak Γ_z kümesinin $\boldsymbol{U}$ nun bir ayrık alt kümesi olduğu varsayılsın. O halde $B_\varepsilon(z)$ açık hiperbolik diski, Γ_z yörüngesinden z noktasından başka bir nokta bulundurmayacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Eğer $V \subset B_{\varepsilon/2}$ olarak alınırsa, bir önceki teoremin ispatındaki düşünce ile, $V \cap S(V) \neq \emptyset$ olması halinde $S(z) = z$ olduğu sonucu elde edilir, bu ise Γ nın bir Fuchs grubu olduğunu gösterir.

Tersine Γ bir Fuchs grubu ise $\boldsymbol{U}$ üzerinde has süreksiz hareket eder ve böylece her Γ_z yörüngesi $\boldsymbol{U}$ da ayrıktır.

Buna göre, $z \in \boldsymbol{U}$ ve (T_k), Γ nın farklı elemanlarının bir dizisi olmak üzere eğer $(T_k(z)) \rightarrow \alpha \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ ise $\alpha \in \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ dur. Bu şekildeki bütün limit noktalarının kümesine Γ *nın limit noktalarının kümesi* denir ve $L(\Gamma)$ ile gösterilir. Böylece tüm Γ Fuchs grupları için $L(\Gamma) \subset \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ dur.

5.1.7. Örnekler 1. Γ modüler grup ise $L(\Gamma) = \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ dur.

2. Γ, $z \rightarrow 2z$ dönüşümü tarafından üretilmiş devirli grup ise $L(\Gamma) = \{0, \infty\}$ dur.

Genel olarak ayrık bir grubun süreksiz olup olmadığı, grubun etki ettiği uzaya çok bağlıdır. Örneğin modüler grup $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde has süreksiz değildir. Çünkü 0 noktasının yörüngesi $\boldsymbol{Q} \cup \{\infty\}$ dir. Benzer şekilde $\boldsymbol{Z[i]} = \{m + ni \mid m, n \in \boldsymbol{Z}\}$ Gauss tamsayılar halkası olmak üzere

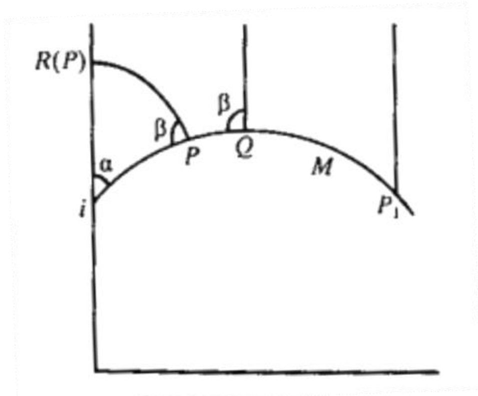
$$PSL(2, \boldsymbol{Z[i]}) = \{T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; a, b, c, d \in \boldsymbol{Z[i]} \text{ ve } ad - bc = 1\}$$

olarak tanımlanan grup $PSL(2, \boldsymbol{C})$ grubunun bir ayrık alt grubudur. Ancak Riemann küresi üzerindeki hareketi, 0 noktasının yörüngesi $\{r + si \mid r, s \in \boldsymbol{Q}\} \cup \{\infty\}$ kümesi olduğu için has süreksiz değildir. $PSL(2, \boldsymbol{Z[i]})$ *Picard modüler grubu* olarak adlandırılır ve hiperbolik-3 uzay üzerinde has süreksiz hareket eder.

Üst yarı düzlemde has süreksiz hareket eden grupları oluşturmak için kullanılan geometrik teknikler Fuchs gruplarını oluşturmak için kullanılan yöntemlerle ortaktır. Şimdi bu yöntemin üçgen grupları oluşturmak için nasıl kullanıldığı gösterilecektir. Gauss-Bonet formülüne göre bir hiperbolik üçgenin iç açıları toplamı π den küçüktür. O halde şimdi bu şartları gerçekleyen bir hiperbolik üçgenin varlığı üzerinde durulacaktır.

5.1.8. Lemma. α, β, γ sayıları $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ eşitsizliğini gerçekleyen negatif olmayan reel sayılar olsun. O halde açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen vardır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Şekil 5.1. de gösterilen ve bazı açıları sıfır olan hiperbolik üçgenler oluşturmak kolaydır. Bu nedenle hiperbolik üçgenin hiçbir açısının sıfır olmadığı varsayılsın. Açıların toplamı π den küçük olduğundan $0 < \alpha < \pi / 2$ olarak kabul edilebilir. Hiperbolik üçgenin bir köşesi i olarak seçilip bir kenarı da i noktasından geçen imajiner eksenin bir parçası olarak alınabilir. M bir hiperbolik doğrunun, imajiner eksenin sağ tarafında kalan ve imajiner eksenle α açısıyla kesişen parçası olsun. Her $P_1 \in M$ noktası için köşeleri P_1, i ve ∞ olan hiperbolik üçgen göz önünde bulundurulsun. Bu üçgende P_1 noktası M boyunca i noktasından reel eksene doğru hareket ettiği zaman P_1 köşesindeki açı da $\pi - \alpha$ dan 0 a sürekli olarak değişir (Şekil 5.1.). Böylece belli bir Q noktası için bu açı $\beta < \pi - \alpha$ şeklindedir. i ve Q noktaları arasındaki her P noktası için M yi β açısıyla kesen ve P noktasından geçen bir hiperbolik doğru vardır. Ayrıca bu hiperbolik doğru imajiner ekseni i noktasının üst tarafındaki bir noktada keser. Aksi takdirde açılarının toplamı π den küçük olmayan bir üçgen elde edilir. Bu H-doğrunun imajiner ekseni $R(P)$ noktasında $\gamma(P)$ açısıyla kestiği varsayılsın. $P \to Q$ olduğunda $\gamma(P) \to 0$ ve ayrıca $P \to i$ olduğunda köşeleri i, P, $R(P)$ olan hiperbolik üçgenin H-alanı 0 a yaklaşır. Böylece Gauss-Bonet formülünden $\gamma(P) \to \pi - \alpha - \beta$ olur. Böylece belli bir P noktası için $\gamma(P) = \gamma$ olmak üzere açıları α, β, γ olan bir hiperbolik üçgen elde edilmiş olur.



Şekil 5.1. ***U*** da hiperbolik üçgen oluşturulması (Jones ve Singerman 1987)

5.1.9. Tanım. Q bir H-doğru olmak üzere, Q nun her bir noktasını sabit bırakan $\boldsymbol{U}$ nun özdeşlikten farklı H-eşmetrisine Q da bir *H- yansıma* denir (Jones ve Singerman 1987).

Eğer Q_0 imajiner eksen olarak alınırsa $R_0(z) = -\overline{z}$ Öklidyen yansıması bir H-yansımadır. Eğer Q başka bir H-doğru olarak alınırsa $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin dönüşümleri tüm H-doğruların kümesi üzerinde geçişli hareket ettiğinden $T(Q) = Q_0$ olacak şekilde bir $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ vardır. T bir H-eşmetri olduğundan $T^{-1}R_0T$, Q doğrusunu sabit bırakan H-yansımadır. R_0 ın mertebesi 2 olduğundan her H-yansımanın mertebesi de 2 dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

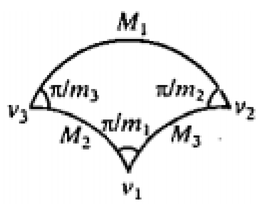
5.1.10. Teorem. Q doğrusuna göre bir H-yansıma, Q doğrusuna göre bir Öklidyen inversiyonun üst yarı düzleme kısıtlanmış halidir (Jones ve Singerman 1987).

Her bir H-yansıma $\boldsymbol{U}$ nun bir anti konform homeomorfizmidir yani her bir H-yansıma açıların büyüklüklerini korur fakat açıların yönlerini değiştirir. Eğer B, $\boldsymbol{U}$ nun bir anti konform homeomorfizmi ise $R_0B = T$, $\boldsymbol{U}$ nun bir konform homeomorfizmi olur ve dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin bir elemanıdır. O halde $B = R_0T$ yazılabilir ve böylece $\boldsymbol{U}$ nun her anti konform homeomorfizmi ve özel olarak her bir H-yansıması,

$$z \to \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\ ,\ a, b, c, d \in \boldsymbol{R} \text{ ve } ad - bc = -1$$

biçiminde olur.

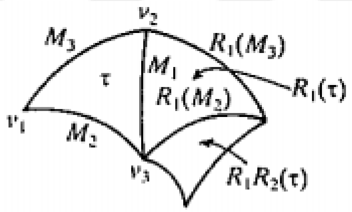
τ , köşeleri v_1, v_2, v_3 noktaları, m_1, m_2, m_3 pozitif tamsayılar olmak üzere bu köşelerdeki açıları π/m_1, π/m_2, π/m_3 ve bu köşelerin karşısındaki kenarları M_1, M_2, M_3 olan bir H-üçgen olsun.



Şekil 5.2. H-üçgen (Jones ve Singerman 1987)

i = 1, 2, 3 olmak üzere R_i, M_i kenarını bulunduran H-doğrudaki H-yansıma ve Γ^*, R_1, R_2, R_3 ile üretilen grup olsun. $R_i \notin PSL(2, \mathbf{R})$ olduğundan Γ^* bir Fuchs grubu değildir. Eğer $\Gamma = \Gamma^* \cap PSL(2, \mathbf{R})$ olarak alınırsa Γ^* iki Γ kosetinin birleşimidir. Örneğin $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_1$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_2$ veya $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_3$ olarak da ifade edilebilir. Eğer $S \in \Gamma^* \setminus \Gamma$ ise o halde SR_1 iki anti konform homeomorfizmin birleşimi olduğundan konformdur ve dolayısıyla $SR_1 \in PSL(2, \mathbf{R})$ dir. Ayrıca $SR_1 \in \Gamma^*$ olduğundan $SR_1 \in \Gamma$ olur. O halde $S = (SR_1)R_1 \in \Gamma R_1$ dir.

τ, H-üçgeninin R_1 H-yansıması altındaki resmi, kenarları $R_1(M_1) = M_1$, $R_1(M_2)$ ve $R_1(M_3)$ olan $R_1(\tau)$ hiperbolik üçgenidir. $R_1R_2R_1^{-1}$, $R_1(M_2)$ H-doğru parçasını nokta nokta sabit bıraktığından $R_1R_2R_1^{-1}$, $R_1(M_2)$ doğrusuna göre bir H-yansımasıdır. Bu yansıma $R_1(\tau)$ H-üçgenini $R_1R_2R_1^{-1}(R_1(\tau)) = R_1R_2(\tau)$ ye resmeder.



τ

Şekil 5.3. Üçgen grubun oluşturulması (Jones ve Singerman 1987)

Bu şekilde devam ederek, v_3 köşesini saran hiperbolik üçgenlerin τ, $R_1(\tau)$, $R_1R_2(\tau)$, $R_1R_2R_1(\tau)$, …, $(R_1R_2)^{m_3-1}R_1(\tau)$ olduğu görülür. R_1R_2, v_3 köşesini sabit bırakan iki H-yansımanın çarpımıdır fakat bu dönüşüm v_3 köşesi etrafında $2\pi/m_3$ açılık bir hiperbolik dönme olarak düşünülebilir ve dolayısıyla $(R_1R_2)^{m_3} = I$ dır.

τ H-üçgeninin, Γ^* grubunun elemanları altındaki görüntülerinin kümesi, yani

$$\{T(\tau) \mid T \in \Gamma^*\}$$

kümesi oldukça ilginç özelliklere sahip bir kümedir. Dikkat edilirse τ H-üçgeninin herhangi iki resmi üst üste gelmediği gibi $\mathbf{U}$ daki her bir nokta τ H-üçgeninin belli bir Γ^*-resminde bulunur. $\mathbf{U}$ kümesinin τ H-üçgeni ve τ H-üçgeninin, Γ^*

grubunun elemanları altındaki resimleri ile örtülmesine ***U*** kümesinin bir *döşemesi* denir (Magnus 1974). p, τ nun herhangi bir noktası olmak üzere p nin Γ^*-resimleri döşemenin diğer üçgenlerinin noktaları olacaktır ve dolayısıyla ayrık bir küme oluşturacaklardır. Böylece ***U*** nun her bir Γ-yörüngesi ayrık bir küme olur ve dolayısıyla Γ bir Fuchs grubudur. Bu şekilde oluşturulan Γ Fuchs grubuna *üçgen grup* denir.

τ H-üçgeni ile ***U*** kümesinin döşemesi dikkate alındığında, T dönüşümü R_1, R_2, R_3 yansımalarının sonlu bir çarpımı (yani R_1, R_2, R_3 yansımaları ile elde edilen bir '*kelime*') olmak üzere döşemenin her üçgeni $T(\tau)$ biçimindedir. Bundan başka

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^{m_3} = \left(R_2R_3\right)^{m_1} = \left(R_1R_3\right)^{m_2} = I$$

bağıntılarının gerçeklendiği de açıktır. Gruptaki diğer bağıntılar bu eşitlikler kullanılarak elde edilebilir (Magnus 1974). Dolayısıyla $X = R_1R_2$, $Y = R_2R_3$ olmak üzere Γ, X ve Y dönüşümleri ile üretilir ve dolayısıyla

$$X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I$$

bağıntıları yardımıyla Γ grubunun grup temsili

$$\Gamma = \left\langle X, Y \,\middle|\, X^{m_3} = Y^{m_1} = (XY)^{m_2} = I \right\rangle$$

olarak elde edilir.

5.2. Fuchs Gruplarının Temel Cebirsel Özellikleri

Bu kısımda Fuchs gruplarının temel cebirsel özellikleri ele alınacaktır. Bilindiği üzere ***R*** toplamsal grubunun aşikar olmayan ayrık bir alt grubu sonsuz, devirli bir gruptur. Modülü 1 olan karmaşık sayıların çarpımsal grubu olan S^1 in ayrık bir alt grubu ise sonlu devirli bir gruptur.

5.2.1. Teorem. Λ aynı sabit nokta kümesine sahip elemanlardan oluşan bir Fuchs grubu ise Λ devirli bir gruptur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $S \in \Lambda$ bir hiperbolik eleman olsun. Gerekirse bir eşlenik grup seçilerek S dönüşümünün 0 ve ∞ noktalarını sabit bıraktığı varsayılabilir. Bu durumda $S \in \Lambda$

bir hiperbolik dönüşüm ise Λ nın tüm dönüşümleri hiperboliktir ve üstelik 0, ∞ noktalarını sabit bırakırlar. O halde Λ, $H = \{T \mid T(z) = \lambda z, \lambda > 0\}$ grubunun ayrık bir alt grubudur. *H*, topolojik grup olarak, pozitif reel sayıların çarpımına göre bir grup olan R^* grubuna izomorftur. Diğer yandan R^* grubu da topolojik grup olarak $x \to \ln x$ izomorfizmi ile *R* ye izomorftur. Dolayısıyla *R* nin her bir ayrık alt grubu sonsuz devirli olduğundan Λ grubu da sonsuz devirlidir. Benzer şekilde eğer Λ bir parabolik eleman bulunduruyor ise Λ sadece parabolik elemanlar bulunduran sonsuz devirli bir gruptur. Eğer Λ bir eliptik eleman bulunduruyorsa Λ grubunun elemanları

$$\frac{W(z)-i}{W(z)+i} = e^{i\phi}\frac{z-i}{z+i} \quad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

biçiminde olup bu dönüşümler S^1 grubuna izomorf olan bir grup oluştururlar. S^1 in ayrık bir alt grubu ise ancak sonlu devirli bir grup olacağından Λ grubu da sonlu devirlidir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

5.2.2. Teorem. Bir Fuchs grubunun eliptik bir elemanı sonlu mertebeye sahiptir (Jones ve Singerman 1987).

5.2.3. Teorem. Her bir abelyen Fuchs grubu devirlidir (Jones ve Singerman 1987).
İspat. Γ abelyen bir Fuchs grubu olsun. O halde herhangi $S, T \in \Gamma$ için $ST = TS$ olduğundan *S* ve *T* dönüşümlerinin sabit nokta kümeleri aynıdır ve dolayısıyla Teorem 5.2.1. gereği Γ devirlidir.

5.2.4. Tanım. *G* bir grup ve *H*, *G* nin bir alt grubu olsun. *H* nin *G* deki *normalleştiricisi* $N_G(H)$ simgesiyle ile gösterilir ve

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

olarak tanımlanır (Gezer ve Bizim 2017).

Tanım dikkate alındığında $N_G(H)$, *H* nin *G* nin normal alt grubu olduğu *G* nin en büyük alt grubu olduğu sonucu elde edilir.

5.2.5. Teorem. Γ devirli olmayan bir Fuchs grubu ise Γ nın $PSL(2, \mathbf{R})$ deki normalleştiricisi de bir Fuchs grubudur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Tersine Γ nın $PSL(2, \mathbf{R})$ deki normalleştiricisinin bir Fuchs grubu olmadığı varsayılsın. Bu durumda Γ grubunun $i \to \infty$ için $(T_i) \to I$ olacak biçimde farklı elemanlarının bir (T_i) dizisi vardır. O halde $S \in \Gamma$ $(S \neq I)$ ise $i \to \infty$ için $T_i S T_i^{-1} \to S$ olur. Γ ayrık olduğundan her $i > m$ için $T_i S T_i^{-1} = S$ olacak biçimde bir m sayısı vardır ve dolayısıyla i nin tüm bu değerleri için T_i ve S değişmeli olduğundan T_i ve S dönüşümleri aynı sabit nokta kümesine sahiptirler. Γ devirli olmadığından, yukarıdaki teorem gereği, abelyen değildir ve dolayısıyla S nin sabit nokta kümesinden farklı sabit nokta kümesine sahip olan bir $S' \in \Gamma$ vardır. Diğer yandan T_i dönüşümleri, yeterince büyük i ler için S' ile aynı sabit nokta kümesine sahiptir ve böylece S', S ile aynı sabit nokta kümesine sahip olur ki bu bir çelişkidir.

5.3. Temel Bölgeler

5.3.1. Tanım. $F \subset \mathbf{U}$ kapalı bir küme olmak üzere

i) $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathbf{U}$

ii) Her $T \in \Gamma \setminus \{I\}$ için $\mathring{F}$, F nin içi olmak üzere $\mathring{F} \cap T(\mathring{F}) = \varnothing$

koşullarını gerçekleyen F kümesine Γ grubu için bir *temel bölge* denir (Jones ve Singerman 1987).

5.3.2. Örnek. Γ bir τ hiperbolik üçgeninden elde edilmiş bir üçgen grup ve R_1, bu üçgenin kenarlarından birine göre yansıma olmak üzere $\tau \cup R_1(\tau)$, Γ için bir temel bölgedir. Hatırlanacağı gibi τ hiperbolik üçgenin Γ grubunun elemanları altındaki resimleri üst yarı düzlemin bir döşemesini oluşturur ve üstelik bu resimlerin içlerinin arakesitleri boştur.

5.3.3. Tanım (*Dirichlet Bölgesi*). Γ keyfi bir Fuchs grubu ve $p \in \boldsymbol{U}$ noktası $\Gamma \setminus \{I\}$ grubunun herhangi bir elemanı ile sabit bırakılamayan bir nokta olsun. Γ *için p merkezli Dirichlet bölgesi*

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \boldsymbol{U} \mid \text{her } T \in \Gamma \text{ için } \rho(z,p) \le \rho(z,T(p))\}$$

şeklinde tanımlanır (Jones ve Singerman 1987).

$PSL(2, \boldsymbol{R})$ dönüşümleri altında hiperbolik metrik değişmez kaldığından bu bölge

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \boldsymbol{U} \mid \text{her } T \in \Gamma \text{ için } \rho(z,p) \le \rho(T(z),p)\}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Her bir $T_1 \in \Gamma$ için $\rho(z,p) \le \rho(z,T_1(p))$ eşitsizliği, hiperbolik metriğe göre p noktasına olan uzaklığı $T_1(p)$ noktasına olan uzaklığından daha küçük olan z noktalarını belirtir. Doğal olarak $p \in D_p(\Gamma)$ dır ve üstelik p noktasının Γ yörüngesi Γ_p ayrık olduğundan $D_p(\Gamma)$, p noktasının bir komşuluğunu da bulundurur.

p noktası ile $T_1(p)$ yi birleştiren H-doğru parçasının hiperbolik orta dikmesi p noktasını bulunduran bir yarı düzlem belirler. Böylece $D_p(\Gamma)$ hiperbolik yarı düzlemlerin arakesitidir ve dolayısıyla $D_p(\Gamma)$ bölgesi bir hiperbolik konveks bölgedir. Doğal olarak $D_p(\Gamma)$ sonlu sayıda hiperbolik düzlemin arakesiti ise $D_p(\Gamma)$ bir konveks hiperbolik poligon olur.

Γ bir Fuchs grubu ise her $z \in \boldsymbol{U}$ için z noktasının Γ yörüngesi Γ_z, $\boldsymbol{U}$ nun bir ayrık alt kümesidir. Dolayısıyla p noktasının Γ yörüngesinden başka hiçbir noktayı bulundurmayacak şekilde bir komşuluğu vardır.

5.3.4. Teorem. p noktası Γ grubunun sabit olmayan herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $D_p(\Gamma)$, Γ için bağlantılı bir temel bölgedir (Jones ve Singerman 1987).

Öklid metriği ile hiperbolik metrik arasındaki ilişki kullanılarak Dirichlet bölgesi oluşturulabilir.

$$\sinh^2 \frac{\rho(z,w)}{2} = \frac{|z-w|^2}{4\,\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)}$$

eşitliği ve $\alpha > 0$ için $\sinh^2\alpha$ fonksiyonunun monoton artan olduğu dikkate alınarak her $T \in \Gamma$ için $\rho(z,p) \le \rho(T(z),p)$ olduğundan

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \boldsymbol{U} \mid \text{her } T \in \Gamma \text{ için } \frac{|z-p|^2}{\operatorname{Im}(z)} \le \frac{|T(z)-p|^2}{\operatorname{Im} T(z)}\}$$

yazılabilir. $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ için

$$\operatorname{Im} T(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$$

olduğundan $D_p(\Gamma)$ Dirichlet bölgesi, Öklid metriği ile

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \boldsymbol{U} \mid \text{her } T \in \Gamma \text{ için } \left|\frac{T(z)-p}{z-p}\right| \ge \frac{1}{|cz+d|}\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

5.3.5. Örnek. Γ modüler grup olsun. Bu durumda $k > 1$ olmak üzere ki noktası Γ grubunun özdeşlikten farklı hiçbir elemanının sabit noktası değildir. O halde $k > 1$ olmak üzere $p = ki$ olarak seçilebilir. Böylece $\left|\dfrac{T(z)-p}{z-p}\right| \ge \dfrac{1}{|cz+d|}$ eşitsizliğinde $T(z) = z + 1$ veya $T(z) = z - 1$ olarak alınırsa $c = 0$, $d = 1$ olduğundan $|z \pm 1 - ki| \ge |z - ki|$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik Öklidyen metriğe göre ki noktasına $ki \pm 1$ noktalarından daha yakın olan noktaları belirtir. Böylece $D_{ki}(\Gamma)$ bölgesi

$$\{z \in \boldsymbol{U} \mid -\frac{1}{2} \le \operatorname{Re}(z) \le \frac{1}{2}\}$$

şerit bölgesi içinde kalır. Şimdi $T(z) = -1/z$ dönüşümü dikkate alınırsa $c = 1$, $d = 0$ olduğundan her $z \in D_{ki}(\Gamma)$ için

$$\frac{\left|-\frac{1}{z} - ki\right|}{|z-ki|} \ge \frac{1}{|z|}$$

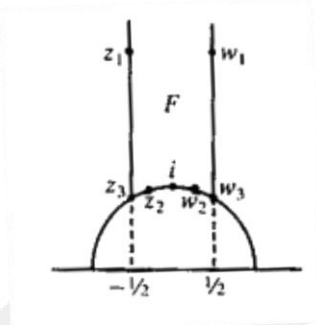
olur ve dolayısıyla

$$|1 + kiz|^2 \ge |z - ki|^2$$

eşitsizliği elde edilir. $|1+kiz|^2 = (1+kiz)(1-ki\bar{z})$ yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $|z| \ge 1$ olduğu görülür. Bu ise $D_{ki}(\Gamma)$ bölgesinin birim çember ile sınırlanan bölgenin dışında kaldığını gösterir. Bu sonuç ilk halde elde edilen sonuç ile bir araya getirililirse

$$F = \{z \in \boldsymbol{U} \mid |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$$

olmak üzere $D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ olduğu sonucu elde edilir (Şekil 5.4.).



Şekil 5.4. Modüler grubun temel bölgesi (Jones ve Singerman 1987)

Gerçekte $D_{ki}(\Gamma) = F$ dir, bunun için iki yardımcı lemmaya ihtiyaç vardır.

5.3.6. Lemma. $D_{ki}(\Gamma)$ imajiner eksene göre simetriktir, yani $A(z) = -\overline{z}$ imajiner eksende bir yansıma olmak üzere $z \in D_{ki}(\Gamma)$ ise $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$ dır (Jones ve Singerman 1987).

İspat. A dönüşümü imajiner eksenin bütün noktalarını sabit bırakan bir H-yansımadır. Ayrıca A bir H-eşmetri ve her $T \in \Gamma$ için $A^{-1}TA \in \Gamma$ olduğundan

$$\rho(A(z), ki) = \rho(z, ki) \leq \rho(z, A^{-1}TA(ki)) = \rho(A(z), TA(ki)) = \rho(A(z), T(ki))$$

olur. Bu ise $A(z) \in D_{ki}(\Gamma)$ olduğunu gösterir.

5.3.7. Lemma. $z \in F$ olmak üzere $S \in \Gamma \setminus \{I\}$ ve $w = S(z) \in F$ olsun. Bu durumda $z, w \in \delta F$ olmak üzere ya $z = w$ dır, ya da z ve w imajiner eksene göre simetriktir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{Z}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ olmak üzere $S(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ olsun. Bu durumda

$$|\gamma z + \delta|^2 = (\gamma z + \delta)(\gamma \overline{z} + \delta) = \gamma^2 |z|^2 + 2\gamma\delta \,\mathrm{Re}(z) + \delta^2 \ \geq \gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 \geq 1$$

olur (son eşitsizlik $\gamma\delta \leq 0$ olması halinde açıktır, $\gamma\delta > 0$ ise $\gamma^2 - \gamma\delta + \delta^2 = (\gamma - \delta)^2 + \gamma\delta \geq 1$ yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\gamma z + \delta|^2} \leq \mathrm{Im}(z)$$

olur. Diğer yandan z ve w noktalarının rolleri değiştirilirse (S dönüşümü yerine S^{-1} dönüşümü kullanılarak) $\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w)$ olur. Bu ise $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$ ve $|\gamma z + \delta|^2 = 1$ olduğunu gösterir ve dolayısıyla yukarıdaki her bir eşitsizlik bir eşitlik haline dönüşür. Böylece

$$(\gamma - \delta)^2 + \gamma\delta = 1 \tag{5.1}$$

ve

$$\gamma^2(|z|^2 - 1) + \gamma\delta(2\,\mathrm{Re}(z) + 1) = 0 \tag{5.2.}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda üç hal söz konusudur.

a) $\gamma = 0, \quad \delta = \pm 1$ ise $S(z) = z + 1$ olur ve dolayısıyla z ve w noktaları F nin dikey sınırında kalır (Şekil 5.4. deki z_1 ve w_1 noktaları).

b) $\gamma = \pm 1, \quad \delta = 0$ ise (5.2.) denkleminden $|z| = 1$ olur. Bu durumda

$$S(z) = (\alpha z \pm 1) / \pm z = \pm\alpha - (1/z) = \pm\alpha - \overline{z}$$

dir. $S(z) \in F$ olduğundan $\alpha = 0$, 1 veya -1 dir. Eğer $\alpha = 0$ ise $S(z) = -1/z$ olur ve z ve $S(z)$ noktaları Şekil 5.4. deki z_2 ve w_2 noktaları gibidir ($z_2 = w_2 = i$ olabilir). Eğer $\alpha = \pm 1$ ise $z = (\pm 1 \pm i\sqrt{3})/2$ ve $S(z) = z$ dir (Şekil 5.4. de $z = z_3$ veya w_3).

c) $\gamma = \delta = \pm 1$ ise (ii) denkleminden $|z| = 1$ ve $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ olur ki bu durumda $z = z_3$ tür. $S(z_3) \in F$ ve $S(z_3)$ ile z_3 aynı imajiner kısma sahip olduklarından ya $S(z_3) = z_3$ ya da $S(z_3) = w_3$ olur. Bütün durumlar için $S(z) = z$ veya $S(z)$ ve z imajiner eksene göre simetriktir.

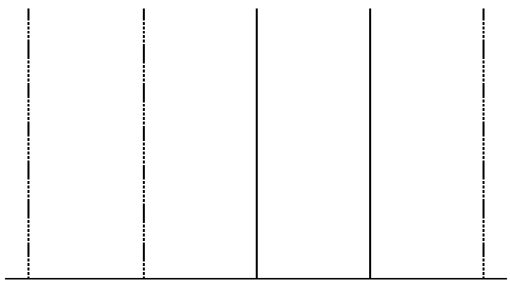
$z_0 \in F$ olsun. $D_{ki}(\Gamma)$ bir temel bölge olduğundan $T(z_0) \in D_{ki}(\Gamma) \subseteq F$ olacak biçimde bir $T \in \Gamma$ vardır. Lemma 5.3.7. gereği $T(z_0) = z_0$ ya da z_0 ve $T(z_0)$ imajiner eksene göre simetrik noktalardır. O halde Lemma 5.3.6. gereği $z_0 \in D_{ki}(\Gamma)$ dır. Böylece $F = D_{ki}(\Gamma)$ olur.

5.3.8. Teorem. $F = \{z \in \boldsymbol{U} \mid |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ modüler grup için bir temel bölgedir (Jones ve Singerman 1987).

Kafesler Öklid eşmetrilerinin ayrık gruplarıdır ve kafesler için oluşturulan Dirichlet bölgesi dört ya da altı kenarlı bir poligondur. Fuchs grupları için Dirichlet bölgeleri çok daha karmaşık olabilirler. Fuchs grupları için Dirichlet bölgeleri H-doğrularla sınırlı olabileceği gibi reel eksenin bir bölümüyle de sınırlı olabilirler. Eğer $\boldsymbol{U}$ da iki H-doğru kesişiyorlarsa, kesiştikleri noktaya Dirichlet bölgesinin bir *köşesi* denir. Dirichlet bölgesinin köşeleri bir ayrık küme oluşturur.

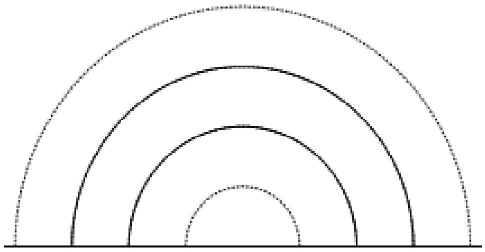
Daha önce de belirtildiği gibi en basit Fuchs grupları tek bir $T \in PSL(2,\boldsymbol{R})$ dönüşümü ile üretilen devirli gruplardır, bu grup $G = \langle T \rangle$ biçiminde ifade edilebilir. T dönüşümünün parabolik, hiperbolik ya da eliptik olup olmadığına bağlı olarak aşağıdaki örnekler elde edilir.

5.3.9. Örnek 1. Şekil 5.5. te görülen ve $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$ eşitsizliği ile ifade edilen F bölgesi, $T(z) = z + 1$ olmak üzere $G = \langle T \rangle$ grubu için bir temel bölgedir.



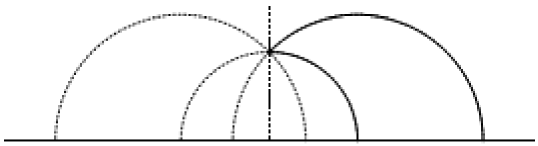
Şekil 5.5. $T(z) = z + 1$ ile üretilen devirli grubun temel bölgesi

2. $k > 1$ olmak üzere $F = \{z \in \boldsymbol{U} \mid 1 < |z| < k\}$ bölgesi de $T(z) = kz$ olmak üzere $G = \langle T \rangle$ grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 5.6. $T(z) = kz$ ile üretilen devirli grubun temel bölgesi

3. T dönüşümü $i \in \boldsymbol{U}$ noktasını sabit tutan bir eliptik dönüşüm olsun. O halde bu dönüşüm $T(z) = \dfrac{\cos\theta\, z - \sin\theta}{\sin\theta\, z + \cos\theta}$ biçiminde ifade edilebilir. Bu dönüşüm ile elde edilen devirli grubun ayrık olması için bu dönüşümün sonlu mertebeli olması gerekir, o halde belli bir $n \geq 2$ için $\theta = \pi / n$ dir. Dolayısıyla Şekil 5.7. de görülen bölge T eliptik dönüşümü ile elde edilen $G = \langle T \rangle$ grubu için bir temel bölgedir (Toth 2002).



Şekil 5.7. Eliptik bir eleman tarafından üretilen devirli grubun temel bölgesi

Eğer Fuchs grubunun temel bölgesi bir Dirichlet bölgesi ise bu temel bölge ile elde edilen döşemeye *Dirichlet döşemesi* denir. Bir Dirichlet bölgesi oldukça karmaşık bir yapıya sahip olmasına rağmen aşağıdaki teorem Dirichlet döşemelerinin önemli yerel özelliklere sahip olduğunu göstermektedir. Bunun için öncelikle yeni bir kavrama ihtiyaç duyulacaktır.

5.3.10. Tanım. F, Γ Fuchs grubu için bir temel bölge olsun. Her $a \in F$ noktasının sadece sonlu sayıdaki $T \in \Gamma$ dönüşümü için $V(a) \cap T(F) \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $V(a)$ komşuluğu varsa F temel bölgesine *yerel sonludur* denir (Jones ve Singerman 1987).

5.3.11. Teorem. Bir Dirichlet bölgesi yerel sonludur (Jones ve Singerman 1987).

İspat. p, $\Gamma \setminus \{I\}$ nın herhangi bir elemanının sabit noktası olmamak üzere $F = D_p(\Gamma)$ olsun. $a \in F$ ve K, a noktasının kompakt bir komşuluğu olmak üzere Γ nın farklı elemanlarının belli bir T_1, T_2, … sonsuz dizisi için $K \cap T_i(F) \neq \varnothing$ olsun. $\sigma = \sup_{z \in K} \rho(p, z)$ olarak alınırsa her $z \in K$ için $\sigma \leq \rho(p, a) + \rho(a, z)$ olur ve K

sınırlı olduğundan σ sonludur. $w_j \in K \cap T_j(F)$ olsun. O halde her $z_j \in F$ için $w_j = T_j(z_j)$ olur ve böylece üçgen eşitsizliğinden

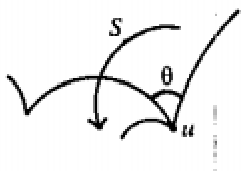
$$\begin{aligned}\rho(p, T_j(p)) &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) \\ &= \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \\ &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, p) \\ &\leq 2\sigma\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $T_1(p)$, $T_2(p)$, … noktalarından oluşan sonsuz küme *p* merkezli 2σ yarıçaplı kompakt H-diskinde bulunur. Bu ise sonuç 5.1.4. gereği bir çelişkidir.

5.3.12. Tanım. *F*, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi ve *u* ve *v* noktaları *F* nin köşeleri olsun. Eğer $T(u) = v$ olacak şekilde bir $T \in \Gamma$ varsa *u* ve *v* köşelerine *denk köşeler* denir (Jones ve Singerman 1987).

Bu özellik *F* bölgesinin köşeleri üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve denklik sınıfları *devirler* olarak adlandırılır. Eğer *u* bir *S* eliptik elemanının sabit noktası ise *v* noktası da TST^{-1} eliptik elemanının sabit noktasıdır. Böylece bir devrin bir köşesi bir eliptik elemanın sabit noktası ise bu devrin bütün köşeleri de bir eliptik elemanın sabit noktalarıdır. Böyle bir devire *eliptik devir* denir ve devrin köşelerine de *eliptik köşeler* denir.

F Dirichlet bölgesi bir temel bölge olduğundan Γ nın bir S' eliptik elemanı ile sabit bırakılan $w \in \boldsymbol{U}$ noktası belli bir $T \in \Gamma$ için $T(F)$ nin sınırı üzerindedir. Buradan $u = T^{-1}(w)$ noktası *F* nin sınırı üzerindedir ve $S = T^{-1}S'T$ eliptik elemanının bir sabit noktasıdır. Teorem 5.2.2. den *S* nin mertebesi sonlu bir *k* sayısıdır. Öyleyse $k \geq 3$ kabul edilirse *S*, H-doğruları H-doğrulara resmeden ve *u* noktasını sabit bırakan bir hiperbolik eşmetri olduğundan *u* noktası *F* nin bir köşesidir ve bu köşedeki açı en fazla $2\pi / k$ kadardır (Şekil 5.8.). Hiperbolik konveks *F* bölgesi hiperbolik doğrularla sınırlıdır. Bu hiperbolik doğrulardan biri ile *F* nin kesişimi ya tek bir noktadır ya da bir H-doğrunun bir parçasıdır. Bu doğru parçalarına *F* nin *kenarları* denir.



Şekil 5.8. *F* temel bölgesinin köşesi (Jones ve Singerman 1987)

Eğer *S* nin mertebesi 2 ise o halde sabit nokta *F* nin kenarının bir iç noktası olabilir. Bu durumda *S* dönüşümü sabit nokta tarafından ayrılmış bu kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir. Bu şekildeki sabit noktalara da bu köşelerdeki açısı π olan *F* nin bir köşesi olarak bakılır. *F* nin böyle bir köşesi ***U*** da *F* yi sınırlayan iki hiperbolik doğrunun kesişimidir ya da mertebesi 2 olan bir eliptik elemanın sabit noktasıdır (Daha önce tanımlanan denklik, eliptik devirler, v. b. tüm tanımlar köşelerin bu genişletilmiş kümesine uygulanabilir).

PSL(2, ***R***) nin sadece aşikar olmayan sonlu devirli alt grupları eliptik elemanlar tarafından üretilir ve *PSL*(2, ***R***) nin her bir eliptik elemanının ***U*** da tek bir sabit noktası vardır. Aynı durum Γ nın eliptik elemanları için de geçerlidir. Eğer ***U*** nun bir noktasının Γ da aşikar olmayan bir sabitleştiricisi varsa o halde bu sabitleştirici Teorem 5.2.2. den ve $T, S \in PSL(2, \mathbf{R})$ ve $ST = TS$ ise *S* dönüşümü *T* dönüşümünün sabit noktalarının kümesini kendi üzerine resmettiğinden Γ nın sonlu devirli alt grubudur.

5.3.13. Teorem. *F* deki eliptik devirler ile Γ nın aşikar olmayan maksimal sonlu devirli alt gruplarının denklik sınıfları arasında birebir eşleme vardır (Jones ve Singerman 1987).

5.3.14. Örnek. Γ modüler grup olsun. Şekil 5.4. de görüldüğü üzere Dirichlet bölgesinin ***U*** daki köşeleri $z_3 = (-1+i\sqrt{3})/2$, $w_3 = (1+i\sqrt{3})/2$ ve *i* noktalarıdır. Bu noktalar sırasıyla $z \to (-z-1)/z, z \to (z-1)/z$ ve $z \to -1/z$ dönüşümleri ile üretilen devirli alt gruplar tarafından sabitleştirilirler. Ayrıca $z \to z+1$ dönüşümü z_3 noktasını w_3 noktasına resmettiğinden bu iki köşe aynı eliptik devre aittir. *F* nin açısı $2\pi/3$ den daha küçük başka köşesi olmadığından bu iki köşe bir eliptik devir oluşturur. i noktası ise 2 mertebeli bir eliptik eleman tarafından sabit bırakılır. F nin sınırı üzerinde iki mertebeli bir eliptik eleman tarafından sabit bırakılan başka nokta olmadığından $\{i\}$ sadece bir köşeden oluşan bir eliptik devirdir. Teorem 5.3.13. ten modüler grup bir tanesi iki mertebeli diğeri üç mertebeli olan maksimal sonlu devirli alt grupların iki denklik sınıfına sahiptir.

5.3.15. Tanım. Γ nın maksimal sonlu alt gruplarının mertebesine Γ *nın periyotları* denir (Jones ve Singerman 1987).

Burada her bir periyot Γ nın maksimal sonlu alt gruplarının denklik sınıflarının mertebesi kadar tekrar eder. Dolayısıyla modüler grubun periyotları 2 ve 3 tür. Açıları π/l, π/m, π/n olan bir hiperbolik üçgenle elde edilen üçgen grubun periyotları l, m, n dir.

Bir parabolik eleman sonsuz mertebeli bir eliptik eleman olarak düşünülebilir. O halde ∞ periyot maksimal parabolik alt grupların denklik sınıflarının sayısı ile aynı sayıda olur. Örneğin modüler grubun her bir parabolik elemanının belli bir $n \in \boldsymbol{Z}$ için $z \to z+n$ dönüşümüne eşlenik olduğu ve dolayısıyla modüler grubun periyotlarının 2, 3 ve ∞ olduğu sonucu elde edilir. Keyfi bir Γ Fuchs grubunun her bir parabolik devirli alt grubu $\boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde bir noktayı sabit bırakır. Bu nokta Γ için bir Dirichlet bölgesinin köşesidir ve bu noktada Dirichlet bölgesini sınırlayan iki H-doğru kesişmektedir(Beardon 1983). Bu köşedeki açı 0 dır. Örneğin Teorem 5.3.8. de tanımlanan modüler grup için Dirichlet bölgesinin ∞ da bir köşesi vardır ve bu köşedeki açı $\pi/\infty = 0$ dır. Böylece modüler grup açıları $\pi/2$, $\pi/3$ ve π/∞ olan bir hiperbolik üçgenden elde edilmiş bir üçgen grup olarak düşünülebilir.

Şimdi kenarların denklikleri üzerinde durulacaktır. s, Γ Fuchs grubu için Dirichlet bölgesinin bir kenarı olsun. Eğer $T \in \Gamma/\{I\}$ ve $T(s)$, F nin bir kenarı ise s ve $T(s)$ ye *denk kenarlar* denir. $T(s)$ de $T(F)$ nin bir kenarı olduğundan $T(s) \subseteq F \cap T(F)$ olur. Ayrıca $T(F)$ Dirichlet döşemesinde F nin bir komşu yüzü olduğundan $T(s) = F \cap T(F)$ olmak zorundadır. Denk kenarların oluşturduğu kümede ikiden fazla kenar olamaz. $T_1(s)$ nin F nin böyle bir kenarı olduğunu kabul edelim. O halde $T_1(s) = F \cap T_1(F)$ ve böylece $s = T^{-1}(F) \cap F = T_1^{-1}(F) \cap F$ olur. Dolayısıyla T = T_1 dir. Böylece Dirichlet bölgesinin kenarları denk kenar çiftlerine ayrılmış olur. Eğer bir kenar, üzerinde iki mertebeli bir S eliptik elemanının bir sabit noktasını bulunduruyor ise S dönüşümü bu nokta ile ayrılmış olan kenarın iki parçasının yerlerini değiştirir ve böylece bu kenar kendisine denk bir kenar haline gelir. F nin bir kenarının kendisine denk olduğu tek durum vardır (Lehner 1966). Alternatif olarak bu kenarın parçaları, sabit nokta tarafından ayrılmış iki farklı kenar olarak düşünülebilir.

5.3.16. Örnek. Modüler grup için temel bölgenin iki dik kenarı $z \to z+1$ dönüşümü ile denk kenarlardır. Birim çemberin z_3 ile w_3 arasında kalan kenarı iki mertebeli $z \to -1/z$ eliptik dönüşümü tarafından kendi üzerine resmedilir. Alternatif olarak bu kenar z_3 ten i ye ve i den w_3 e iki denk kenarın birleşimi olarak düşünülebilir.

5.3.17. Teorem. F, Γ için bir Dirichlet bölgesi ve $\{T_i\}$, F nin kenar çiftlerini eşleştiren elemanları bulunduran Γ nın bir alt kümesi olsun. O halde $\{T_i\}$ kümesi Γ için bir üreteç kümesidir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. Λ, Γ nın $\{T_i\}$ kümesi ile üretilmiş bir alt grubu olsun. $\Lambda = \Gamma$ olduğu gösterilecektir. $S_1 \in \Lambda$ olmak üzere $S_2(F)$ nin $S_1(F)$ nin bir komşu yüzü olduğunu varsayalım. O halde $S_1^{-1}S_2(F)$, F nin bir komşu yüzü olur. Böylece belli bir $T_k \in \{T_i\}$ için $S_1^{-1}S_2 = T_k$ dır ve $S_2 = S_1(T_k)$ olduğundan $S_2 \in \Lambda$ dır. Eğer $S_3(F)$ ile $S_1(F)$ bir v köşesinde kesişiyorsa Teorem 5.3.11. den v köşesinde sadece sonlu çoklukta yüz vardır. Dolayısıyla yukarıdakine benzer bir düşünce ile $S_3 \in \Lambda$ olduğu görülür. Böylece

$$X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(F), \; Y = \bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} S(F)$$

olarak alınırsa $X \cap Y = \varnothing$ olur. Diğer yandan $X \cup Y = \boldsymbol{U}$ olduğu açıktır. Eğer X ve Y nin $\boldsymbol{U}$ nun kapalı alt kümeleri olduğu gösterilirse $\boldsymbol{U}$ bağlantılı ve $X \neq \varnothing$ olduğundan $X = \boldsymbol{U}$ ve $Y = \varnothing$ sonucu elde edilir. Bu ise $\Lambda = \Gamma$ olduğunu gösterir.

Döşemenin yüzlerinin herhangi $\cup V_j(F)$ birleşimi kapalıdır. $\cup V_j(F)$ birleşiminin noktalarının oluşturduğu (z_i) sonsuz dizisinin belli bir $l \in \boldsymbol{U}$ noktasında limitinin olduğu varsayılsın. Bu durumda belli bir $A \in \Gamma$ için $l \in A(F)$ dir ve Teorem 5.3.11. den sadece sonlu çoklukta $V_j(F)$ ile kesişen l nin bir N komşuluğu vardır. Bu sonlu ailenin bir yüzü $V_m(F)$ ise bu küme (z_i) dizisinin l noktasına yakınsayan bir alt dizisini bulundurur ve $V_m(F)$ kapalı olduğundan $l \in V_m(F) \subseteq \cup V_i(F)$ dir. Böylece $\cup V_j(F)$ kapalı ve özel olarak X ve Y de kapalıdır.

5.3.18. Örnek. Teorem 5.3.17. gereği modüler grup $z \to z+1$ ve $z \to -1/z$ dönüşümleri ile üretilir (Bir sonraki bölümde modüler grup için tanımlanan bağıntılar ayrıca elde edilecektir).

Benzer bir durum kafesler için de söz konusudur. Bir temel paralelkenar ya da altıgen bölgenin karşılıklı kenarları birbirine denktir ve onları eşleyen dönüşümler kafesin üreteçleridir. Karşılıklı kenar çiftlerinin her biri özdeşlenerek bölüm uzayı oluşturulur. Şimdi bir Dirichlet bölgesinin denk kenarlarını özdeşleyerek $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayının nasıl elde edildiği gösterilecektir.

5.4. $\boldsymbol{U}/\Gamma$ Bölüm Uzayı

Bu kısımda $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayı oluşturulacaktır. z nin Γ yörüngesi $[z]_\Gamma$ ya da sadece $[z]$ ile gösterilir ve $\Pi : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}/\Gamma$ olmak üzere $\Pi(z) = [z]$ olarak tanımlanan dönüşüm bir bölüm dönüşümüdür. Eğer $\Pi^{-1}(V) = \{z \in \boldsymbol{U} \mid \Pi(z) \in V\}$ kümesi $\boldsymbol{U}$ da açık bir küme ise $V \subseteq \boldsymbol{U}/\Gamma$ kümesine *açık küme* denir. Bu tanımla birlikte Π sürekli ve açık bir dönüşümdür.

5.4.1. Teorem. $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bağlantılı bir Riemann yüzeyidir ve $\Pi : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}/\Gamma$ dönüşümü holomorfik (analitik) bir dönüşümdür (Jones ve Singerman 1987).

Böylece Fuchs gruplarının bölüm uzayları Riemann yüzeyleridir. Küre, düzlem veya tora homeomorf olmayan bir X Riemann yüzeyinin genel örtü uzayı $\boldsymbol{U}$ dur ve Λ, $\boldsymbol{U}$ üzerinde sabit noktasız hareket eden otomorfizmlerin has süreksiz bir grubu olmak üzere (Λ örtü dönüşümlerinin grubu) $X = \boldsymbol{U}/\Lambda$ dır. Böylece Teorem 5.1.5. ten Λ bir Fuchs grubudur ve sabit noktasız hareket ettiğinden eliptik elemanlar bulundurmaz. Eğer Fuchs gruplarına eliptik elemanlar da eklenirse o halde her Riemann yüzeyi bir Fuchs grubu tarafından $\boldsymbol{U}$ nun bölüm uzayı olarak temsil edilebilir. Örneğin bir üçgen grubun bölüm uzayının bir küre olduğu ve küreye homeomorf olan her Riemann yüzeyinin, Riemann küresi Σ ya konform olarak denk olduğu görülecektir. Bu durumda Γ bir üçgen grup olmak üzere Σ, $\boldsymbol{U}/\Gamma$ ya konform olarak denktir. Riemann yüzeyleri ile eliptik eleman bulundurmayan Fuchs gruplarının denklik sınıfları arasında birebir bir eşleşme olduğundan Riemann yüzeylerini temsil etmek için eliptik eleman bulundurmayan Fuchs gruplarını kullanmak daha avantajlıdır.

5.4.2. Teorem. Λ_1 ve Λ_2 eliptik eleman bulundurmayan iki Fuchs grubu olsun. O halde $\boldsymbol{U}/\Lambda_1$ ve $\boldsymbol{U}/\Lambda_2$ nin konform olarak denk olması için gerek ve yeter koşul $T\Lambda_1T^{-1} = \Lambda_2$ olacak şekilde $T \in PSL(2, \boldsymbol{R})$ nin var olmasıdır (Jones ve Singerman 1987).

Keyfi bir Fuchs grubu için bu teorem doğru değildir. Çünkü eğer periyotları farklı iki üçgen grup düşünülürse bunlar izomorf değildir ve dolayısıyla $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de eşlenik değillerdir. Ancak her bir üçgen grubun bölüm uzayı yukarıda belirtildiği gibi Riemann küresidir. Tersi durumda eşlenik Fuchs gruplarının bölüm uzaylarının konform denk Riemann yüzeyleri olması durumu keyfi Fuchs grupları için de geçerlidir.

5.4.3. Teorem. Λ eliptik eleman bulundurmayan bir Fuchs grubu olsun. O halde $N(\Lambda)$, Λ nın $PSL(2, \boldsymbol{R})$ de ki normalleştiricisi olmak üzere $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{U}/\Lambda) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ dır (Jones ve Singerman 1987).

Λ eliptik eleman bulundurmayan ve devirli olmayan bir Fuchs grubu olsun. O halde Γ, Λ yı normal alt grup olarak bulunduran bir Fuchs grubu olmak üzere $\boldsymbol{U}/\Lambda$ nın bütün otomorfizmlerinin grubu Γ/Λ ya izomorftur. Bu sonuçlar kompakt Riemann yüzeylerinin otomorfizm gruplarıyla ilgili bilgiler elde etmek için kullanılacaktır.

F, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. *F* nin kenar çiftleri Γ nın elemanları ile özdeşlenerek $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayı elde edilebilir. Ayrıca *F* nin noktaları sadece Γ nın dönüşümleri altında karşılıklı kenarların özdeşlenmesi ile karşılık gelen noktalar olduğundan kenar çiftleri özdeşlenerek elde edilen uzay F/Γ dır .

5.4.4. Teorem. *F*, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. O halde F/Γ, $\boldsymbol{U}/\Gamma$ ya homeomorftur (Jones ve Singerman 1987).

5.4.5. Teorem. *F*, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. O halde $\boldsymbol{U}/\Gamma$ nın kompakt olması için gerek ve yeter koşul *F* nin ***U*** nun kompakt bir alt kümesi olmasıdır (Jones ve Singerman 1987).

5.4.6. Teorem. Eğer $\boldsymbol{U}/\Gamma$ kompakt ise Γ parabolik elemanlar bulundurmaz (Jones ve Singerman 1987).

Şimdi ***U*** da bir Dirichlet bölgesinin kompakt olmaması durumuna değinilecektir. Öncelikle sonsuz sayıda kenarı olan bir Dirichlet bölgesi kompakt değildir. Diğer taraftan sonlu sayıda kenara sahip olan bir Dirichlet bölgesi de kompakt olmayabilir. Öncelikle bir köşe $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ da olsun. Örneğin, grup parabolik bir *T* elemanına sahipse, o zaman *T* dönüşümünün sabit noktası olan *x* noktasında bir köşe noktası olan bir Dirichlet bölgesi vardır ve ayrıca bitiş noktası *x* olan iki kenar *T* dönüşümü tarafından eşleştirilir. Bu bölgede *parabolik köşe* olarak isimlendirilen bir köşe vardır ve bölüm uzayında bu parabolik köşeye karşılık gelen noktada bir *delik* vardır. Örneğin modüler grup için $z\rightarrow z+1$ parabolik dönüşümünün ∞ da bir sabit noktası vardır ve Şekil 5.4. te gösterilen Dirichlet bölgesinin karşılıklı iki kenarı bu eleman tarafından eşleştirilir. O halde bölüm uzayı bir deliği olan bir küredir ve dolayısıyla düzleme homeomorftur. İkinci olarak Dirichlet bölgesi reel eksenin bir bölümü tarafından sınırlandırılmış olabilir. Örneğin $z \to z+1$ parabolik devirli grubu tarafından üretilen *i* merkezli Dirichlet bölgesi $\{z \in \boldsymbol{U} \mid \frac{-1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\}$ dir. Bu bölge reel eksenin $\{x \in \boldsymbol{U} \mid \frac{-1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ bölümü ile sınırlıdır. Ayrıca bu Dirichlet bölgesi ∞ da bir köşeye sahiptir. Bölüm uzayı ise bir delik (∞ a karşılık gelen) ve bir kapalı disk (reel eksenin bir bölümüne karşılık gelen) çıkartılmış bir küredir. Bu ise bir silindire homeomorftur. Çıkarılan disk topolojiktir fakat bir deliğe konform olarak denk değildir.

5.5. Bir Temel Bölgenin Hiperbolik Alanı

5.5.1. Teorem. F_1 ve F_2, Γ Fuchs grubu için iki temel bölge olsun ve F_1 ve F_2 nin sınırlarının hiperbolik alanının sıfır olduğu varsayılsın. O halde $\mu(F_1) = \mu(F_2)$ dir (Jones ve Singerman 1987).

Bu teorem bir temel bölgenin hiperbolik alanının grubun sayısal bir değişmezi olduğunu göstermesi bakımından önemlidir. Sınırın sıfır hiperbolik alana sahip olması durumu daima geçerli olacaktır. Örneğin bir Dirichlet bölgesinin sınırları sayılabilir çoklukta H-doğruların birleşimi olduğundan sınırların hiperbolik alanı sıfırdır. Bir temel bölgenin hiperbolik alanı sonsuz olabilir. Örneğin $z \to z+1$ dönüşümü ile üretilen parabolik devirli grup için Dirichlet bölgesinin hiperbolik alanı önceki bölümün son kısmında belirtildiği üzere sonsuzdur. Teorem bir temel bölgenin sonsuz hiperbolik alana sahip olması durumunda grubun tüm temel bölgelerinde de hiperbolik alanın sonsuz olduğunu ifade eder (sınırların hiperbolik alanının hala sıfır olduğu kabul edilerek). Kompakt bir temel bölgenin (aslında $\boldsymbol{U}$ nun her kompakt alt kümesinin) hiperbolik alanı sonludur. Ancak kompakt olmayan bir temel bölgenin hiperbolik alanı da sonlu olabilir. Örneğin Şekil 5.4. te gösterilen modüler grup için Dirichlet bölgesi açıları, $\pi/3$, $\pi/3$ ve 0 olan bir hiperbolik üçgendir ve böylece Gauss-Bonet formülünden hiperbolik alan $\pi/3$ tür. Gauss-Bonet teoremi temel bölgelerin büyük bir kısmında hiperbolik alanın hesaplanmasında kullanılmaktadır. Bunun uygulanması için ise köşelerdeki açılar bilinmelidir.

5.5.2. Teorem. F, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. θ_1, θ_2, …, θ_t F nin köşelerinin bir denklik sınıfındaki iç açılar ve m de bu köşelerden birinin Γ da ki sabitleştiricisinin mertebesi ise

$$\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_t = 2\pi / m$$

dir (Jones ve Singerman 1987).

Uyarılar. *i*) F yerel olarak sonlu olduğu için köşelerin bir denklik sınıfında sadece sonlu sayıda köşe vardır.

ii) Bir denklik sınıfının iki noktasının sabitleştiricileri Γ nın eşlenik alt grupları olduğundan aynı mertebeye sahiplerdir.

$\boldsymbol{U}/\Gamma$ kompakt olmak üzere Γ bir Fuchs grubu olsun. Teorem 5.4.5. ten Γ için F Dirichlet bölgesi kompakttır ve dolayısıyla sonlu sayıda kenara sahiptir. Diğer taraftan F nin sadece sonlu sayıda köşesi olduğundan sadece sonlu sayıda eliptik devri vardır. Teorem 5.3.13. ten Γ sonlu sayıda periyoda sahiptir. Bu periyotlara m_1, m_2, …, m_r ve $\boldsymbol{U}/\Gamma$ nın cinsine g denirse Γ nın *simgesi* (g; m_1, m_2, …, m_r) ile gösterilir.

5.5.3. Teorem. Γ nın *simgesi* (g; m_1, m_2, …, m_r) olsun. Eğer F, Γ için sınırlarının hiperbolik alanı sıfır olan bir temel bölge ise

$$\mu(F) = 2\pi \left\{ (2g-2) + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right\}$$

dir (Jones ve Singerman 1987).

5.5.4. Teorem. Eğer $g \geq 0, m_i \geq 2$ olan tamsayılar ve

$$2g-2+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)>0$$

ise o halde simgesi (g; m_1, m_2, …, m_r) olan bir Fuchs grubu vardır (Jones ve Singerman 1987).

Bir Fuchs grubunun simgesi onun cebirsel yapısını belirler. Simgesi (g; m_1, m_2, …, m_r) olan grubun temsili

$$\left\langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g, X_1, ..., X_r \,\middle|\, X_1^{m_1} = ... = X_r^{m_r} = X_1 X_2 ... X_r A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} ... A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = I \right\rangle$$

dir. Burada X_i ler eliptiktir ve A_k, B_k hiperboliktir. Eğer

$$2g-2+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\leq 0$$

ise o halde simgesi (g; m_1, m_2, …, m_r) olan bir Fuchs grubu yoktur (Basit bir aritmetik hesaplama ile bu tür simgelerden sadece sonlu sayıda vardır). Örneğin simgesi (1; —) olan bir Fuchs grubu yoktur. Bu ise cinsi 1 olan kompakt bir Riemann yüzeyinin eliptik elemanları olmayan bir Fuchs grubu tarafından temsil edilemediğinin alternatif bir ispatını verir. Diğer taraftan

$$(2g-2)+\sum_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{m_i}\right)=0$$

ise bu simgeye karşılık gelen $\boldsymbol{C}$ üzerinde hareket eden Öklid eşmetrilerinin bir grubu vardır. Örneğin bir kafese karşılık gelen simge (1; —) dir. $1/l + 1/m + 1/n = 1$ olmak üzere açıları π / l, π / m, π / n olan üçgenlerden elde edilen üçgen grupların simgeleri (0; 2, 4, 4), (0; 2, 3, 6), (0; 3, 3, 3) tür.

5.5.5. Teorem. $\boldsymbol{U}/\Gamma$ kompakt olmak üzere F, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi olsun. O halde $\mu(F) \geq \pi / 21$ dir. Eğer $\mu(F) = \pi / 21$ ise o halde Γ simgesi (0; 2, 3, 7) olan bir üçgen gruptur (Jones ve Singerman 1987).

Kolaylık için genelde $\boldsymbol{U}/\Gamma$ nın kompakt olduğu Γ gruplarıyla uğraşılır. Yani grubun parabolik elemanlara sahip olmadığı düşünülür. Γ için F Dirichlet bölgesi sonlu hiperbolik alana sahipse o halde F sonlu sayıda kenara sahiptir ve Teorem 5.

3.17. den sonlu üreteçlidir. Γ nın mertebeleri $m_1, m_2, \ldots, m_r$ olan eliptik devirli alt gruplarının r tane denklik sınıfı, parabolik devirli alt gruplarının s tane denklik sınıfı ve Γ nın cinsinin de g olduğu varsayılsın. O halde Γ nın simgesi

$$(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; s)$$

dir. Teorem 5.5.3. e benzer bir şekilde

$$\mu(F) = 2\pi\left\{(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + s\right\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca Teorem 5.5.5. ten $s > 0$ ise $\mu(F) \geq \pi/3$ tür. Simgesi (0; 2, 3; 1) olan modüler grup için bu minimum değere ulaşılmıştır. Bu nedenle Teorem 5.5.5. te $\boldsymbol{U}/\Gamma$ nın kompakt olması gerektiği yönündeki hipotez gerekli değildir. Eğer $\mu(F) > 0$ ise simgesi $(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; s)$ olan bir Γ grubunun vardır. Simgesi bu şekilde olan bir grubun temsili ise

$$\left\langle A_1, B_1, \ldots, A_g, B_g, X_1, \ldots, X_r, P_1, \ldots P_s \,\middle|\, X_1^{m_1} = \ldots = X_r^{m_r} = P_1 \ldots P_s X_1 X_2 \ldots X_r A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = I \right\rangle$$

şeklindedir.

5.5.6. Teorem. Γ Fuchs grubu ve Λ indeksi n olan bir alt grubu olsun. Eğer

$$\Gamma = \Lambda T_1 \cup \Lambda T_2 \cup \ldots \cup \Lambda T_n$$

Γ grubunun Λ-kosetlerinin bir ayrışımı ise ve eğer F, Γ Fuchs grubu için bir Dirichlet bölgesi ise o halde

i) $F_1 = T_1(F) \cup T_2(F) \cup \ldots \cup T_n(F)$, Λ için bir temel bölgedir.

ii) $\mu(F)$ hiperbolik alanı sonlu ve F nin sınırlarının hiperbolik alanı sıfır ise o halde $\mu(F_1)/\mu(F) = n$ dir (Jones ve Singerman 1987).

5.6. Kompakt Riemann Yüzeylerinin Otomorfizmleri

Cinsi 0 olan tek Riemann yüzeyi olan Riemann küresinin ve cinsi 1 olan Riemann yüzeylerinin otomorfizmlerinin grubu sonsuzdur. Cinsi $g \geq 2$ olan kompakt Riemann yüzeylerinin ise otomorfizmlerinin grubu sonludur.

5.6.1. Teorem. *S*, cinsi $g \geq 2$ olan kompakt bir Riemann yüzeyi olsun. O halde $|AutS| \leq 84(g-1)$ dir (Jones ve Singerman 1987).

Cinsi $g \geq 2$ olan kompakt bir Riemann yüzeyinin otomorfizmlerinin grubunun sonluluğu ilk kez Schwarz tarafından 1878 de ispatlanmıştır. Teoremde verilen sınır ise 1893 de Hurwitz tarafından ispatlanmıştır.

Şimdi verilen teoremin sınırları ne zaman incelenir sorusunun cevabı araştırılacaktır. Cinsi $g \geq 2$ olan kompakt bir Riemann yüzeyinin otomorfizmlerinin grubunun eleman sayısı $84(g – 1)$ ise bu gruba bir *Hurwitz grubu* denir.

5.6.2. Teorem. *H* sonlu bir grup olsun. *H* nin bir Hurwitz grubu olması için gerek ve yeter şart *x* ve *y*, *H* nin aşikar olmayan iki üreteci olmak üzere

$$x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1$$

bağıntılarının sağlanmasıdır (Jones ve Singerman 1987).

5.6.3. Teorem. *H* bir Hurwitz grubu ve H_1, *H* nin aşikar olmayan homomorfik bir görüntüsü olsun. O halde H_1 bir Hurwitz grubudur (Jones ve Singerman 1987).

5.6.4. Sonuç. Bir Hurwitz grubu en küçük mertebeli bir basit gruptur (Jones ve Singerman 1987).

5.6.5. Teorem. *i*) Mertebesi 84 olan bir Hurwitz grubu yoktur.
ii) Z_7, 7 elemanlı cismi göstermek üzere $PSL(2, Z_7)$, mertebesi 168 olan bir Hurwitz grubudur (Jones ve Singerman 1987).

Sonuç ve teorem $PSL(2, Z_7)$ nin basit bir grup olması gerektiğini gösterir. Bu durum eleman sayısı üçten daha fazla olan bir *F* cismi için $PSL(2, F)$ nin basit bir grup olduğunu ifade eden teoremin özel bir örneğidir. Dolayısıyla Hurwitz sınırı $g = 2$ için elde edilemez fakat $g = 3$ için elde edilebilir. Böylece bu sınırın sonsuz tane *g* değeri için elde edilebildiği ve sonsuz tane *g* değeri için de elde edilemediği gösterilebilir. Hurwitz sınırını kesin sağlayan g değerleri bilinmektedir. İlk dört değer g =3, 7, 14, 17 dir.

6. MODÜLER GRUP

Γ ile gösterilen modüler grup bütün Fuchs grupları içinde en çok çalışılan gruptur. Modüler grubun $\boldsymbol{U}$ üzerindeki etkisi ve modüler fonksiyonlarla yani Γ altında değişmez kalan meromorf (aykırılıkları sadece kutup noktası şekilnde olan fonksiyonlar) fonksiyonlarla olan ilişkisi hakkında birçok kitap yazılmıştır. Modüler grubun önemi, matematiğin birçok dalı ile (özellikle de sayılar teorisi ile) olan yakın ilişkisinden gelmektedir. Bu gruba olan ilgi, özellikle Gauss'un $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ olmak üzere $ax^2 + bxy + cy^2$ kuadratik formlarının sayısal özelliklerini incelerken bu gruba ihtiyaç duymasıyla ortaya çıkmıştır. Bu kısımda özel bir Fuchs grubu olan modüler grup ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

6.1. Kafesler, Torlar ve Modüller

Ω ve Ω', $\boldsymbol{C}$ de iki kafes olsun. Hatırlanacağı gibi $\boldsymbol{C}/\Omega$ ve $\boldsymbol{C}/\Omega'$ bölüm uzayları birer tordur ve bu torların konform olarak denk olması için gerek ve yeter koşul Ω ve Ω' kafeslerinin benzer olmalarıdır, yani belli bir $\mu \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ için $\Omega' = \mu\Omega$ olmasıdır. Eğer $\{\omega_1, \omega_2\}$ ve $\{\omega_1', \omega_2'\}$ sırasıyla, Ω ve Ω' kafesleri için birer baz ise $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ ve $ad - bc = \pm 1$ olmak üzere

$$\omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$$

$$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu ise $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}$ ve $ad - bc = \pm 1$ olmak üzere

$$\omega_1' = \mu(c\omega_2 + d\omega_1)$$

$$\omega_2' = \mu(a\omega_2 + b\omega_1)$$

eşitliklerine denktir.

6.1.1. Tanım. $\{\omega_1, \omega_2\}$, Ω kafesi için bir baz olsun. $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olacak biçimdeki $\tau = \omega_2 / \omega_1$ sayısına $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazının *modülü* denir (Jones ve Singerman 1987).

Herbir Ω kafesi farklı bazlarının modüllerinden oluşan bir modüller kümesi belirtir, üstelik $\mu \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\mu\omega_2 / \mu\omega_1 = \omega_2 / \omega_1$ olduğundan benzer kafesler aynı modüller kümesine sahiptirler. Eğer $\tau = \omega_2 / \omega_1$ ve $\tau' = \omega_2' / \omega_1'$ olarak alınırsa, yukarıdaki eşitlikler dikkate alındığında Ω ve Ω' kafeslerinin benzer olması için gerek ve yeter şart *a, b, c, d* $\in$ ***Z*** ve *ad* – *bc* = ± 1 olmak üzere $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ olmasıdır, sonucu elde edilir. τ ve τ' sayılarının her ikisi de birer modül olduğundan τ , $\tau' \in \boldsymbol{U}$ dur. Eğer *ad* – *bc* = –1 ise $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ Möbiüs dönüşümü

$$PGL(2, \boldsymbol{R}) = \{T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ a, b, c, d \in \boldsymbol{R} \text{ ve } ad - bc = \pm 1\}$$

olmak üzere *PGL*(2, ***R***)\ *PSL*(2, ***R***) kümesinin bir elemanıdır ve üstelik bu dönüşüm üst yarı düzlemi alt yarı düzlem üzerine resmeder. τ , $\tau' \in \boldsymbol{U}$ olduğundan *ad* – *bc* = 1 olmalıdır. Tersine *a, b, c, d* $\in$ ***Z*** ve *ad* – *bc* = 1 ise yukarıdaki eşitliklerden Ω kafesine benzer olan bir Ω' kafesi için bir $\{\omega_1', \omega_2'\}$ bazı elde edilir.

Daha önce görüldüğü üzere, *a, b, c, d* $\in$***Z*** ve *ad* – *bc* = 1 olmak üzere $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ biçimindeki Möbiüs dönüşümleri *PSL*(2, ***R***) grubunun bir ayrık alt grubunu oluştururlar. Bu bölüm boyunca Γ ile gösterilecek olan *PSL*(2, ***Z***) grubuna *modüler grup* denir. Yukarıda elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

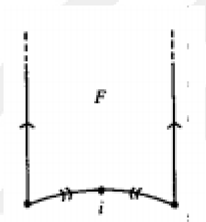
6.1.2. Teorem. $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ve $\Omega' = \Omega(\omega_1', \omega_2')$, ***C*** düzleminde modülleri, sırasıyla $\tau = \omega_2 / \omega_1$ ve $\tau' = \omega_2' / \omega_1'$ olan kafesler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) $\boldsymbol{C} / \Omega$ ve $\boldsymbol{C} / \Omega'$ torları konform olarak denktir,

ii) Ω ve Ω' kafesleri benzerdir,

iii) Belli bir $T \in \Gamma$ için $\tau' = T(\tau)$ dir (Jones ve Singerman 1987).

Cinsi 1 olan her kompakt Riemann yüzeyi belli bir Ω kafesi için $\boldsymbol{C}/\Omega$ toruna konform olarak denktir. Dolayısıyla yukarıdaki teorem, $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayı üzerindeki noktalar ile Riemann yüzeylerinin konform denklik sınıfları arasında bir birebir eşleşme olduğunu gösterir. Bu nedenle $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayı, cinsi 1 olan bir yüzey üzerinde oluşturulan bütün karmaşık yapıların kümesini temsil eden bir grup olarak da düşünülebilir. $\boldsymbol{U}/\Gamma$ bölüm uzayının kendisi de bir Riemann yüzeyidir ve üstelik $F = \{z \in \boldsymbol{U} \mid |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$, Γ grubu için bir Dirichlet bölgesi olmak üzere $\boldsymbol{U}/\Gamma$ ve F/Γ bölüm uzayları homeomorfiktir. Bundan başka, $z \to z+1$ ve $z \to -1/z$ dönüşümleri ile F temel bölgesinin denk kenarları özdeşlenirse F/Γ (ve böylece $\boldsymbol{U}/\Gamma$) bölüm uzayı bir noktası çıkartılmış küre ve dolayısıyla $\boldsymbol{C}$ düzlemine homeomorf bir yüzey olur. $\boldsymbol{U}/\Gamma$ ve $\boldsymbol{C}$ arasında konform denklik, ayrıntılı olarak ele alınacak olan $J:\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C}$ analitik fonksiyonu ile elde edilecektir.



Şekil 6.1. Modüler grup için Dirichlet bölgesi (Jones ve Singerman 1987)

6.2. Kübik Polinomun Diskriminantı

$p(z)$ kökleri farklı olan herhangi bir kübik polinom ise $\sqrt{p(z)}$ fonksiyonunun S Riemann yüzeyinin cinsi 1 dir. Dolayısıyla $S \cong \boldsymbol{C}/\Omega$ olacak biçimde bir Ω kafesi oluşturulabilir, böylece cinsi 1 olan bir yüzey eliptik fonksiyonlar kullanılarak parametrize edilebilir. Bu parametrelendirme yapılırken p polinomunun farklı köklere sahip olup olmadığı oldukça önemlidir. $c_2, c_3 \in \boldsymbol{C}$ olmak üzere $p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$ kübik polinomu için $\wp$ Weierstrass eliptik fonksiyonu $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$ diferensiyel denklemini gerçekler. Bu nedenle yukarıdaki forma sahip olan herhangi kübik polinoma Weierstrass normal formdaki polinom denir. $a, b \in \boldsymbol{C}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $\theta : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$, $\theta(z) = az + b$ dönüşümü uygulanarak herhangi bir kübik polinom bu forma dönüştürülebilir. θ dönüşümü birebir ve örten olduğu için polinomların köklerinin katlılıklarını korur. Bu nedenle, genellik bozulmaksızın, herhangi p polinomu Weierstrass normal formdaki kübik polinomlarla sınırlandırılabilir.

e_1, e_2 ve e_3, $p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3 \, (c_2, c_3 \in \boldsymbol{C})$ polinomunun kökleri ise p polinomunun diskriminantı $\Delta_p = 16(e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2$ şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla polinomun köklerinin farklı olması için gerek ve yeter şartın $\Delta_p \neq 0$ olması gerektiği açıktır.

6.2.1. Teorem. $\Delta_p = c_2^3 - 27c_3^2$ dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. $p(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$ olarak yazılır ve bu polinomun katsayıları $p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$ polinomunun katsayıları ile eşitlenirse

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{c_2}{4}$$

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{c_3}{4}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak köklerin simetrik fonksiyonlarından bazıları

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = (e_1 + e_2 + e_3)^2 - 2(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = \frac{c_2}{2}$$

ve

$$e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2 = (e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1)^2 - 2e_1 e_2 e_3 (e_1 + e_2 + e_3) = \frac{c_2^2}{16}$$

dır. $p(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$ polinomu ve $p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$ polinomunun türevi alınıp $z = e_1$ yazılırsa $4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = p'(e_1) = 12e_1^2 - c_2$ eşitliği elde edilir. Benzer ifadeler $p'(e_2)$ ve $p'(e_3)$ değerleri için de bulunabilir. Böylece

$$\Delta_p = -\frac{1}{4} p'(e_1) p'(e_2) p'(e_3)$$

$$=-\frac{1}{4}\prod_i (12e_i^2 - c_2)$$

$$=-\frac{1}{4}(1728(e_1e_2e_3)^2 - 144c_2({e_1}^2{e_2}^2 + {e_2}^2{e_3}^2 + {e_3}^2{e_1}^2) + 12c_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - c_2^3)$$

$$=-\frac{1}{4}(108c_3^2 - 9c_2^3 + 6c_2^3 - c_2^3)$$

$$=c_2^3 - 27c_3^2$$

olarak bulunur. Dolayısıyla p polinomunun farklı köklere sahip olması için gerek ve yeter şart $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ olmasıdır. Bu sonuç $p(z)=0$ ve $p'(z)=0$ eşitliklerinden z değişkeni yok edilerek verilebilir. Böylece p polinomunun farklı köklere sahip olması için gerek ve yeter şart p ve p' polinomlarının ortak köke sahip olmalarıdır.

6.3. Modüler *J* Fonksiyonu

Daha önce Γ grubunun üst yarı düzlem üzerindeki hareketleri incelenerek kafesler ve torlar hakkında bilgi edinilebileceği belirtilmişti. Bu kısımda oluşturulacak olan $J:\boldsymbol{U}\rightarrow\boldsymbol{C}$ analitik fonksiyonu şu özelliğe sahip bir fonksiyon olacaktır: Belli bir $T\in\Gamma$ için $\tau' = T(\tau)$ olması için gerek ve yeter koşul $J(\tau') = J(\tau)$ olmasıdır. Böylece J fonksiyonu kafeslerin farklı benzerlik sınıfları arasında ve dolayısıyla torların farklı konform denklik sınıfları arasında belirleyicidir.

$$g_2 = g_2(\Omega) = 60\sum_{\omega\in\Omega}{}'\,\omega^{-4}\ ,\ g_3 = g_3(\Omega) = 140\sum_{\omega\in\Omega}{}'\,\omega^{-6} \text{ ve } p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$$

olmak üzere $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$ diferensiyel denklemini gerçekleyen $\wp$ Weierstrass fonksiyonu bir Ω kafesi ile bağlantılıdır. Δ_p, p polinomunun diskriminantı olmak üzere $\Delta(\Omega)$ yazılırsa $\Delta_p = c_2^3 - 27c_3^2$ olduğundan

$$\Delta(\Omega) = g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2$$

eşitliği elde edilir. e_1, e_2 ve e_3 sayılarının hepsinin farklı olması p polinomunun farklı köklere sahip olmasını gerektirir. Böylece $\Delta(\Omega)\neq 0$ ve dolayısıyla $J(\Omega)$ *modüler fonksiyonu*

$$J(\Omega) = \frac{g_2(\Omega)^3}{\Delta(\Omega)} = \frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Benzer $\mu\Omega$ kafesi için $(\mu \neq 0)$

$$g_2(\mu\Omega) = 60\sum_{\omega\in\Omega}{}'(\mu\omega)^{-4} = \mu^{-4}g_2(\Omega)$$

$$g_3(\mu\Omega) = 140\sum_{\omega\in\Omega}{}'(\mu\omega)^{-6} = \mu^{-6}g_3(\Omega)$$

eşitliklerinden $\Delta(\mu\Omega) = \mu^{-12}\Delta(\Omega)$ olur, dolayısıyla her $\mu \in \boldsymbol{C} / \{0\}$ için $J(\mu\Omega) = J(\Omega)$ dir. Böylece benzer kafesler J fonksiyonu altında aynı değerleri belirler, bundan başka tersi de doğrudur.

$\Omega = \Omega(1,\tau)$, modüllerinden birisi τ olan bir kafes olmak üzere g_2, g_3, Δ ve J fonksiyonları $\tau \in \boldsymbol{U}$ sayısının fonksiyonları olarak da düşünülebilir. $\sum_{m,n}{}'$, (0, 0) hariç tüm $(m,n) \in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ için toplamı tanımlamak üzere;

$$g_2(\tau) = 60\sum_{m,n}{}'(m+n\tau)^{-4}$$

$$g_3(\tau) = 140\sum_{m,n}{}'(m+n\tau)^{-6}$$

eşitlikleri kullanılarak $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$ ve dolayısıyla $J(\tau) = \dfrac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$ olduğu sonucu elde edilir. Eğer belli bir $T \in \Gamma$ için $\tau' = T(\tau)$ ise $\Omega = \Omega(1,\tau)$ ve $\Omega' = \Omega(1,\tau')$ kafesleri benzerdir. Bu ise $J(\tau') = J(\tau)$ olduğunu gösterir ve böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

6.3.1. Teorem. Her $\tau \in \boldsymbol{U}$ ve $T \in \Gamma$ için $J(T(\tau)) = J(\tau)$ dur (Jones ve Singerman 1987).

Bu teorem, $J(\tau)$ değerinin Γ modüler grubunun etkisi altında değişmez kaldığını ortaya koymaktadır. $g_2(\tau), g_3(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ fonksiyonları bu özelliğe sahip olmadıkları halde bu özelliğe yakın bir özelliğe sahiptirler. $T:\tau \to \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, Γ grubunun bir elemanı olmak üzere

$$g_2(T(\tau)) = 60\sum_{m,n}{}'(m+n\frac{(a\tau+b)}{(c\tau+d)})^{-4}$$

$$= 60(c\tau+d)^{-4}\sum_{m,n}{}'((md+nb)+(mc+na)\tau)^{-4}$$

$$= 60(c\tau+d)^{-4}\sum_{m,n}{}'(m(c\tau+d)+n(a\tau+b))^{-4}$$

dir. Burada *ad* – *bc* = 1 olmak üzere $(m,n)\to(md+nb, mc+na)$ dönüşümleri $(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z})\setminus\{(0,0)\}$ indeks kümesinin elemanlarını permüte eder. Seriler mutlak yakınsak olduklarından

$$g_2(T(\tau)) = 60(c\tau+d)^{-4}\sum_{m,n}{}'(m+n\tau)^{-4}$$

$$= (c\tau+d)^{-4}g_2(\tau)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g_3(T(\tau)) = (c\tau+d)^{-6}g_3(\tau)$$

ve böylece

$$\Delta(T(\tau)) = (c\tau+d)^{-12}\Delta(\tau)$$

olur. Özel olarak $a=b=d=1$ ve $c=0$ alınırsa $T(\tau)=\tau+1$ dönüşümü elde edilir. Böylece $g_2(\tau), g_3(\tau), \Delta(\tau)$ ve $J(\tau)$ fonksiyonları $\boldsymbol{Z}$ ye göre birer periyodik fonksiyon olur.

a, *b*, *c*, *d* ∈ $\boldsymbol{Z}$ ve *ad* – *bc* = –1 olmak üzere yön değiştiren $T(\tau)=\dfrac{a\overline{\tau}+b}{c\overline{\tau}+d}$ biçimindeki dönüşümler için yukarıdakilere benzer hesaplamalar yapılırsa

$$g_2(T(\tau)) = (c\overline{\tau}+d)^{-4}\overline{g_2(\tau)},$$

$$g_3(T(\tau)) = (c\overline{\tau}+d)^{-6}\overline{g_3(\tau)},$$

$$\Delta(T(\tau)) = (c\overline{\tau}+d)^{-12}\overline{\Delta(\tau)},$$

$$J(T(\tau)) = \overline{J(\tau)}$$

eşitlikleri elde edilir. Bundan başka g_2, g_3, Δ ve $J:\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{C}$ fonksiyonları $\boldsymbol{U}$ üzerinde birer analitik fonksiyondurlar.

6.4. $\sqrt{p(z)}$ Fonksiyonunun Riemann Yüzeyi

Bu bölümde, $p(z)$, $\boldsymbol{C}[z]$ cisminde farklı köklere sahip bir kübik polinom olmak üzere $\sqrt{p(z)}$ fonksiyonunun Riemann yüzeyinin $\boldsymbol{C}/\Omega$ toruna konform olacak biçimde bir Ω kafesinin olduğu sonucu elde edilecektir. Bunun için J fonksiyonunun üst yarı düzlemi $\boldsymbol{C}$ üzerine resmettiğini göstermek yeterlidir. Bunun için bazı ön hazırlıkların yapılması gereklidir.

6.4.1. Lemma. *i*) Eğer $2\operatorname{Re}(\tau)\in\boldsymbol{Z}$ ise $g_2(\tau), g_3(\tau), \Delta(\tau)$, $J(\tau)\in\boldsymbol{R}$ dir,

ii) Eğer $|\tau|=1$ ise $g_2(\tau)=\tau^4\overline{g_2(\tau)}, g_3(\tau)=\tau^6\overline{g_3(\tau)}, \Delta(\tau)=\tau^{12}\overline{\Delta(\tau)}$ dir (Jones ve Singerman 1987).

İspat. *i*) Eğer $2\operatorname{Re}(\tau)=n\in\boldsymbol{Z}$ ise $a=-1$, $b=n$, $c=0$, $d=1$ olmak üzere $T:\tau\to n-\overline{\tau}$ yansıma dönüşümü τ sayısını sabit bırakır. Dolayısıyla $c=0$, $d=1$ olduğundan

$$g_2(\tau)=g_2(T(\tau))=(c\overline{\tau}+d)^{-4}\overline{g_2(\tau)}=\overline{g_2(\tau)},$$

yani $g_2(\tau)\in\boldsymbol{R}$ dir. Benzer şekilde $g_3(\tau), \Delta(\tau)$, $J(\tau)\in\boldsymbol{R}$ olduğu da görülebilir.

ii) Eğer $|\tau|=1$ ise $a=d=0$, $b=c=1$ alınırsa $T:\tau\to 1/\overline{\tau}$ dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm τ sayısını sabit bırakan birim çembere göre inversiyon dönüşümüdür ve bu durumda $|\tau|=1$ olduğundan

$$g_2(\tau)=g_2(1/\overline{\tau})=(\overline{\tau})^{-4}\overline{g_2(\tau)}=\tau^4\overline{g_2(\tau)}$$

olur. Diğer üç eşitlik de benzer şekilde elde edilir.

Hatırlanacağı gibi $F=\{z\in\boldsymbol{U}\mid |z|\geq 1,\ |\operatorname{Re}(z)|\leq\frac{1}{2}\}$ kümesi modüler grup için bir temel bölgedir, dolayısıyla fonksiyonların üst yarı düzlem üzerindeki özellikleri temel bölge üzerindeki özellikleri dikkate alınarak elde edilebilir. Buna göre,

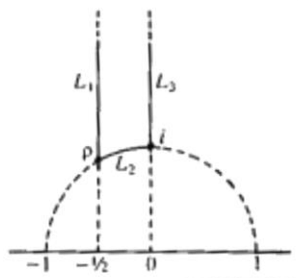
1. τ imajiner eksen üzerinde veya F kümesinin sınırı olan ∂F üzerinde ise $J(\tau)$ reeldir.

2. $\rho = e^{2\pi i/3}$ olmak üzere $g_2(\rho) = g_3(i) = J(\rho) = 0$ ve $J(i) = 1$ dir. Gerçektende g_2 ve g_3 fonksiyonları i ve ρ noktalarında reel değerler aldığından $g_2(\rho) = \overline{\rho g_2(\rho)}$ $= \overline{\rho} g_2(\rho)$ ve $g_3(i) = -\overline{g_3(i)} = g_3(i)$ eşitlikleri $g_2(\rho) = g_3(i) = 0$ olduğunu ve dolayısıyla $J(\rho) = 0$ ve $J(i) = 1$ olduğu sonucunu verir.

3. $L_1 = \{\tau \in \boldsymbol{U} \mid |\tau| \geq 1 \,\text{ve}\, \text{Re}(\tau) = -\frac{1}{2}\}$, $L_2 = \{\tau \in \boldsymbol{U} \mid |\tau| = 1 \,\text{ve}\, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(\tau) \leq 0\}$ ve

$$L_3 = \{\tau \in \boldsymbol{U} \mid |\tau| \geq 1 \text{ ve } \text{Re}(\tau) = 0\}$$

olmak üzere $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ olsun. Bu durumda τ imajiner eksen üzerinde veya F kümesinin sınırı olan ∂F üzerinde ise $J(\tau)$ reel olduğundan $J(L) \subseteq \boldsymbol{R}$ olduğu açıktır, bundan başka $J(L) = \boldsymbol{R}$ dir.



Şekil 6.2. Modüler grubun temel bölgesinin sınırları (Jones ve Singerman 1987)

4. Her $\tau \in \boldsymbol{U}$ ve $T \in \Gamma$ için $J(T(\tau)) = J(\tau)$ olduğundan J fonksiyonu Γ grubunun $\boldsymbol{U}$ da ki her bir yörüngesi üzerinde sabittir. O halde aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

6.4.2. Teorem. Her $c \in \boldsymbol{C}$ için Γ grubunun, J fonksiyonunun c değerini aldığı $\boldsymbol{U}$ da tam olarak bir yörüngesi vardır (Jones ve Singerman 1987).

Bu teorem, daha önce ele elde edilen sonuçlar ile birleştirilirse, Ω ve Ω' kafesleri $\tau, \tau' \in \boldsymbol{U}$ modüllerine sahip kafesler olmak üzere "$\boldsymbol{C}/\Omega$ ve $\boldsymbol{C}/\Omega'$ torlarının konform denk olması için gerek ve yeter koşul $J(\tau) = J(\tau')$ olmasıdır" sonucu elde edilir.

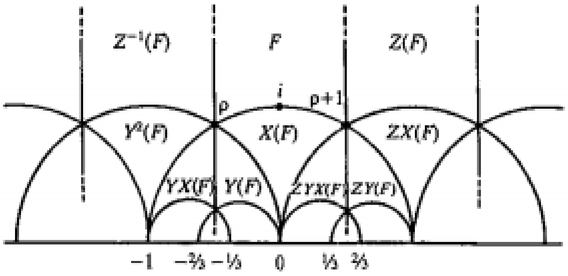
Teorem 6.4.2. den *J*, $\boldsymbol{U}/\Gamma \to \boldsymbol{C}$ ye bir homeomorfizm indirger. Bu ise 6.1. in sonunda iddia edilen cinsi 1 olan $\boldsymbol{R}_1$ Riemann yüzeyinin **C** düzlemine homeomorf olduğu iddiasını doğrular ve bu iki yüzeyin konform olarak denk olduğunu göstermek zor değildir.

Sonuç olarak $c_2, c_3 \in \boldsymbol{C}$ sayıları $c_2^{\,3} - 27c_3^{\,2} \neq 0$ özelliğindeki sayılar ise *k* = 2, 3 için $g_k(\Omega) = c_k$ olan bir $\Omega \subset \boldsymbol{C}$ kafesi vardır. *p*(*z*) polinomu $\boldsymbol{C}[z]$ cisminde farklı köklere sahip polinom ise $\sqrt{p(z)}$ fonksiyonunun Riemann yüzeyi *S* belli bir Ω kafesi için $\boldsymbol{C}/\Omega$ toruna konform denktir. Gerçektende $a, b \in \boldsymbol{C}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $\theta : z \to az + b$ dönüşümleri **C** nin otomorfizmleridir ve dolayısıyla *S* yüzeyinin karmaşık yapısını değiştirmezler. Böylece *p*(*z*) kübik polinomu $p(z) = 4z^3 - c_2 z - c_3$ biçiminde alınabilir. *p*(*z*) polinomu farklı köklere sahip olduğundan $c_2^{\,3} - 27c_3^{\,2} \neq 0$ dır, dolayısıyla *k* = 2, 3 için $g_k(\Omega) = c_k$ olacak şekilde elde edilen Ω kafesi aranan kafestir.

F temel bölgesinin Γ altındaki resimlerinden hangilerinin *F* ye bitişik olduklarını belirlemek gerekir.

$$X : \tau \to -1/\tau$$
$$Y : \tau \to -1/(\tau + 1)$$
$$Z : \tau \to \tau + 1$$

elemanları düşünüldüğünde *X* ve *Y* eliptiktir ve sırasıyla *i* ve $\rho = e^{2\pi i/3}$ noktalarını sabit tutarlar. *Z* ise paraboliktir ve ∞ u sabit tutar. Bu dönüşümler $X^2 = Y^3 = 1$ ve $XY = Z$ eşitliklerini gerçeklerler. *F* ye bu dönüşümler ard arda uygulanarak üst yarı düzlemin Şekil 6.3. te gösterilen kısmi bir döşemesi elde edilmiş olur.



Şekil 6.3. ***U*** nun döşemesi (Jones ve Singerman 1987)

Şekilden görüleceği üzere *Z*(*F*), $Z^{-1}(F)$ ve *X*(*F*), $\mathrm{Re}(\tau)=\frac{1}{2}, \mathrm{Re}(\tau)=-\frac{1}{2}$ ve $|\tau|=1$ kenarlarında karşılaşırlar. ρ ve $\rho+1$ den farklı her bir $\tau \in \partial F$ noktası Γ altında *F* nin tam olarak iki resminde bulunur. ρ ve $\rho+1$ noktalarının çevresinde ise *F* nin 6 görüntüsü vardır.

6.4.3.Teorem. $J:\boldsymbol{U}\rightarrow\boldsymbol{C}$ sonsuz yapraklı bir dallanmış örtü dönüşümüdür, üstelik dallanma noktalarının mertebeleri *i* ve ρ noktalarını bulunduran Γ nın $J^{-1}(1)$ ve $J^{-1}(0)$ yörüngeleri üzerinde 1 ve 2 dir (Jones ve Singerman 1987).

6.5. Γ Grubunun Temsili

Γ grubunun üreteçlerinin

$$X:\tau\rightarrow -1/\tau$$
$$Z:\tau\rightarrow \tau+1$$

oldukları ve bu dönüşümlerin *F* temel bölgesinin kenarlarını denk eşledikleri sonucu daha önce elde edilmiştir.

$$Y=XZ:\tau\rightarrow -1/(\tau+1)$$

olarak alınırsa *X* ve *Y*, Γ grubunun üreteçleridir (*Z* =*XY* olduğundan) ve bu dönüşümler $X^2=Y^3=1$ bağıntılarını gerçeklerler.

Şimdi bunların Γ grubu için bu ilişkileri tanımladığı ve $\Gamma=\left\langle X,Y \middle| X^2=Y^3=1\right\rangle$ ifadesinin Γ grubunun bir temsili olduğu gösterilecektir.

Γ da herhangi bir bağıntı $W(X,Y)=1$ formunda yazılabilir. Burada *W*, *X* ve *Y* yi bulunduran bir kelimedir. Şimdi herhangi bir kelime verildiğinde $W(X,Y)=1$ olup olmadığının nasıl test edileceği gösterilecektir. *W* yı daha basit bir kelime olan ve W' ye eşit olan $W'(X,Y)$ ye indirgemek için $X^2=Y^3=I$ bağıntıları kullanılır ve daha sonra W' nün ***U*** üzerindeki etkisi dikkate alınarak W' nün özdeşlik dönüşümü olup olmadığı kontrol edilir.

$1\le r\le k$ olmak ve her bir g_r, *X* in veya *Y* nin bir kuvveti olmak üzere *W*, $W=g_1g_2...g_k$ şeklinde yazılır ve daha sonra *W* yı basitleştirmek için aşağıdaki iki işlem ardışık olarak uygulanır.

i) Eğer g_r ve g_{r+1} ardışık terimleri aynı *X* ya da *Y* üretecinin kuvvetleri ise *X* veya *Y* nin ardışık iki terimi bir terim haline getirilir.

ii) $X^2=Y^3=1$ bağıntıları kullanarak *X* ve *Y* nin tüm kuvvetleri X^i (i = 0, 1) ve Y^i (i = 0, 1, -1) ye indirgenir ve i = 0 olan herhangi bir kuvvet silinir (özdeşlik elemanı ile temsil edildiğinden).

Eğer *i*) ve *ii*) ardışık olarak *W* ya uygulanırsa sonlu sayıda adımdan sonra aşağıdaki durumlardan birinde işlem son bulur (*W* nın *k* uzunluğu azaldığından).

a) *W* aşikar olmayan indirgenmiş bir kelime olan $W'=h_1h_2...h_l$ ye indirgenir. Bu kelime uzunluğu $l>0$ olan bir kelimedir, her h_r, *X*, *Y* ya da Y^{-1} in kuvvetidir ve h_r, h_{r+1} ardışık terimleri aynı üretecin kuvvetleri değildir.

b) *W* nın tüm terimleri $W'=1$ olacak hale gelene kadar silinerek özdeşlik elemanı üretilir (Boş ya da aşikar indirgenmiş kelimenin uzunluğu 0 olarak düşünülebilir).

Her iki durumda da Γ nın elemanları değiştirilmeden *i*) ve *ii*) adımları uygulanarak $W'=W$ olduğu fark edilir. Örneğin;

$$W=X\cdot Y^{-2}\cdot X\cdot X^3\cdot Y\cdot X\ (k=6)$$

$$W = XY^{-2}X^{4}YX = XYX^{0}YX = XY^{2}X = XY^{-1}X$$

böylece $W' = XY^{-1}X$, Γ nın aynı elemanı için daha basit bir ifadedir.

Eğer Γ da $W = 1$ gerçekleniyorsa $W' = W$ olduğundan $W' = 1$ b) durumundan elde dilir. Böylece W nın indirgenerek $W' = 1$ elde edilmesi $X^2 = Y^3 = 1$den $W(X,Y) = 1$ sonucunun çıkartılmasını sağlar.

6.5.1. Teorem. Eğer $W'(X,Y)$, X ve Y nin herhangi bir aşikar olmayan indirgenmiş kelimesi ise Γ da $W'(X,Y) \neq 1$ dir (Jones ve Singerman 1987).

6.5.2. Sonuç. Γ grubunun temsili $\Gamma = \left\langle X, Y \mid X^2 = Y^3 = 1 \right\rangle$ dir (Jones ve Singerman 1987).

7. SONUÇ

Tezin dördüncü bölümünde $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun tanımı ve özellikleri verilerek bu grubun hiperbolik geometri ile olan ilişkisi üzerinde durulmuş ve hiperbolik uzaklık ve hiperbolik alanı veren formüller çıkarılmıştır.

Tezin beşinci ve altıncı bölümlerinde ise $PSL(2, \boldsymbol{R})$ grubunun ayrık alt grupları olan Fuchs gruplarının özellikleri verilmiş ve çeşitli Fuchs grubu örneklerinden üçgen grup ve modüler grup çalışılmıştır. Son olarak ise modüler grubun özellikleri ve çeşitli bağıntılar kullanılarak modüler grubun temsili elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Anderson, J.W. 2005. Hyperbolic geometry, 2nd edition. Springer-Verlag, London, 276 pp.

Başkan, T. 1980. Ayrık gruplar. Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, 214 s.

Beardon, A.F. 1983. The geometry of discrete groups. Springer-Verlag, New York Inc., 348 pp.

Gezer, B., Bizim, O. 2017. Soyut cebir: Gruplar, halkalar ve Galois teorisine giriş. Dora Yayınları, Bursa, 662 s.

Jones, G.A., Singerman, D. 1987. Complex functions: An algebraic and geometric viewpoint. Cambridge University Press., United Kingdom, 345 pp.

Lehner, J. 1966. A short course in automorphic functions. Holt Inc, New York, 143 pp.

Magnus, W. 1974. NonEuclidean tesellations and their groups, Academic Press., Newyork and London, 207 pp

Sertöz, A.S. Öklid'in elemanları. http://sertoz.bilkent.edu.tr/elemanlar.htm-(Erişim Tarihi:27.03.2018)

Toth, G. 2002. Glimpses of algebra and geometry, 2nd edition. Springer-Verlag, New York Inc, 450 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şerife ÇAKIRTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi : 14.08.1984. Üsküdar
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Üsküdar İmam Hatip Lisesi
Lisans : Marmara Üniversitesi
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Final Temel Lisesi, Özlüce Murat Özel Öğretim Kursu

İletişim (e-posta) : serifep970@gmail.com

Yayınları : Çakırtaş, Ş. 2018. Hiperbolik geometri üzerine. İzmir Matematik Günleri, 26-27 Haziran 2018, Yaşar Üniversitesi, İzmir.