FİBONACCİ SAYILARI VE PASCAL ÜÇGENİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Sümeyye KOCA

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ SAYILARI VE PASCAL ÜÇGENİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Sümeyye KOCA
0000-0003-4216-9341

Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
0000-0002-6439-8439

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Sümeyye KOCA tarafından hazırlanan "FİBONACCİ SAYILARI VE PASCAL ÜÇGENİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
0000-0002-6439-8439

Üye : Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
0000-0002-6439-8439
Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hacer ÖZDEN AYNA
0000-0003-1556-3511
Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Fırat ATEŞ
0000-0002-7334-2410
Balıkesir Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
26/09/2019

B. U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/09/2019

Sümeyye KOCA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FİBONACCİ SAYILARI VE PASCAL ÜÇGENİ ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Sümeyye KOCA

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak Fibonacci sayılarının tarihinden bahsedilmiş ve Fibonacci sayıları ile Altın oran kavramı tanımlanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde Fibonacci sayılarının sağladığı bazı önemli özdeşlikler verilmiş ve bu sayıların kullanıldığı bazı problemler ele alınmıştır. Fibonacci sayılarının ve Altın oranın öneminden bahsedilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Pascal üçgeni ve Binom açılımına ilişkin temel kavramlar verilmiştir. Fibonacci sayılarıyla Pascal üçgeni arasındaki ilişki ortaya koyulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde Pascal üçgenine benzer bir yapıya sahip olan Hosoya üçgeni ve Catalan üçgeni tanımlanmıştır. Ve son olarak Fibonacci sayılarından yola çıkarak belli bir tekrarlama bağıntısına sahip ve yapı olarak Pascal üçgenine benzeyen bir üçgen elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Leonardo Fibonacci, Fibonacci sayıları, Altın oran, Pascal üçgeni, Catalan sayıları

2019, vi + 24 sayfa.

ABSTRACT

Msc Thesis

THE RELATIONS BETWEEN FIBONACCI NUMBERS AND PASCAL'S TRIANGLE

Sümeyye KOCA

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the historical background of Fibonacci numbers and the definitions of both Fibonacci numbers and the Golden ratio are given.

In the second chapter of the thesis, some well known identities that Fibonacci numbers satisfy and the problems that can be solved by using Fibonacci numbers are shown. The importance of Fibonacci numbers and the Golden ratio is mentioned.

In the third chapter of the thesis, the basic statements about Pascal's Triangle and Binomial Expansion are given. After that the relation between Fibonacci numbers and Pascal's Triangle is found.

In the forth chapter of the thesis, Hosoya's triangle and Catalan triangle, which have similar structures as Pascal's triangle are defined. And finally, starting with Fibonacci numbers, it was discovered a Pascal-like triangle which has a recurrence relation of its own.

In the last chapter of the thesis, the result is given.

Key words: Leonardo Fibonacci, Fibonacci numbers, Golden ratio, Pascal's triangle, Catalan numbers.

2019, vi + 24 pages.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Doç. Dr. Musa DEMİRCİ'ye teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu süreçte ve eğitim hayatımın her aşamasında maddi manevi destekleriyle her zaman yanımda olan anneme ve babama sonsuz teşekkür ediyorum. Beni her zaman cesaretlendiren ve bu süreçte de yanımda olan ablama ve kardeşime de içtenlikle teşekkür ediyorum.

Beni, adeta matematiğin sihirli dünyasıyla tanıştıran, bu sürece de bana matematiği ve bilimi sevdiren kişi olması yönüyle dolaylı olarak katkı sağladığını düşündüğüm değerli hocam Altay KADAKAL'a en içten dileklerimle teşekkür ediyorum.

Sümeyye KOCA

26/09/2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
φ	Altın oran

Kısaltmalar	**Açıklama**
F_n	n. Fibonacci sayısı
C_n	n. Catalan sayısı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde ünlü İtalyan matematikçi Pisa'lı Leonardo ya da bilinen ismiyle Leonardo Fibonacci tarafından ortaya konulan, kendine has dizilişi olan, özel bir sayı dizisi ele alınacaktır.

Bu sayılar ilk olarak, Fibonacci'nin 1202 yılında kaleme aldığı "Liber Abaci" (Abaküs Kitabı) adlı kitabın 1228 yılındaki ikinci baskısında yer alan ünlü tavşan probleminde yer almıştır. Temel olarak bu problem: "Bir çift tavşan ile başlanmak üzere, her ay yeni bir çift tavşan dünyaya gelir, yeni doğan çift bir ayda yetişkin hale gelerek ikinci ayda yeni bir çift tavşan dünyaya getirir, bu döngü 1 yıl boyunca devam eder ve bu süreçte hiç tavşan ölmezse yıl sonunda kaç çift tavşana sahip olunur?" şeklinde bir problemdir. Problemdeki veriler dikkate alındığında aylara bağlı olarak tavşan çifti sayısı aşağıdaki sayı dizisini oluşturur. Dolayısıyla Ocak-Aralık ayları dönemindeki tavşan çiftlerinin sayısı;

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

şeklindedir. Bu dizilişe dikkatli bakıldığında, ilk iki terimden sonraki her bir terimin, kendisinden önceki ardışık iki terimin toplamı olduğu görülür. Aslında verilen sayı dizisi istenildiği kadar genişletilebilir ve bu dizinin n. terimini F_n olarak yazarak sonsuz bir sayı dizisi tanımlanabilir.

Tanım 1.1 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$ şeklindeki F_n dizisi için

$$F_1 = F_2 = 1$$

ve $n \geq 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.1}$$

başlangıç koşulları sağlanıyorsa F_n dizisine "Fibonacci dizisi" denir (Koshy 2001) .

Diğer yandan Fibonacci sayılarının oranları da matematikte oldukça önemli bir yere sahiptir. Şöyle ki; her bir Fibonacci sayısı kendisinden bir önce gelen Fibonacci sayısına bölünerek elde edilen oranlar hesaplandığında, bu sayıların giderek 1,618033988749895… sayısına yaklaştığı görülür. Bu sayı ondalık açılımı hiç tekrarlanmadan sonsuza kadar süren bir irrasyonel sayıdır.

Tanım 1.2 F_n, n. Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$$

şeklinde elde edilen φ sayısına "altın oran" denir (Koshy 2001) .

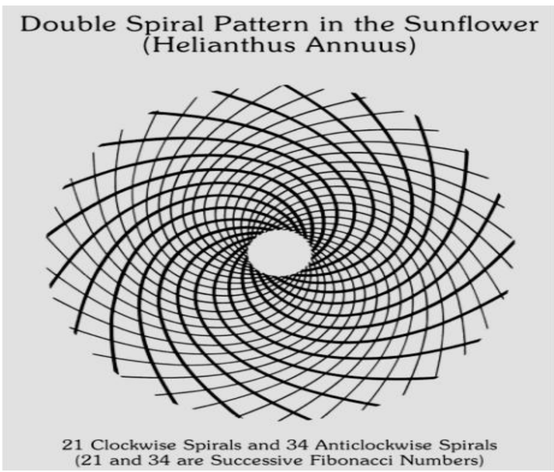
Fibonacci sayıları, üç farklı nedenle yüzyıllardır insanoğlunun ve özellikle de bilim insanlarının ilgi odağı olmuştur. Birincisi, dizinin başlangıç terimlerinden birkaçının doğada beklenmedik yerlerde tekrar tekrar görülebilmesidir. İkinci neden, oranların limit değeri olan 1,618033988749895… sayısının çok önemli ve bilinen bir sayı olmasıdır. Üçüncüsü ise bu sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde ilginç kullanım alanlarının bulunmasıdır (Lines 1990) .

2. FİBONACCİ SAYILARI VE ALTIN ORAN

2.1 Doğada Fibonacci Sayıları

Doğada Fibonacci sayılarıyla ne şekilde karşılaşıldığına bakılacak olursa bazı bitki ve ağaç türlerinin incelenmesi gerekir. Eğer ağacın yapraklarından biri başlangıç noktası olarak alınırsa ve buradan başlayarak, başlangıç noktasının tam olarak altında veya üstünde olan bir yaprak bulunana kadar yapraklar sayılırsa (sap çevresinde birden fazla dönmeye gerek olabilir) bulunan yaprak sayısı farklı bitkiler ve ağaçlar için farklıdır ancak her zaman bir Fibonacci sayısıdır. Dahası, yaprak sayma işlemi sırasında süreç kendini tekrarlamadan önce yapılan tam devir sayısı da bir Fibonacci sayısıdır.
Örneğin bir kayın ağacının üzerindeki bir tam devir için üç yaprak gerekir. Bununla birlikte püsküllü söğüt ağacına beş devir için on üç yaprak gerekir.

Genel olarak, Fibonacci sayıları için bitki bilimi botanik tam bir altın madeni gibidir. Papatyaların normal olarak bir Fibonacci sayısı kadar taç yaprağı vardır. Doğadaki Fibonacci sayıları ile ilgili bilinen en ünlü örneklerden biri de ayçiçekleriyle ilgili olan durumdur. Ayçiçeğinin çiçek kısmında, baklava biçimindeki ufak bölmelerde tohumlar vardır. Bu bölümlerin sınırları merkezden başlayıp çiçeğin dış kenarına giden sarmal eğriler şeklindedir. Eğer böyle bir modelde, saat yönünde olan ve saat yönünde olmayan sarmallar sayılırsa Fibonacci dizisinde art arda gelen sayılarla karşılaşılır (Lines 1990) .



Şekil 2.1. Ayçiçeğinde saat yönünde ve saat yönünün tersi yönde olan sarmallar (Anonim 2015)

Birçok çiçeğin tohum başı, bir kıvırcığın yaprakları, bir soğanın katmanları, ananas ve kozalakların kat kat kabukları gibi bitkisel şekillerin birçoğu Fibonacci sarmalları içerirler.

2.2 Altın Oran ve Önemi

Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranları sonucu elde edilen altın oran da yüzyıllardan beri ilgi odağı olmayı başarmıştır. Bu sayıya olan ilgi 2000 yıl öncesinden de geriye uzanır. O zamanlar belki de altın oranın matematiksel temeli bugünkü biçimde bilinmiyordu; ancak eskiden yapılmış birçok mimari eserde oldukça sık kullanılmıştır. Bununla birlikte altın oran geometride de oldukça önemlidir. Öyle ki bir düz doğru parçasını ikiye ayıran noktanın özelliği şu şekildedir: Büyük parçanın küçüğe oranı, bütünün büyük parçaya oranına eşittir.

Küçük bölümü 1, büyük bölümü x olarak alınırsa, yukarıdaki doğru parçası ile ilgili cebirsel ifade;

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $x+1$, doğal olarak doğru parçasının bütününün uzunluğudur. Bu ifadeyi

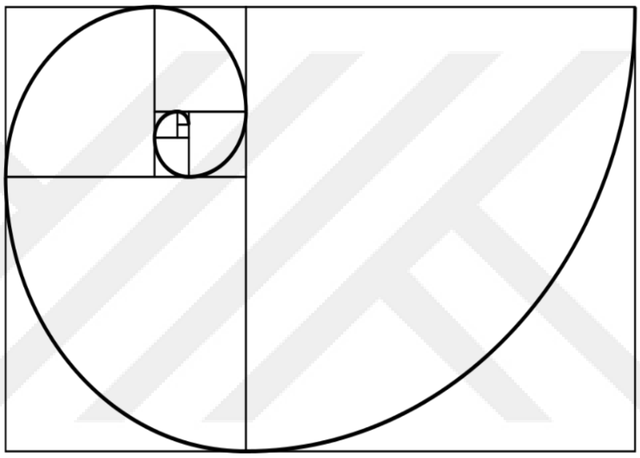
$$x^2 - x - 1 = 0$$

biçimindeki ikinci derece ifadeye dönüştürerek $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ çözümünü elde edilir. İşte bu denklemin pozitif kökü olan $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı altın orandır.

Eski Yunan'da uzun kenarının kısa kenarına olan oranı altın oran kadar olan "altın dikdörtgene" Kutsal Kesit adını vermişlerdir. Sanatçıların ve psikologların tam açıklayamadıkları gizemli bir nedenle daima altın dikdörtgenin estetik bir çekiciliği olmuştur.

Altın dikdörtgen, bir kare ile daha küçük bir dikdörtgene bölünürse, küçük dikdörtgenin de ‘altın’ olduğu görülür. Dahası aynı şekilde devam edilerek küçük dikdörtgen de bir kare ile daha küçük bir dikdörtgene bölünebilir ve bu yeni dikdörtgen de altın dikdörtgendir. Bu durum aynı düşünce ile sürdürülebilir ve giderek küçülen kareler ve altın dikdörtgenler ortaya çıkar.

Bu ardışık şekilde oluşan ve giderek küçülen dikdörtgen ve kareler, köşegenlerinden geçen düzgün bir eğriyle birleştirilirse, genel olarak altın sarmal olarak bilinen bir sarmal elde edilir. Bu düzgün eğri bir sarmal oluşturarak sonuçta bir noktaya yönelir.



Şekil 2.2. Altın dikdörtgenlerin köşegenlerinden geçen eğriyle birleştirilmesi sonucu oluşan sarmal (Anonim 2008)

Bu eğrinin matematiksel adı eşit açılı sarmal veya logaritmik sarmaldır. Logaritmik denmesinin nedeni, onu en basit biçimde ifade eden cebirsel denklemin logaritmalar kullanılarak yazılmasıdır. Bu çok özel sarmal doğada pek çok yerde bulunur. Ayçiçeği sarmalı bu şekildedir. Deniz kabukluları, salyangozlar, boğanın boynuzları, pençeleri ve uzun azı dişleri logaritmik sarmaldan oluşur. Uzayın derinliklerindeki galaksilerin de dışa doğru dönen yıldızlardan oluşmuş dev boyutlu eşit açılı sarmal kolları vardır.

Bu örneklerden de anlaşılacağı gibi altın oran oldukça önemli bir sayıdır ve sahip olduğu özellikler sayesinde matematikçileri olduğu kadar diğer bilim dallarıyla uğraşan kişileri de etkilemeyi başarmıştır (Lines 1990) .

2.3 Fibonacci Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Fibonacci sayıları matematikçiler tarafından yüzyıllardır çalışılan sayılar olup çok sayıda özdeşliği sağladıkları keşfedilmiştir. Bu bölümde temel nitelikte birkaç özdeşlikten bahsedilecektir.

Teorem 2.3.1 Fibonacci sayılarının ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} F_n = F_{n+2} - 1$$

şeklindedir (Lucas 1876) .

İspat. (1.1) her bir adımda kullanılarak

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \end{aligned}$$

yazılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_i &= F_{n+2} - F_2 \\ &= F_{n+2} - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2 F_n n. Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

dir (Lucas 1876) .

İspat. Tümevarım yöntemiyle ispat yapılır. $n = 1$ için $F_1^2 = 1^2 = F_1 \cdot F_2$ olduğu görülür. $n = k$ için doğru olduğu kabul edilsin. Yani

$$\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k \cdot F_{k+1}$$

olsun. $n = k + 1$ için ise doğru olduğu gösterilir. Öyle ki;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki sonuç İtalyan matematikçi Giovanni Cassini tarafından bulunmuştur ve Cassini Formülü olarak bilinir.

Teorem 2.3.3 $n \geq 1$ için

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n \tag{2.1}$$

dir (Cassini 1680) .

İspat. İspat tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır. $n = 1$ için

$$F_0 \cdot F_2 = 0 \cdot 1 = 0 = 1 - 1 = F_1^2 + (-1)^1$$

olup iddia doğrudur. $n = k$ için $F_{k-1} \cdot F_{k+1} = F_k^2 + (-1)^k$ olduğu kabul edilir.

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} - F_{k-1})(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1} \cdot F_k - F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_{k-1} \cdot F_k \\ &= F_{k+1} \cdot F_k - (F_k^2 + (-1)^k) - F_{k-1} \cdot F_k \\ &= F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) - F_k^2 + (-1)^{k+1} \\ &= F_k \cdot F_k - F_k^2 + (-1)^{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

olur ve iddia her $n \geq 1$ için doğrudur.

Fibonacci sayılarının genel dağılımını veren aşağıdaki formül 1843 yılında Fransız matematikçi Binet tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.3.4 α, $x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin bir pozitif kökü, β da negatif kökü olsun. O halde $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir (Binet 1843) .

Teorem 2.3.5 α, $x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin bir pozitif kökü, β da negatif kökü olmak üzere her $n \geq 1$ için $\alpha^n + \beta^n = F_n + 2F_{n-1}$ dir (Koshy 2001) .

İspat. Binet Formülü gereği $\alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}F_n$ dir. Bu ifadede eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa;

$$(\alpha^n - \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n = 5F_n^2$$

olur ve buradan

$$\alpha^{2n} + \beta^{2n} = 5F_n^2 + 2\alpha^n\beta^n \tag{2.2}$$

sonucu elde edilir. Diğer yandan

$$(\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2\alpha^n\beta^n$$

olup (2.2) uygulanırsa

$$\begin{aligned}(\alpha^n + \beta^n)^2 &= 5F_n^2 + 4(-1)^n \\ &= 4(F_n^2 + (-1)^n) + F_n^2\end{aligned}$$

olur. Burada (1.1) ve (2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}&= 4(F_{n-1}F_{n+1}) + (F_{n+1} - F_{n-1})^2 \\ &= (F_{n+1} + F_{n-1})^2 = (F_n + F_{n-1} + F_{n-1})^2 \\ &= (F_n + 2F_{n-1})^2\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\alpha^n + \beta^n = F_n + 2F_{n-1}$$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.3.6 Fibonacci sayıları aralarında asaldır. Yani her n için $(F_{n+1}, F_n) = 1$ dir (Koshy 2001) .

İspat. p, F_n ve F_{n+1} sayılarının ortak asal çarpanı olsun. O halde (2.1) gereği $p| \pm 1$ olduğu sonucuna ulaşılır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Fibonacci sayıları aralarında asaldır.

2.4 Fibonacci Sayılarının ve Altın Oranın Kullanıldığı Bazı Problemler

Teorem 2.4.1 $x^2 + xy - y^2 = \mp 1$ Diophant denkleminin sonsuz çoklukta çözümü vardır (Koshy 2001) .

İspat. (1.2) gereği

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$
$$F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) - F_n^2 = (-1)^n$$
$$F_{n-1}^2 + F_{n-1} \cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

olduğundan $x = F_{n-1}$ ve $y = F_n$ olmak üzere $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ Diophant denkleminin sonsuz çoklukta çözümü olduğu sonucuna ulaşılır.

Fibonacci sayıları, ilk ispatı bundan yaklaşık 2300 yıl önce Euclid tarafından yapılmış olan, günümüze kadar da farklı yöntemler kullanılarak birçok kez ispatlanmış olan asal sayıların sonsuzluğu teoreminin ispatında da kullanılır. Bu teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.4.2 Asal sayıların sayısı sonsuzdur (Koshy 2001) .

İspat. Aksine sonlu sayıda asal sayı olduğu kabul edilsin. Bunlar $p_1, p_2, \dots, p_k$ olsun. $F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_k}$ Fibonacci sayıları dikkate alınsın. Tüm sayıların en az bir asal çarpanı olduğundan bu sayıların da en az bir asal çarpanı vardır. k tane asal sayı var olduğundan bu sayıların her birinin sadece bir tane asal çarpanı olmalıdır. Fakat
$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$ olup iki asal çarpana sahiptir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla sadece sonlu sayıda asal sayı olduğu varsayımı yanlıştır. Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Örnek 2.4.3 $y'' - y' - 1 = 0$ ikinci dereceden diferensiyel denkleminin çözümleri bulunmak istenirse bu denklemin karakteristik polinomu $t^2 - t - 1 = 0$ olduğundan karakteristik kökler α ve β olarak bulunur.

Hatırlanacağı gibi buradaki α sayısı altın oranın yaklaşık değeridir. O halde diferensiyel denklemin genel çözümü A ve B keyfi sabitler olmak üzere $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ dir.

Örnek 2.4.4 f, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $f'(x) = f^{-1}(x), x \geq 0$ şartını sağlayan f fonksiyonunun ne olduğu sorusuna P.Gattei şu cevabı vermiştir:
A sabit bir sayı olmak üzere $f(x) = Ax^n$ olsun. O halde

$$f'(x) = Anx^{n-1}$$

ve

$$f^{-1}(x) = (x/A)^{1/n}$$

olur. İstenen şart gereği

$$Anx^{n-1} = (x/A)^{1/n}$$

alınırsa $A^{n+1}n^n x^{n(n-1)-1} = 1$ olur ve buradan

$$n^2 - n - 1 = 0$$

ve

$$A^{n+1}n^n = 1$$

bulunur. O halde $n = \alpha, \beta$ ve $A = n^{-n/n+1}$ dir. Fakat $n = \beta$ iken f reel fonksiyon olmayacağı için bu özellikteki tek fonksiyon $f(x) = (\alpha x)^\alpha$ dır.

3.PASCAL ÜÇGENİ VE FİBONACCİ SAYILARI

Bu bölümde özellikle ünlü Fransız matematikçi, fizikçi ve düşünür Blaise Pascal (1623 – 1662) tarafından çalışıldıktan sonra onun ismini alan, fakat tarihi binlerce yıl öncesine dayanan Pascal üçgeni incelenecektir. Daha sonra ise bu üçgen yardımıyla Fibonacci sayılarının elde edilebileceği görülecektir. Tüm bunlar için öncelikle bu üçgenin oluşmasını sağlayan temel yapı ortaya koyulmalıdır.

3.1 Binom Açılımı ve Binom Katsayıları

Tanım 3.1.1 a, b reel sayılar, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

açılımına “binom açılımı” denir. Burada $k = 0,1, \ldots, n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

şeklindedir ve bu katsayılara “binom katsayıları” adı verilir. $k > n$ olması durumunda ifade 0’a eşittir (Koshy 2001) .

Teorem 3.1.2 n ve k negatif olmayan tamsayılar ve $k \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dir (Koshy 2001) .

İspat.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

dir.

Aşağıdaki teorem Pascal özdeşliği olarak bilinir ve binom katsayılarının sağladığı önemli bir tekrarlama bağıntısının var olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.3 n ve k pozitif tamsayılar ve $k \leq n$ olsun. O halde

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

dir (Koshy 2001) .

İspat.

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,[k+(n-k)]}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

olur.

3.2 Pascal Üçgeni

Yukarıda verilen özelliklerden yola çıkılarak $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$ binom katsayıları, üçgen oluşturacak şekilde düzenlendiğinde Pascal üçgeni elde edilmiş olur.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Şekil 3.1. Binom katsayıları kullanılarak elde edilmiş olan Pascal üçgeni

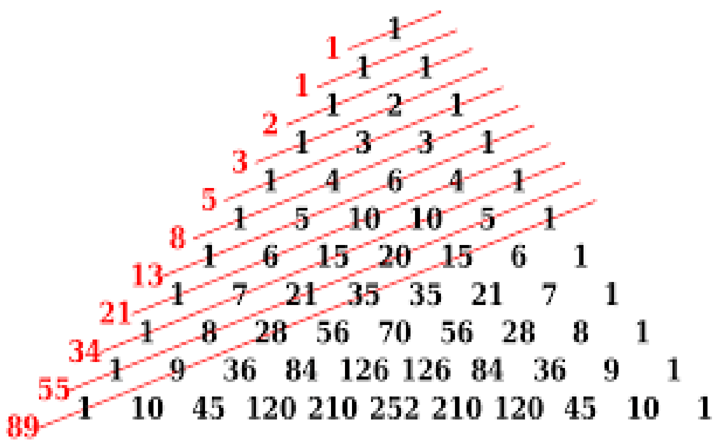
Binom açılımındaki katsayıların, Pascal üçgeninin n. satırındaki sayılara karşılık geldiği açıktır.

Sıradaki teorem Pascal üçgeniyle Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi belirtir.

Teorem 3.2.1 $n \geq 0$ olmak üzere

$$
F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}
$$

dir (Lucas 1876) .



Şekil 3.2. Pascal üçgeninde Fibonacci sayıları (Lee ve ark. 2017)

Dolayısıyla bu teorem, Pascal üçgeninde köşegenlerin üzerindeki sayıların toplamlarının Fibonacci sayılarını verdiğini ifade etmektedir. Örneğin,

$$\sum_{0}^{2}\binom{5-i}{i}=\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}=1+4+3=8$$

Genel olarak aşağıdaki eşitlik gerçeklenir.

Teorem 3.2.2 $n \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_i = F_{2n}$$

dir (Lucas 1876) .

İspat. Binet Formülü gereği,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}\right)$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^i\right]$$

Burada Binom Teoremi gereği;

$$=\left(\frac{(1+\alpha)^n-(1+\beta)^n}{\alpha-\beta}\right)$$

$\alpha^2=\alpha+1$ ve $\beta^2=\beta+1$ olduğu kullanılırsa;

$$=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}$$
$$=F_{2n}$$

Bir başka özellik aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.2.3

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i F_i = (-1)^{n-1}F_n \qquad\qquad n \geq 0$$

İspat. Binet Formülü gereği;

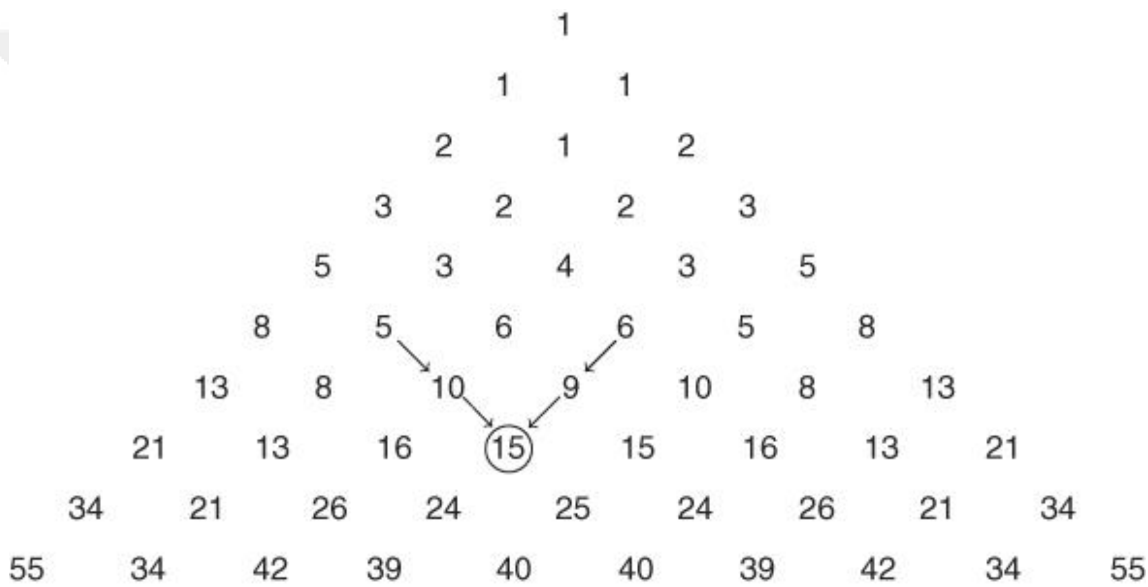
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i F_i &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\left(\frac{\alpha^i-\beta^i}{\alpha-\beta}\right)\\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{0}^{n}\binom{n}{i}(-\alpha)^i - \sum_{0}^{n}\binom{n}{i}(-\beta)^i\right]\\ &= \frac{(1-\alpha)^n-(1-\beta)^n}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{(-\beta)^n-(-\alpha)^n}{\alpha-\beta} = (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\\ &= (-1)^{n-1}F_n\end{aligned}$$

elde edilir.

4. PASCAL – BENZERİ ÜÇGENLER

4.1 Hosoya Üçgeni

1976’da Hosoya tarafından tanımlanan ve Fibonacci sayılarıyla yakından ilişkili olan bir başka üçgensel yapı Hosoya üçgenidir. Bu üçgen ortasından geçen düşey doğruya göre simetrik olup, en dış tarafta yer alan kuzeydoğu ve güneybatı yönlü köşegenleri Fibonacci sayılarından oluşmuştur. Üçgenin iç kısmında yer alan her sayı, üzerinde bulunduğu köşegende kendinden önce gelen iki sayının toplamıdır. Bu özelliklere sahip Hosoya üçgeni aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1 Hosoya üçgeni (Koshy 2001)

$H(n,j)$ n.satır j. sütundaki eleman, $n \geq j \geq 0$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} H(0,0) &= H(1,0) = H(1,1) = H(2,1) = 1 \\ H(n,j) &= H(n-1,j) + H(n-2,j) \\ &= H(n-1,j-1) + H(n-1,j-2) \end{aligned}$$

tekrarlama bağıntısına sahiptir. En dıştaki köşegenlerin Fibonacci sayısı olduğu bilindiğine göre $H(n,0) = F_{n+1}$ ve $H(n,n) = F_{n+1}$ yazılabilir. Verilen tekrarlama bağıntısının art arda uygulanmasıyla Hosoya üçgenindeki sayılarla Fibonacci sayıları arasında cebirsel bir bağıntı elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&= H(n,j) = H(n-1,j) + H(n-2,j) \\
&= [H(n-2,j) + H(n-3,j)] + H(n-2,j) \\
&= 2H(n-2,j) + H(n-3,j) \\
&= 2[H(n-3,j) + H(n-4,j)] + H(n-3,j) \\
&= 3H(n-3,j) + 2H(n-4,j)
\end{aligned}
$$

bu şekilde devam edilerek $H(n,j)$ ile Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$1 \leq k \leq n-j-1$ iken

$$H(n,j) = F_{k+1}H(n-k,j) + F_kH(n-k-1,j)$$

sonucuna ulaşılır. Özel olarak $k = n-j-1$ alınsın. O halde

$$
\begin{aligned}
H(n,j) &= F_{n-j}H(j+1,j) + F_{n-j-1}H(j,j) \\
&= F_{n-j}F_{j+1} + F_{n-j-1}F_{j+1} \\
&= F_{j+1}(F_{n-j} + F_{n-j-1}) \\
&= F_{j+1}F_{n-j+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla Hosoya üçgenindeki her bir eleman iki Fibonacci sayısının çarpımıdır.

4.2 Catalan Üçgeni

Binom katsayılarından sonra en önemli kombinatoriyel sayılar olan Catalan sayıları Pascal üçgenine benzer bir yapıya sahip olan Catalan üçgeninin oluşturulmasında kullanılır. Şöyle ki; $0 \leq k \leq n$ olmak üzere n. satır k. sütundaki eleman $C(n,k)$ ile gösterilsin. İlk eleman $C(0,0) = 1$ olup sonraki her eleman, üstündeki eleman ile solundaki elemanın toplamıdır. $0 \leq k \leq n$ aralığının dışında kalan her eleman 0 kabul edilir.

Tanım 4.1.1 $0 \leq k \leq n$ ve $C(0,0) = 1$ olmak üzere Catalan üçgenindeki diğer sayılar

$$C(n,k) = \begin{cases} C(n,k-1) + C(n-1,k) & 0 < k < n \ ise \\ C(n-1,0) & k = 0 \ ise \\ C(n,n-1) & k = n \ ise \end{cases}$$

şeklindedir. $n \geq 0$ olmak üzere n. Catalan sayısı $C_n = C(n,n)$ dir. Catalan üçgenindeki sayıların kapalı formda yazılan formülü, $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$C(n,k) = \frac{(n+k)!\,(n-k+1)}{k!\,(n+1)!}$$

elde edilir. Özel olarak

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

dir. Verilenler yardımıyla aşağıdaki üçgen elde edilir.

1								
1	1							
1	2	2						
1	3	5	5					
1	4	9	14	14				
1	5	14	28	42	42			
1	6	20	48	90	132	132		
1	7	27	75	165	297	429	429	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Şekil 4.2 Catalan üçgeni (Lee ve ark. 2019)

Bu üçgene "Catalan üçgeni" adı verilmiştir (Shapiro 1976). Dikkat edilirse Catalan sayıları bu üçgenin hipotenüsü üzerindeki sayılardır. Yani $n \geq 0$ için $C(n,n)$ elemanlarıdır.

4.3 Pascal-Benzeri Bir Üçgen

Fibonacci sayıları ile bağlantılı olarak Pascal-benzeri üçgenler elde edilebilir. Aşağıda verilen çalışmada Fibonacci sayıları temel alınarak kendi içinde uyumlu ve belli bir düzende ilerlediği gösterilen üçgensel bir yapı elde edilmiştir.

Fibonacci sayıları incelendiğinde indisi 5 in katı olan Fibonacci sayıları 11 tabanında yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$F_5 = 5 \cdot 11^0$$
$$F_{10} = 5 \cdot 11^1$$
$$F_{15} = 5(11^2 + 11^0)$$
$$F_{20} = 5(11^3 + 2 \cdot 11^1)$$
$$F_{25} = 5(11^4 + 3 \cdot 11^2 + 11^0)$$
$$F_{30} = 5(11^5 + 4 \cdot 11^3 + 3 \cdot 11^1)$$
$$F_{35} = 5(11^6 + 5 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11^0)$$

Bu eşitliklerde11'in azalan kuvvetlerinin katsayıları olan sayılar aşağıdaki gibi yazılırsa ortaya çıkan üçgensel yapının Pascal üçgeni ile aynı olmamakla birlikte ilginç bir yapı olduğu gözlenebilir.

5									
5	0								
5	0	5							
5	0	10	0						
5	0	15	0	5					
5	0	20	0	15	0				
5	0	25	0	30	0	5			
5	0	30	0	50	0	20	0		
5	0	35	0	75	0	50	0	5	
5	0	40	0	105	0	100	0	10	0

Şekil 4.3 İndisi 5'in katı olan Fibonacci sayılarıyla elde edilen üçgensel yapı

Burada (n,k) n. satır k. sütundaki eleman, $n \geq k$ ve $t = \{1,2,...\}$ olmak üzere bu üçgen

$$
\begin{aligned}
(n,k) &= 0, \qquad & k &= 2t \\
(n,k) &= 5, \qquad & n = k &= 2t-1
\end{aligned}
$$

başlangıç koşulları ile birlikte $(n,k) = (n-1,k) + (n-2,k-2)$ tekrarlama bağıntısına sahip bir yapıdır.

5. SONUÇ

Bu tezde Fibonacci sayıları ve sahip oldukları özellikler incelenmiştir. Bu sayıların matematikteki önemine değinilmiş ve özellikle Pascal üçgeni ile arasındaki ilişki üzerine yoğunlaşılmıştır. Fibonacci sayılarını veya bu sayılardan cebirsel işlemler yoluyla elde edilen sayıları bulunduran üçgensel yapıların varlığına ilişkin araştırmalar yapılmış ve Pascal benzeri üçgenlere örnekler verilmiştir. Son olarak ise kendine has bir tekrarlama bağıntısına sahip yeni bir yapı elde edilmiştir. Araştırılan konular ile ilgili gerekli literatür taraması yapılmış olup, çeşitli makaleler ve kitaplardan faydalanılarak bir derleme düzenlenmiştir.

KAYNAKLAR

Anonim, 2015. Nature loves Fibonacci numbers. http://realneo.us/content/bees-love-sunflowers-nature-loves-fibonacci-numbers-(Erişim Tarihi: 30.04.2019).

Anonim, 2008. The Fibonacci spiral. https://www.shootpetals.com/golden-ratio.html-(Erişim Tarihi: 30.04.2019).

Cangül, İ.N. 2015. Sayılar Teorisi. Dora Yayıncılık, Bursa, 286 s.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. A Wiley-Interscience Publication, New York, 652 pp.

Lines, M.E. 1990. Think of a Number. CRC Press, Florida, 172 pp.

Lee, K.H., Oh, S. 2018. Catalan Triangle Numbers and Binomial Coefficients. *Contemporary Mathematics.*, 713: 165-168.

Lee, K.H., Bolker, E., Sleizak, M. 2017. Relation beetween Pascal's triangle and fibonacci series. https://math.stackexchange.com/questions/2563623/relation-between-pascals-triangle-and-fibonacci-series-(Erişim Tarihi: 30.04.2019).

Lee, K.H., Kim, S., Feinberg, G. 2019. Fully commutative elements of complex reflection groups. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869319302364-(Erişim Tarihi: 25.08.2019)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sümeyye KOCA
Doğum Yeri ve Tarihi	: İzmir 1993
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	:
Lise	: Bursa Şahinler Anadolu Lisesi 2007-2011
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi 2011-2015
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi 2015-2019
İletişim(e-posta)	: sumeyye.kkoca@gmail.com