



**JAKOBI VE SIMON OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA
YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU**

Merve HARMANLI



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**JAKOBI VE SIMON OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA YÜZEYLERİN BİR
KARAKTERİZASYONU**

Merve HARMANLI
0000-0002-3253-4774

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2020
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

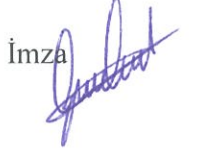
Merve Harmanlı tarafından hazırlanan “JAKOBI VE SIMON OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı


İmza

Üye : Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
0000-0002-1608-0354
İzmir Demokrasi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı


İmza

Üye : Doç. Dr. Betül BULCA
0000-0001-5861-0184
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı


İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım


Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN

Enstitü Müdürü
.././2020

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.././....

Merve HARMANLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

JAKOBI VE SIMON OPERATÖRLERİ YARDIMIYLA YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Merve HARMANLI

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu tezin amacı Öklid uzaylarında rotasyon yüzeylerini Jakobi ve Simon operatörleri yardımıyla karakterize etmektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde sonraki bölüm için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde \mathbb{R}^n deki zayıf biharmonik altmanifoldlar ile ilgili şu ana kadar yapılan hesaplamalar verilmiş ve Jakobi ortalama eğrilikli altmanifoldlar irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde sırasıyla \mathbb{R}^3 deki rotasyon yüzeyleri, Delaunay yüzeyleri, \mathbb{R}^4 deki genel rotasyon yüzeyleri, 1. tip rotasyon yüzeyleri ve 2. tip rotasyon yüzeyleri ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Jakobi ve Simon operatörleri hesaplanmıştır. Belirtilen yüzeylerin zayıf biharmonik olma koşulları incelenmiş bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde diğer bölümlerde elde edilen sonuçlar tartışılmış, sonuç ve öneriler dile getirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Biharmonik altmanifold, Delaunay yüzeyi, Rotasyon yüzeyi, Simon operatörü, Zayıf biharmonik altmanifold.

2020, vi+ 50 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF SURFACES WITH THEIR JACOBI AND SIMON OPERATORS

Merve HARMANLI

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

The aim of this thesis is to characterize the Euclidean rotational surfaces with their Jacobi and Simon operators.

This thesis consists of 5 chapters.

The first section is the introduction.

Second chapter consist of some basic definitions which will be use in the other chapters.

In the third chapter, calculations related to weak biharmonic submanifolds in \mathbb{R}^n are given and the Jacobian mean curvature submanifolds are discussed.

In the fourth chapter, rotation surfaces and Delaunay surfaces in \mathbb{R}^3 are considered. Further, general rotation surfaces and rotation surfaces of 1. type and 2. type in \mathbb{R}^4 are discussed. The Jacobi and Simon operators of them were investigated. The conditions of the specified surfaces to be weak biharmonic have been examined and some original results have been obtained. In addition, some examples supporting these results are given.

In the fifth section, the results obtained in other sections are discussed and the results and suggestions are expressed.

Key Words: Biharmonic submanifold, Delaunay surface, Rotation surface, Simon operator, Weak biharmonic submanifold.

2020, vi+50 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitiminin boyunca engin bilgilerinden çokça yararlandığım, maddi manevi desteğini asla benden esirgemeyen, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren değerli Hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a yürekten teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini çok gördüğüm, kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Doç. Dr. Betül BULCA' ya teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bugünlere getiren, bana gösterdikleri sevgiyle ve güvenle birçok zorluğu aşmama yardımcı olan kıymetli aileme sonsuz teşekkürler.

Merve HARMANLI

.../.../....

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	7
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
3.1. \mathbb{R}^m deki Zayıf Biharmonik Altmanifoldlar.....	14
3.2. \mathbb{R}^m deki Jakobi Ortalama Eğrilikli Altmanifoldlar.....	16
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	18
4.1. \mathbb{R}^3 deki Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri.....	18
4.2. \mathbb{R}^3 deki Delaunay Yüzeyleri.....	22
4.3. \mathbb{R}^4 deki Genel Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri.....	27
4.4. \mathbb{R}^4 deki 1. Tip Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri.....	33
4.5. \mathbb{R}^4 deki 2. Tip Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri.....	40
5. SONUÇLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
U_α	Açık alt küme
M, N	Alt manifoldlar
τ_2	Bigerilim
ξ	Birim normal vektör
φ	Diferansiyellenebilir dönüşüm
x_α	Dönüşüm
K	Gauss eğriliği
\langle, \rangle	İç çarpım
h	II. Temel form
J	Jakobi operatörü
Δ	Laplas operatörü
e_i	Lokal çatı alanı
∇	M nin Levi-Civita koneksiyonu
$T^\perp M$	M nin tanjant demeti
$\chi(M)$	M nin tanjant vektör alanları uzayı
$T_p M$	M nin tanjant vektör uzayı
$(\Delta \vec{H})^\perp$	Normal bileşen
α	Ortalama eğrilik
\vec{H}	Ortalama eğrilik vektörü
$\tilde{\nabla}$	\mathbb{R}^n nin Levi-Civita koneksiyonu
G	Riemann eğrilik
$(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$	Riemann manifoldları
M_i	Rotasyon yüzeyleri
\tilde{A}	Simon operatörü
A_ξ	Şekil operatörü
$\chi(M)$	Tanjant vektör alanları uzayı
$(\Delta \vec{H})^T$	Teğet bileşen

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4.1. Koniğin rületinin a) ilk hali, b) yuvarlandıktan sonraki hali	23
Şekil 4.2. Katenary eğrisi ve katenoid yüzeyi.....	24
Şekil 4.3. Elips	25
Şekil 4.4. Hiperbol	26
Şekil 4.5. M_2 Rotasyon yüzeyinin meridyen eğrisi.....	38
Şekil 4.6. M_2 Rotasyon yüzeyinin bazı izdüşümleri	39



1. GİRİŞ

M , n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere $x : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir izometrik daldırma olsun. M nin Laplası Δ , pozisyon vektörü x ve ortalama eğrilik vektörü \vec{H} için $\Delta x = -n\vec{H}$ Beltrami formülü geçerlidir. Bu eşitlikten M nin minimal (yani $\vec{H} = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $\Delta x = 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle M nin harmonik olmasıdır. Takahashi 1966 yılında yaptığı çalışmasında $\Delta x = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ şartını sağlayan Öklidyen altmanifoldları ele almıştır (Takahashi 1966). Bu çalışmanın ışığında $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k; \Delta x_i = \lambda x_i, 1 \leq i \leq k, \lambda_i$ ler farklı olması durumunda k -tipinde, bazı $\lambda_i = 0$ olması durumunda *null k-tipinde* altmanifold tanımı verilmiş ve bunlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir (Chen 1983, 1984). M nin pozisyon vektörü $\Delta^2 x = 0$ şartını sağlar ise M ye *biharmonik altmanifold* adı verilir (Chen 1991). Bu eşitlik Beltrami formülü kullanılarak

$$\Delta \vec{H} = 0 \tag{1.1}$$

biçimine indirgenir. Böylece M nin biharmonik olma şartı (1.1) denklemini sağlamasına bağlı olacaktır (Chen 1991). Aşıkarak tüm minimal altmanifoldlar biharmoniktir. Biharmonik altmanifoldlar 1980'li yılların ortalarına doğru araştırmacıların sonlu tip altmanifoldlar ile ilgili çalışmalara başladıkları döneme rastlar. Bu çalışmalardan bağımsız olarak Jiang 1986 yılında bienerji fonksiyonunun Euler-Lagrange denklemi yardımıyla biharmonik altmanifoldlara farklı bir bakış açısı katmıştır. Bu dönemde Chen ve Jiang birbirinden bağımsız olarak \mathbb{R}^3 deki biharmonik yüzeylerin minimal olmaları gerektiğini ispatlamışlardır (Jiang 1986, Chen 1991). Daha sonraki yıllarda Dimitric \mathbb{R}^m deki biharmonik eğrilerin doğru parçası (yani; minimal) olduğunu göstermiştir (Dimitric 1992). \mathbb{R}^m nin S^{m-1} hiperküresinde yatan biharmonik altmanifoldların bulunmadığı Chen tarafından gösterilmiştir (Chen 1991, 2015). \mathbb{R}^m deki sonlu tip biharmonik altmanifoldlar minimaldir (Chen 2014). Bu çalışmaların yanı sıra 1991 yılında B.Y. Chen aşağıdaki varsayımı ortaya atmıştır (Chen 1991, 1996, 2014 ve Maeta 2014a).

Chen'in Varsayımı (Chen's Conjecture): Öklid uzayındaki biharmonik altmanifoldlar minimaldir.

Bu varsayım Hasanis ve Vlachos tarafından \mathbb{R}^4 deki hiper yüzeyler için ispatlanmıştır (Hasanis ve Vlachos 1995). Daha sonra Fu, \mathbb{R}^m deki iki farklı asli eğrilikli hiperyüzeyler için Chen'in varsayımının geçerli olduğunu ispatlamıştır (Fu 2013). Bununla birlikte Montaldo, Oniciuc ve Ratto \mathbb{R}^m deki G-invaryant hiperyüzler için bu varsayımın geçerli olduğunu göstermişlerdir (Montaldo ve ark. 2016). Günümüzde hala Chen'in varsayımı popülerliğini korumaktadır. \mathbb{R}^m nin biharmonik proper gömülmüş altmanifoldlarının minimal olduklarını ispatlamıştır (Akutagava ve Maeta 2013). Chen'in varsayımı yarı-Riemann uzayındaki altmanifoldlar için geçerli değildir. Bu durum Chen ve Ishikawa tarafından ele alınmıştır (Chen ve Ishikawa 1991,1998). Anti-invaryant biharmonik altmanifoldlar da Arslan ve ark. tarafından çalışılmıştır (Arslan ve ark 2007).

İki Riemann manifoldu arasında bir x biharmonik dönüşümü bienerji fonksiyonelin bir kritik noktası olarak tanımlanır. Jiang türevlenebilir bir x dönüşümünün bigerilim (bitension) alanı $\tau_2(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun x nin biharmonik olması gerektiğini ispatladı (Jiang 1986). Daha sonra 2002 yılında Caddeo ve ark. $x = M \rightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik daldırması için $\Delta \vec{H} = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $\tau_2(x) = 0$ olması gerektiğini gösterdiler (Caddeo ve ark. 2002). Eğer \vec{H} yönündeki bir $\xi = \frac{\vec{H}}{\|\vec{H}\|}$ birim normal vektör alanı $T^\perp M$ normal demeti içinde paralel ise $M \subset \mathbb{R}^m$ altmanifolduna paralel normalleştirilebilir ortalama vektör alanına sahiptir denir. Diğer bir ifade ile $D\vec{H} = 0$ dır (Chen 1980). Minimal olmayan her bir hiperyüzey paralel normalleştirilebilir ortalama vektör alanına sahiptir. Yakın zamanda \mathbb{R}^m de normalleştirilmiş paralel ortalama eğrilikli biminimal altmanifoldlarının olmadığı ispatlanmıştır (Chen 2019).

$M \subset \mathbb{R}^m$ altmanifoldunun $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ lokal çatı alanları için \vec{H} nın Laplası

$$\Delta \vec{H} = -\sum_{i=1}^n \left(\tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_i} \vec{H} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{\vec{e}_i} \vec{e}_i} \vec{H} \right) \quad (1.2)$$

dır. Böylece Gauss ve ortalama eğrilikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
-\Delta \vec{H} &= \sum_{i=1}^n D_{e_i} D_{e_i} H - \sum_{i=1}^n D_{\nabla_{e_i} e_i} H - \sum_{i=1}^n h(e_i, A_H e_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} (A_H e_i) - \sum_{i=1}^n A_{D_{e_i} H} e_i + \sum_{i=1}^n A_H (\nabla_{e_i} e_i)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

dır. Burada D , M nin normal koneksiyonudur (Barros ve Gray 1997). Böylece M nin biharmonik olması için gerek ve yeter koşul ΔH nin teğet ve normal bileşenleri

$$(\Delta \vec{H})^T = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} (A_H e_i) + \sum_{i=1}^n A_{D_{e_i} H} e_i - \sum_{i=1}^n A_H (\nabla_{e_i} e_i) \tag{1.4}$$

$$(\Delta \vec{H})^\perp = \Delta^D H + \sum_{i=1}^n h(e_i, A_H e_i) \tag{1.5}$$

her ikisinin birden sıfıra eşit olmasıdır (Chen 1983). Harmonik ortalama eğrilik vektörüne sahip altmanifoldlar, diğer bir ifade ile biharmonik altmanifoldların bir genellemesi

$$\Delta \vec{H} = \lambda \vec{H}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

şartını sağlayan altmanifoldlardır. Bu durumda M nin ortalama eğrilik vektörü Laplas ın bir öz vektörüdür. Burada $\lambda = 0$ olması durumunda biharmoniklik şartı sağlanır. Eğer $\lambda \neq 0$ ise ya altmanifold 1-tipinde ya da null 2-tipindedir (Chen ve Ishikawa 1991). B. Y. Chen (1.6) şartını sağlayan Öklidyen altmanifoldları sadece 1-tipinde, null 2-tipinde ya da biharmonik olanlardan ibaret olduğunu göstermiştir (Chen 1988).

M nin normal demet içindeki Laplası

$$\Delta^D \vec{H} = - \sum_{i=1}^n (D_{\bar{e}_i} D_{\bar{e}_i} H - D_{\nabla_{\bar{e}_i} \bar{e}_i} H) \tag{1.7}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\Delta^D \vec{H} = 0$ ise $M \subset \mathbb{R}^m$ ye *harmonik ortalama eğrilikli altmanifold* adı verilir (Barros ve Gray 1995). Bu tür altmanifoldlar *zayıf biharmonik* (weak biharmonic) olarak da adlandırılır (Kılıç ve ark. 2003). Aynı çalışmada \mathbb{R}^m deki birim hızlı biharmonik eğrilerin bir sınıflandırılması verilmiştir. Bu eğrilerin; doğru, çember, cornu spirali veya küresel cornu spirali olduğu gösterilmiştir. Barros ve Gray'ın bu sonucu daha sonraki yıllarda Kılıç ve ark. tarafından genelleştirilmiş olup $N^m(c)$ uzay

formundaki regüler eğrilerin biharmonik olma şartını sağlaması için bu eğrilerin *2-paralel* (yani $\bar{\nabla}^2 h = 0$) olmaları gerektiği sonucu elde edilmiştir (Kılıç ve ark. 2003). Aynı çalışmada yazarlar $m > 1$ için \mathbb{R}^m deki tüm 2-boyutlu ve 3-boyutlu 2-paralel altmanifoldların zayıf biharmonik olduklarını ve normal olarak düz (normally flat) olan tüm $m > 1$ altmanifoldlarının zayıf biharmonik oldukları ispatlamışlardır. Bununla birlikte $M \subset \mathbb{R}^m$ lokal Öklidyen altmanifoldların zayıf biharmonik olmaları için gerek ve yeter koşulun M nin 2-paralel olması gerektiği varsayımına varılmıştır.

Zayıf biharmonik altmanifoldlarının bir genellemesi

$$\Delta^D \vec{H} + \lambda \vec{H} = 0, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

şartını sağlayan altmanifoldlardır. Bu şartı sağlayan altmanifoldlara *harmonik 1- tipinde* denir (Kılıç ve Arslan 2008). Tanımdan da anlaşıldığı üzere tüm minimal altmanifoldlar ve zayıf biharmonik altmanifoldlar harmonik 1-tipindedir.

$M \subset \mathbb{R}^m$ altmanifoldunun *Jakobi operatörü* $\forall \xi \in T^\perp M$ için

$$J: T^\perp M \rightarrow T^\perp M; J\xi = (\Delta^D - \tilde{A})\xi \quad (1.9)$$

biçiminde tanımlanır. Burada \tilde{A} , *Simon operatörü* olup

$$\tilde{A}(\xi) = \sum_{i=1}^n h(\vec{e}_i, A_\xi \vec{e}_i) \quad (1.10)$$

olarak ifade edilir (Simon 1968). Böylece $J\xi = 0$ şartı sağlanırsa $\xi \in T^\perp M$ normal vektör alanına *Jakobi alanı* adı verilir. Buradan M nin \vec{H} ortalama eğrilik vektör alanı için

$$J\vec{H} = \Delta^D \vec{H} - \sum_{i=1}^n h(\vec{e}_i, A_{\vec{H}} \vec{e}_i) \quad (1.11)$$

olacaktır. Böylece $J\vec{H} = 0$ eşitliği sağlanırsa M altmanifoldu *Jakobi ortalama eğrilik vektörüne sahiptir* denir (Barros ve Gray 1997).

Dönel yüzeylerin \mathbb{R}^4 e genellemesi Cole tarafından 1890 yılında ele alınmıştır (Cole 1890). Daha sonra Moore 1919 da \mathbb{R}^4 de genel rotasyon yüzeylerini parametrik olarak

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(u, v) &= x_1(u) \cos cu - x_2(u) \sin cv \\
\tilde{x}_2(u, v) &= x_1(u) \sin cu + x_2(u) \cos cv \\
\tilde{x}_3(u, v) &= x_3(u) \cos du - x_4(u) \sin dv \\
\tilde{x}_4(u, v) &= x_3(u) \sin du + x_4(u) \cos dv
\end{aligned} \tag{1.12}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Moore 1919). Burada $c, d \in \mathbb{R}$ ve $\gamma(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u), x_4(u))$ rotasyon yüzeyinin *meridyen eğrisidir* (Dursun ve Turgay 2012). Eğer c ya da d sıfıra eşit olursa (1.12) parametrizasyonu ile verilen yüzey (basit) rotasyon yüzeyi biçimini alır. Sabit eğrilikli rotasyon yüzeyleri de bazı geometriciler tarafından çalışılmıştır (Chen ve Ishikawa 1991, Fetcu ve ark. 2009). Rotasyon yüzeylerini aşağıdaki şekilde gruplandırmak mümkündür;

I) Meridyen eğrisi $\gamma_1(u) = (x_1(u), 0, x_3(u), 0)$ olarak seçilirse rotasyon yüzeyi

$$M_1: X(u, v) = (x_1(u) \cos av, x_1(u) \sin av, x_3(u) \cos bv, x_3(u) \sin bv) \tag{1.13}$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır (Arslan ve ark. 2012). Bu yüzeyler \mathbb{R}^4 de *genel rotasyon yüzeyleri* olarak bilinir.

II) Meridyen eğrisi $\gamma_2(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u), 0)$ (yani $x_4(u) = 0, c = 0, d = 1$) alınırsa rotasyon yüzeyi,

$$M_2 : Y(u, v) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u) \cos v, x_3(u) \sin v) \tag{1.14}$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır. Bu yüzeyler \mathbb{R}^4 de *küresel çarpım yüzeyi* olarak da bilinir (Bulca ve ark. 2012). Bu yüzeylere 1. tip rotasyon yüzeyleri de denir (Arslan ve ark. 2017).

III) Meridyen eğrisi $\gamma_3(u) = (x_1(u), x_2(u), 0, 0)$ düzlemsel eğri alınırsa elde edilen rotasyon yüzeyi

$$M_3: Z(u, v) = x_1(u) \rho(v) + x_2(u) \vec{E}_4 \tag{1.15}$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır. Burada $u \in I \subset \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, $\vec{E}_4 = (0, 0, 0, 1)$ ve $\rho(v)$ birim hızlı küresel eğridir. (1.15) parametrizasyonu ile verilen yüzeyler *meridyen*

yüzeyleri olarak bilinir (Arslan ve ark. 2014, Ganchev ve Milousheva 2015). Bu yüzeylere 2. tip rotasyon yüzeyleri de denir (Arslan ve ark. 2017). \mathbb{R}^4 deki Weingarten tipindeki meridyen yüzeyleri Öztürk ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır (Öztürk ve ark. 2016).

Bu çalışmada \mathbb{R}^3 deki rotasyon yüzeyleri ile M_1 , M_2 ve M_3 rotasyon yüzeylerinin minimal, sabit ortalama eğrilikli, biharmonik, zayıf biharmonik ve Jakobi ortalama eğrilikli olmaları durumları ele alınmıştır. Bazı orijinal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir.



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teorem ve tanımlar verilmiştir. Özellikle diferansiyellenebilir dönüşümler, altmanifoldlar ve bunların birinci ve ikinci temel formları, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, ortalama eğriliği ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Bu bölümde ağırlıklı olarak Carmo ve Chen'in çalışmalarından yararlanılmıştır (Chen 1973 ve Do Carmo 1992).

Tanım 2.1. M kümesi ve $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow M$ dönüşümlerinin birebir (injective) bir ailesi tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye n -boyutlu *diferansiyellenebilir manifold* adı verilir;

- i) $x_\alpha(U_\alpha)$ ların sonlu birleşimleri M kümesini örtecektir.
- ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ şartını sağlayan herhangi α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ kümeleri \mathbb{R}^n nin açık alt kümeleridir. Bununla birlikte $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ koordinat değişimi fonksiyonları türevlenebilirdir.
- iii) (U_α, x_α) ailesi (atlası) i) ve ii) şartlarıyla birlikte maksimaldir.

(U_α, x_α) çifti (ya da x_α dönüşümü) $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ için M nin p noktasındaki bir *parametrizasyonu* (yada *koordinat sistemi*) olarak bilinir. Burada $x_\alpha(U_\alpha)$ lara *koordinat komşuluğu* (ya da *harita*) adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.2. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $\varphi(p)$ noktasında tanımlanan $y: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M}$ parametrizasyonu için $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ ve $y^{-1} \circ \varphi \circ x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü diferansiyellenebilir olacak şekilde p noktasında bir $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ parametrizasyonu bulunabilirse φ ye *diferansiyellenebilir dönüşüm* adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.3. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ türevlenebilir dönüşümüne M de (türevlenebilir) bir eğri adı verilir. $\gamma(0) = p$ noktadaki reel değerli türevlenebilir fonksiyonları kümesi D olmak üzere γ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki teğet vektörü $\gamma'(0): D \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir fonksiyonu olup

$$\gamma'(0)[f] = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0}, f \in D$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle M nin p noktasındaki bir tanjant vektörü M üzerindeki bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eğrisinin $\gamma(0) = p$ noktasındaki hız vektörü ile özdeşleşir. M nin p noktasındaki tanjant vektörleri kümesi $T_p M$ ile gösterilir (Do Carmo 1992).

Bir $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ parametrizasyonu $x(0) = p$ noktasında verilsin. Böylece bir f fonksiyonu ve bir γ eğrisi bu parametrizasyon yardımıyla sırasıyla

$$f \circ x(q) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$$

$$x^{-1} \circ \gamma(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda f fonksiyonunun γ ya kısıtlanması

$$\begin{aligned} \gamma'(0)[f] &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f \end{aligned}$$

dir. Diğer bir deyişle $\gamma'(0)$ vektörü x parametrizasyonu altında

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Dikkat edilirse $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ vektörü $x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, \dots, 0)$ koordinat eğrisinin $\gamma(0) = p$ noktasındaki tanjant vektörüdür. Böylece (2.1) ifadesi γ eğrisinin p noktasındaki tanjant vektörünün bir koordinat sisteminin sadece γ nın türevine bağlı olduğunu gösterir. Bu nedenle (2.1) eşitliğinden yararlanarak fonksiyonların bilinen işlemleri ile birlikte $T_p M$ vektör uzayına M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* adı verilir.

Tanım 2.4. M n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde diferansiyellenebilir bir yapı (U_α, x_α) biçiminde verilsin. Bu takdirde

(*) “Her α, β çifti için $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ olmak üzere $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ geçiş fonksiyonlarının diferansiyeli pozitif determinanta sahiptir”.

şartı sağlanırsa M ye *yönlendirilebilir manifold* adı verilir. (*) şartını sağlayan yönlendirilebilir M manifoldunun (U_α, x_α) yapısına M nin bir *yönlendirmesi* adı verilir.

Tanım 2.5. M n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. Bu takdirde $\forall p \in M$ için $T_p M$ üzerinde 2-linear, simetrik ve pozitif tanımlı formu $\langle, \rangle: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ iç çarpımı olmak üzere p noktasındaki $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ koordinat sistemi için $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = p \in x(U)$ ve $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \partial x_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ olsun. Bu takdirde

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_p = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.2)$$

U üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon oluyor ise bu iç çarpıma M üzerinde bir *Riemann metrik* (yada *Riemann yapı*) adı verilir. Burada g_{ij} fonksiyonları x koordinat sistemindeki Riemann metriğinin lokal temsilcisidir. Bununla birlikte M diferansiyellenebilir manifoldu (2.2) metriği ile birlikte bir *Riemann manifoldunu* oluşturur (Do Carmo 1992).

M n-boyutlu bir Riemann manifold olmak üzere M üzerindeki bir harita (U, x) olsun. Bu takdirde $X, Y \in T_p M$ tanjant vektörleri $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i b_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_q \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_j g_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir. M üzerindeki tüm türevlenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ve reel değerli türevlenebilir fonksiyonların kümesi $D(M)$ ile gösterilirsin. Aslında $D(M)$ bir halka oluşturur. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.6. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun.

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlı ∇ dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa ∇ ya M üzerinde bir *afin koneksiyon* denir (Do Carmo 1992);

$$1) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$2) \nabla_X(fY + Z) = X(f)Y + f\nabla_X Z + \nabla_X Z.$$

Önerme 2.7. M bir diferansiyellenebilir manifold, ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon

olsun. M üzerinde bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ regüler eğrisi boyunca tanımlanan bir V vektör alanı

için $\frac{DV}{dt}$, γ eğrisi boyunca bir başka vektör alanı olup

$$a) \frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}$$

dir. Burada f , $(-\varepsilon, \varepsilon)$ üzerinde tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon ve W da γ eğrisi boyunca tanımlı bir vektör alanıdır.

c) Eğer V vektör alanı bir $Y \in \chi(M)$ vektör alanının $V(t) = Y(\gamma(t))$ biçiminde bir indirgenmesi ise, $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)} Y$ dir.

İspat. Detaylı ispat için bakınız (Do Carmo 1992). \square

Bir $p \in M$ noktasındaki koordinat sistemi (x_1, x_2, \dots, x_n) olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^n x_i X_i, Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j; X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanları tanımlansın. Böylece

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{j=1}^n x_j X_j (y_j) X_j\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ olduğundan

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k$$

elde edilir. Burada Γ_{ij}^k lar türevlenebilir fonksiyonlar olup ∇ koneksiyonunun *Christoffel sembolleri* olarak bilinir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.8. M bir diferansiyellenebilir manifold, ∇ da M üzerinde bir afin koneksiyon olsun. M üzerinde tanımlı bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ regüler eğrisi boyunca tanımlı bir V vektör alanı $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $\frac{DV}{dt} = 0$ oluyorsa V ye γ eğrisi boyunca *paralel vektör alanı* denir.

Teorem 2.9. (Levi-Civita) Verilen bir M Riemann manifold için M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ afin koneksiyonu vardır:

- Her $X, Y \in \chi(M)$ için $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ dir. Diğer bir deyişle ∇ simetriktir.
- Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ dir. Diğer bir deyişle ∇ Riemann metriği ile uyumludur.

Teorem 2.9. daki şartları sağlayan afin koneksiyona M üzerinde bir *Levi-Civita koneksiyonu* (ya da *Riemann koneksiyonu*) adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.10. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ diferansiyellenebilir dönüşümü olsun. Herhangi $p \in M$ ve her $v \in T_p M$ tanjant vektörü için bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eğrisi $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ olacak şekilde seçilsin. Böylece $\beta = \varphi \circ \gamma$ eğrisi alındığında $d\varphi_p: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ dönüşümü

$d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ biçiminde tanımlı olan lineer bir dönüşüm olup γ eğrisi seçiminden bağımsızdır. Burada $d\varphi_p$ dönüşümüne φ nin *türev dönüşümü* olarak bilinir.

Tanım 2.11. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Eğer φ dönüşümü diferansiyellenebilir, örten ve φ^{-1} de diferansiyellenebilir ise φ dönüşümüne bir *difeomorfizm* adı verilir. Benzer şekilde $p \in M$ ve $\varphi(p) \in \tilde{M}$ noktalarının komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere bunlar arasındaki $\varphi: U \rightarrow V$ dönüşümü bir difeomorfizm ise φ dönüşümüne bir *lokal difeomorfizm* adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.12. M ve \tilde{M} Riemann manifoldları için $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ bir difeomorfizm olsun. Her $p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ tanjant vektörleri için

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y) \rangle_{\varphi(p)} \quad (2.3)$$

şartı sağlanırsa φ dönüşümüne bir *izometri* adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.13. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $\varphi: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $d\varphi_p: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ dönüşümü her $p \in M$ için injektif ise φ ye bir *daldırma (immersion)* adı verilir. Bununla birlikte $\varphi(M)$ alt uzayı \tilde{M} den indirgenen alt uzay topolojisi ile birlikte φ daldırması $\varphi(M) \subset \tilde{M}$ üzerinde bir homeomorfizm ise φ ye bir *gömme (embedding)* adı verilir (Do Carmo 1992).

Tanım 2.14. (M, g) ve (\tilde{M}, \tilde{g}) sırasıyla n ve m -boyutlu Riemann manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ izometrik daldırması verilsin. \tilde{M} de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M altmanifoldu \tilde{M} dan indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin 2. temel form dönüşümü

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M); h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.4) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.15. M nin normal vektörleri N_1, N_2, \dots, N_{n-2} olmak üzere M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_{N_\alpha} X_i = -\tilde{\nabla}_{X_i} N_\alpha + \nabla^\perp_{X_i} N_\alpha \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır. Burada A_{N_α} lar N_α ya karşılık gelen *şekil operatörü* ve ∇^\perp ise $\chi^\perp(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. (2.5) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p(M)$ için

$$g(A_{N_\alpha} X_i, X_j) = \tilde{g}(h(X_i, X_j), N_\alpha), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq m - n \quad (2.6)$$

eşitliği sağlanır.

M nin *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i, X_j) \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanır. Bununla birlikte M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* $\alpha = \|\vec{H}\|$ ile hesaplanır. Eğer $\alpha = 0$ ise M ye minimaldir denir (Chen 1973).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde m-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^m deki zayıf biharmonik altmanifoldlar, ikinci alt bölümde ise Jakobi ortama eğrilikli altmanifoldlar ile ilgili bilinen bazı temel tanım ve sonuçlar verilmiştir.

3.1. \mathbb{R}^m deki Zayıf Biharmonik Altmanifoldlar

m-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^m nin, n-boyutlu altmanifoldu M olsun. M üzerinde ortonormal çatı alanı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_m\}$ olmak üzere ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = \alpha \vec{e}_{n+1}$ biçiminde tanımlansın. Burada $\alpha = \|\vec{H}\|$, M nin ortalama eğriliğidir. Böylece \vec{H} nin normal koneksiyon D ye göre Laplası (1.7) eşitliği yardımıyla

$$\Delta^D \vec{H} = \sum_{i=1}^n (D_{\nabla_{\vec{e}_i}} (\alpha \vec{e}_{n+1}) - D_{\vec{e}_i} D_{\vec{e}_i} (\alpha \vec{e}_{n+1}))$$

bulunur. Son eşitlik düzenlenirse

$$\Delta^D \vec{H} = \sum_{i=1}^n \left\{ (\Delta \alpha) \vec{e}_{n+1} + \alpha \left(D_{\nabla_{\vec{e}_i}} \vec{e}_{n+1} \right) - 2 \vec{e}_i [\alpha] D_{\vec{e}_i} \vec{e}_{n+1} - \alpha D_{\vec{e}_i} D_{\vec{e}_i} \vec{e}_{n+1} \right\} \quad (3.1)$$

elde edilir. Böylece (3.1) eşitliğinin iki yanını \vec{e}_{n+1} ile iç çarpılırsa

$$\langle \Delta^D \vec{H}, \vec{e}_{n+1} \rangle = \Delta \alpha + \alpha \|D \vec{e}_{n+1}\|^2 \quad (3.2)$$

bulunur. Şimdi, aşağıdaki iyi bilinen tanımı verelim.

Tanım 3.1. $M \subset \mathbb{R}^m$, n-boyutlu altmanifold olsun. M nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} olmak üzere $D\vec{H} = 0$ ise M ye *paralel ortalama eğrilikli altmanifold* adı verilir (Chen 2010). Bu tür altmanifoldlar \vec{H} -paralel altmanifoldlar olarak da adlandırılır.

\mathbb{R}^m deki ($m \geq 4$), \vec{H} -paralel yüzeylerin sınıflandırılması aşağıdaki teoremlerle verilmiştir (Chen 1973 ve Yau 1975).

Teorem 3.2. m-boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^m deki M yüzeyinin \vec{H} -paralel olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki yüzeylerden biri olmasıdır;

i) \mathbb{R}^m de minimal bir yüzeydir.

ii) \mathbb{R}^m deki hiperküre üzerinde minimal bir yüzeydir.

iii) \mathbb{R}^3 de sabit ortalama eğriliğe sahip bir yüzeydir.

iv) \mathbb{R}^m nin 4-boyutlu afin alt uzayındaki hiperkürede yatan sabit ortalama eğrilikli bir yüzeydir.

Tanım 3.3. $M \subset \mathbb{R}^m$, n -boyutlu altmanifold olsun. M nin ortalama eğriliği $\alpha = \|\vec{H}\|$ sabit ise M ye *sabit ortalama eğrilikli altmanifold*, kısaca *CMC-altmanifoldu* adı verilir (Yau 1975).

Tanım 3.4. $M \subset \mathbb{R}^m$, n -boyutlu altmanifold olsun. M nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} olmak üzere $\Delta^D \vec{H} = 0$ ise M ye *harmonik ortalama eğrilikli altmanifold* adı verilir (Barros ve Garay 1995). Bu tür altmanifoldlar *zayıf biharmonik altmanifoldlar* olarak da adlandırılır (Kılıç ve ark. 2003).

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.5. $M \subset \mathbb{R}^m$, n -boyutlu CMC-altmanifold olsun. Eğer M zayıf biharmonik ise bu taktirde M altmanifoldu minimal ya da \vec{H} –paraleldir.

İspat. M zayıf biharmonik olsun. Bu taktirde (3.2) denkleminde

$$\Delta\alpha + \alpha\|D\vec{e}_{n+1}\|^2=0 \tag{3.3}$$

bulunur. Ayrıca M altmanifoldu sabit ortalama eğrilikli olduğundan $\Delta\alpha = 0$ dir. Böylece $\alpha\|D\vec{e}_{n+1}\|^2=0$ elde edilir. Sonuç olarak $\alpha = 0$ veya $\|D\vec{e}_{n+1}\| = 0$ durumları söz konusudur. Birinci durumda M altmanifoldu minimaldir. M altmanifoldunun minimal olmadığı durumda ise $D_{\vec{e}_i}\vec{e}_{n+1} = 0$, $\alpha \neq 0$ ve (3.1) eşitliklerinden $D_{\vec{e}_i}\vec{H} = 0$ elde edilir. Bu da bizi M nin \vec{H} –paralel olduğu sonucuna götürür. \square

3.2. \mathbb{R}^m deki Jakobi Ortalama Eğrilikli Altmanifoldlar

(M, g) ve (\tilde{M}, \tilde{g}) sırasıyla n ve m -boyutlu Riemann manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ bir daldırma olsun. Bununla birlikte ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve \tilde{M} üzerinde Levi-Civita koneksiyonları verilsin. Ayrıca TM , $T^\perp M$ ve SM sırasıyla tanjant, normal ve simetrik operatörler uzayını belirsin. Bu taktirde ikinci temel tensör operatörü $A: T^\perp M \rightarrow SM$; $\xi \mapsto A_\xi$ yardımıyla $\tilde{A} = A^t \circ A$ Simon operatörü tanımlanır (Simon 1968, Barros ve Gray 1997). Burada A^t gösterim olarak A nın adjointidir. Böylece $\forall \zeta \in SM$ için $\tilde{g}(A^t(\zeta), \xi) = \text{trace}(\zeta \circ A_\xi)$ dır. Böylece Simon operatörü $\langle \tilde{A}\xi, \zeta \rangle = \text{trace}(A_\xi \circ A_\zeta)$ halini alır. \tilde{M} nın eğrilik tensörü \tilde{R} olmak üzere \tilde{M} nın R^* kısmi Ricci transformasyonu $\forall \xi \in T^\perp M$ için

$$R^*\xi = \sum_{i=1}^n (\tilde{R}_{e_i\xi} e_i)^\perp \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır, burada $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, TM üzerinde çatı alan ve $(.)^\perp$ normal bileşeni belirtir. Eğer \tilde{M} bir c sabit eğrilikli uzay ise bu takdirde $R^* = -ncI$ biçiminde bir skaler dönüşümdür. Böylece (3.4) eşitliği yardımıyla Jakobi operatörü ($T^\perp M$ üzerinde 2. mertebeden diferansiyel operatörü)

$$J: T^\perp M \rightarrow T^\perp M; J\xi = (\Delta^D - \tilde{A} + R^*)\xi$$

eşitliği ile tanımlanır. Eğer $\xi \in T^\perp M$ vektör alanı $J\xi = 0$ şartını sağlarsa ξ ya *Jakobi alanı* adı verilir (Donnelly 1877 ve Simon 1968). Özel olarak $\tilde{M} = \mathbb{R}^m$ alındığında $x: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik daldırması için Jakobi operatörü

$$J = \Delta^D - \tilde{A} \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece herhangi bir $\xi \in T^\perp M$ vektör alanının Laplası

$$-\Delta\xi = \sum_{i=1}^n (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} \xi - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \xi) \quad (3.6)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. Böylece (2.4) ve (2.5) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \sum_{i=1}^n D_{e_i}D_{e_i}\xi + \sum_{i=1}^n D_{\nabla_{e_i}e_i}\xi + \sum_{i=1}^n h(e_i, A_\xi e_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(A_\xi e_i) + \sum_{i=1}^n A_{D_{e_i}\xi}e_i - \sum_{i=1}^n A_\xi(\nabla_{e_i}e_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teğet ve normal bileşenler sırasıyla

$$(\Delta\xi)^T = \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(A_\xi e_i) + \sum_{i=1}^n A_{D_{e_i}\xi}e_i - \sum_{i=1}^n A_\xi(\nabla_{e_i}e_i) \quad (3.7)$$

$$(\Delta\xi)^\perp = \Delta^D\xi + \sum_{i=1}^n h(e_i, A_\xi e_i) \quad (3.8)$$

dır. Bununla birlikte $T^\perp M$ nin $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+d}\}$ ortonormal çatı alanı için

$$h(e_i, A_\xi e_i) = \sum_{\alpha=n+1}^m \langle h(e_i, A_\xi e_i), e_\alpha \rangle e_\alpha = \sum_{\alpha=n+1}^m \langle e_i, A_\xi A_{e_\alpha} e_i \rangle e_\alpha$$

bulunur. Böylece Simon operatörü

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\xi) &= \sum_{\alpha=n+1}^m \text{trace}(A_\xi A_{e_\alpha}) e_\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n (\sum_{\alpha=n+1}^m \langle e_i, A_\xi A_{e_\alpha} e_i \rangle e_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^n h(e_i, A_\xi e_i)\end{aligned} \quad (3.9)$$

olduğundan

$$J\xi = \Delta^D\xi - \sum_{i=1}^n h(e_i, A_\xi e_i) \quad (3.10)$$

elde edilir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümünde rotasyon yüzeylerinin Jakobi ve Simon operatörleri hesaplanmıştır. Bu yüzeylerin zayıf biharmonik olmalarıyla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca ortalama eğrilik vektörlerinin Jakobi alanı olması durumu ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

4.1. \mathbb{R}^3 deki Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(u) = (f(u), g(u))$ regüler eğrisinin $\rho(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çemberi etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M: x: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, x(u, v) = (f(u), g(u) \cos v, g(u) \sin v) \quad (4.1)$$

parametrizasyonuna sahip olup buna \mathbb{R}^3 te bir dönel yüzey denir (Gray 1993).

M yüzeyi üzerindeki ortonormal çatı alanı olarak

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\varphi(u)} \frac{\partial}{\partial u} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{g(u)} \frac{\partial}{\partial v} \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\varphi(u)} (g'(u), -f'(u) \cos v, -f'(u) \sin v) \end{aligned} \quad (4.2)$$

alındığında Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{g'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_1 + \frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= \frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_1 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada,

$$\varphi^2(u) = f'(u)^2 + g'(u)^2 \quad (4.4)$$

$$\kappa(u) = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) \quad (4.5)$$

reel değerli türevlenebilir fonksiyondur. Böylece, (4.3) eşitlikleri yardımıyla M nin şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} & 0 \\ 0 & \frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

dir. Buradan M nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü

$$K = \det(A_{\vec{e}_3}) = -\frac{\kappa(u)f'(u)}{\varphi^4(u)g(u)} \quad (4.7)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \{ \text{iz}(A_{\vec{e}_3}) \vec{e}_3 \} = \frac{1}{2} \left(\frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} - \frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \right) \vec{e}_3 \quad (4.8)$$

ortalama eğriliği ise

$$\alpha = \|\vec{H}\| = \frac{f'(u)\varphi^2(u) - \kappa(u)g(u)}{2\varphi^4(u)g(u)} \quad (4.9)$$

olarak hesaplanır (Bulca ve ark. 2009). Buradan $\vec{H} = \alpha \vec{e}_3$ ortalama eğrilik vektörünün \vec{e}_1 ve \vec{e}_2 yönündeki kovaryant türevlerinden

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1} \vec{H} &= \frac{\alpha'}{\varphi(u)} \vec{e}_3 \\ D_{\vec{e}_2} \vec{H} &= 0 \\ D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} &= \frac{1}{\varphi(u)} \left(\frac{\alpha'}{\varphi(u)} \right)_u \vec{e}_3 \\ D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Bununla birlikte (4.3) eşitliklerinden

$$\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 = 0, \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = -\frac{g'(u)}{g(u)\varphi(u)} \vec{e}_1 \quad (4.11)$$

olduğundan

$$D_{\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1} \vec{H} = 0, D_{\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2} \vec{H} = -\frac{\alpha' g'(u)}{g(u)\varphi^2(u)} \vec{e}_3$$

bulunur. Bu eşitlikler

$$\Delta^D \vec{H} = D_{\nabla_{\vec{e}_1}} \vec{H} + D_{\nabla_{\vec{e}_2}} \vec{H} - D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} - D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} \quad (4.12)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\Delta^D \vec{H} = \frac{-1}{\varphi(u)} \left(\frac{g'(u)}{g(u)} \frac{\alpha'}{\varphi(u)} + \left(\frac{\alpha'}{\varphi(u)} \right)_u \right) \vec{e}_3 \quad (4.13)$$

elde edilir (Harmanlı ve ark. 2019). Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.1. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyi zayıf biharmonik ise aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\frac{g'(u)}{g(u)} \frac{\alpha'}{\varphi(u)} = - \left(\frac{\alpha'}{\varphi(u)} \right)_u.$$

Burada φ ve α fonksiyonları (4.4) ve (4.9) eşitliklerine verilmiştir.

İspat. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyon yüzeyi zayıf biharmonik olsun. Bu takdirde (4.13) yardımıyla

$$\frac{g'(u)}{g(u)} \frac{\alpha'}{\varphi(u)} + \left(\frac{\alpha'}{\varphi(u)} \right)_u = 0$$

olmalıdır. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Sonuç 4.2. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde

i) $g(u) = a$, $\gamma(u)$ düz bir doğru olmak üzere, a sabit ise M yüzeyi silindirdir. Bu yüzeyin zayıf biharmonik olması için

$$\left(\frac{f'(u)\varphi^2(u) - a\kappa(u)}{2a\varphi^4(u)} \right)_u - c\varphi(u) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır.

ii) $\kappa(u) = 0$ ise düz yüzeydir. Bu yüzeyin zayıf biharmonik olması için

$$\frac{1}{2} \left(\frac{f'(u)}{\varphi^2(u)g(u)} \right)_u = c \frac{\varphi(u)}{g(u)}$$

eşitliği sağlanmalıdır.

iii) $\alpha = \text{sabit}$ ise M bir CMC-yüzezdır. Bu yüzey aynı zamanda zayıf biharmoniktir.

Şimdi de M nin Simon operatörünü hesaplayalım. Bu nedenle (4.3) deki eşitlikler yardımıyla

$$A_{\vec{e}_3 \vec{e}_1} = -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_1, \quad A_{\vec{e}_3 \vec{e}_2} = \frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_2$$

bulunur. Buradan (4.8) ve (4.9) eşitlikleri kullanılarak

$$A_{\vec{H} \vec{e}_1} = -\frac{\alpha\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_1, \quad A_{\vec{H} \vec{e}_2} = \frac{\alpha f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_2 \quad (4.14)$$

elde edilir. Böylece

$$h(\vec{e}_1, A_{\vec{H} \vec{e}_1}) = -\frac{\alpha\kappa}{\varphi^3(u)} h(\vec{e}_1, \vec{e}_1), \quad h(\vec{e}_2, A_{\vec{H} \vec{e}_2}) = \frac{\alpha f'(u)}{\varphi(u)g(u)} h(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.3) deki eşitliklerden

$$h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_3, \quad h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \frac{f'(u)}{\varphi(u)g(u)} \vec{e}_3,$$

dir. M yüzeyinin Simon operatörü

$$\tilde{A}(\vec{H}) = h(\vec{e}_1, A_{\vec{H} \vec{e}_1}) + h(\vec{e}_2, A_{\vec{H} \vec{e}_2}) \quad (4.15)$$

olduğundan son eşitlikler yardımıyla

$$\tilde{A}(\vec{H}) = \frac{\alpha}{\varphi^2(u)} \left(\frac{\kappa^2}{\varphi^4(u)} + \frac{(f'(u))^2}{g^2(u)} \right) \vec{e}_3 \quad (4.16)$$

bulunur (Harmanlı ve ark. 2019). Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Y. Teorem 4.3. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğriliğinin Jakobi operatörü altındaki görüntüsü

$$J(\vec{H}) = \frac{-1}{\varphi(u)} \left\{ \left(\frac{g'(u)}{g(u)} \frac{\alpha'}{\varphi(u)} + \left(\frac{\alpha'}{\varphi(u)} \right)_u \right) + \frac{\alpha}{\varphi(u)} \left(\frac{\kappa^2}{\varphi^4(u)} + \frac{(f'(u))^2}{g^2(u)} \right) \right\} \vec{e}_3$$

dir.

Meridyen eğrisi γ nın birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. $M \subset \mathbb{R}^3$ meridyen eğrisi birim hızlı olan bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde, \vec{H} nin bir Jakobi alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{g'(u)}{g(u)} \alpha' + \alpha'' \right) + \alpha \left(\kappa^2 + \frac{(f'(u))^2}{g^2(u)} \right) = 0$$

eşitliği sağlanmasıdır. Burada κ , α ve $f'(u)$ fonksiyonları aşağıdaki tanımlandığı gibidir;

$$\kappa = \frac{g''(u)}{\sqrt{1-(g'(u))^2}}, \quad \alpha = \frac{f'(u) - \kappa(u)g(u)}{2g(u)}, \quad f'(u) = \sqrt{1 - (g'(u))^2} \neq 0.$$

4.2. \mathbb{R}^3 deki Delaunay Yüzeyleri

Düzlemsel bir eğri, diğer bir düzlemsel eğri üzerinde kaymadan yuvarlanırsa, hareketli eğri üzerindeki bir noktanın geometrik yeri *rulet (roulette) eğrisini* oluşturur. Koniklerin odak noktaları, bir doğru boyunca yuvarlandığında meydana gelen rulet eğrisi, bir dönel yüzeyin meridyen eğrisi olarak alındığında bu yüzey *Delaunay yüzeyi* olarak adlandırılır. Delaunay yüzeyleri sabit ortalama eğriliğe sahiptir. Burada dönel yüzeyin dönme eksenini, odak noktasının yuvarlandığı doğru olarak alınmıştır (Mladenov 2002). Koniklerin odak noktası olan $F' = (f_1(u), f_2(u))$ izinin bir doğru boyunca yuvarlandığındaki parametrizasyonunu bulabiliriz. Böylece $P = (p_1, p_2)$ konik üzerinde bir nokta olmak üzere P den geçen teğet doğru T , koniğin odak noktası F olsun. T ye dik ve F den geçen bir normal doğru N olmak üzere T ile N nin arakesit noktası Q ile gösterilsin (Şekil 4.1). Amacımız hareket esnasında $F' = (f_1(u), f_2(u))$ izinin oluşturduğu eğrinin parametrik denklemini bulmaktır.

Konik sırasıyla parabol, elips ve hiperbol olarak seçilirse elde edilen Delaunay yüzeyleri de sırasıyla katenoid, unduloid ve nudoid olarak adlandırılır (Cric 2008).

I) Konik,

$$\alpha(u) = (2b\sinh(u), b\sinh^2(u))$$

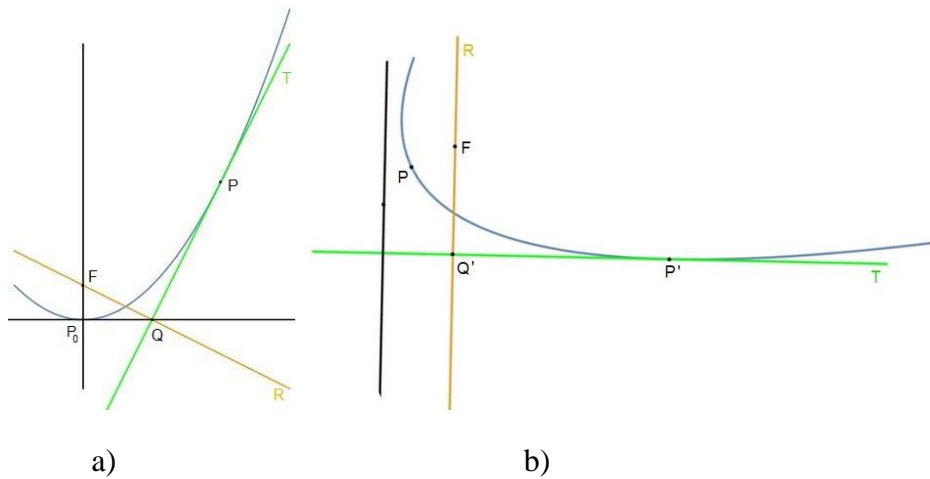
parametresi ile verilen parabol olsun $u \in [u_1, u_2]$ ve $u_0 = 0$ olup eğrinin yay uzunluğu

$$s(u) = \int_{u_0}^u \|\alpha'(t)\| dt = b(u + \sinh(u) \cosh(u))$$

dir (Şekil 4.1). Böylece Q noktasının apsisi $f_1(u) = s(u) - |\overrightarrow{P'Q'}| = s(u) - |\overrightarrow{PQ}|$ olduğundan teğet doğru T nin denklemi

$$T: (2b\sinh(u), b\sinh^2(u)) + \lambda(2b\cosh(u), 2b\sinh(u)\cosh(u))$$

dir. Bu doğru parabolün $P = \alpha(u)$ noktasından geçer ve pozisyon vektörü de $\alpha'(u)$ dir (Sintes 2018). Kesim noktası Q nun koordinatları, $Q = (b\sinh(u), 0)$ dir. Böylece $\overrightarrow{PQ} = (-b\sinh(u), -b\sinh^2(u))$ olacaktır (Sintes 2018). Buradan $\|\overrightarrow{PQ}\| = b\sinh(u)\cosh(u)$ bulunur. Böylece $f_1(u) = s(u) - |\overrightarrow{PQ}| = bu$ dir. Şimdi ise $f_2(u) = \|\overrightarrow{FQ}\|$ yi hesaplayalım.



Şekil 4.1. Koniğin ruletinin a) ilk hali, b) yuvarlandıktan sonraki hali

R doğrusu Q dan geçen $\alpha'(u)$ ya dik bir doğrudur. Bu nedenle

$$R: (b\sinh(u), 0) + \lambda(-2b\sinh(u) \cosh(u), 2b\cosh(u))$$

dir. F noktasının koordinatları $F = (0, b)$ dir. Böylece $\overrightarrow{FQ} = (b\sinh(u), -b)$ bulunur.

Buradan $f_2(u) = \|\overrightarrow{FQ}\| = b\cosh(u)$ dir. Buradan odak noktasının parametrizasyonu

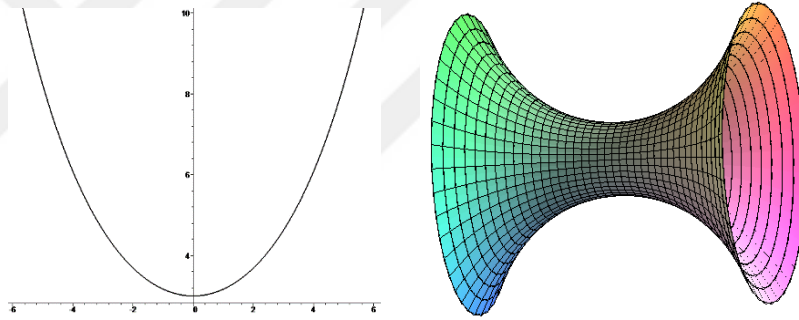
$$A(u) = (f_1(u), f_2(u)) = (bu, b\cosh(u))$$

dir. Bu eğri *katenary eğrisi* olarak bilinir. Böylece Delaunay yüzeyi

$$X_p(u, v) = (bu, b\cosh(u)\cos(v), b\cosh(u)\sin(v))$$

parametrizasyonuna sahip olacaktır. Bu yüzeye *katenuid yüzeyi* adı verilir (Şekil 4.2).

Katenuid yüzeyi minimal olup bir tür CMC-yüzevidir. Dolayısıyla bu yüzey aşikar zayıf biharmonik yüzeydir.



Şekil 4.2. Katenary eğrisi ve katenuid yüzeyi

II) Konik

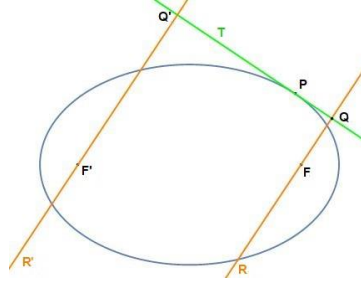
$$\beta(u) = (a\cos(u), b\sin(u))$$

parametresi ile verilen elips olsun. $b < a, c = \sqrt{a^2 - b^2}$ olmak üzere $u \in [u_1, u_2]$ olsun.

$u_0 = 0$ dan u ya yay uzunluğu

$$s(u) = \int_{u_0}^u \|\beta'(t)\| dt = \int_{u_0}^u \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)} dt$$

dir (Sintes 2018). Elipsin iki odağı olduğundan iki eğri üretilir (Şekil 4.3).



Şekil 4.3. Elips

Teğet doğruya yakın olan odak F olsun. Bu takdirde

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{c \sin(u)(a - c \cos(u))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)}}$$

dir. Böylece

$$f_1(u) = s(u) - |\overrightarrow{PQ}| = \int_{u_0}^u \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)} dt - \frac{c \sin(u)(a - c \cos(u))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)}}$$

$$f_2(u) = \|\overrightarrow{FQ}\| = \frac{b(a - c \cos(u))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)}}$$

dir. Böylece elipsin odaklarının rület parametrizasyonu $B_1(u) = (f_1(u), f_2(u))$ olur.

Diğer odak F' seçilirse $\overrightarrow{PQ'}$ doğrusu boyunca ilk koordinat

$$f_1(u) = \left(\int_{u_0}^u \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(t)} dt - \frac{c \sin(u)(a + c \cos(u))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)}} \right)$$

ve ikinci koordinat

$$f_2(u) = \frac{b(a + c \cos(u))}{\sqrt{a^2 - c^2 \cos^2(u)}}$$

olup elipsin diğer odağı F' nün rület parametrizasyonu $B_2(u) = (f_1(u), f_2(u))$ bulunur.

Elipsin odaklarından geçen rület eğrisi *undulary* olarak bilinir (Sintes 2018). Dönel

yüzey ise unduloid yüzeyidir. Bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = \frac{1}{2\alpha}$, $\alpha > 0$ dir.

III) Konik

$$\gamma(u) = (a \cosh(u), b \sinh(u))$$

parametresi ile verilen *hiperbol* olsun. $a, b > 0, c = \sqrt{a^2 + b^2}$ olmak üzere ve $u \in [u_1, u_2]$ olsun. Böylece $u_0 = 0$ dan u ya yay uzunluğu

$$s(u) = \int_{u_0}^u \|\gamma'(t)\| dt = \int_{u_0}^u \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2} dt$$

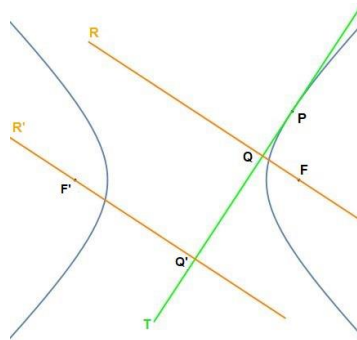
İlk olarak F , teğet doğrusunun kapalı odağı olsun. \overline{PQ} doğru parçasının odak noktasının ilk koordinatının izi

$$f_1(u) = s(u) - |\overline{PQ}| = \int_{u_0}^u \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2} dt - \frac{c \cdot \sinh(u)(c \cosh(u) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2}}$$

dır. Böylece \overline{FQ} doğrusunun ikinci koordinatı için

$$f_2(u) = \|\overline{FQ}\| = \frac{b(c \cosh(u) - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(u) - a^2}}$$

bulunur (Sintes 2018).



Şekil 4.4. Hiperbol

F odaklı hiperbolün genel rulet parametrizasyonu $C_1(u) = (f_1(u), f_2(u))$ bulunur. Odak F' alınırsa $\overline{PQ'}$ doğru parçasının odağının ilk koordinatları,

$$f_1(u) = s(u) - |\overrightarrow{PQ'}| = \int_{u_0}^u \sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2} dt - \frac{c \sinh(u)(c \cosh(u) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}$$

ve $\overrightarrow{F'Q'}$ doğrusunun ikinci koordinatı

$$F_2(u) = \|\overrightarrow{F'Q'}\| = \frac{b(c \cosh(u) + a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(t) - a^2}}$$

bulunur. F' odaklı hiperbolün genel rulet parametrizasyonu $C_2(u) = (F_1(u), F_2(u))$

bulunur. Hiperbolün odağından geçen rulet eğrisi *nodary* olarak bilinir (Sintes 2018).

Dönel yüzey ise nodoid yüzeyidir. Bu yüzeyin ortalama eğriliği $H = -\frac{1}{2\alpha}$, $\alpha > 0$ dır.

4.3. \mathbb{R}^4 deki Genel Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri

4-boyutlu Öklit uzayı \mathbb{R}^4 de genel rotasyon yüzeyi

$$M_1: x(u, v) = (f(u)\cos cv, f(u)\sin cv, g(u)\cos dv, g(u)\sin dv) \quad (4.17)$$

parametrizasyonu ile verilir (Ganchev ve Milousheva 2008, Arslan ve ark. 2011, Arslan ve ark. 2017). Burada $\gamma(u) = (f(u), g(u))$, rotasyonun meridyen eğrisi olarak bilinir.

Böylece M_1 in ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial u}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial v}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\varphi} (g'(u) \cos cv, g'(u) \sin cv, -f'(u) \cos dv, -f'(u) \sin dv), \\ \vec{e}_4 &= \frac{1}{\omega} (-dg(u)\sin cv, dg(u) \cos cv, cf(u) \sin dv, -cf(u) \cos dv) \end{aligned} \quad (4.18)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} \\ \omega(u) &= \sqrt{c^2 f^2(u) + d^2 g^2(u)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \frac{\kappa}{\varphi^3} \vec{e}_3 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= \frac{\rho}{\varphi \omega^2} \vec{e}_4 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{\lambda}{\varphi \omega^2} \vec{e}_2 + \frac{\rho}{\varphi \omega^2} \vec{e}_4 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{\lambda}{\varphi \omega^2} \vec{e}_1 + \frac{\beta}{\varphi \omega^2} \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= \frac{\kappa}{\varphi^3} \vec{e}_1 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\frac{\rho}{\varphi \omega^2} \vec{e}_2 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{\beta}{\varphi \omega^2} \vec{e}_2 + \frac{\delta}{\varphi \omega^2} \vec{e}_4 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= -\frac{\rho}{\varphi \omega^2} \vec{e}_1 - \frac{\delta}{\varphi \omega^2} \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\kappa &= f'' g' - f' g'', \\
\lambda &= c^2 f f' + d^2 g g', \\
\beta &= c^2 f' g - d^2 f g' \\
\rho &= cd(f' g - f g'), \\
\delta &= cd(ff' + gg')
\end{aligned} \tag{4.22}$$

M_1 üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece, (4.20) deki eşitlikler kullanılırsa şekil operatörü matrisleri

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\varphi^3} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\varphi \omega^2} \end{pmatrix}, \quad A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho}{\varphi \omega^2} \\ \frac{\rho}{\varphi \omega^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

elde edilir. Buradan M_1 in Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$\begin{aligned}
K &= \det(A_{\vec{e}_3}) + \det(A_{\vec{e}_4}) \\
&= \frac{1}{\varphi^2 \omega^2} (\kappa \beta - \frac{\rho^2}{\omega^2}),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{2}\{iz(A_{e_3})\vec{e}_3 + iz(A_{e_4})\vec{e}_4\} \\ &= \frac{1}{2\varphi}\left\{\frac{\kappa}{\varphi^2} + \frac{\beta}{\omega^2}\right\}\vec{e}_3\end{aligned}\quad (4.25)$$

dir. Böylece, M_1 in ortalama eğriliği

$$\alpha = \|\vec{H}\| = \frac{\omega^2\kappa + \varphi^2\beta}{2\varphi^3\omega^2}\quad (4.26)$$

olarak bulunur. Burada ω, κ, φ ve β reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.19) ve (4.22) de tanımlanmıştır.

Teorem 4.5. M_1 yüzeyi (4.17) parametrizasyon ile verilen genel rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M_1 yüzeyi \vec{H} –paralel ise bu takdirde M_1 minimal ya da

$$x(u, v) = \left(r_0 \cos\left(\frac{u}{r_0}\right) \cos cv, r_0 \cos\left(\frac{u}{r_0}\right) \sin cv, r_0 \sin\left(\frac{u}{r_0}\right) \cos dv, r_0 \sin\left(\frac{u}{r_0}\right) \sin dv\right)\quad (4.27)$$

parametrizasyona sahip bir CMC-yüzeyidir. Aslında bu yüzey $\mathbf{S}^3(r_0) \subset \mathbb{R}^4$ de yatan minimal bir yüzeydir.

İspat. (4.21) eşitliğinin e_1 ve e_2 ye göre kovaryant türevi alınıp (4.21) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}D_{\vec{e}_1}\vec{H} &= \frac{\alpha'}{\varphi}\vec{e}_3 \\ D_{\vec{e}_2}\vec{H} &= \frac{\alpha\delta}{\varphi\omega^2}\vec{e}_4\end{aligned}\quad (4.28)$$

elde edilir. Böylece M_1 yüzeyi \vec{H} –paralel olduğundan (4.28) yardımıyla $\alpha = 0$ yada $\alpha' = 0$ ve $\delta = 0$ dır. Birinci durumda M_1 yüzeyi minimal olup $\omega^2\kappa + \varphi^2\beta = 0$ eşitliği sağlanır. Burada ω, κ, φ ve β türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.19) ve (4.22) da verilmiştir. İkinci durumda M_1 bir CMC-yüzeyi olup $ff' + gg' = 0$, şartı sağlanır. Yani, $f^2 + g^2 = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dır. Böylece γ meridyen eğrisi

$$\gamma(u) = \left(\alpha \cos\left(\frac{u}{\alpha}\right), \alpha \sin\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right)$$

biçiminde bir çemberdir (Dursun ve Turgay 2012). Bu nedenle M_1 yüzeyi (4.27) yaması ile verilen bir rotasyon yüzeyidir. \square

Benzer şekilde, (4.28) daki vektör alanlarının \vec{e}_1, \vec{e}_2 ye göre kovaryant türevlerinden

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} &= \frac{1}{\varphi} \left(\frac{\alpha'}{\varphi} \right)' \vec{e}_3 \\ D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} &= -\alpha \left(\frac{\delta}{\varphi \omega^2} \right)^2 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.29)$$

dir. Bununla birlikte (4.20) Gauss denklemlerinden

$$\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 = 0, \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 = -\frac{\lambda}{\varphi \omega^2} \vec{e}_1 \quad (4.30)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} D_{\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1} \vec{H} &= 0 \\ D_{\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2} \vec{H} &= -\frac{\lambda}{\varphi \omega^2} D_{\vec{e}_1} \vec{H} \\ &= -\frac{\lambda \alpha'}{\varphi^2 \omega^2} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir. Ayrıca ortalama eğrilik vektörünün Laplası

$$\Delta^D \vec{H} = D_{\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1} \vec{H} + D_{\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2} \vec{H} - D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} - D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} \quad (4.32)$$

olduğundan (4.30) ve (4.31), (4.32) de yerine yazılırsa

$$\Delta^D \vec{H} = \frac{1}{\omega^4 \varphi^3} \{ \alpha \varphi \delta^2 + \omega^4 (\varphi' \alpha' - \alpha'' \varphi) - \varphi \omega^2 \lambda \alpha' \} \vec{e}_3 \quad (4.33)$$

bulunur (Harmanlı ve ark. 2019). Böylece, aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 4.6. M_1 yüzeyi (4.17) deki parametrizasyon ile verilen genel rotasyon yüzeyi olsun. Bu taktirde M_1 in zayıf biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha \varphi \delta^2 + \omega^4 (\varphi' \alpha' - \alpha'' \varphi) - \varphi \omega^2 \lambda \alpha' = 0 \quad (4.34)$$

olmasıdır. Burada α ortalama eğrilik ve δ, φ, λ fonksiyonları (4.19) ve (4.22) de tanımlanan M_1 üzerinde türevlenebilen fonksiyonlarıdır.

Sonuç 4.7. M_1 yüzeyi (4.17) deki parametrizasyon ile verilen sabit ortalama eğrilikli genel rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M_1 zayıf biharmonik ise bu taktirde M_1 minimaldir ya da (4.27) deki parametrizasyona sahip bir CMC-yüzeyidir.

İspat. M_1 sabit ortalama eğrilikli genel rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M_1 zayıf biharmonik ise (4.34) den $\alpha\delta^2=0$ dır. Böylece $\alpha=0$ ya da $ff' + gg'=0$ dır. Buradan, $f^2 + g^2 = \alpha^2$, $a \in \mathbb{R}^+$ dır. Böylece γ meridyen eğrisi $\gamma(u) = \left(\alpha\cos\left(\frac{u}{\alpha}\right), \alpha\sin\left(\frac{u}{\alpha}\right)\right)$ parametrelili bir çember olup M_1 rotasyon yüzeyi (4.27) yaması ile verilen bir CMC- yüzeyidir. \square

Tanım 4.8. \mathbb{R}^4 teki Vranceanu yüzeyi aşağıdaki parametrizasyon ile tanımlanır

$$f(u) = r(u)\cos u, \quad g(u) = r(u)\sin u, \quad a = b = 1, \quad (4.35)$$

burada $r(u)$ reel değerli sıfırdan farklı bir fonksiyondur (Vranceanu 1977, Arslan ve ark. 2011).

Eğer $r(u)$ fonksiyonu reel sabit ise Vranceanu yüzeyi Clifford torus a dönüşür, diğer bir deyişle aynı yarıçaplı iki çemberin Riemann çarpımı elde edilir (Yoon 2003). Vranceanu yüzeyi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.9. M_1 yüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. Bu taktirde M_1 nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^2} \quad (4.36)$$

$$\vec{H} = \frac{rr'' - 3(r')^2 - 2r^2}{2(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_3 \quad (4.37)$$

dir.

Önerme 4.10. M_1 yüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. Ortalama eğrilik vektörünün Laplası

$$\Delta^D \vec{H} = \{\eta^2 \theta^2 \alpha - \eta(\eta' + \eta\theta)\alpha' - \eta^2 \alpha''\} \vec{e}_3 \quad (4.38)$$

dır. Burada $\eta = \frac{1}{\sqrt{r^2+(r')^2}}$, $\theta = \frac{r'}{r}$, M_1 de türevlenebilir fonksiyonlardır.

Teorem 4.6 nin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.11. M_1 sabit ortalama eğrilikli minimal olmayan bir Vranceanu rotasyonel yüzeyi olsun. Eğer M_1 yüzeyi zayıf biharmonik ise M_1 yüzeyi \mathbb{R}^4 de bir Clifford torus dur.

Şimdi de M_1 rotasyon yüzeyinin Simon operatörünü hesaplayalım. (4.21) deki eşitlikler yardımıyla

$$A_{\vec{e}_3 \vec{e}_1} = -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_1, A_{\vec{e}_3 \vec{e}_2} = \frac{\beta}{\varphi(u)w^2(u)} \vec{e}_2 \quad (4.39)$$

bulunur. Buradan, son eşitlikler ve (4.25) kullanılarak

$$A_{\vec{H} \vec{e}_1} = -\frac{\alpha\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_1, A_{\vec{H} \vec{e}_2} = \frac{\alpha\beta}{\varphi(u)w^2(u)} \vec{e}_2 \quad (4.40)$$

elde edilir. Burada α ortalama eğrilik olup (4.26) eşitliği ile verilmiştir. Benzer şekilde (4.21) deki eşitliklerden

$$h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = -\frac{\kappa}{\varphi^3(u)} \vec{e}_3, h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \frac{\beta}{\varphi(u)w^2(u)} \vec{e}_3,$$

dir. Böylece

$$h(\vec{e}_1, A_{\vec{H} \vec{e}_1}) = -\frac{\alpha\kappa^2}{\varphi^6(u)} \vec{e}_3, h(\vec{e}_2, A_{\vec{H} \vec{e}_2}) = \frac{\alpha\beta^2}{\varphi^2(u)w^4(u)} \vec{e}_3 \quad (4.41)$$

bulunur. Buradan (3.9) ve (4.41) eşitliklerinden M_1 yüzeyinin Simon operatörü

$$\tilde{A}(\vec{H}) = \frac{\alpha}{\varphi^2(u)} \left(\frac{\beta^2}{w^4(u)} - \frac{\kappa^2}{\varphi^4(u)} \right) \vec{e}_3 \quad (4.42)$$

dir. Böylece (3.5), (4.33) ve (4.42) yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Y. Teorem 4.12. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.17) parametrelendirmesi ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M nin ortalama eğriliğinin Jakobi operatörü altındaki görüntüsü

$$J(\vec{H}) = \frac{1}{\varphi^4 w^4} \{ \alpha \varphi^2 \delta^2 + \varphi \omega^4 (\varphi' \alpha' - \alpha'' \varphi) - \varphi^2 \omega^2 \lambda \alpha' + \alpha \kappa^2 w^4 - \alpha \beta^2 \varphi^4 \} \vec{e}_3$$

dir. Burada $\alpha, \beta, \varphi, \delta$ ve κ fonksiyonları (4.19) ve (4.22) de verildiği gibidir.

Meridyen eğrisi γ nın birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.13. $M_1 \subset \mathbb{R}^4$ rotasyon yüzeyinin meridyen eğrisi birim hızlı olsun. Bu takdirde, M nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} nin bir Jakobi alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\alpha(\delta^2 - \beta^2 + \kappa^2) - \alpha' \lambda \omega^2 - \alpha'' \omega^4 = 0$$

eşitliği sağlanmasıdır.

4.4. \mathbb{R}^4 deki 1. Tip Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri

Meridyen eğrisi

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(u) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u))$$

birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu takdirde γ nın $\rho(v) = (\cos v, \sin v)$ birim çemberi etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M_2 : X(u, v) = (f_1(u), f_2(u), f_3(u) \cos v, f_3(u) \sin v) \quad (4.43)$$

yamasına sahip olup bu yüzeye \mathbb{R}^4 te küresel çarpım yüzeyi adı verilir (Bayram ve ark. 2017). Bu tür yüzeyler 1. tip rotasyon yüzeyleri olarak da bilinir (Arslan ve ark. 2017).

M_2 nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f_3} \frac{\partial}{\partial v}, \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{\kappa_\gamma} (f_1''(u), f_2''(u), f_3''(u) \cos v, f_3''(u) \sin v), \\ \vec{e}_4 &= \frac{1}{\kappa_\gamma} (p_{23}, p_{13}, p_{12} \cos v, p_{12} \sin v) \end{aligned} \quad (4.44)$$

vektör alanları tarafından gerilir. Burada

$$\kappa_\gamma = \sqrt{(f_1'')^2 + (f_2'')^2 + (f_3'')^2} \quad (4.45)$$

γ eğrisinin eğriliği ve $p_{ij}(u) = f_i'(u)f_j''(u) - f_j'(u)f_i''(u)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \kappa_\gamma \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{f_3'}{f_3} \vec{e}_2 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f_3'}{f_3} \vec{e}_1 - \frac{f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_3 - \frac{\kappa}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.46)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= -\kappa_\gamma \vec{e}_1 + \tau \vec{e}_4 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= \frac{f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\tau \vec{e}_3 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= \frac{\kappa}{\kappa_\gamma f_3} \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

elde edilir. Burada τ , meridyen eğrisi γ nın burulması ve

$$\kappa = p_{12} = f_1'(u)f_2''(u) - f_2'(u)f_1''(u) \quad (4.48)$$

M_2 üzerinde türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece, (4.46) deki eşitlikler kullanılırsa şekil operatörü matrisleri

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \kappa_\gamma & 0 \\ 0 & \frac{-f_3''}{\kappa_\gamma f_3} \end{pmatrix}, A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{\kappa_\gamma f_3} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

elde edilir. Buradan M_2 nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = -\frac{f_3''}{f_3} \quad (4.50)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\kappa_\gamma + \frac{\kappa}{\kappa_\gamma} \right) \vec{e}_3 - \frac{\kappa}{f_3 \kappa_\gamma} \vec{e}_4 \right\} \quad (4.51)$$

dir. Böylece, basitliğin hatırına M_2 nin ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = H_1 \vec{e}_3 + H_2 \vec{e}_4$ olarak seçilirse M_2 nin 1. ve 2. ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$H_1 = \frac{1}{2} \left(\kappa_\gamma + \frac{\kappa}{\kappa_\gamma} \right), H_2 = \frac{-\kappa}{2f_3 \kappa_\gamma} \quad (4.52)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç verilir.

Teorem 4.14. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.43) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M_2 nin minimal olması için gerek ve yeter şart M_2 nin düz yüzey veya meridyen eğrisi

$$\begin{aligned} f_1(u) &= \frac{\lambda \sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1 \right) + c_3 \\ f_2(u) &= \frac{\sqrt{2c_2 - c_1^2}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \ln \left(\sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} + u + c_1 \right) + c_4 \\ f_3(u) &= \pm \sqrt{u^2 + 2c_1 u + 2c_2} \end{aligned} \quad (4.53)$$

olan bir yüzey olmasıdır. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 ve λ reel sabitlerdir.

İspat. Bakınız (Arslan ve ark. 2017). \square

M_2 yüzeyin \vec{H} –paralel olması durumunda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.15. M_2 yüzeyi (4.43) daki parametrizasyon ile verilen 1. tip rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M_2 nin \vec{H} –paralel olması için gerek ve yeter şart

$$(H_1)_u - \tau H_2 = 0,$$

$$(H_2)_u + \tau H_1 = 0 \quad (4.54)$$

olmasıdır. Burada H_1 ve H_2 reel değerli fonksiyonlar olup (4.52) de verilmiştir.

İspat. (\Rightarrow): $\vec{H} = H_1 \vec{e}_3 + H_2 \vec{e}_4$ eşitliğinin e_1 ve e_2 ye göre kovaryant türevi alınıp (4.47) eşitliği kullanılırsa

$$D_{\vec{e}_1} \vec{H} = (H_1)_u \vec{e}_3 + (H_2)_u \vec{e}_4 + H_1 D_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 + H_2 D_{\vec{e}_1} \vec{e}_4$$

$$D_{\vec{e}_2} \vec{H} = 0 \quad (4.55)$$

elde edilir. Basitliğin hatırına

$$A = (H_1)_u - \tau H_2 \text{ ve } B = (H_2)_u + \tau H_1 \quad (4.56)$$

alınırsa

$$D_{\vec{e}_1} \vec{H} = A(u) \vec{e}_3 + B(u) \vec{e}_4 \quad (4.57)$$

elde edilir. Böylece M_2 yüzeyi \vec{H} –paralel ise (4.55) ve (4.56) yardımıyla $A(u) = 0$ ve $B(u) = 0$ dir.

(\Leftarrow): Aşıkardır. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Bu teoremin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.16. M_2 yüzeyi (4.43) daki parametrizasyon ile verilen 1. tip rotasyonel yüzeyi olsun. Bu takdirde M_2 yüzeyi \vec{H} –paralel ise bu yüzey bir CMC-yüzeydir.

İspat. M_2 yüzeyi \vec{H} –paralel olsun. Bu takdirde (4.55) ve (4.57) eşitliğinden

$$(H_1)_u - \tau H_2 = 0 \text{ ve } (H_2)_u + \tau H_1 = 0$$

bulunur. Her iki eşitlikte τ çekilip birbirine eşitlenirse

$$H_1(H_1)_u + H_2(H_2)_u = 0$$

elde edilir. Böylece 1. ve 2. ortalama eğriliklerinin kareleri toplamı sabit olmalıdır. Diğer bir deyişle $H_1^2 + H_2^2 = c^2$ dir. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Benzer şekilde, (4.55) deki vektör alanlarının e_1, e_2 ye göre kovaryant türevlerinden;

$$D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} = (A_u - \tau B) \vec{e}_3 + (B_u + \tau A) \vec{e}_4$$

$$D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} = 0 \quad (4.58)$$

elde edilir. Burada A ve B türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.56) de tanımlanmıştır. Ayrıca (4.46) daki Gauss denklemlerinden

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= 0 \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f_3'}{f_3} \vec{e}_1\end{aligned}\quad (4.59)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}D_{\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1} \vec{H} &= 0 \\ D_{\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2} \vec{H} &= -\frac{f_3'}{f_3} (A(u)\vec{e}_3 + B(u)\vec{e}_4)\end{aligned}\quad (4.60)$$

dir. Buradan (4.59) ve (4.60) eşitlikler yardımıyla ortalama eğrilik vektörünün Laplası

$$-\Delta^D \vec{H} = \left(\frac{f_3'}{f_3} A + A_u - \tau B\right) \vec{e}_3 + \left(\frac{f_3'}{f_3} B + B_u + \tau A\right) \vec{e}_4\quad (4.61)$$

bulunur (Harmanlı ve ark. 2019). Eğer, M_2 yüzeyi zayıf biharmonik ise $\Delta^D \vec{H} = 0$ olmalıdır. Böylece (4.61) gereği

$$\frac{f_3'}{f_3} A + A_u - \tau B = 0, \quad \frac{f_3'}{f_3} B + B_u + \tau A = 0$$

dir. Bunların ortak çözümünden

$$\frac{f_3'}{f_3} (A^2 + B^2) + AA_u + BB_u = 0\quad (4.62)$$

bulunur. Buradan

$$(A^2 + B^2) = \left(\frac{c}{f_3}\right)^2\quad (4.63)$$

elde edilir. Böylece, aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

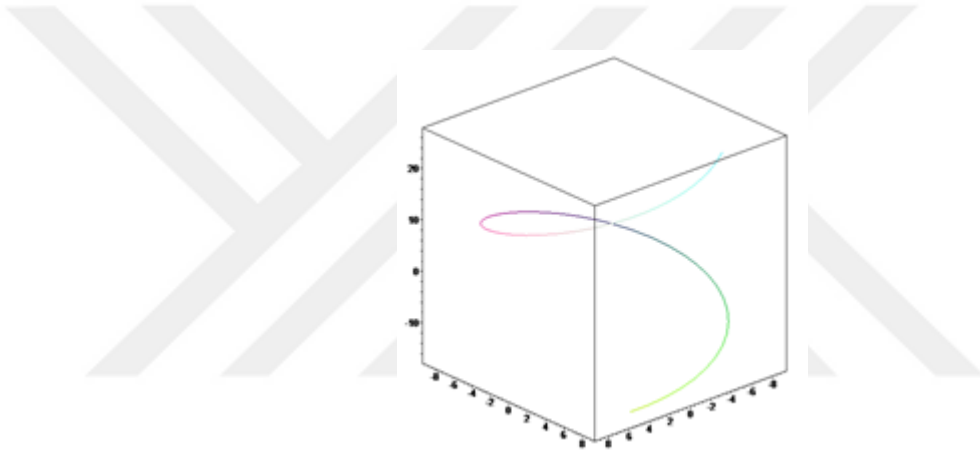
Teorem 4.17. M_2 yüzeyi (4.43) daki parametrisasyon ile verilen 1. tip rotasyon yüzey olsun. Bu takdirde M_2 nin zayıf biharmonik olması için gerek ve yeter şart (4.63)

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada A ve B türevlenebilir fonksiyonlar olup (4.56) de tanımlanmıştır.

Örnek 4.18. M_2 rotasyon yüzeyi $\gamma(u) = \left(c \int \cos\left(\frac{u}{c}\right) du, c \int \cos\left(\frac{u}{c}\right) du, au + b \right)$ meridyen eğrisi ile verilsin. Bu takdirde γ eğrisi birim hızlı olduğundan $c^2 = 1 - a^2 > 0$ dır. Böylece (4.48) eşitliğinden $\kappa = -c$ dir. Bu durumda (4.50) yardımıyla $K = 0$ olduğundan yüzey düzdür. Bununla birlikte (4.45) gereği $\kappa_\gamma = 1$ bulunur. Sonuçta,

$H_1 = \frac{1}{2}, H_2 = 0$ olup bir CMC-yüzejidir.

Bu yüzeyin meridyen eğrisinin $a = 2, b = 5, c = 3$ için grafiği Şekil 4.5 de verilmiştir.

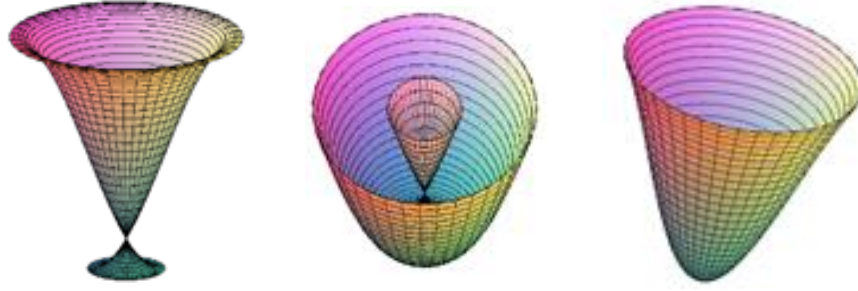


Şekil 4.5. M_2 Rotasyon yüzeyinin meridyen eğrisi

Bu yüzeyin izdüşümlerinin grafikleri

```
> plot3d([f,(2*t+5)*cos(v),(2*t+5)*sin(v)], t=-5..5, v=-2*Pi..2*Pi,grid=[40,40]);
> plot3d([g,(2*t+5)*cos(v),(2*t+5)*sin(v)], t=-5..5, v=-2*Pi..2*Pi,grid=[40,40]);
> plot3d([f+g,(2*t+5)*cos(v),(2*t+5)*sin(v)], t=-5..5, v=-2*Pi..2*Pi,grid=[40,40]);
```

Maple komutları yardımıyla sırasıyla Şekil 4.6 de verilmiştir.



Şekil 4.6. M_2 Rotasyon yüzeyinin bazı izdüşümleri

Şimdi de M_2 nin Simon operatörünü hesaplayalım. (4.47) deki eşitlikler yardımıyla

$$A_{\vec{e}_3 \vec{e}_1} = \kappa_\gamma \vec{e}_1, \quad A_{\vec{e}_4 \vec{e}_2} = 2H_2 \vec{e}_2 \quad (4.64)$$

bulunur. Buradan, son eşitlikler ve (4.51) kullanılarak

$$A_{\vec{H} \vec{e}_1} = \kappa_\gamma H_1 \vec{e}_1, \quad A_{\vec{H} \vec{e}_2} = 2H_2^2 \vec{e}_2 \quad (4.65)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.46) deki eşitliklerden

$$h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \kappa_\gamma \vec{e}_3, \quad h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \frac{K}{\kappa_\gamma} \vec{e}_3 + 2H_2 \vec{e}_4,$$

dir. Böylece

$$h(\vec{e}_1, A_{\vec{H} \vec{e}_1}) = \kappa_\gamma^2 H_1 \vec{e}_3, \quad h(\vec{e}_2, A_{\vec{H} \vec{e}_2}) = 2H_2^2 \frac{K}{\kappa_\gamma} \vec{e}_3 + 4H_2^3 \vec{e}_4 \quad (4.66)$$

bulunur. Buradan (4.15) ve (4.66) eşitliklerinden M yüzeyinin Simon operatörü

$$\tilde{A}(\vec{H}) = \left(\kappa_\gamma^2 H_1 + \frac{2KH_2^2}{\kappa_\gamma} \right) \vec{e}_3 + 4H_2^3 \vec{e}_4 \quad (4.67)$$

elde edilir. Böylece (3.5), (4.61) ve (4.67) eşitlikleri yardımıyla

$$J(\vec{H}) = - \left(\frac{f_3'}{f_3} A + A_u - \tau B + \kappa_\gamma^2 H_1 + \frac{2KH_2^2}{\kappa_\gamma} \right) \vec{e}_3 - \left(\frac{f_3'}{f_3} B + B_u + \tau A + 4H_2^3 \right) \vec{e}_4 \quad (4.68)$$

dır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.19. $M_2 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.43) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde, M_2 nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} nin bir Jakobi alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{f_3'}{f_3} A + A_u - \tau B + \kappa_\gamma^2 H_1 + \frac{2KH_2^2}{\kappa_\gamma} = 0, \frac{f_3'}{f_3} B + B_u + \tau A + 4H_2^3 = 0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada K yüzeyin Gauss eğriliği ve A, B, H_1, H_2 ve κ_γ fonksiyonları (4.45), (4.52) ve (4.56) de verildiği gibidir.

4.5. \mathbb{R}^4 deki 2. Tip Rotasyon Yüzeylerinin Jakobi ve Simon Operatörleri

Meridyen eğrisi $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu takdirde γ nin $\rho(v)$ birim küresel eğrisinin etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$M_3 : z(u, v) = f(u)\rho(v) + g(u)E_1 \quad (4.69)$$

yamasına sahip olup bu yüzeye \mathbb{R}^4 te meridyen yüzeyi adı verilir ve burada $\vec{E}_4 = (0,0,0,1)$ dir (Ganchev ve Milousheva 2015). Meridyen yüzeyleri 2. tip rotasyon yüzeyi olarak da bilinir (Arslan ve ark. 2014, Arslan ve ark. 2017). M_3 nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial u} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial v} \\ \vec{e}_3 &= n(v) \\ \vec{e}_4 &= g'(u)\rho(v) + f'(u)E_1 \end{aligned} \quad (4.70)$$

vektör alanları tarafından gerilir. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= \kappa_m \vec{e}_4 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_2 &= 0 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_1 &= \frac{f'}{f} \vec{e}_2 \\ \tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f'}{f} \vec{e}_1 + \frac{\kappa}{f} \vec{e}_3 + \frac{g'}{f} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.71)$$

ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_3 &= 0 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_3 &= -\frac{\kappa}{f} \vec{e}_2 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_1} \vec{e}_4 &= -\kappa_m \vec{e}_1 \\
\tilde{\nabla}_{\vec{e}_2} \vec{e}_4 &= -\frac{g'}{f} \vec{e}_2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. Burada $\kappa = \kappa(v)$, küresel eğri $\rho = \rho(v)$ nin küresel eğriliğidir.

$$\kappa_m = f'(u) g''(u) - f''(u) g'(u) = -\frac{f''}{\sqrt{(1-(f')^2)}} \tag{4.73}$$

meridyen eğrisinin eğriliğidir. Böylece, (4.71) deki eşitlikler kullanılırsa şekil operatörü matrisleri

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{f} \end{pmatrix}, A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f} \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

elde edilir. Buradan M_3 nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{g' \kappa_m}{f} = -\frac{f''}{f} \tag{4.75}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2f} \{ \kappa \vec{e}_3 + (\kappa_m f + g') \vec{e}_4 \} \tag{4.76}$$

dir. Böylece M_3 yüzeyinin 1. ve 2. ortalama eğrilikleri

$$H_1 = \frac{\kappa(v)}{2f(u)}, H_2 = \frac{\kappa_m(u)f(u) + g'(u)}{2f(u)} \tag{4.77}$$

ve ortalama eğriliği

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa^2(v) + (\kappa_m f + g')^2(u)}{4f^2(u)}} \tag{4.78}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.20. $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.69) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M_3 nin minimal olması için gerek ve yeter şart M_3 yüzeyi $\{e_1, e_2, e_4\}$ vektörlerinin gerdiği \mathbb{R}^3 ün alt uzayda yatan

$$f(u) = \sqrt{u^2 - 2cu + d}, g(u) = \int \sqrt{1 - (f'(u))^2} du$$

meridyen eğrisine sahip bir yüzey olmasıdır.

İspat. (4.78) denklemini irdelenirse $\kappa(v) = 0$ ve $(\kappa_m(u)f(u) + g'(u)) = 0$ elde edilir. Böylece $\kappa(v) = 0$ durumunda M_3 nin $\{e_1, e_2, e_4\}$ vektörlerinin gerdiği \mathbb{R}^3 ün alt uzayında yatan bir yüzey olduğu gösterilmiştir (Ganchev ve Milousheva 2015). Bu yüzeyin meridyen eğrisi

$$\kappa_m f + g' = 0, (f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$$

denklemlerinin çözümünden elde edilir. Bununla birlikte (4.73) kullanılarak

$$\begin{aligned} 1 - (f'(u))^2 - f''(u)f(u) &= 0, \\ g'(u) &= \sqrt{1 - (f'(u))^2} \end{aligned} \quad (4.79)$$

bulunur. Bu diferansiyel denkleminin çözümünden istenilen sonuç elde edilir. \square

Ortalama eğrilik vektörü $\vec{H} = H_1 \vec{e}_3 + H_2 \vec{e}_4$ ün e_1 ve e_2 ye göre kovaryant türevi alınıp (4.72) eşitliği kullanılırsa

$$D_{\vec{e}_1} \vec{H} = \vec{e}_1(H_1) \vec{e}_3 + \vec{e}_1(H_2) \vec{e}_4$$

$$D_{\vec{e}_2} \vec{H} = \vec{e}_2(H_1) \vec{e}_3 \quad (4.80)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin \vec{H} -paralel olması durumunda aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.21. $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.69) parametrizasyonu ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Eğer M_3 , \vec{H} -paralel ise bu takdirde bu yüzey \mathbb{R}^3 de yatan açılabilir bir regle yüzeyidir.

İspat. M_3 yüzeyi \vec{H} –paralel olsun (4.80) eşitliklerinden $(H_1)_v = (H_1)_u = 0$ ve $(H_2)_u = 0$ bulunur. Böylece 1. ve 2. ortalama eğrilikleri sabit fonksiyonlardır. Bu nedenle $H_1 = c_1, H_2 = c_2$ alındığında (4.77) dan $\kappa(v) = 2c_1 f(u)$ bulunur. Buradan $f(u) = a$ sabit ve $\kappa(v) = 2ac_1$ bulunur. Böylece (4.79) eşitliğinden $g(u) = u + b$ olmalıdır. Meridyen eğrisi bir doğru olduğundan $\kappa_m(u) = 0$ dir. Ayrıca $\kappa(v)$ sabit olduğundan Ganchev ve Milousheva'nın çalışması yardımıyla M_3 nin \mathbb{R}^3 de yatan açılabilir bir regle yüzeyi olduğu sonucuna varılır (Ganchev ve Milousheva 2015). \square

Bu teoremin bir sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 4.22. M_3 yüzeyi (4.69) daki parametrizasyon ile verilen 2. tip rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M_3 yüzeyi \vec{H} –paralel ise bir CMC-yüzeyidir.

Benzer şekilde, (4.80) deki vektör alanlarının \vec{e}_1, \vec{e}_2 ye göre kovaryant türevlerinden;

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}_1} D_{\vec{e}_1} \vec{H} &= \vec{e}_1^2(H_1)\vec{e}_3 + \vec{e}_1^2(H_2)\vec{e}_4 \\ D_{\vec{e}_2} D_{\vec{e}_2} \vec{H} &= \vec{e}_2^2(H_1)\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.81)$$

elde edilir. Ayrıca (4.71) Gauss denklemlerinden

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1 &= 0 \\ \nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2 &= -\frac{f'}{f} \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (4.82)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} D_{\nabla_{\vec{e}_1} \vec{e}_1} \vec{H} &= 0 \\ D_{\nabla_{\vec{e}_2} \vec{e}_2} \vec{H} &= -\frac{f'}{f} (\vec{e}_1(H_1)\vec{e}_3 + \vec{e}_1(H_2)\vec{e}_4) \end{aligned} \quad (4.83)$$

dir. Son eşitlikler yardımıyla ortalama eğrilik vektörünün Laplası

$$-\Delta^D \vec{H} = \left(\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_1) + \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) \right) \vec{e}_3 + \left(\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_2) + \vec{e}_1^2(H_2) \right) \vec{e}_4 \quad (4.84)$$

olarak hesaplanır.

Eğer, M_3 yüzeyi zayıf biharmonik ise $\Delta^D \vec{H} = 0$ olmalıdır. Böylece (4.84) gereği

$$\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_1) + \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) = 0$$

$$\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_2) + \vec{e}_1^2(H_2) = 0$$

olmalıdır. Bu iki denklemin ortak çözümünden

$$\vec{e}_1(H_1) \vec{e}_1^2(H_2) - \vec{e}_1(H_2) \{ \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) \} = 0$$

bulunur. Böylece, aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 4.23. M_3 yüzeyi (4.69) daki parametrizasyon ile verilen 2. tip rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde M_3 nin zayıf biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\vec{e}_1(H_1) \vec{e}_1^2(H_2) - \vec{e}_1(H_2) \{ \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) \} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada H_1 ve H_2 sırasıyla 1. ve 2. ortalama eğrilik fonksiyonları olup (4.77) de tanımlanmıştır.

Şimdi de M_3 nin Simon operatörünü hesaplayalım. (4.72) deki Weingarten denklemleri yardımıyla

$$A_{\vec{e}_3} \vec{e}_1 = 0,$$

$$A_{\vec{e}_3} \vec{e}_2 = \frac{\kappa(v)}{f(u)} \vec{e}_2$$

$$A_{\vec{e}_4} \vec{e}_1 = \kappa_m(u) \vec{e}_1, \tag{4.85}$$

$$A_{\vec{e}_4} \vec{e}_2 = \frac{g'(u)}{f(u)} \vec{e}_2,$$

bulunur. Buradan, son eşitlikler ve (4.76) kullanılarak

$$A_{\vec{H}} \vec{e}_1 = \kappa_m H_2 \vec{e}_1, \quad A_{\vec{H}} \vec{e}_2 = \left(H_1 \frac{\kappa(v)}{f(u)} + H_2 \frac{g'(u)}{f(u)} \right) \vec{e}_2 \tag{4.86}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.71) deki Gauss denklemlerinden

$$h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = \kappa_m \vec{e}_4, \quad h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \frac{\kappa}{f} \vec{e}_3 + \frac{g'}{f} \vec{e}_4,$$

dir. Böylece

$$h(\vec{e}_1, A_{\vec{H}} \vec{e}_1) = \kappa_m^2 H_2 \vec{e}_4, \quad h(\vec{e}_2, A_{\vec{H}} \vec{e}_2) = \left(H_1 \frac{\kappa(v)}{f(u)} + H_2 \frac{g'(u)}{f(u)} \right) \left(\frac{\kappa}{f} \vec{e}_3 + \frac{g'}{f} \vec{e}_4 \right) \quad (4.87)$$

elde edilir. Buradan (4.87) yardımıyla M_3 yüzeyinin Simon operatörü

$$\tilde{A}(\vec{H}) = \frac{\kappa(v)}{f^2} (H_1 \kappa(v) + H_2 g') \vec{e}_3 + \frac{1}{f^2} \{g'(H_1 \kappa(v) + H_2 g') + \kappa_m^2 H_2\} \vec{e}_4 \quad (4.88)$$

elde edilir. Böylece (3.5), (4.84) ve (4.88) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} -J(\vec{H}) &= \left(\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_1) + \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) + \frac{\kappa(v)}{f^2} (H_1 \kappa(v) + H_2 g') \right) \vec{e}_3 \\ &\quad + \left(\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_2) + \vec{e}_1^2(H_2) + \frac{1}{f^2} (H_1 \kappa(v) g' + H_2 (g')^2) + \kappa_m^2 H_2 \right) \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.89)$$

dır. Böylece aşağıdaki sonuç ispatlanmış olur.

Teorem 4.24. $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi (4.69) parametrelendirmesi ile verilen bir rotasyon yüzeyi olsun. Bu takdirde, M_3 nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} nin bir Jakobi alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_1) + \vec{e}_1^2(H_1) + \vec{e}_2^2(H_1) + \frac{\kappa(v)}{f^2} (H_1 \kappa(v) + H_2 g') = 0 \quad (4.90)$$

$$\frac{f'}{f} \vec{e}_1(H_2) + \vec{e}_1^2(H_2) + \frac{1}{f^2} (H_1 \kappa(v) g' + H_2 (g')^2) + \kappa_m^2 H_2 = 0 \quad (4.91)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Burada κ_m ve H_1, H_2 fonksiyonları (4.73) ve (4.77) de verildiği gibidir.

5. SONUÇLAR

Rotasyon yüzeyleri diferansiyel geometrinin önemli konularından biridir. Özellikle 3-boyutlu Öklid uzaylarında bilgisayar destekli geometrik tasarım ve yüzeylerin geometrik modellemelerinde oldukça önemlidir. Burada temel mantık düzlemsel bir eğrinin bir çember etrafında döndürülmesidir. Bu yüzeylerin 4-boyutlu Öklid uzaylarına genellemesi yapıldığında daha zengin bir yüzey sınıfı elde edilmektedir.

Yüzeylerin ortalama eğrilik vektörü geometrik karakterizasyon için oldukça önem taşımaktadır. Bu bağlamda yüzeylerin minimal, biharmonik ve zayıf biharmonik olmaları tamamen yüzeylerin ortalama eğrilik vektörünün karakterine bağlıdır. Bu çalışmada 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayında rotasyon yüzeylerinin ortalama eğrilik vektörlerinin zayıf biharmonik olma koşulları ile Jakobi vektör alanı özelliğini sağlaması ile ilgili gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Motivasyon olarak 3 ve 4-boyutlu Öklid uzaylarında farklı tipte yüzeyler olarak bunların bahsedilen özellikleri sağlayıp sağlamadıkları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Arslan, K., Bayram, B. K., Bulca, B., Kim, Y. H., Murathan, C., Öztürk, G. 2001.** Vranceanu surface in E^4 with pointwise 1-type Gauss map. *Indian J. Pure Appl. Math.* 42(1): 41–51.
- Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B., Kim, Y.H., Murathan, C., Öztürk, G. 2011.** Rotational embeddings in E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Turkish J. Math.* 35: 493–499.
- Arslan, K., Bayram B. K., Bulca, B., Öztürk, G. 2012.** Generalized rotation surfaces in E^4 , *Results in Math.* 61: 315.327.
- Arslan, K., Bulca, B., Milousheva, V. 2014.** Meridian surfaces in E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Bull. Korean Math. Soc.* 51(3): 911–922.
- Arslan K., Bulca, B., Kosova, D. 2017.** On generized rotational surfaces in Euclidean spaces, *J. Korean Math Soc.* 54: 999-1013.
- Arslan, K., Ezentas, R., Murathan, C., T. Sasahara, T. 2007.** Biharmonic anti-invariant submani-folds in Sasakian space forms. *Beitrage Algebra Geom.* 48:191.207.
- Arslan, K., Özgür C. 1999.** Curves and surfaces of AW(k)-type, *Geometry and Topology of Submanifolds IX*, World. Sci. Publishing, 26 pp.
- Akutagawa, K., Maeta, S. 2013.** Biharmonic properly immersed submanifolds in Euclidean spaces. *Geom. Dedicata*, 164:351–355.
- Barros, M., Garay, O.J. 1995.** On submanifolds with harmonic mean curvature, *Proc. Amer.Math. Soc.* 129: 2545-2549.
- Barros, M., Garay, O.J. 1997.** Euclidean submanifolds with Jacobi Mean curvature vector field, *J. Geom.* 58:15-25.
- Bayram B., Arslan K., Bulca B., 2017.** On generalized spherical surfaces in Euclidean spaces, *Honam Math. J.*, 39(3): 363-377.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K., Öztürk, G. 2012.** Spherical product surfaces in E^4 , *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 20(1): 41-54.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K., Öztürk, G., Ugail, H. 2009.** Spherical product surfaces in E^3 , IEEE Computer Society, Int. Conference on CY-BERWORLDS.
- Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C. 2002.** Biharmonic submanifolds in spheres. *Israel J. Math.*130: 109–123.
- Chen, B. Y. 1973.** *Geometry of submanifolds*, Dekker, New York, USA, 192 pp.
- Chen, B. Y. 1980.** Surfaces with parallel normalized mean curvature vector. *Monatsh. Math.* 90: 185–194.
- Chen, B. Y. 1981.** *Geometry of submanifolds and its applications*, Science University of Japan, Tokyo, 96 pp.
- Chen, B. Y. 1983.** On the total curvature of immersed manifolds, VI: Submanifolds of finite type and their applications, *Bull. Inst.Math. Acad. Sinica*, 11: 309–328.
- Chen, B. Y. 1984.** *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, World Scientific Publisher, 348 pp.
- Chen, B. Y. 1988.** Null 2-type surfaces in Euclidean space, *Algebra, Analysis and Geometry*, 1–18.
- Chen, B.Y. 1991.** Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.* 17:169-188.
- Chen, B. Y., 1996.** A report on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, 22:117–337.

- Chen, B.Y. 2010.** Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms, *Arab J. Math. Sci* 16, no.1
- Chen, B.Y. 2014.** Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type. *Tamkang Journal of Mathematics*, 45(1): 87-108.
- Chen, B.Y. 2015.** Total mean curvature and submanifolds of finite type: Second Edition, Michigan State University, USA, 488 pp.
- Chen, B.Y. 2019.** Chen's biharmonic conjecture and submanifolds with parallel normalized mean curvature vector, *Mathematics*, 7(8): 710-730.
- Chen, B. Y., Ishikawa, S.,1991.** Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces. *Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math.* 45: 323–347.
- Chen, B. Y., Ishikawa, S. 1993.** On classification of some surfaces of revolution of finite type, *Tsukuba J. Math.* 17: 287–298.
- Chen, B.-Y., Ishikawa, S. 1998.** Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces. *Kyushu J. Math.* 52: 1–18.
- Cole, F. N. 1890.** On rotations in space of four dimensions, *Amer. J. Math.* 12: 191-210.
- Cric, M. 2008.** Notes on constant mean curvature surfaces and their graphical presentation, *Filomat*, 23: 97-107.
- Dimitric, I. 1992.** Submanifolds of E_m with harmonic mean curvature vector, *Bull. Inst.Math. Acad. Sinica*, 20: 53-65.
- Donnelly, H. 1877.** Spectral invariants of the second variation operator, *Illinois J. of Math.* 21: 185-189.
- Do Carmo, M. P. 1992.** Riemannian geometry, Mathematics, Birkhäuser Boston, Basel, Berlin, 300 pp.
- Dursun U., Turgay, N. C. 2012.** General rotational surfaces in Euclidean space E^4 with pointwise 1-type Gauss map, *Math. Com.* 17: 71-81.
- Fetcu, D., Loubeau, E., Montaldo, S., Oniciuc, C. 2009.** Biharmonic submanifolds of C^n , *arXiv: 0902.0268v1 [math. DG]*
- Fu, Y. 2013.** Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector in pseudo-euclidean spaces, *Math.Phys. Anal. Geom.*, 16:331–344.
- Ganchev, G., Milousheva, V. 2008.** On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space. *Kodai Math. J.* 31:183-198.
- Ganchev, G. Milousheva, V. 2015.** Special classes of meridian surfaces in the four-dimensional Euclidean space, *Bull. Korean Math. Soc.* 52(6): 2035–2045.
- Gray, A. 1993.** Modern differential geometry of curves and surfaces, CRS Press, Inc, 974 pp.
- Harmanlı, M., Arslan, K., Bulca, B. 2019.** On weak biharmonic generalized rotational surfaces in E^4 , *J. of Universal Math.* 2(2):166-174.
- Hasanis, T., Vlachos, I., 1995.** Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field. *Math. Nachr.* 172: 145-169.
- Jiang, G.Y. 1986.** 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 7:130–144.
- Kılıç, B., Arslan, K. 2008.** Harmonic 1-type submanifolds in Euclidean spaces, *Int. J. of Math. and Stat.* 3:47-53.
- Kılıç, B., Arslan, K., Lumiste, Ü., Murathan, C. 2003.** On weak biharmonic submanifolds and 2-parallelity. *Diff. Geo. Dyn. Sys.* 5:39-48.
- Maeta, S. 2014a.** Biharmonic maps from a complete Riemannian manifold into a non-positively curved manifold, *Ann. Glob. Anal. Geom.* 46, 75-85
- Mladenov, I. M 2002.** Delaunay surfaces revisited, *Bulg. Acad. Sci.* 55 (2002), 19-24.

- Montaldo, S., Oniciuc, C., Ratto, A.P., 2016.** On cohomogeneity one biharmonic hypersurfaces into the Euclidean space, DOI:10.1016/j.geomphys.2016.04.012
- Moore, C. 1919.** Surfaces of rotations in a space of four dimensions, *Ann. Math. 2nd Ser.*, 21: 81-93.
- Öztürk, G., Bulca, B., Bayram, B. K., Arslan, K. 2016,** Meridian surfaces of Weingarten type in 4-dimensional Euclidean Space E^4 , *Konuralp J. Math.* 4(1):239-245.
- Simon, L. 1968.** Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. Math.* 88:62-105
- Sintes, I.C. 2018.** Classification and physical aspects of constant mean curvature rotational surfaces, Final Degree Dissertation, Leioa.
- Takahashi, T. 1966.** Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, 18: 380–385.
- Vranceanu, G. 1977.** Surfaces de rotation dans E^4 ; *rev. Roum. Math. Pures Appl.* XXII(6): 857-862.
- Yau, S. T. 1975.** Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* 28:201-228.
- Yoon, D.W. 2003.** Some properties of the Clifford torus as rotation surfaces, *Indian J. Pure Appl.Math.* 34: 907-915.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Merve HARMANLI
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA / 19.07.1988
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Bursa Yabancı Dil Ağırlıklı Kız Lisesi
Lisans : Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Özel Marmara Grup Dershanesi (2011-2015)
Özel Uludağ Mesl. ve Tek. Anadolu Lisesi (2015-2016)
Özel Nilüfer Final Temel Lisesi (2016-2019)

İletişim (e-posta) : mharmanli.mh@gmail.com
evrem_88_m@hotmail.com

Yayınları : **Harmanlı, M., Arslan, K., Bulca, B. 2019.** On Weak Biharmonic Generalized Rotational Surfaces in E^4 , *J. of Universal Math.* 2(2):166-174.
DOI: 10.2206/kyushumfs.45.323