TRIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA OLUŞAN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Esra NAMLI

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TRIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA OLUŞAN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Esra NAMLI
0000-0003-0314-239X

Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2020

TEZ ONAYI

Esra NAMLI tarafından hazırlanan "TRIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA OLUŞAN BAZI ÖZDEŞLİKLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Musa DEMİRCİ **İmza**
0000-0002-6439-8439
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hacer ÖZDEN AYNA **İmza**
0000-0003-1556-3511
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Dr. Öğr. Üyesi İlker Burak GİRESUNLU **İmza**
0000-0002-2190-0003
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
24/02/2020

Bursa U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/02/2020

Esra NAMLI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TRIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA OLUŞAN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Esra NAMLI

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

Birçok çalışmadan faydalanarak oluşturulan bu tez toplam dört bölümdür.

Giriş bölümü olan ilk bölümde tezin başlığında yer alan Lucas ve Tribonacci sayı dizilerinin de bulunduğu özel sayı dizileri ile ilgili genel bilgiler ve bu özel sayı dizilerinin terimleri kullanılarak elde edilen polinomlar ile ilgili tanım ve bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde Lucas ve Tribonacci sayılarının tekrarlama bağıntıları ve bu sayılar yardımıyla elde edilen özdeşliklerden örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Lucas ve Tribonacci polinomları ve bu polinomların üreteç fonksiyonları verilmiştir.

Dördüncü bölüm ise sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Lucas sayıları, Tribonacci sayıları, Tribonacci polinomları, Tribonacci dizisi.

2020, vii + 28 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME IDENTITIES CONSTRUCTED BY MEANS OF THE GENERATING FUNCTIONS OF TRIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

Esra NAMLI

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Musa DEMİRCİ

This thesis, which has been written by means of a number of existing literature, consists of four chapters.

In the first section, which is the introduction, general information about special number sequences including Lucas and Tribonacci number sequences which appear in the title of the thesis together with some definitions and information about the polynomials obtained using the terms of these special number sequences are given.

In the second part, repetition relations of Lucas and Tribonacci numbers and examples of identities obtained with the help of these numbers are given.

In the third chapter, Lucas and Tribonacci polynomials and their generating functions are given.

The fourth part is the conclusion part.

Key words: Lucas numbers, Tribonacci numbers, Tribonacci polynomials, Tribonacci sequences.

2020, vii + 28 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Musa Demirci’ ye sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardım, bilgi ve tecrübeleri ile bana destek olan başta sayın Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL’e, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan sayın Prof. Dr. Gökhan Soydan’a ve sayın Prof. Dr. Basri Çelik’e olmak üzere Matematik bölümündeki tüm değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle yanımda olan annem ve babama da sonsuz teşekkür ederim.

Esra NAMLI

24/02/2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathrm{C_n}$	n. Catalan sayısı
$\mathrm{K_n}(\mathrm{x})$	Tribonacci-Lucas polinomu
$\mathrm{L_n}$	n. Lucas sayısı
$\mathrm{S_n}$	Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi
$\mathrm{T_n}$	n. Tribonacci sayısı
$T_n(\mathrm{x})$	n. Tribonacci polinomu
Φ	Altın oran

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu tezin ortaya konulmasındaki temel amaç okuyan herhangi birinin genelde tüm sayı dizileri daha özel olarak ise Lucas sayıları ve Tribonacci sayıları adı verilen sayı dizileri hakkında temel bilgi sahibi olmasıdır. Çok sayıda insan tarafından bilinen temel sayı kümelerinin (Doğal sayılar, Tam sayılar, Rasyonel sayılar, Reel sayılar) yanı sıra bu sayı kümelerinin altında yer almakla birlikte kendine ait tekrarlama bağıntıları olan özel sayı dizileri de vardır. Dolayısıyla temel sayı kümelerine göre daha az bilinmekle birlikte oldukça ilginç, güzel özelliklere sahip ve yeni olarak kabul edilen Tribonacci sayı dizisi hakkında temel yeterlilikte bilgi verilmektedir. Bu sayı dizisinden yüzyıllarca önce keşfedilmiş olan ve literatürde üzerinde çok sayıda çalışma yapılmış olan Fibonacci sayıları ve Lucas sayıları vardır. Daha sonra 20. yüzyılın ikinci yarısında keşfedilmiş olan Tribonacci sayılarının da Fibonacci ve Lucas sayılarıyla oldukça benzer özelliklerinin olduğu görülmektedir. Bununla birlikte Tribonacci sayılarına ait tekrarlama bağıntısı Fibonacci ve Lucas sayılarının tekrarlama bağıntısından daha farklı olarak bir terimin kendisinden önceki üç ardışık terimin toplamı olarak ifade edilir. Tribonacci sayıları diğer birçok özel sayı dizilerine göre çok yeni bir kavram olduğundan Tribonacci sayı dizileri hakkında araştırma ve yazılar Fibonacci sayılarına kıyasla daha az bulunmaktadır. Bu nedenle bu tez içinde Tribonacci dizilerinin tekrarlama bağıntısı, bu sayıların ve polinomların bazı özellikleri, Tribonacci dizileri için özdeşlikler ve tamamlanmamış Tribonacci sayılarının üreteç fonksiyonu hakkında bilgi verilecektir.

2. LUCAS VE TRİBONACCİ SAYILARI

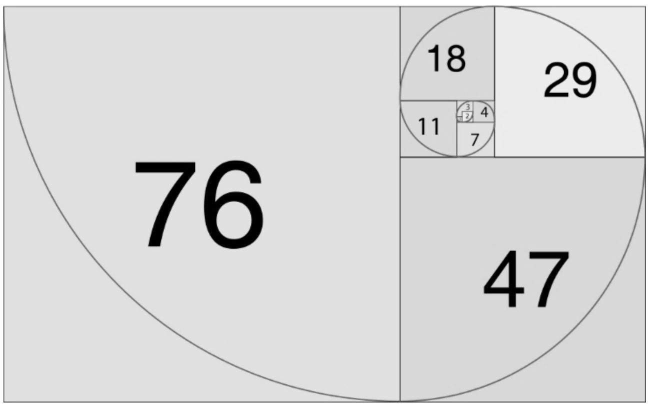
2.1. Lucas Sayıları

Fransız Edouard Anatole Lucas 1842 yılında Fransa'nın Amiens kentinde doğmuştur. Sayı teorisine katkılarının yanı sıra rekreasyonel (İlgi çekici,eğlenceli ve yaşamı canlandıran) matematik üzerine dört ciltlik klasik eseri ile tanınmıştır. Geliştirdiği problemler arasında en bilineni Brahma Kulesidir. Yüzyıllar önce Leonardo Pisano tarafından ortaya atılan Fibonacci sayılarına benzerlik gösteren bir sayı dizisi tanımlamıştır. Edouard Lucas, başlangıç koşulları $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$ için tekrarlama bağıntısına sahip bir sayı dizisi ortaya koymuştur. Böylece bu sayı dizisinin adı Lucas dizisi olarak anılmaktadır (Koshy 2001).

İlk birkaç Lucas sayıları

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots$$

şeklinde devam etmektedir. Lucas dizisindeki sayılar yardımı ile oluşturulan dikdörtgen aşağıdaki şekilde verilmektedir. Bu sayılar karenin bir köşesinden kendine komşu olmayan bir diğer köşesine her defasında adeta çeyrek çember oluşturuyormuşçasına meydana gelen eğrilerin birleştirilmesiyle bir spiral oluşturulur.



Şekil 2.1. Lucas sayılarının oluşturduğu dikdörtgen (Anonim 2019)

Lucas sayı dizisindeki terimler, Φ (phi, altın oran) sayısının kuvvetleri ile elde edilen değerlere yakınsadığından

$$L(n) \cong [\Phi^n]$$

gösterimi kullanılır.

Bu sayılar bazen doğada ve bilimsel alanlarda görülmektedir. Örneğin 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir (Toy 2009). Bu da verilen Lucas sayılarının doğada çok farklı şekillerde karşımıza çıkmasına bir örnektir.

2.2.Tribonacci Sayıları

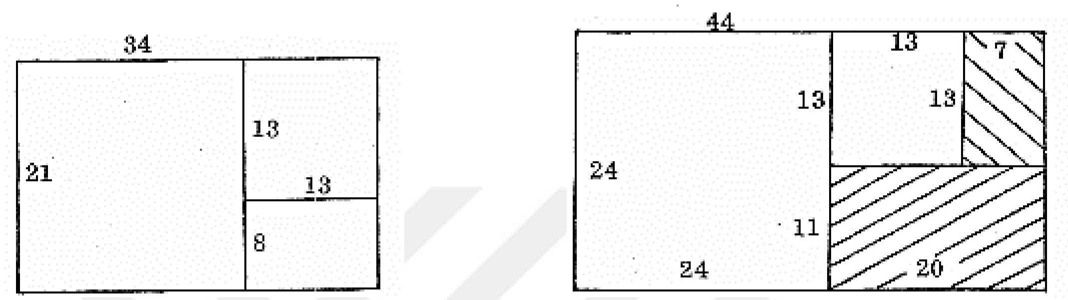
Tribonacci sayıları, ilk olarak 1963 yılında Amerika'da daha henüz 9. Sınıf öğrencisi iken Mark Feinberg tarafından keşfedilmiş olup kendisine Genç Bilim Akademisi Şampiyonluğunu kazandıran projenin içinde yer alan özel bir sayı dizisidir. Mark Feinberg'in Bilim şenliği için hazırlamış olduğu ve gönderdiği bu çalışma Fibonacci Quarterly dergisi tarafından yayınlanmaya değer bulunmuş ve kendisi gelecek vadeden öğrenci ödülüne layık görülmüştür.

Fibonacci ve Lucas sayıları göz önüne alındığında, her sayı kendisinden bir önceki ardışık iki sayının toplamı olarak ifade edilir, yani $p_{n+1} = p_n + p_{n-1},\ \ n \geq 1$ şeklindedir. Tribonacci sayılarının dağılımı incelendiğinde, belli bir terimden sonraki her bir sayının, kendisinden bir önceki ardışık üç sayının toplamı şeklinde olduğu görülmektedir. Böylece bu yeni dizi $q_{n+1} = q_n + q_{n-1} + q_{n-2},\ \ n \geq 2$ şeklinde tanımlanmıştır. Dizinin başlangıç terimleri $q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_3 = 2$ olarak verilmiş olup bu tanımlama Mark Feinberg tarafından başlangıçta q_n dizisi olarak tanımlanmıştır; ancak daha sonra bu sayılar Tribonacci dizisi olarak adlandırılmış ve terimleri T_n ile gösterilmiştir. Bu dizideki ilk birkaç sayı;

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \ldots$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas dizilerine benzer olarak, Tribonacci dizisi de yakınsaktır. Fibonacci sayıları arasındaki oranlar dikkate alındığında p_n/p_{n+1} oranı 0.6180339... değerine yakınsar ve p_{n+1}/p_n oranı ise 1,6180339... Phi (Φ) değerine yakınsar. Tribonacci sayı dizisinde ardışık iki sayının (q_n/q_{n+1}) oranı 0.54368901… değerine yakınsar. (q_{n+1}/q_n) oranı ise 1.83928675… irrasyonel değerine yakınsar. Bu değer Tri-Phi (Φ_3) olarak adlandırılmıştır (Feinberg 1963).



Şekil.2.2. Altın dikdörtgen ve gümüş dikdörtgen (Feinberg 1963)

Dizilerin tekrarlama bağıntısına uygun olarak elde edilen sayılar ünlü Fibonacci altın dikdörtgeninde gösterilir. Şekil 2.2. Tribonacci dizisindeki tekrarlama bağıntısına uygun olan sayılar ile bir dikdörtgen oluşturulabilir ancak bu dikdörtgen altın dikdörtgen kadar düzgün bir kurala sahip olmadığından gümüş dikdörtgen olarak adlandırılır. Uzun kenarı (q_{n+1}) ve kısa kenarı (q_n) olan gümüş dikdörtgen, altın dikdörtgene oranla daha büyük kenar uzunluklarına sahiptir. Gümüş dikdörtgendeki kenar uzunlukları $\mathrm{q}_n = 24$ ve $\mathrm{q}_{n-1} = 13$ olan kareler çıkarılarak kenar uzunlukları $(\mathrm{q}_{n+1} - \mathrm{q}_n)$ ve $(\mathrm{q}_n - \mathrm{q}_{n-1})$ ile (q_{n-1}) ve (q_{n-2}) olan orijinal iki yeni dikdörtgen görülür (gölgeli alanlar). Bu dikdörtgenlerden birinin kenar uzunlukları q_{n-1} ve q_{n-2} Tribonacci sayıları iken diğerinin kenar uzunlukları Tribonacci de bulunmayan sayılardır ancak bu kenar uzunlukları $(\mathrm{q}_{n+1} - \mathrm{q}_n)$ ve $(\mathrm{q}_n - \mathrm{q}_{n-1})$ ardışık Tribonacci sayılarının farkı olduğu görülür.

Bu dikdörtgenin uzun kenarı $(\mathrm{q}_{n+1} - \mathrm{q}_n)$ ve kısa kenarı $(\mathrm{q}_n - \mathrm{q}_{n-1})$ dir. Bu form her bir Tribonacci sayısından önceki sayının çıkarılmasıyla elde edilen birinci ara dizideki sayılardan oluşur. İkinci ara dizi ise birinci ara dizideki terimlerin ardışıklarından çıkartılmasıyla elde edilir. Gümüş dikdörtgeni daha da devam ettirerek yeni ara dizilerin yeni sayıları da ortaya çıkar. Bu diğer diziler, ilk iki ara diziyle aynı şekilde üçgenleme yöntemi ile oluşturulur. Şekil 2.3. ilk iki ara diziyi göstermektedir.

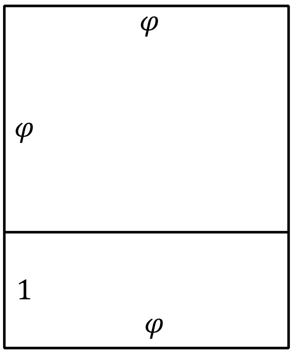
$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 3, \quad 5, \quad 9, \quad 17, \quad 31, \ldots$$

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 6, \quad 11, \quad 20, \quad 37, \quad 68, \ldots$$

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 7, \quad 13, \quad 24, \quad 44, \quad 81, \quad 149, \ldots$$

Şekil 2.3. İkinci ara dizi, birinci ara dizi ve Tribonacci dizisi (Feinberg 1963).

Bütün bu ara diziler Tri-Phi değerine yakınsar ve bu dizilerdeki her bir sayı, önceki üç terimin toplamıdır. İki Fibonacci yakınsağı, yani herhangi bir Fibonacci sayısının kendinden bir önceki sayıya oranı (p_{n+1}/p_n) , $x = 1 + \frac{1}{x}$ karesel denklemini gerçekler. Bu denklem ise dikdörtgenin uzun kenarının kısa kenarına bölümüyle yapılan işlemlerin birbirine eşitlenmesiyle elde edilir. Şekil 2.4.



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

Şekil 2.4. Karesel denklemin bulunuşu (Anonim 2019)

Dizideki herhangi bir sayının bir öncekine bölümü, Tribonacci yakınsak değerini $(\mathrm{q}_{n+1}/\mathrm{q}_n)$ verir. Tribonacci yakınsakları $y = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}$ kübik denklemini gerçekler (Feinberg 1963). Bu kübik denkleminin köklerinin bulunuşu alt bölüm başlığı olan (2.5) te incelenecektir.

Tribonacci dizisinin (q_{n+1}). terimini veren formül $n \geq 2$ için,

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1} + q_{n-2}$$

olarak yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı q_{n-1} e bölünerek,

$$\frac{q_{n+1}}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + 1 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = t_n \; ; \quad \frac{q_n}{q_{n-1}} = t_{n-1} \quad ; \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = t_{n-2}$$

değişken değişimi yapılarak eşitliğin sol tarafı;

$$\begin{aligned} \frac{q_{n+1}}{q_{n-1}} &= \frac{q_{n+1}}{q_{n-1}} . \frac{q_n}{q_n} \\ &= \frac{q_{n+1}}{q_n} . \frac{q_n}{q_{n-1}} \\ &= t_n . t_{n-1} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Benzer değişken değiştirme sağ tarafa da uygulanırsa tüm eşitlik t_n cinsinden;

$$t_n . t_{n-1} = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{t_{n-2}}$$

olarak yazılır. Yine eşitliğin her iki tarafı t_{n-1} e bölünerek

$$t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} . t_{n-2}}$$

elde edilmiş olur (Feinberg 1963).

Tüm t_n terimleri bir y değerine yakınsar. Dolayısıyla tüm t_n ler yerine y yazılır. Böylece

$$y = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}$$

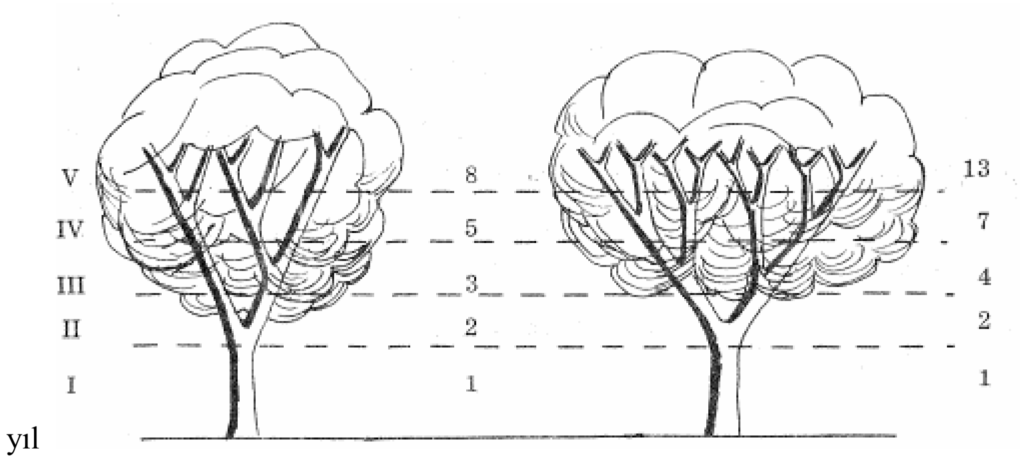
karakteristik denklemi elde edilir.

Yukarıdaki benzer işlemler Tribonacci dizisinin terimlerinin $\frac{q_n}{q_{n+1}}$ oranı kullanılarak yapılırsa elde edilen sayı aşağıdaki kübik denklemi sağlar.

$$\frac{1}{y} = 1 + y + y^2$$

Fibonacci yakınsağının $\frac{p_n}{p_{n+1}}$ 0,6180339… kutupsal koordinatlarda kağıda yerleştirilmesiyle doğanın her yerinde bulunan ünlü sarmalın üretildiği bilinmektedir. Grafik çizilirse Tribonacci yakınsağının $\frac{q_n}{q_{n+1}}$ 0,54368901... biraz daha sıkı bir spiral oluşturduğu görülür.

İyi bilinen bir Fibonacci uygulaması varsayıma dayanan bir ağaçtır. Her dal başka bir dalın filizlenmesini sağlamak için bir sonraki yıl dinlenmeye geçer ve yeni oluşan dalların sayısı Fibonacci dizisinde toplam 1, 2, 3, 5, 8,… olur. Eğer ağacın her dalı iki yıl boyunca filizlenip bir yıl dinlenince, Tribonacci dizisinde oluşan dalların sayısı toplam 1, 2, 4, 7, 13, … olacaktır. Şekil 2.5.



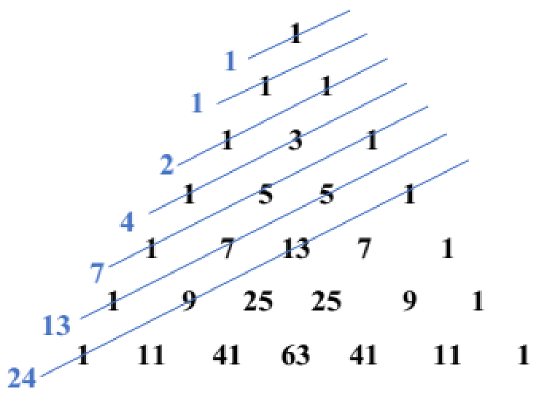
Şekil.2.5. Soldaki Fibonacci ağacı ve sağdaki Tribonacci ağacı (Feinberg 1963)

2.3. Tribonacci Dizisi ve Polinomları

2.3.1. Tanım: Başlangıç şartları $T_0 = 0,\ T_1 = T_2 = 1$ ve $T_3 = 2$ olmak üzere $n \geq 3$ için terimler aşağıdaki gibi

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \tag{2.1}$$

tekrarlama bağıntısı ile ilerleyecektir ve böylece Tribonacci sayıları olan T_n elde edilir. Aşağıdaki üçgenin artan köşegenleri üzerindeki sayıların toplamı Tribonacci sayı dizisinin ardışık terimlerini verir.



Şekil 2.6. Tribonacci üçgeni (Koshy 2001)

Tribonacci polinomları ve Tribonacci dizisinin katsayıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$T_0(x) = 0 \text{ , } T_1(x) = 1 \text{ ,} T_2(x) = x^2$$
$$T_{n+2}(x) = x^2T_{n+1}(x) + xT_n(x) + T_{n-1}(x), \;\; n \geq 2. \qquad (2.2)$$

Tribonacci polinomları $T_n(x)$ ile tanımlanır (Hoggatt ve Bicknell 1973).
$T_n(1) = t_n$ tüm pozitif n tamsayıları için n. Tribonacci sayısı olmak üzere, birkaç Tribonacci polinomu

$T_1(x) = 1,$
$T_2(x) = x^2,$
$T_3(x) = x^4 + x,$
$T_4(x) = x^6 + 2x^3 + 1,$
$T_5(x) = x^8 + 3x^5 + 3x^2,$
$T_6(x) = x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x,$
$T_7(x) = x^{12} + 5x^9 + 10x^6 + 7x^3 + 1,$
$T_8(x) = x^{14} + 6x^{11} + 15x^8 + 16x^5 + 6x^2,$
$T_9(x) = x^{16} + 7x^{13} + 21x^{10} + 30x^7 + 19x^4 + 3x,$
$T_{10}(x) = x^{18} + 8x^{15} + 28x^{12} + 50x^9 + 45x^6 + 16x^3 + 1.$

şeklindedir. Şekil 2.6. daki Tribonacci üçgeni ile benzer şekilde Tribonacci polinom üçgeni aşağıdaki çizelgede tanımlanır.

Çizelge 2.1. Tribonacci polinom üçgeni (Ramirez ve Sirvent 2014)

	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	x^2	x					
2	x^4	$2x^3 + 1$	x^2				
3	x^6	$3x^5 + 2x^2$	$3x^4 + 2x$	x^3			
4	x^8	$4x^7 + 3x^4$	$6x^6 + 6x^3 + 1$	$4x^5 + 3x^2$	x^4		
5	x^{10}	$5x^9 + 4x^6$	$10x^8 + 12x^5 + 3x^2$	$10x^7 + 12x^4 + 3x$	$5x^6 + 4x^3$	x^5	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

Tribonacci dizisinin daha ileri çalışması için, bu sayıların üreteç fonksiyonunu bilmek faydalı olacaktır. Üreteç fonksiyonunu bulmak için, dizinin terimlerinin sonsuz bir polinom olan T(x) in katsayıları olduğunu kabul edelim.

$$
\begin{array}{rl}
T(x) = & T_1 + T_2x + T_3x^2 + T_4x^3 + T_5x^4 + \cdots \\
-xT(x) = & \quad -T_1x - T_2x^2 - T_3x^3 - T_4x^4 - \cdots \\
-x^2T(x) = & \qquad\quad -T_1x^2 - T_2x^3 - T_3x^4 - \cdots \\
-x^3T(x) = & \qquad\qquad\quad -T_1x^3 - T_2x^4 - \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

$$T(x) - xT(x) - x^2T(x) - x^3T(x) = T_1 = 1$$

$$T(x)(1 - x - x^2 - x^3) = 1$$

$$T(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}$$

Bu şekilde Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu T(x) bulunur.

Tribonacci dizisi kendi üzerine katlanır olma özelliğinden dolayı, bu şekilde de anılıp katlanabilir dizi olarak da incelenir. Bu dizinin birinci sütunu Çizelge 2.2. T(x) in katsayıları olarak tanımlanır.

$$T(x) = T_1 + T_2x + T_3x^2 + T_4x^3 + \cdots + T_{\mathrm{n}}x^{\mathrm{n}-1} + \cdots$$

İkinci ve sonraki sütunlar iki şekilde bulunur. İlk yöntem, dizinin kendi üzerine katlanılması ile bulunur. İlk sütunun Tribonacci dizisi olduğu ve fonksiyon tarafından üretildiği göz önünde bulundurulursa, ikinci satırı elde etmek için, 2 numaralı satırdaki sayının üstünde bulunan iki sayı ve solunda bulunan bir sayının toplamı şeklinde bulunur. Bu özellik tüm 2 numaralı satırdaki sayılar için geçerlidir. 2 numaralı sütun ve 3 numaralı satırın kesişmesiyle oluşan sayıyı elde etmek için, bu sayının üstündeki üç sayıya, solundaki bir sayı eklenerek elde edildiği görülür. Bu 3. satır ve sonrasında devam eden 4, 5, ve 6. satırlar için de tekrar ettiği görülür.

$T(x)$ in sıralı doğal sayı kuvvetleriyle oluşturulan $T^{\mathrm{n}}(x)$ dizisine $T(x)$ in kuvvet dizisi denir. İkinci yöntem kuvvet dizisi yardımıyla, ilk sütunun Tribonacci dizisi olduğu ve fonksiyon tarafından üretildiği hatırlanırsa, ikinci sütunu türetmek için, ilk sütundaki üreteç fonksiyonunun karesi alınır. Üçüncü sütun $T^3(x)$, dördüncü sütun ise $T^4(x)$ ve benzer şekilde devam eder. Bu nedenle dizi aşağıdaki gibi temsil edilir:

Çizelge 2.2. n. sütün ve $\mathrm{T}^{\mathrm{n}}(x)$ polinomunun katsayıları arasındaki ilişki (Scott ve ark. 1977)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	⋯
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	⋯
2	2	5	9	14	20	27	35	44	54	⋯		
3	4	12	25	44	70	104	147	200	264	⋯		
4	7	26	63	125	220	⋯						
5	13	56	153	336	646	⋯						
6	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮							
⋮												

Aynı diziyi türetmek için kullanılan ikinci yöntem, kendi üzerine katlanır dizisinin neden bir kuvvet dizisi olarak da adlandırılabileceğini açıkça gösterir.

$$T(x) = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}$$

ilk sütunu üretir,

$$T^2(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right)^2$$

ikinci sütunu üretir ve

$$T^3(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right)^3$$

üçüncü sütunu üretir ve bunu şu şekilde yazabiliriz:

$$T^n(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right)^n$$

$T^n(x)$ aşağıdaki gibi yeniden yazılırsa:

$$T^n(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right)\left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right)^{n-1}$$
$$T^n(x) = \left(\frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}\right) T^{n-1}(x)$$

olur. Bu denklemin iki tarafını $(1 - x - x^2 - x^3)$ ile çarparak aşağıdaki denklemi elde edeceğiz

(a) $$T^n(x) = xT^n(x) + x^2T^n(x) + x^3T^n(x) + T^{n-1}(x)$$

veya tüm $T^n(x)$ li terimler bir araya getirilerek aşağıdaki denklemi elde edeceğiz:

(b) $$T^{n-1}(x) = T^n(x) - xT^n(x) - x^2T^n(x) - x^3T^n(x).$$

Bu, n'inci sütunun, sırayla x, x^2 ve x^3 ile çarpımının kendisinden çıkarılmasıyla bir önceki sütun bulunur. Bu özel dizi yukarıda açıklanan iki yoldan biriyle bulunur ve doğrulanır. Aynı diziyi bulmak için üçüncü daha basit bir yöntem de örnekten faydalanarak istenilen formu elde etmektir. Bu formu bulmak için kuvvet dizisi hatırlanırsa, aşağıdaki denklemler elde edilir. $n = 4$ için $T^4(x)$ i inceleyelim.

$$T^n(x) = T^4(x) = 1 + 4x + 14x^2 + 44x^3 + 125x^4 + \ \dots$$
$$T^{n-1}(x) = T^3(x) = 1 + 3x + 9x^2 + 25x^3 + 63x^4 + \ \dots .$$

böylece yukarıdaki (b) denkleminde sırayla $T^4(x)$ yerine yazılırsa:

$$T^4(x) - xT^4(x) - x^2T^4(x) - x^3T^4(x) = T^3(x)$$

$$
\begin{array}{rl}
T^4(x) = & 1 + 4x + 14x^2 + 44x^3 + 125x^4 + \cdots \\
-xT^4(x) = & \quad -x - 4x^2 - 14x^3 - 44x^4 - \cdots \\
-x^2T^4(x) = & \qquad -x^2 - 4x^3 - 14x^4 - \cdots \\
-x^3T^4(x) = & \qquad\quad -x^3 - 4x^4 - \cdots \\
\hline
T^4(x)(1 - x - x^2 - x^3) = & 1 + 3x + 9x^2 + 25x^3 + 63x^4 - \cdots
\end{array}
$$

böylece kendinden bir önceki sütun olan $T^3(x)$ olarak bulunur.

$$T^4(x) = \frac{T^3(x)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

Bununla birlikte burada elde edilmek istenen, bu yöntemi tüm sütunlara göre, herhangi bir sütun veya satırdaki belirli bir öğeye uygulamaktır. Herhangi bir sütundaki belirli bir terimin yazımı aşağıdaki denklemde gösterildiği gibidir

$$T^n(x) = xT^n(x) + x^2T^n(x) + x^3T^n(x) + T^{n-1}(x)$$

(Scott ve ark 1977).

2.4. Tribonacci-Lucas Polinomları

2.4.1 Tanım: Tribonacci-Lucas polinomunun tanımı şu şekildedir $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathrm{K}_{n+3}(x) = x^2K_{n+2}(x) + xK_{n+1}(x) + K_n(x),$$
$$\mathrm{K}_0(x) = 3,\ \mathrm{K}_1(x) = x^2,\ \mathrm{K}_2(x) = x^4 + 2x$$

dir (Yilmaz Taskara 2014). $K_n(1) = K_n$ birkaç Tribonacci-Lucas polinomu aşağıda verilmiştir:

$K_0(x) = 3,$

$K_1(x) = x^2,$

$K_2(x) = x^4 + 2x,$

$K_3(x) = x^6 + 3x^3 + 3,$

$K_4(x) = x^8 + 4x^5 + 6x^2,$

$K_5(x) = x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 5x,$

$K_6(x) = x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 14x^3 + 3,$

$K_7(x) = x^{14} + 7x^{11} + 21x^8 + 28x^5 + 14x^2.$

Çizelge 2.3. Tribonacci - Lucas polinom üçgeni (Yilmaz Taskara 2014)

n/i	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	3						
1	x^2	$2x$					
2	x^4	$3x^3 + 3$	$2x^2$				
3	x^6	$4x^5 + 4x^2$	$5x^4 + 5x$	$2x^3$			
4	x^8	$5x^7 + 5x^4$	$9x^6 + 12x^3 + 3$	$7x^5 + 7x^2$	$2x^4$		
5	x^{10}	$6x^9 + 6x^6$	$14x^8 + 21x^5 + 7x^2$	$16x^7 + 24x^4 + 8x$	$9x^6 + 9x^3$	$2x^5$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		

2.4.2. Teorem: Tribonacci polinomları $T_n(x)$ ve Tribonacci-Lucas polinomları $K_n(x)$ olmak üzere ikisi arasındaki ilişki , $n \geq 2$ için

$$K_n(x) = x^2T_n(x) + 2xT_{n-1}(x) + 3T_{n-2}(x)$$

dir (Kose ve ark. 2014).

İspat: Tümevarım ispat yönteminden faydalanarak, $n = 2$ için

$$\begin{aligned} K_2(x) &= x^2T_2(x) + 2xT_1(x) + 3T_0(x), \\ &= x^4 + 2x \end{aligned}$$

olduğundan eşitlik doğrudur. Varsayalım ki tüm pozitif m'ler için

$$\mathrm{K_m}(x) = x^2 T_{\mathrm{m}}(x) + 2xT_{\mathrm{m-1}}(x) + 3T_{\mathrm{m-2}}(x) \qquad (2.3)$$

denklemi doğru olsun. O halde $n = m + 1$ için (2.3) denkleminin doğru olduğunu gösterelim.

$$\mathrm{K_{m+1}}(x) = x^2 T_{\mathrm{m+1}}(x) + 2xT_{\mathrm{m}}(x) + 3T_{\mathrm{m-1}}(x) \qquad (2.4)$$

denklemi şeklinde yazılır. (2.4) eşitliğinin sol tarafı dikkate alınırsa, tekrarlama bağıntısı şu şekilde açılır

$$\mathrm{K_{m+1}}(x) = x^2 K_{\mathrm{m}}(x) + xK_{\mathrm{m-1}}(x) + K_{\mathrm{m-2}}(x)$$

denklem (2.3) kullanılarak

$$\mathrm{K_{m+1}}(x) = x^2\big(x^2 T_{\mathrm{m}}(x) + 2xT_{\mathrm{m-1}}(x) + 3T_{\mathrm{m-2}}(x)\big) + x\big(x^2 T_{\mathrm{m-1}}(x) + 2xT_{\mathrm{m-2}}(x) + 3T_{\mathrm{m-3}}(x)\big) + (x^2 T_{\mathrm{m-2}}(x) + 2xT_{\mathrm{m-3}}(x) + 3T_{\mathrm{m-4}}(x))$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\mathrm{K_{m+1}}(x) = x^4 T_{\mathrm{m}}(x) + 3x^3 T_{\mathrm{m-1}}(x) + 6x^2 T_{\mathrm{m-2}}(x) + 5xT_{\mathrm{m-3}}(x) + 3T_{\mathrm{m-4}}(x)$$

bulunur ve son olarak (2.2) denkleminden yararlanarak,

$$\mathrm{K_{m+1}}(x) = x^2 T_{\mathrm{m+1}}(x) + 2xT_{\mathrm{m}}(x) + 3T_{\mathrm{m-1}}(x)$$

sonucuna tümevarım ile ulaşılır. ■

2.4.3. Sonuç: Tribonacci sayıları T_{n} ve Tribonacci-Lucas sayıları K_{n} arasındaki ilişki $n \geq 2$ olmak üzere

$$\mathrm{K_n} = T_{\mathrm{n}} + 2T_{\mathrm{n-1}} + 3T_{\mathrm{n-2}}$$

dir (Kose ve ark. 2014).

2.4.4. Teorem: Tribonacci-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu

$$G(z) = \frac{3-2x^2z-xz^2}{1-x^2z-xz^2-z^3} \tag{2.5}$$

dır (Kose ve ark. 2014).

İspat: G(z), $\{K_n(x)\}_{n\in N^+}$ polinomunun üreteç fonksiyonu olsun.

$$G(z) = K_0(x) + K_1(x)z + K_2(x)z^2 + \ ... + K_n(x)z^n + \cdots \tag{2.6}$$

(2.6) da verilen $G(z)$ üreteç fonksiyonu sırasıyla x^2z, xz^2 ve z^3 ile çarpıldıktan sonra

$$\left.\begin{aligned} x^2zG(z) &= x^2K_0(x)z + x^2K_1(x)z^2 + x^2K_2(x)z^3 + \ ... + x^2K_n(x)z^{n+1} + \ ... \\ xz^2G(z) &= xK_0(x)z^2 + xK_1(x)z^3 + xK_2(x)z^4 + \ ... + xK_n(x)z^{n+2} + \ ... \\ z^3G(z) &= K_0(x)z^3 + K_1(x)z^4 + xK_2(x)z^5 + \ ... + K_n(x)\mathrm{z}^{\mathrm{n+3}} + \ ... \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

elde edilir. Son olarak (2.7) denklemlerinin toplamı (2.6) dan çıkarılırsa

$$G(z) = \frac{K_0(x) + \mathrm{z}\big(K_1(x) - x^2K_0(x)\big) + z^2(K_2(x) - x^2K_1(x) - xK_0(x))}{1 - x^2z - xz^2 - z^3}$$

Tribonacci-Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu elde edilir. ■

2.5. Tribonacci Polinomunun Kökleri

n≥ 2 için, Tribonacci dizisi $\{T_n\}$ n∈N tanımlanırken

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} \qquad (T_0 = 0, \quad T_1 = T_2 = 1) \tag{2.8}$$

tekrarlama bağıntısı ile n. Tribonacci sayısının $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$ nin doğrusal bir kombinasyonu olduğu görülür:

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

(Kose ve ark 2014). Burada α gerçek kök, β ve γ karmaşık eşlenik köklerdir.

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{2.9}$$

α, β ve γ (2.8) ve (2.9) karakteristik denkleminin kökleridir. α, β ve γ (2.12) denkleminden faydalanarak

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}$$
$$\beta = \frac{1 + w\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}$$
$$\gamma = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + w^3\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}$$

bulunur. Burada

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

alınmıştır (Elia 2001).

Yukarıda (2.9) denkleminin genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{2.10}$$

Verilen üçüncü dereceden denklemin (kübik denklem) kökleri yerine koyma yöntemi ile bulunur. Açık bir ifadeyle (2.10) denkleminde

$$x = y - \frac{p}{3}$$

yazılıp

$$y^3 + ay + b = 0 \tag{2.11}$$

şeklinde bir denklem elde ettikten sonra (2.11) denkleminde

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2)$$
$$b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$$

a ve b'yi yerlerine yerleştirip gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde bu denklemin üç kökü olduğu aşağıdaki gibi görülür:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A + B \\ y_2 &= -\tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}(A-B) \\ y_3 &= -\tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}(A-B) \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

$i^2 = -1$ olmak üzere

$$A = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$
$$B = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

A ve B (2.12) denkleminde yerlerine yazıldığında üç kök aşağıda doğrulanır:

$$\begin{aligned}(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) &= (y - A - B)(y^2 + (A+B)y + A^2 - AB + B^2) \\ &= y^3 - 3ABy - (A+B)(A^2 - AB + B^2) \\ &= y^3 - 3ABy - A^3 - B^3 \\ &= y^3 + ay + b.\end{aligned}$$

(Jia 2017).

3. TRİBONACCİ DİZİSİ İÇİN LUCAS POLİNOMLARINDAN FAYDALANARAK OLUŞTURULAN ÖZDEŞLİKLER – ÜRETEÇ FONKSİYONU

S_n genelleştirilmiş Tribonacci dizisi olarak da adlandırılan, genelleştirilmiş Lucas dizisi olsun. S_n'in tekrarlama bağıntısı

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + S_{n-2}\,, \tag{3.1}$$

şeklinde ve $S_0 = 3,\ S_1 = 1$ ve $S_2 = 3$ başlangıç koşullarıyla birlikte S_n bir dizidir (Sloane 2002). Hatırlanırsa $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik polinomunun kökleri idi. Köklerin değerleri

$$\alpha = 1.8392286 \ldots, |\beta| = |\gamma| = 0.737353 \ldots \tag{3.2}$$

dır. S_n dizisi için Binet formülünü kullanarak

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n\,, \tag{3.3}$$

elde edilir (Elia 2001). $A(x)$ üreteç fonksiyonu olmak üzere

$$A(x) = \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3}.$$

şeklinde ifade edilir (Catalani 2002). Tribomatrix olarak adlandırılan şu matrisi düşünelim,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matrisinin bulunuşu şu şekildedir. Aşağıdaki (3.5) matrisinde n=1 alınırsa ve hatırlanırsa, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ iken $T_0 = 0\,, T_1 = 1\,, T_2 = 1$ şartlarıyla

$$A = \begin{bmatrix} T_2 & T_1 & T_0 \\ T_1 + T_0 & T_0 + T_{-1} & T_{-1} + T_{-2} \\ T_1 & T_0 & T_{-1} \end{bmatrix}$$

$n = 2\ için\ T_2 = T_1 + T_0 + T_{-1}\ , \qquad T_{-1} = 0,$

$n = 1\ için\ T_1 = T_0 + T_{-1} + T_{-2}\ , \qquad T_{-2} = 1,$

dir. A matrisinin özdeğerleri $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ dir. Bu karakteristik denklemin özdeğerleri ve katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak,

$$\left.\begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -1 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

bulunur. (3.1) Karakteristik denklemi

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} &= det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(-1)^{1+1}\lambda^2 + (-\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Tümevarım ile

$$A^n = \begin{bmatrix} T_{n+1} & T_n & T_{n-1} \\ T_n + T_{n-1} & T_{n-1} + T_{n-2} & T_{n-2} + T_{n-3} \\ T_n & T_{n-1} & T_{n-2} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

(2.1) denkleminden faydalanarak ve (3.5) matrisinin asal (esas) köşegen üzerinde bulunan elemanlarının toplamı şeklinde

$$
\begin{aligned}
iz(A^n) = tr(A^n) &= S_n \\
&= T_{n+1} + T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-2} \\
&= T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-1} + 2T_{n-2} \\
&= T_n + 2T_{n-1} + 3T_{n-2}
\end{aligned}
$$

yazılır, burada tr(·) iz operatörüdür. (2.1) tekrarlama bağıntısından yararlanarak S_n aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
&= T_n + 2T_{n-1} + 3T_{n-2} \\
&= T_n + 2T_{n-1} + 3(T_{n+1} - T_n - T_{n-1}) \\
S_n &= 3T_{n+1} - 2T_n - T_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde de ifade edilir (Catalani 2002).

Burada C_n:

$$C_n = \alpha^n\beta^n + \alpha^n\gamma^n + \beta^n\gamma^n$$

şeklinde tanımlanırsa, (3.5) denklemindeki A_n matrisinin 2. mertebeden asal minörlerinin determinantlarının toplamı olarak

$$C_n = 2T_{n+1}T_{n-2} + T_{n+1}T_{n-1} - {T_n}^2 - 2T_nT_{n-1} - T_{n-1}T_{n-3} + T_{n-2}^2 \qquad (3.6)$$

yazılır. C_n in bulunuşu (2.1) denklemi yardımıyla aşağıdaki düzenlemeler ile birlikte

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}T_{n-2} &= (T_n + T_{n-1} + T_{n-2})(T_{n-2}) \\
&= (T_nT_{n-2} + T_{n-1}T_{n-2} + T_{n-2}^2)
\end{aligned}
$$

(3.6) denkleminde

$$T_{n+1}T_{n-1} = (T_n + T_{n-1} + T_{n-2})(T_{n-1})$$

(3.6) denkleminde ve son olarak

$$T_{n-1}T_{n-3} = (T_{n-1})(T_n - T_{n-1} - T_{n-2})$$
$$= T_nT_{n-1} - T_{n-1}^2 - T_{n-1}T_{n-2}$$

denklemi (3.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$C_n = -{T_n}^2 + 2T_{n-1}^2 + 3T_{n-2}^2 - 2T_nT_{n-1} + 2T_nT_{n-2} + 4T_{n-1}T_{n-2}$$

elde edilir (Catalani 2002).

3.1. C_n ve C_{2n} için Tekrarlama Bağıntıları

$C_n$in tanımı yardımıyla C_{n-1}, C_{n-2} ve C_{n-3} yerlerine yazılırsa

$$-C_{n-1} - C_{n-2} + C_{n-3} = -\alpha^{n-1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\gamma^{n-1} - \beta^{n-1}\gamma^{n-1} - \alpha^{n-2}\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}\gamma^{n-2} - \beta^{n-2}\gamma^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta^{n-3} + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3} + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}$$
$$= \alpha^{n-3}\beta^{n-3}(1 - \alpha\beta - \alpha^2\beta^2) + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3}(1 - \alpha\gamma - \alpha^2\gamma^2) + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}(1 - \beta\gamma - \beta^2\gamma^2)$$

elde edilen (3.4) denklemlerinde kökler arasındaki ilişkileri kullanarak,

$$\begin{aligned}
1 - \alpha\beta - \alpha^2\beta^2 &= \alpha\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha^2\beta^2 \\
&= \alpha\beta(\gamma - 1 - \alpha\beta) \\
&= \alpha\beta(\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta) \\
&= \alpha\beta(\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\
&= \alpha\beta\gamma(1 + \alpha + \beta) \\
&= 1 + 1 - \gamma \\
&= 2 - \gamma
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen diğer çarpımlar için aynı hesaplamaları tekrarladıktan sonra,

$$-C_{n-1} - C_{n-2} + C_{n-3} = \alpha^{n-3}\beta^{n-3}(1 - \alpha\beta - \alpha^2\beta^2) + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3}(1 - \alpha\gamma - \alpha^2\gamma^2) + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}(1 - \beta\gamma - \beta^2\gamma^2)$$

$$= \alpha^{n-3}\beta^{n-3}(2-\gamma) + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3}(2-\beta) + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}(2-\alpha)$$
$$= 2\alpha^{n-3}\beta^{n-3} - \alpha^{n-3}\beta^{n-3}\gamma + 2\alpha^{n-3}\gamma^{n-3} - \alpha^{n-3}\gamma^{n-3}\beta + 2\beta^{n-3}\gamma^{n-3} - \beta^{n-3}\gamma^{n-3}\alpha$$
$$= 2(\alpha^{n-3}\beta^{n-3} + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3} + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}) - (\alpha^{n-3}\beta^{n-3}\gamma + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3}\beta + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}\alpha$$
$$= 2(\alpha^{n-3}\beta^{n-3} + \alpha^{n-3}\gamma^{n-3} + \beta^{n-3}\gamma^{n-3}) - \alpha\beta\gamma(\alpha^{n-4}\beta^{n-4} + \alpha^{n-4}\gamma^{n-4} + \beta^{n-4}\gamma^{n-4})$$
$$= 2C_{n-3} - C_{n-4}$$

$$C_{n-1} = -C_{n-2} - C_{n-3} + C_{n-4}$$

elde edilir. Bu şekilde C_n için tekrarlama bağıntısı

$$C_n = -C_{n-1} - C_{n-2} + C_{n-3} \tag{3.5}$$

olmak üzere başlangıç şartları

$$C_0 = 3, \qquad C_1 = -1, \qquad C_2 = -1$$

ile birlikte verilir. C_n için üreteç fonksiyonu,

$$A(x) = \frac{3 + 2x + 3x^2}{1 + x + 3x^2 - x^3} \tag{3.6}$$

elde edilir (Catalani 2002).

C_{2n} için tekrarlama

(3.5) denkleminde n yerine $2n$ yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde,

$$C_{2n} = -C_{2n-1} - C_{2n-2} + C_{2n-3}$$
$$= C_{2n-2} + C_{2n-3} - C_{2n-4} + C_{2n-3} + C_{2n-4} - C_{2n-5} - C_{2n-4} - C_{2n-5} + C_{2n-6}$$

$$= C_{2n-2} + 2C_{2n-3} - C_{2n-4} - 2C_{2n-5} + C_{2n-6}$$
$$= -C_{2n-2} - 3C_{2n-4} + C_{2n-6} + 2C_{2n-2} + 2C_{2n-3} + 2C_{2n-4} - 2C_{2n-5}$$
$$= -C_{2n-2} - 3C_{2n-4} + C_{2n-6} + 2C_{2n-2} - 2(-C_{2n-3} - C_{2n-4} + C_{2n-5})$$
$$= -C_{2n-2} - 3C_{2n-4} + C_{2n-6} + 2C_{2n-2} - 2C_{2n-2}$$

C_{2n} için tekrarlama bağıntısı

$$C_{2n} = -C_{2n-2} - 3C_{2n-4} + C_{2n-6}, \qquad (3.7)$$
$$C_0 = 3, C_1 = -1, C_4 = -5$$

başlangıç koşulları ile birlikte verilir. C_{2n} için üreteç fonksiyonu,

$$A(x) = \frac{3 + 2x + 3x^2}{1 + x + 3x^2 - x^3}$$

şeklindedir (Catalani 2002).

3.2. Genelleştirilmiş Tribonacci Dizisi İle İlgili Özdeşlikler

$n \geq m$ olmak üzere (3.2) denkleminden faydalanarak

$$S_nS_{n+m} = (\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)(\alpha^{n+m}\beta^{n+m}\gamma^{n+m})$$
$$= (\alpha^{2n+m} + \alpha^n\beta^{n+m} + \alpha^n\gamma^{n+m} + \alpha^{n+m}\beta^n + \beta^{2n+m} +$$
$$\beta^n\gamma^{n+m} + \alpha^{n+m}\gamma^n + \beta^{n+m}\gamma^n + \gamma^{2n+m}$$
$$= S_{2n+m} + \alpha^n\beta^n(\alpha^m + \beta^m) + \alpha^n\gamma^n(\alpha^m + \gamma^m) +$$
$$\beta^n\gamma^n(\beta^m + \gamma^m)$$
$$= S_{2n+m} + \alpha^n\beta^n(S_m - \gamma^m) + \alpha^n\gamma^n(S_m - \beta^m) +$$
$$\beta^n\gamma^n(S_m - \alpha^m)$$
$$= S_{2n+m} + S_m(\alpha^n\beta^n + \alpha^n\gamma^n + \beta^n\gamma^n) -$$
$$\alpha^m\beta^m\gamma^m(\alpha^{n-m}\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\gamma^{n-m} + \beta^{n-m}\gamma^{n-m})$$
$$= S_{2n+m} + S_mC_n - C_{n-m}. \qquad (3.8)$$

bulunur. Diğer yandan $n < m$ olsun. Üçüncü toplamda bir araya getirilen $\alpha^n\beta^n\gamma^n$ nin sonraki satırından son satırına kadar işlemler aynı şekilde devam eder. Sonuç şu şekilde verilir (Catalani 2002).

$$S_n S_{n+m} = S_{2n+m} + S_m C_n - S_{m-n}. \tag{3.9}$$

3.2.1. Sonuç: C_n ve C_{2n} ile ilgili (3.8) denkleminde eğer $n = n - 1$ ve $m = 1$ alınırsa ($S_1 = 1$)

$$S_n S_{n-1} = S_{2n-1} + C_{n-1} - C_{n-2}$$

denklemi bulunur. Eğer $m = n$ alınırsa ($S_0 = 3$)

$$S_n S_{2n} = S_{3n} + S_n C_n - 3$$

bulunur. Genellikle aşağıdaki denklem kullanılır. (3.8) denkleminde $m = n(m - 1)$ alınırsa

$$S_n S_{nm} = S_{n(m+1)} + S_{n(m-1)} C_n - S_{n(m-2)}$$

elde edilir. Eğer m=0 alınırsa ($S_0 = 3$)

$$\begin{aligned} S_n^2 &= S_{2n} + 3C_n - C_n \\ &= S_{2n} + 2C_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur. Küp için (3.8) ve (3.9) denklemleri kullanılarak, aynı işlemler tekrar edildiğinde

$$\begin{aligned} S_n^3 &= S_n^2 S_n \\ &= (S_{2n} + 2C_n) S_n \\ &= S_n S_{n+n} + 2S_n C_n \\ &= S_{2n+n} + S_n C_n - C_{n-n} + 2S_n C_n \\ &= S_{3n} + 3S_n C_n - 3 \end{aligned} \tag{3.11}$$

olduğu sonucuna ulaşılır (Catalani 2002).

4. SONUÇ

Bu çalışma literatürdeki özel sayı dizileri ile ilgili kaynakların bazılarından faydalanarak bir derleme biçiminde oluşturulmuştur. Bu derleme yapılırken Fibonacci, Lucas gibi sayı dizilerinden çok daha sonra bulunan Tribonacci dizileri, Tribonacci Polinomları ve bu polinomların üreteç fonksiyonları ile ilgili teoremler bir araya getirilmiştir. Böylece okuyucu için bilgi sahibi olunabilecek ve kolay anlaşılabilecek bir kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu çaba sırasında detaylı bir literatür taraması yapılmış olup konu ile ilgili çok sayıda makale ve kitap incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Catalani, M. 2002. Identities for Tribonacci-Related Sequences. https://arxiv.org/abs/math/0209179-(Erişim Tarihi:01.10.2019)

Elia, M. 2001. Derived Sequences, The Tribonacci Recurrence and Cubic Forms. *The Fibonacci Quarterly,* 39(2): 107-109.

Anonim, 2020. Eric Weisstein's World of Mathematics**,** published electronically at http://mathworld.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html-(Erişim Tarihi:27.01.2020)

Feinberg, M. 1963. Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly,* 1(3): 70-74.

Hoggatt Jr., V. E., Bicknell, M. 1973. Generalized Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly,* 11: 458-460.

Anonim, 2019. https://hyperleap.com/topic/Lucas_sequence-(ErişimTarihi:24.06.2019).

Jia, Y.B. 2017. Roots of Polynomials. (Com S 477/577 Notes) http://web.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/polyroots.pdf-(Erişim Tarihi:17.05.2018)

Kose, H., Yilmaz N., Taskara, N. 2014. On Properties of Tribonacci-Lucas Polynomials, s 2,4,5,7 https://arxiv.org/pdf/1409.3710.pdf-(Erişim Tarihi:24.12.2019)

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Framingham, Massachusetts, 8, 528 pp.

Ramirez, J.L., Sirvent, V.F. 2014. Incomplete Tribonacci Numbers and Polynomials *Journal of Integer Sequences,* Vol. 17, Article 14.4.2

Scott, A., Delaney, T., Hoggatt Jr., V.E. 1977. The Tribonacci Sequences. San Jose State University, San Jose, California, 193-195 pp.

Sloane, N.J.A. 2002. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. http://www.research.att.com/˜njas/sequences/-(Erişim Tarihi: 31 01.2020)

Toy, M. 2009. Fibonacci ve Lucas Sayılarının Bölünebilme Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı, Konya.

Yilmaz, N., Taskara, N. 2014. Incomplete Tribonacci-Lucas Numbers and Polynomials, s 2,4 https://arxiv.org/pdf/1409.3710.pdf-(Erişim Tarihi:23.10.2018)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Esra NAMLI
Doğum Yeri ve Tarihi	: Soma 1991
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Rıfat Dağdelen Anadolu Lisesi
Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: FKM Bireysel Eğitim Eğitim Kalesi Okulları
İletişim (e-posta)	: esranamli@windowslive.com