RİESZ TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M.Zeki SARIKAYA

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2003

RİESZ TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

M. Zeki SARIKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Afyon
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Ekim 2003

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RİESZ TİPLİ POTANSİYELLER ÜZERİNE

M.Zeki SARIKAYA

Matematik Ana Bilim Dalı

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü,

Ekim 2003

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler verildi. İkinci bölümde, çalışmamıza temel oluşturacak olan klasik Riesz potansiyelleri için teoremler ve L_p eşitsizlikleri verildi. Üçüncü bölümde, Riesz potansiyellerinin Taylor açılımı verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Riesz Potansiyeli, Taylor açılımı, Singüler İntegraller.

ABSTRACT

Msc Thesis

ON THE RIESZ TYPE POTENTIALS

M.Zeki SARIKAYA

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

October 2003

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Hüseyin YILDIRIM

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have been given. In the second chapter, the theorems and L_p inequality for the classical Riesz potentials, which are going to be the basic of the study, are given. In the third chapter Taylor expansion for the classical Riesz potentials is given.

KEY WORDS : Riesz Potential, Taylor expansion, Singular Integrals.

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI

imza

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....

Jürü Üyeleri :

Prof. Dr. Ömer AKIN ....

Prof. Dr. Fatih NURAY ....

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....

Mehmet Zeki SARIKAYA'nın "Riesz Tipli Potansiyeller Üzerine" konulu tezi .20/11/2003 tarihinde, yukarıdaki jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik anabilim dalında, Yüksek Lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim kurulunun 20./11./2003 tarih ve .11/1.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Recep ASLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM'a ayrıca Prof.Dr. Rauf HÜSEYNOV'a ve aileme teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

M. Zeki SARIKAYA

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans

Eğitim

Lisans : 2000 Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Lise : 1994 Gebze Endüstri Meslek Lisesi, Torna Tesviye Bölümü

İş

2000- Araştırma Görevlisi. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Bulanık 03.02.1975

Cinsiyet : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce

SİMGELER

Δ	:	Laplace Operatörü
$\hat{f},\ Ff$	:	f fonksiyonunun Fourier Dönüşümü
F_B	:	Fourier-Bessel Dönüşümü
$K(x,y)$	:	$\lvert x-y\rvert$ şeklinde x ve y noktaları arasındaki uzaklığı temsil eden bir fonksiyon
$f*K$	:	f ile K nın Konvolüsyonu
I^{α}	:	Riesz Potansiyeli
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
$\mathbb{R}^{+}$	:	$(0,\infty)$ aralığı
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	Mutlak değeri p inci mertebeden integrallenebilen fonksiyonların cümlesi
$\mathbb{R}^n$	:	$n-$ boyutlu Öklid uzayı
S	:	Schwartz uzayı
δ	:	Dirac fonksiyonu
$C(\mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar cümlesi

İÇİNDEKİLER

SAYFA

GİRİŞ

Bu çalışmada dikkate alınan potansiyeller tek değişkenli halde ilk defa Weyl tarafından çalışılmıştır[H.,Weyl 1917]. Weyl'in araştırdığı integral, $0 < \alpha < 1$, $t \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x+t) \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$$

şeklinde idi. Weyl bu integrale Riemann-Liouville anlamında türev adını vermiştir. Bu integralin fonksiyonlar teorisi ve matematik analizin bir çok dalında uygulamaları vardır.

Riesz potansiyeli adı altında tanımlanmış olan,

$$I_\alpha(f) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \qquad 0 < \alpha < n$$

$$\sigma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})} \tag{1}$$

integrali ilk olarak 1949 yılında Riesz tarafında incelenmiştir[Riesz 1949]. (1) integrali,

$$I_\alpha(f) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \qquad 0 < \alpha < n \tag{2}$$

şeklinde de yazılabilir. Potansiyelin bu yazılışının, f fonksiyonu ile $|x|^{\alpha-n}$ çekirdeğinin konvolüsyonu olduğu görülür. f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu $f * K$ şeklinde gösterilir ve konvolüsyon tanımına göre,

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x-y) dy \tag{3}$$

dir[Stein 1970]. Yani Riesz potansiyeli (3) ile gösterilen operatörler sınıfının bir özel halidir. Bu operatörler sınıfına singüler integraller de dahildir. Görüldüğü gibi Riesz potansiyelinin çekirdeği olan $K(x) = |x|^{\alpha-n}$ fonksiyonunun koordinat başlangıcında zayıf tekilliği mevcuttur. $K(x) = |x|^{-n}$ çekirdekli konvolüsyonlara singüler integraller denir. Yani singüler integraller potansiyellerden farklı olarak tekillik noktalarında integrallenemezler. Tüm bunlar (3) konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği olunca buna singüler integral, zayıf (integrallenebilen) tekilliği olunca da potansiyel denilebileceğini gösteriyor[Landkoff 1972, Stein 1970]. Bu tanımdan, çekirdeği $\log|x|$ olan konvolüsyonların da potansiyel sınıfına dahil olacağı açıkca görülmektedir[Mizuta 1987].

Singüler integraller ve potansiyeller teorisinde en çok kullanılanlardan biri Fourier dönüşümüdür.$L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ veya Ff şeklinde gösterilir ve

$$Ff(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x.y)} f(y)dy$$

şeklinde tanımlanır[Strein 1970]. Burada $(x.y)$ n-boyutlu $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ vektörlerinin iç çarpımıdır. f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü $F^{-1}f$ ile gösterilir ve

$$F^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x.y)} \hat{f}(y)dy$$

şeklinde gösterilir.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar (Distribution=Dağılım) teorisi yardımıyla Fourier dönüşümü ve onun tersi daha geniş fonksiyon sınıfları için de kullanılabilir. (3) biçimindeki konvolüsyon operatörüne Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$F(f * K)(x) = Ff.FK$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan Fourier dönüşümünün özelliğine göre keyfi bir P polinomu için,

$$P(D)(Ff)(x) = (FP(-2\pi iy)f(y))(x) \tag{4}$$

vardır[Stein 1970]. Buradaki P polinomu $(x_1, .., x_n)$ değişkenlerine bağlı bir polinomdur. Yani, $P(x) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ katlı indis, yani c_α lar negatif olmayan tam sayılar, $x^\alpha = x_1^\alpha, , , x_n^\alpha$ ve D diferensiyel operatörünün gösterimidir. $P(D)$ ifadesi, P polinomunda x^α nın yerine $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ yazılacağını gösteriyor. Bu durumda $P(D)$ operatörüne, $P(x)$ polinomu ile oluşturulmuş diferensiyel polinom denir. Özel halde $P(D)$ Laplace operatörü,

$$P(D)(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

ise (4) formülünden,

$$F\Delta f(x) = -4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$F(-\Delta f)(x) = 4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin, Laplace operatörünün keyfi kuvvetleri(fractional kuvvetleri) için de var olduğu gösterilmiştir[Stein 1970]. Yani,

$$F(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f(x) = (2\pi |x|)^\beta Ff(x)$$

dir. Aynı çalışmada, $-n < \beta < 0$ durumunda Laplace operatörünün kesirli kuvvetleri (2) formülü ile tanımlanmış Riesz çekirdeğinin kuvvetleri ile aynıdır. ((2) formülü $\alpha = -\beta$ için yazılmıştır).

Riesz potansiyellerinin Fourier dönüşümü ile Laplace operatörü arasındaki ilişkileri, bu potansiyellerin matematiğin bir çok dalında kullanılan önemli bir operatör olduğunu gösterir. Fourier dönüşümü ile Laplace operatörü arasındaki ilişkiler başka diferensiyel operatörler ve dönüşümler arasında da mevcuttur. Akın 1987 deki bir çalışmasında

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{k_1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + \frac{k_n}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n} + \lambda\ , \quad \lambda, k \in \mathbb{R},\ m+n=t$$

operatörünü ele almış ve Δ operatöründen L_k operatörüne geçişi sağlayan bir teorem vermiştir. Aliev ve İlham 1993 de L_k operatörü ile Fourier-Bessel dönüşümü arasındaki ilşkileri incelemişlerdir.

Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olamaz [Stein 1970]. Eğer $\forall p > 1$ için,

$$\|T(f)\|_q \le C_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T operatörüne kuvvetli (p,q)-tipli operatör denir. $\forall\lambda > 0$ için,

$$m\{x: \ |T(f)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C_{p,q}\,\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise T operatörüne (p,q)-tipli operatör denir. Hardly-Littlewood-Sobolev teoremine göre $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ iken bu potansiyeller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q}\,\|f\|_p$$

Burada $A_{p,q}$ yalnız p ve q ya bağlı olan bir sabittir. $p = 1$ durumunda ise teoreme göre I_α operatörü $(1,q)$-tipli operatördür (Burada $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}$ dır). Yani $\lambda > 0$ için,

$$m\{x: \ |I_\alpha f| > \lambda\} \leq \left(\frac{A\,\|f\|_1}{\lambda}\right)^q$$

dir[Stein 1970]. Yukardaki açıklamalardan, konvolüsyon operatörleri sınıfında Riesz potansiyelinin iyi incelenmiş operatörler olduğu görülmektedir. Bu operatörler yardımıyla fonksiyonlar teorisinde potansiyel uzayları tanımlanmıştır [Gadijev 1988, Stein 1970].

Örneğin, Riesz potansiyel uzayının elemanları $(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki f fonksiyonlarından oluşur. Bu uzaylarda norm aşağıdaki gibi tanımlanır[Stein 1970].

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

Bu tür uzaylar düzgün manifoldlar üzerinde de tanımlanabilir. Örneğin $\mathbb{R}^n$ de küresel koordinatlara geçersek, o zaman Laplace operatörü iki kısımda oluşur. Birincisi Radial (yani yarıçapa bağlı) kısım, ikincisi küresel kısım (yani yalnızca açılara bağlı kısım). Laplace operatörünün bu ikinci küresel kısmına küre üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörü denir[Mihlin 1962]. Bu operatör δ ile gösterilir.Yukarıdaki gösterimle Riesz potansiyel uzayı δ operatörü yardımıyla küre üzerinde de tanımlanabilir[Gadijev 1982]. Küre üzerinde tanımlanmış bu uzay singüler integral teorisinde çok önemli bir yer tutar. Singüler integrali bir operatör gibi karakterize eden sembolün (yani singüler integralin çekirdeğinin genelleştirilmiş fonksiyon anlamında Fourier dönüşümü) özellikleri genellikle bu uzayda incelenir. Bundan dolayı sembolün küre üzerinde tanımlanmış bu uzaydaki özellikleri çok boyutlu singüler integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği teoremlerinde kullanılır[Gadijev 1982, Mihlin 1962]. Singüler integralin sembolü, aslında küre üzerinde tanımlanmış logaritmik çekirdekli potansiyeldir[Gadijev 1982, Mihlin 1962]. Sembolün türevlerini araştırmak için, bu logaritmik çekirdeğin türevlerini araştırmak zorundayız. Yani singüler integral teorisi ve singüler integral denklemler teorisinin problemleri bizi zayıf tekillikleri olan integrallerin araştırılmasına götürür[Mihlin 1962]. Bu tür integrallerin türevlerinin alınması problemindeki zorluklar zayıf tekillikli çekirdeğin türevini aldıkça onun tekillik mertebesinin artmasından ibarettir. Bu nedenle zayıf tekilliği olan çekirdekli integral, türevlerini aldıktan sonra singüler integral haline dönüşür. Bu konuda, yani zayıf çekirdeklerin diferensiyellenebilmesi konusunda bazı sonuçlar vardır.

Bunlardan birini hatırlatalım[Mihlin 1962].

$$r = |x-y|\,,\ x, y \in \mathbb{R}^n \text{ ve } L(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}dy \ \ ,\ \theta = \frac{x-y}{r}$$

olsun. Burada $\varphi(x,\theta)$ fonksiyonu ve onun x ve θ noktalarının kartezyen bileşenlerine göre türevleri, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $f(y)$ fonksiyonu Lipschitz sınıfından ve sonsuzda $f(y) = O(|x|^{-1})$, $\ell > 1$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında $L(x)$ integralinin x'e göre birinci türevleri mevcuttur ve bu türevler $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}\right]dy - f(x)\int\limits_{S^{n-1}} \varphi(x,\theta)\cos(r, x_k)ds$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Burada S^{n-1} , $\mathbb{R}^n$ uzayında başlangıcı orjin olan bir yarıçaplı küre yüzeyi, ds yüzey elemanı $\cos(r, x_k)$ ise r vektörünün x_k ekseni ile yaptığı açının kosinüsüdür. Riesz potansiyellerinin araştırılması da aynı konunun bir dalıdır. Bu potansiyeller 1949 yılında tanımlanmış olmasına rağmen bunların diferensiyellenebilme özellikleri 1983 yılında Y.Mizuta tarafından incelenmeye başlanmış ve bu araştırmalar halen devam etmektedir[Mizuta 1987, 1993]. Yukarıda yazılan $L(x)$ integral operatörünün çekirdeğinin tekilliği $n-1$ inci mertebedendir. Bundan farklı olarak Riesz potansiyelinin çekirdeğinin tekilliği $n-\alpha$ inci mertebedendir ve burada α, n den küçük olmak üzere keyfi pozitif bir sayıdır. $\alpha = 1$ ve $\varphi(x, \theta) \equiv 1$ seçersek, Riesz potansiyeli $L(x)$ potansiyelinden bulunur. Yani bu özel halde söylediğimiz sonuç Riesz potansiyelinin diferansiyellenebilmesi hakkında bir önermedir. Doğal olarak $\alpha \neq 1$ olursa, yukardaki sonuçtan Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilmesi hakkında hiç bir bilgi elde edilemez. Riesz potansiyelinin tanımından α nın kesir ve tam sayı olabileceği gürülmektedir. $L(x)$ operatöründe $\alpha = 1$ olduğundan bu operatörün çekirdeğinin birinci türevi tekilliği singülerliğe getirir (yani tekilliğin derecesi n olur ve türevi alınmış çekirdek $\frac{1}{|x|^n}$ şeklinde olur. Bu ise n-boyutlu uzayda singüler çekirdektir). Riesz potansiyelinde ise tekilliğin mertebesi $n-\alpha$ olduğundan bu tekilliği türevleme yöntemi ile singülerliğe getirmek için bir çok adım gerekir. Örneğin, α tam ise α tane adım gerekir. Bundan dolayı Riesz potansiyelinin ardışık türevlerini araştırma imkanı buluruz.

Dikkat edilirse, Riesz potansiyellerinin çekirdeği x ve y noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır. Bu uzaklığa bir öteleme olarak bakılırsa, Riesz potansiyellerinin $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlanmış öteleme ile ilişkisi vardır diyebiliriz. Bu nedenle şöyle bir poroblem ortaya çıkmıştır: Acaba farklı bir öteleme tanımlamakla Riesz potansiyeli elde edilebilir mi? Yani, genelleştirilmiş öteleme ile ilişkili ve yukarıda verilen Riesz potansiyelinin tüm özelliklerini sağlayan bir potansiyel bulunabilir mi? Böyle bir poroblemin çözümü 1988 yılında I. Aliev ve A. Hacıyev tarafından verilmiştir[I. Aliev, A. Hacıyev 1988]. Bu makalede, ilk defa 1951 yılında M. Levitan'nın makalesinde verilen genelleştirilmiş öteleme ile ilgili olan Riesz potansiyelleri $\mathbb{R}_n^+$ 'da elde edilmiştir. Bu makalede tanımlanmış olan Riesz potansiyelinin çekirdeğinin öteleme ile ilişkisi şu şekildedir: Çekirdeğe, ilk $(n-1)$ tane değişkene göre adi ve n. değişkene göre ise genelleştirilmiş öteleme uygulanmıştır. Yani $\mathbb{R}_n^+$ nın ötelemesi,

$$T_x^y f(x) = c_v \int_0^{\pi} f\left(x' - y', ..., \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha}\right) \sin^{2v-1} \alpha d\alpha$$

şeklindedir. Burada,

$$x' = (x_1, ...x_{n-1}) \; , \; y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \; , \; v > 0 \; , x_n > 0 \; , \; y_n > 0$$

dir.

Yine 1988 yılında A. Haciyev ve İ. Aliev, genelleştirilmiş öteleme ile ilgili Riesz potansiyellerini tanımlayarak Δ_B Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün negatif kesirli kuvvetleriyle ilişkilerini vermişlerdir. Ayrıca, genelleştirilmiş ötelemeyle oluşturulan $n-$boyutlu singüler integralleri de incelemişlerdir [Hacıyev, Aliev 1992]. Diğer yandan,1995 yılında H.Yıldırım

$$T_x^y f(x) \;\; = \;\; c_v \int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi} f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\alpha}, ..., \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} \sin^{2v_i - 1} \alpha_i d\alpha_i\right)$$

ötelemesi yardımıyla genelleştirilmiş Riesz potansiyellerini tanımlayarak, bu potansiyellerin özelliklerini ve tersini vermiştir[H.Yıldırım, 1995]. Bunların dışında, klasik Riesz potansiyellerinin Taylor açılımını T.Shimomura ve Y.Mizuta vermiştir[T.Shimomura ve Y.Mizuta]. Buna ilaveten H.Yıldırım ve M.Z.Sarıkaya $\alpha - 2k = \ell$ olmak üzere, genelleştirilmiş ötelemeyle elde edilen

$$(\Lambda_v^\ell f)(x) = c_v \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) T_x^y \, |x|^{-n-2|v|-\ell} \left(\prod_{i=1}^{n} y^{2v_i}\right) dy$$

Riesz potansiyellerinin Taylor açılımını ve özelliklerini vermiştir[H.Yıldırım, M.Z.Sarıkaya 2001].

I.BÖLÜM

1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1 (L^p Uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$ olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzayı,

$$L^p = \left\{ f(x) : \left\| f(x) \right\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

dır.

Tanım 1.2 (Ölçülebilir Fonksiyon): $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve A ölçülebilir bir uzay olsun. Bu durumda her $\alpha > 0$ için,

$$f^{-1}(]-\infty, \infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

oluyorsa, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 1.3 (Konvolüsyon): f ve g, $\mathbb{R}^n$ den C ye birebir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f * g$ fonksiyonu,

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

şeklinde tanımlanır ve buna f ile g nin konvolüsyonu denir.

Tanım 1.4 (Hölder Eşitsizliği): $f \in L^p$, $g \in L^q$ olmak üzere,

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,, \quad p > 1$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 1.5 (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği): $1 \leq p < \infty$ ve $f(x, y)$, Ω_1 ve Ω_2 üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\left\{ \int\limits_{\Omega_1} dx \left| \int\limits_{\Omega_2} f(x, y) dy \right|^p \right\}^{1/p} \leq \int\limits_{\Omega_2} dy \left\{ \int\limits_{\Omega_1} |f(x, y)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

eşitsizliğine Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği denir[Samko 1993].

Tanım 1.6 (Taylor Formülü): f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir I aralığında $(n+1)-$inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu I aralığındaki her x için Taylor formülü,

$$K_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + K_n(x)$$

olur.

Tanım 1.7 (Riesz Çekirdeği):

$$R_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n} & , \quad \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, .. \\ |x|^{\alpha-n}\ln(\frac{1}{|x|}) & , \quad \alpha - n = 0, 2, 4, 6, .. \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $R_\alpha(x)$ fonksiyonuna Riesz çekirdeği denir.

Riesz çekirdeğinin Taylor açılımında kalan terimi : $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $\mu! = \mu_1!\mu_2!...\mu_n!$, $|\mu| = \mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n$, $x^\mu = x_1^{\mu_1}.x_2^{\mu_2}...x_n^{\mu_n}$, $D = (D_1, ..., D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$R_{\alpha,\ell}(x,y) \doteq R_\alpha(x,y) - \sum_{|\mu|\leq\ell} \frac{x^\mu}{\mu!}\left[D^\mu R_\alpha(-y)\right]$$

şeklindedir.

Tanım 1.8: Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise, $K(x)$ çekirdeğine α. dereceden homogendir denir.

Tanım 1.9 (Singüler İntegrallerin Sınıflandırılması): $K(x)$ çekirdeği α. mertebeden homogen bir fonksiyon olsun. Eğer $x \neq \theta$ ise, $S = \{x : |x| = 1\}$ birim küre üzerinde x in izdüşümünü $x' = \frac{x}{|x|}$ olarak gösterelim. Eğer $K(x)$, α. mertebeden homogen ise bu durumda

$$K(x) = |x|^\alpha K\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha K(x')$$

yazabiliriz. $\Omega(x) = K\left(\frac{x}{|x|}\right)$ fonksiyonu sıfırıncı mertebeden homogendir. Böylece $\Omega(x) = K(x')$, S de bir fonksiyon olarak alınabilir. Bu fonksiyona K çekirdeğinin karakteristiği denir. $K(x)$, $-\alpha$. mertebeden homogen ve $f * K$ konvolüsyonu,

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy \tag{1}$$

olmak üzere $f \to f * K$ şeklinde bir dönüşümü göz önüne alalım. Bu halde aşağıdaki üç durum mevcuttur.

i) Eğer $0 < \alpha < n$ ise, (1) integraline zayıf singüler integral denir.

ii) Eğer $\alpha = n$ ise, (1) integraline singüler integral denir.

iii) Eğer $\alpha > n$ ise, (1) integraline hipersingüler integral denir.

$$U_\alpha f(x) = c\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy\ , \qquad 0 < \alpha < n$$

şeklinde tanımlanan Riesz potansiyeline zayıf singüleriteye sahip bir integral denir.

Tanım 1.10 ($\mathbb{R}^n$ de Küresel Koordinatlar): $\sum = \sum_n$, $\mathbb{R}^n$ de birim küre olarak tanımlansın. $y \in \mathbb{R}^n$, yani $n > 1$ için $y = (y_1, y_2, .., y_n)$ noktasını alalım. Bu durumda aşağıdaki dönüşüme küresel koordinatlar denir.

$$\begin{aligned}
y_1(r,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}) &= r\cos\varphi_1 \\
y_2(r,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}) &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\ \dots\dots \\
y_k(r,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}) &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{k-1}\cos\varphi_k \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\ \dots\dots \\
y_n(r,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}) &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

Burada ki φ_k açıları $0 \le \varphi_k \le \pi$, $k = 1, 2, 3, .., n-2$ ve $0 \le \varphi_{n-1} \le 2\pi$ dir. $r = |y|$ ve $y' = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) \in \sum$ olmak üzere $r = |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$

şeklindedir. Bu şekildeki bir dönüşümün Jacobiyeni ise,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial r} & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{vmatrix} = r^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} (\sin \varphi_2)^{n-3} \ldots \sin \varphi_{n-1}$$

dir.

Tanım 1.11 (Operatör): Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir

Tanım 1.12 (Laplace Operatörü):

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörüne $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü denir.

Tanım 1.13 (Laplace Denklemi): G, $\mathbb{R}^n$ nin açık irtibatlı bir alt cümlesi ve $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ da G de tanımlı n-değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

denklemine Laplace denklemi veya potansiyel denklemi denir.

Tanım 1.14 (Dağılım-Distribution): Kompakt desteğe sahip ve C^∞ sınıfına ait fonksiyonların sınıfı D olsun. O halde, $T : D \to \mathbb{R}$ ya da $T : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonelleri lineer ve sürekli ise, T fonksiyoneli bir dağılım olarak adlandırılır. $f \in D$ ve ϕ her hangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$< \phi, f > = < T_\phi, f > = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$$

şeklinde tanımlanır[Schwarz 1966].

Tanım 1.15 (Genişleme Operatörü): $\tau_\delta(f(x)) = f(\delta x)$, $\delta > 0$ ile tanımlanan τ_δ operatörüne genişleme operatörü denir[Stein 1970].

Tanım 1.16 (Radial Fonksiyon): Verilen bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f(x) = f(|x|)$ sağlanıyorsa $f(x)$'e radialdır denir. Bu tanım uyarınca bir radial fonksiyon orijin etrafındaki tüm rotasyonlar altında invaryanttır $(|x|^{\alpha}, e^{|x|^{\alpha}})$ [Samko 1993].

Tanım 1.17 (Dirac fonksiyonu): $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \\ \infty & , x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)dx = 1 \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x-a)dx = \varphi(a)$$

şeklinde tanımlanan δ fonksiyonuna Dirac fonksiyonu denir[Schwarz 1966].

Tanım 1.18 (Zayıf tip): T, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere, $L^p(\mathbb{R}^n)$ den $L^q(\mathbb{R}^n)$'e bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$M\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq (\frac{A\,\|f\|_p}{\alpha})^q \ , \ \alpha > 0$$

ise, T, $(p,q)-$zayıf tipindedir denir. Burada, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve A bir sabittir [Stein 1970].

Tanım 1.19 (Fourier Dönüşümü): $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve

$$x.y =< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

olmak üzere, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için f fonksiyonunun Fourier Dönüşümü,

$$Ff(x) := \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ixy} f(x)dx$$

ve f fonksiyonunun Ters Fourier Dönüşümü,

$$F^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi ixy} \hat{f}(x)dx$$

ile verilir.

Tanım 1.20 (S Schwartz Uzayı): $\mathbb{R}^n$ üzerinde C^∞ sınıfına ait ve tüm türevleri keyfi polinom ile çarpıldığında sınırlı kalan fonksiyonlar uzayıdır ve S ile gösterilir. Yani,

$$S = \{f : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\beta D^\alpha f(x)\right| < \infty, \ \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \text{ ve } \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)\}$$

dir. Burada $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ ve $x^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n}$ dir.

Tanım 1.21 (Cauchy Eşitsizliği): $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ...y_n)$ reel veya kompleks sayıların iki $n-$lisi olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

dir.

II. BÖLÜM

2.1. Riesz Potansiyelleri

Bu bölümde Riesz potansiyellerine formal olarak bakacağız. Bunun için, sonsuzda sıfır değerini alan ve yeterince düzgün fonksiyonlarla işlem yapacağız. f, yeterince düzgün ve sonsuzda sıfır değerini alan bir fonksiyon olsun.

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{2}$$

olmak üzere bir $(-\Delta f)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$F(-\Delta f)(x) = (2\pi\,|x|)^2 Ff(x)$$

olur. Burada $-\Delta$ operatörü pozitif bir operator olduğundan "2" yerine genel bir β kuvvetini alırsak hiç olmazsa formal olarak,

$$F(-\Delta f)^{\frac{\beta}{2}}(x) = (2\pi\,|x|)^{\beta} Ff(x) \tag{3}$$

yazılabilir. Burada β nın özel önemi $-n < \beta < 0$ olmasıdır. Bu halde (3) formal operatörünü bir integral operatörü gibi gerçekleştireceğiz. Bunun için, basit bir notasyon değişikliği ile,

$$I_\alpha(f) = (-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}}(f)\ ;\ 0 < \alpha < n \tag{4}$$

olur. Burada I_α Riesz potansiyeli olup,

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

$$\sigma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2})} \tag{5}$$

ile tanımlanır. Bu çalışmada türevleri bir polinomla çarpıldığında sınırlı kalan $\mathbb{R}^n$ üzerindeki sonsuz diferensiyellenebilir fonksiyonların sınıfını kullanmak bize kolaylık sağlayacaktır. Bu sınıfa Schwartz sınıfı denir.

Lemma 2.1.1: $0 < \alpha < n$ olsun.

a) $|x|^{\alpha-n}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\sigma(\alpha)(2\pi|x|)^{-\alpha}$ şeklindedir. Buna göre,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n}\,\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\alpha)(2\pi|x|)^{-\alpha}F\phi(x)dx \quad , \ \phi \in S \tag{6}$$

dır.

b) $F(I_\alpha f) = (2\pi|x|)^{-\alpha}\ Ff(x)$ eşitliği,

$$\int_{\mathbb{R}^n} I_\alpha(f)(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} Ff(x)(2\pi|x|)^{-\alpha}F\bar{g}(x)dx$$

anlamında sağlanır. Burada $f, g \in S$ dır.

Lemma 2.1.1 in yardımıyla elde edilecek ve I_α potansiyellerinin temel özelliklerini yansıtacak olan aşağıdaki iki eşitliği bulacağız:

1.I_α nın yarı(semi) grup özelliği:

$$I_\beta(I_\alpha f) = I_{\alpha+\beta}\ ,\ f \in S\ ,\ \alpha > 0\ ,\ \beta > 0\ ,\ \alpha+\beta < n \tag{7}$$

$$F(I_\alpha f) = (2\pi|x|)^{-\alpha}Ff$$

$$\begin{aligned} F(I_\beta(I_\alpha f)) &= (2\pi|x|)^{-\beta}F(I_\alpha f) \\ &= (2\pi|x|)^{-\beta}(2\pi|x|)^{-\alpha}Ff \\ &= (2\pi|x|)^{-(\alpha+\beta)}Ff \\ &= F(I_{\alpha+\beta}(f)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe F^{-1} dönüşümü uygulanırsa,

$$I_\beta(I_\alpha f) = I_{\alpha+\beta}\ (f)$$

sonucuna varılır.

2.

$$\Delta(I_\alpha f) = (-\Delta f) = -I_{\alpha-2}(f)\ ,\ f \in S\ ,\ n > 3\ ,\ n \geq \alpha \geq 2 \tag{8}$$

$$I_\alpha f(x) = (-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x) = F^{-1}(2\pi\,|x|)^{-\alpha} F f(x) \qquad \textbf{(a)}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
F(-\Delta)f(x) &= (2\pi\,|x|)^2 F f(x) \\
F^{-1}F(-\Delta)f(x) &= F^{-1}(2\pi\,|x|)^2 F f(x) \\
\Delta f(x) &= -F^{-1}(2\pi\,|x|)^2 F f(x) \qquad \textbf{(b)} \\
I_\alpha f(x) &= (-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x) \\
\Delta(I_\alpha f(x)) &= \Delta(F^{-1}(2\pi\,|x|)^{-\alpha} F f(x))
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece **(a)** ve **(b)** kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\Delta(I_\alpha f(x)) &= -F^{-1}(2\pi\,|x|)^2 F F^{-1}(2\pi\,|x|)^{-\alpha} F f(x) \\
&= -F^{-1}(2\pi\,|x|)^{-(\alpha-2)} F f(x) \\
&= -I_{\alpha-2} f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. (7) in bir sonucu,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |1-y|^{\alpha-n}\,|y|^{\beta-n}\,dy = \frac{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}{\sigma(\alpha+\beta)}$$

şeklindedir. Gerçekten, $f \in S$ ise, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + \beta < n$ olmak üzere,

$$I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta}(f)$$

eşitliğinden,

$$I_\alpha(I_\beta f) = I_\alpha\left(\frac{1}{\sigma(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|y-t|^{\beta-n}f(t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(t)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}|y-t|^{\beta-n}dy\right]dt$$

ifadelerini ve

$$I_{\alpha+\beta}(f) = \frac{1}{\sigma(\alpha+\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-t|^{(\alpha+\beta)-n}f(t)dt$$

eşitliğini birlikte düşünürsek,

$$\frac{1}{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(t)\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}|y-t|^{\beta-n}dy\right]dt = \frac{1}{\sigma(\alpha+\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-t|^{(\alpha+\beta)-n}f(t)dt$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitlik dağılım(Distribution) anlamında ,

$$< f, \frac{1}{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}|y-t|^{\beta-n}dy > = < f, \frac{1}{\sigma(\alpha+\beta)}|x-t|^{(\alpha+\beta)-n} >$$

şeklinde yazılır. Yine dağılım anlamında iki fonksiyonunun eşitliğinden,

$$\frac{1}{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}|y-t|^{\beta-n}dy = \frac{1}{\sigma(\alpha+\beta)}|x-t|^{(\alpha+\beta)-n}$$

eşitliği yazılır. Özel olarak $t=\theta$ ve $|x|=1$ seçilirse,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|1-y|^{\alpha-n}|y|^{\beta-n}dy = \frac{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}{\sigma(\alpha+\beta)}$$

olur. Ayrıca $t=\theta$ seçilirse,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}|y|^{\beta-n}dy = \frac{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)}{\sigma(\alpha+\beta)}|x|^{(\alpha+\beta)-n}$$

olur.

2.2 Potansiyeller İçin L^p Eşitsizliği

Riesz potansiyelleri nonfractional potansiyeller olduğu için, onların L^p uzayları üzerindeki etkilerini inceliyeceğiz. Bu nedenle önce çok iyi bilinen aşağıdaki eşitsizliği verelim [Stein E.M.1970].

$0 < \alpha < n$ olmak üzere, $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ operatörü hangi p ve q çiftleri için

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq A \|f\|_p \tag{9}$$

özelliğine sahiptir. Bu (9) ifadesinin geçerliliği $(\sigma(\alpha))^{-1} |y|^{\alpha-n}$ çekirdeğine bağlıdır. Gerçekten,

$$(\tau_\delta f)(x) = f(\delta x)\ ,\ \delta > 0$$

ile tanımlanan τ_δ genişleme operatörü gözönüne alınırsa,

$$\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta = \delta^{-\alpha} I_\alpha\ ,\ \delta > 0 \tag{10}$$

vardır. Şimdi bunu gösterelim,

$$\begin{aligned}
\tau_{\delta^{-1}}(I_\alpha \tau_\delta f)(x) &= \tau_{\delta^{-1}} \left(\frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} \tau_\delta f(y) dy \right) \\
&= \tau_{\delta^{-1}} \left(\frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(\delta y) dy \right) \\
&= \tau_{\delta^{-1}} \left(\frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| x - \frac{y}{\delta} \right|^{\alpha-n} \delta^{-n} f(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{x}{\delta} - \frac{y}{\delta} \right|^{\alpha-n} \delta^{-n} f(y) dy
\end{aligned}$$

$$= \delta^{-\alpha}(\frac{1}{\sigma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}|x-y|^{\alpha-n}f(y)dy)$$

$$= \delta^{-\alpha}I_\alpha f(x)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca,

$$\|\tau_\delta f\|_p = \delta^{\frac{-n}{p}}\|f\|_p \quad , \quad \|\tau_{\delta^{-1}}I_\alpha(f)\|_q = \delta^{\frac{n}{q}}\|I_\alpha(f)\|_q \tag{11}$$

eşitlikleride vardır. Gerçektende,

$$\begin{aligned}
\|\tau_\delta f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\tau_\delta f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\delta x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\delta^{-n}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \delta^{\frac{-n}{p}}\|f\|_p
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\tau_{\delta^{-1}}I_\alpha f\|_q &= \left\|I_\alpha f(\tfrac{x}{\delta})\right\|_q \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|I_\alpha f(\tfrac{x}{\delta})\right|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \delta^{\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \delta^{\frac{n}{q}}\|I_\alpha f\|_q
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (9) ifadesi,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \tag{12}$$

olması halinde mümkündür. Yani,

a) $\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta f = \delta^{-\alpha} I_\alpha f$

b) $\|\tau_\delta(f)\|_p = \delta^{\frac{-n}{p}} \|f\|_p$

c) $\|\tau_{\delta^{-1}}(I_\alpha \tau_\delta f)\|_q = \delta^{\frac{n}{q}} \|I_\alpha(f)\|_q$

özellikleri altında,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_q &= \|\tau_{\delta^{-1}}(I_\alpha \tau_\delta f)\|_q \quad , \text{ a) dan} \\
&= \delta^{\frac{n}{q}} \|I_\alpha(\tau_\delta f)\|_q \quad , \text{ c) den} \\
&\leq A\delta^{\frac{n}{q}} \|\tau_\delta f\|_p \ , \quad \|I_\alpha(f)\|_q \leq A \|f\|_p \text{ den} \\
&= A\delta^{\frac{n}{q}} \delta^{\frac{-n}{p}} \|f\|_p \quad , \text{ b) den} \\
\|I_\alpha f\|_q &\leq A\delta^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}+\alpha} \|f\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadenin (9) ifadesine denk olması için,

$$\delta^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}+\alpha} = 1 \text{ yani, } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

olması gerekir.

(9) ifadesinin geçerli olması için gerekli olan (12) eşitliğinin, iki farklı durumda (9) ifadesini sağlamadığını görelim. Bu iki istisnai durum,

$$p = 1 \ , \ (q = \tfrac{n}{n-\alpha})$$

$$q = \infty \ , \ (p = \tfrac{n}{\alpha})$$

şeklinde ortaya çıkar. $p = 1$ halini gözönüne alalım. Bu durumda (9) dan,

$$\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq A \|f\|_1 \tag{13}$$

yazarız. Eğer (13) eşitsizliği sağlansaydı f yerine genel integrali bir olan ve destekleri orjine yakınsak olan pozitif integrallenebilen fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisini alabilirdik. Genel integralin bir olması,

$$\frac{1}{m(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x)|\, dx = 1$$

anlamındadır. Basit bir limit işlemi,

$$\left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq A < \infty$$

olduğunu gösterir. Bunun anlamı (13) eşitsizliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} &= \left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f_n(y)dy \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \\
&\leq A \int_{\mathbb{R}^n} |f_n(x)|\, dx \\
&= \left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f_n(y)dy \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq A < \infty
\end{aligned}$$

olur. $\{f_n\}$ in limiti Dirac fonksiyonu olduğundan,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}} &= \left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} \delta(y)dy \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq A < \infty \\
&= \left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} \leq A < \infty \\
&= \left\| \frac{1}{\sigma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \right\|_{\frac{n}{n-\alpha}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{\sigma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \right|^{\frac{n}{n-\alpha}} dx\Big)^{\frac{n-\alpha}{n}} < \infty \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n}\, dx < \infty
\end{aligned}$$

dır. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü son integral ıraksaktır.

Diğer tipik durum $q = \infty$ için ortaya çıkar. Yani (9) eşitsizliği sağlanmaz. $q = \infty$ olumsuzluğu doğrudan aşağıdaki gibi görülebilir. $|x| \leq \frac{1}{2}$ için, $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}\left(\log(\frac{1}{|x|})\right)^{\frac{-\alpha(1+\varepsilon)}{n}} &, \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ \\ 0 &, \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f(x) \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ midir?

$$\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-\alpha}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{-\alpha(1+\varepsilon)}{n}} dx$$

şeklindedir. $f \in L^p$ ise,

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olduğundan,

$$\|f\|_{\frac{n}{\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{\alpha}} \, dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} < \infty$$

olarak yazılır. O halde

$$\|f\|_{\frac{n}{\alpha}} = \left(\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-n}\left(\log(\frac{1}{|x|})\right)^{-(1+\varepsilon)} dx\right)^{\frac{\alpha}{n}} < \infty$$

olup olmadığını araştıralım. Küresel koordinatları kullanarak,

$$d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_{n-1} = dw \,, \quad ds = r^{n-1} dr dw$$

yazarız ve integralin içi sadece $|x|$ şeklindeki radial fonksiyondan ibaret olduğundan integral açıdan bağımsızdır. O halde,

$$\|f\|_{\frac{n}{\alpha}} = \left(\int_{s^n} dw \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{r} \left(\log \tfrac{1}{r}\right)^{-(1+\varepsilon)} dr \right)^{\frac{\alpha}{n}} < \infty$$

$$= \left(-W_{n-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\log \tfrac{1}{r}\right)^{-(1+\varepsilon)} d\left(\log \tfrac{1}{r}\right)^{\frac{\alpha}{n}} \right) < \infty$$

$$= \left(\frac{W_{n-1} \left(\log \frac{1}{r}\right)^{-\varepsilon}}{\varepsilon} \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{n}} = B^{\frac{\alpha}{n}} < \infty$$

olur. Dolayısıyla, $f(x) \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ dir. Diğer taraftan, $0 < \alpha < n$ ve $\frac{\alpha(1+\varepsilon)}{n} \leq 1$ olduğunda,

$$I_\alpha f(y) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^{-\alpha} |x-y|^{\alpha-n} \left(\log(\tfrac{1}{|x|})\right)^{\frac{-\alpha(1+\varepsilon)}{n}} dx$$

$$I_\alpha f(0) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^{-n} \left(\log(\tfrac{1}{|x|})\right)^{\frac{-\alpha(1+\varepsilon)}{n}} dx$$

dir. Yine küresel koordinatlar kullanılarak yukarıdakine benzer olarak,

$$I_\alpha f(0) = \infty$$

elde edilir. Yani $I_\alpha f$ orjin civarında sınırsızdır. Fakat biz fonksiyonların desteklerini orjin civarına yakınsak seçmiştik. Bu da çelişkidir.

Buraya kadar yapılanlardan sonra, I_α potansiyellerini kullanarak kesirli fractional integraller için Hardy-Littwood-Sobolev teoremini verelim.

Teorem 2.2.1: $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun.

a) Eğer, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise, $I_\alpha f$ ile tanımlanan (5) integrali hamen hemen her x için mutlak yakınsaktır.

b) Eğer, (a) da $p > 1$ ise,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p$$

dir.

c) Eğer, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise, her $\tau > 0$ için,

$$m\{x : |I_\alpha f| > \tau\} \leq (\frac{A\|f\|_1}{\tau})^q$$

dir. Yani $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1,q)-$ zayıf tipindedir. $|I_\alpha| > \tau$ nın tanımlandığı uzayda $|I_\alpha|$ nın her τ dan büyük olmasıdır.

İspat : $K(x) = |x|^{\alpha-n}$ yazalım ve $f \to I_\alpha f$ dönüşümü yerine ondan bir sabit çarpan kadar fark eden $f \to K * f$ dönüşümünü alalım. Yani,

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

integralinin yerine ondan $\dfrac{1}{\sigma(\alpha)}$ sabiti ile farklanan

$$(K * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)dy$$

integralini alalım. Burada K'yı

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) & , |x| \geq \mu \\ \\ 0 & , |x| < \mu \end{cases} \quad , \quad K_\infty(x) = \begin{cases} K(x) & , |x| < \mu \\ \\ 0 & , |x| \geq \mu \end{cases}$$

olmak üzere, $K = K_1 + K_\infty$ gibi düşünebiliriz. Ayrıca burada μ, $\mu > 0$ şeklinde belirlenmiş bir sabittir.

$$K * f = (K_1 + K_\infty) * f = K_1 * f + K_\infty * f$$

dir. $K_1 * f$ konvolüsyonu, L deki K_1 fonksiyonu ile L^p deki f fonksiyonunun konvolüsyonudur. Young eşitsizliğinden dolayı $r = 1$ alınarak $p = q$ olduğu görülür ve

$$\|K_1 * f\|_p \leq \|K\|_1 \|f\|_p < \infty$$

elde edilir. O halde $\|K_1 * f\|_p \in L^p$ dir. Bunun anlamı $\|K_1 * f\|_p$ in integralinin hemen hemen her yerde mutlak yakınsak olmasıdır.

Benzer olarak, $\|K_\infty * f\|_p$ in integrali de , L^p deki f fonksiyonu ile $L^{p'}$ dual uzayındaki bir fonksiyonun konvolüsyonu olduğundan,

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \text{ ise, } (-n+\alpha)p' < -n$$

ifadesi, $p' < \infty$ ile denk olduğundan,

$$\|K_\infty\|_{p'}^{p'} = \int_{|x|\geq\mu} |x|^{(\alpha-n)p'} f(x)dx < \infty$$

dir. Dolayısıyla, (a) kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi benzer fakat daha detaylı sebeplerle $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ise, $f \to K * f$ dönüşümün (p,q)-zayıf tipinde olduğunu göstereceğiz. Yani,

$$m\{x: |K * f| > \tau\} \leq (\frac{A\,\|f\|_p}{\tau})^q \quad , \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ , her } \tau > 0 \tag{14}$$

ifadesini elde edeceğiz. Önce (14) eşitsizliğinin ispatı için, $\|f\| = 1$ olmak üzere eşitliğin sol tarafında τ yerine 2τ almanın yeterli olduğuna dikkat çekelim.

$$K * f = (K_1 + K_\infty) * f = K_1 * f + K_\infty * f$$

uyarınca,

$$m\{x: |K * f| > 2\tau\} \leq m\{x: |K_1 * f| > \tau\} + m\{x: |K_\infty * f| > \tau\}$$

dir. Bununla birlikte,

$$m\{x: |K * f| > \tau\} \leq \frac{\|K_1 * f\|_p^p}{\tau^p} \leq \frac{\|K_1\|_1^p\,\|f\|_p^p}{\tau^p} = \frac{\|K_1\|_1^p}{\tau^p}$$

dir. Burada,

$$\|K_1\|_1^p = \int_{|x|<\mu} |x|^{(\alpha-n)}\,dx = \int_{s^{n-1}} dw \int_0^\mu r^{\alpha-1}dr = W_{n-1}\tfrac{r^\alpha}{\alpha}\,\Big|_0^\mu = C_1\mu^\alpha$$

dir. Ayrıca,

$$\|K_\infty * f\|_\infty = \left(\int_{|x|\geq\mu} \left(|x|^{(\alpha-n)}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} , \ \|K_\infty * f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_\infty , \ \|f\|_\infty \leq \|K_\infty\|_\infty$$

ifadesini benzer olarak,

$$\|K_\infty * f\|_\infty \leq C_2\mu^{\frac{-n}{q}}$$

şeklinde buluruz. Dolayısıyla, eğer $C_2\mu^{\frac{-n}{q}} = \tau$ yani, $\tau = C_3\mu^{\frac{-q}{n}}$ ise, $\|K_\infty\|_p = \tau$ dir. Bu durumda, $\|K_\infty * f\|_\infty \leq \tau$ olacaktır. Bu ise,

$$m\{x: \ |K_\infty * f| > \tau\}$$

özelliğini sağlayan hiçbir $\tau > 0$ olmadığından,

$$m\{x: \ |K_\infty * f| > \tau\} = m\{\phi\} = 0$$

oluşunu verir. Sonuç olarak $\|f\|_p = 1$ olduğu için,

$$m\{x: \ |K_\infty * f| > 2\tau\} \leq C_4\mu^{-q}$$

elde edilir. Bu da (14) ifadesidir. Yani $f \rightarrow K * f$ dönüşümünün (p,q)- zayıf tipinde olmasının anlamı;

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q}\,\|f\|_p$$

eşitsizliğinden,

$$m\{x: \ |I_\alpha f| > \tau\} \leq (\frac{A\,\|f\|_1}{\tau})^q$$

eşitsizliğinin elde edilir olması, ancak bunun tersinin her zaman geçerli olmamasıdır. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_q &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&> \left(\int_{\mathbf{E}} |I_\alpha f|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\geq \left(\int_{\mathbf{E}} \tau^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \tau\left(\int_{\mathbf{E}} dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tau(m\{x:\ |I_\alpha f| > \tau\})^{\frac{1}{q}} \leq A_{p,q}\,\|f\|_p$$

ise,

$$m\{x:\ |I_\alpha f| > \tau\} \leq (\frac{A_{p,q}\,\|f\|_p}{\tau})^q$$

elde edilir. Burada $p = 1$ alınırsa $(1, q)$-zayıf tipinde olur. Ayrıca $q = 1$ özel halinde teoremimizin (b) ve (c) kısımları elde edilir.

Lemma 2.2.2: $0 < \alpha < n$ olsun. $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sup_{r>0} r^{-n} \int\limits_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n}\,dy \leq C\,|x|^{\alpha-n}$$

dır.

İspat: $|x-y|$ uzaklığı için küresel koordinatlar gözönüne alınırsa,

$$\int\limits_{|y-x|<\frac{|x|}{2}} |y-x|^{\alpha-n}\,dy = S_{n-1}\int_0^{\frac{|x|}{2}} \rho^{\alpha-1}d\rho = C_1\,|x|^\alpha$$

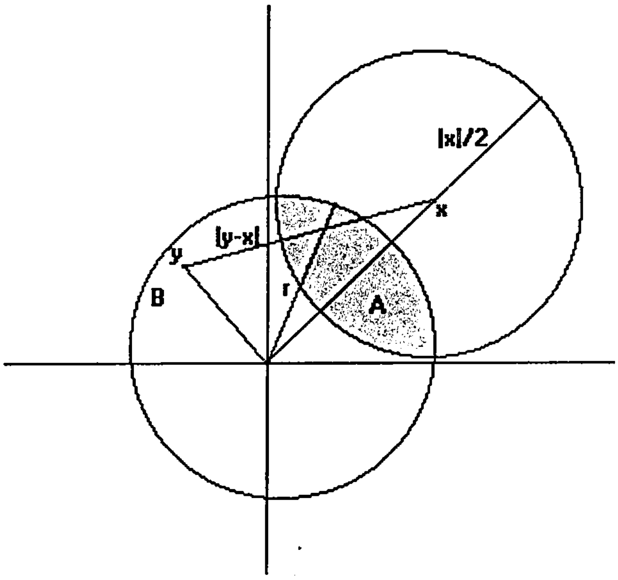
elde edilir. Burada, $\frac{|x|}{2} \geq r$ ve $\frac{|x|}{2} < r$ durumlarını ayrı ayrı dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde edeceğiz.

$\frac{|x|}{2} \geq r$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n}\,dy &\leq \int\limits_{|y|<r} (|x|-|y|)^{\alpha-n}\,dy \\
&\leq 2^{n-\alpha}\,|x|^{\alpha-n}\,\frac{r^n}{n}S_{n-1} \\
&= C_2 r^n\,|x|^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\frac{|x|}{2} < r$ olsun. Bu durumda



şeklini gözönüne alarak,

$$\begin{aligned}
\int_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n}\, dy &= \int_B \frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}} + \int_A \frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}} \\
&\leq \int_B \frac{dy}{\left(\frac{|x|}{2}\right)^{n-\alpha}} + \int_A \frac{dy}{|y-x|^{n-\alpha}} \\
&\leq 2^{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} \int_{|y|<r} dy + \int_{|y|<\frac{|x|}{2}} 2^{n-\alpha} |x|^{\alpha-n}\, dy \\
&= C_2 r^n |x|^{\alpha-n} + C_1 |x|^{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir.Böylece, $\frac{|x|}{2} \geq r$ ve $\frac{|x|}{2} < r$ için

$$\begin{aligned}
r^{-n} \int_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n}\, dy &= \begin{cases} C_2 |x|^{\alpha-n}, & \frac{|x|}{2} \geq r \\ C_3 \left(|x|^{\alpha-n} + \frac{|x|^{\alpha}}{r^n} \right), & \frac{|x|}{2} < r \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} C_2 |x|^{\alpha-n}, & \frac{|x|}{2} \geq r \\ C_4 |x|^{\alpha-n}, & \frac{|x|}{2} < r \end{cases}
\end{aligned}$$

dır. $C = \max\{C_2, C_4\}$ seçilirse,

$$\sup\ r^{-n} \int\limits_{|y|<r} |y-x|^{\alpha-n}\, dy \le C\, |x|^{\alpha-n}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.3:$\tau = |x-z|$ olsun. $y \in \mathbb{R}^n - B(x, 2\tau)$ olmak üzere,

$$\left| |x-y|^{\alpha-n} - |z-y|^{\alpha-n} \right| < M\tau\, |x-y|^{\alpha-n-1}$$

dır.

İspat: $x - y = t \Rightarrow |x-y| = |t| = \sqrt{t_1^2 + ... + t_n^2}$ ve $z - y = z - x + t = t + h \Rightarrow |z-y| = |t+h|$ olarak alalım. Çok değişkenliler için Lagrange teoremi,

$$|f(t_1+h_1, ..., t_n+h_n) - f(t_1, ..., t_n)| \le \left|\frac{\partial f(t+\theta h)}{\partial t_1} h_1\right| + ... + \left|\frac{\partial f(t+\theta h)}{\partial t_n} h_n\right|, \quad 0 < \theta <$$

dır. $f(t) = |t|^{\alpha-n}$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
\left| |t+h|^{\alpha-n} - |t|^{\alpha-n} \right| &\le \left|\frac{\partial f(t+\theta h)}{\partial t_1} h_1\right| + ... + \left|\frac{\partial f(t+\theta h)}{\partial t_n} h_n\right| \\
&= |\alpha - n| \left(\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2 + ... + (t_1+\theta h_1)^2}\right)^{\alpha-n-1} \\
&\quad X \left(\frac{(t_1+\theta h_1)h_1 + ... + (t_n+\theta h_n)h_n}{\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2 + ... + (t_1+\theta h_1)^2}}\right) \\
&= |\alpha - n| \left(\sqrt{\sum t_k^2 + \theta^2 \sum h_k^2 + 2\theta(t,h)}\right)^{\alpha-n-1} \\
&\quad X \left(\frac{\sum (t_k+\theta h_k)h_k}{\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2 + ... + (t_1+\theta h_1)^2}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum t_k^2 = a^2$, $\sum h_k^2 = \tau^2$ ve Cauchy eşitsizliğinden

$$(t,h) = \sum th \le \left(\sum t_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum h_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = a\tau$$

oldukları gözönüne alınırsa,

$$\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| \leq |\alpha-n|\left(\sqrt{a^2+\theta^2r^2+2\theta(t,h)}\right)^{\alpha-n-1}$$

$$X\left(\frac{\sum(t_k+\theta h_k)h_k}{\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+...+(t_1+\theta h_1)^2}}\right)$$

yazılır. Burada

$$\frac{\sum(t_k+\theta h_k)h_k}{\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+...+(t_1+\theta h_1)^2}}<\frac{(\sum(t_k+\theta h_k)^2)^{\frac{1}{2}}(\sum h_k^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(t_1+\theta h_1)^2+...+(t_1+\theta h_1)^2}}<\left(\sum h_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\tau$$

olduğundan,

$$\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| \leq |\alpha-n|\left(\sqrt{a^2+\theta^2r^2+2\theta(t,h)}\right)^{\alpha-n-1}\tau$$

yazılır. Burada $a^2+\theta^2\tau^2+2\theta(t,h)+2\theta a\tau-2\theta a\tau>0$ olup $a^2+\theta^2\tau^2-2\theta a\tau>0$ dır. O halde $f(\theta)=\theta^2\tau^2-2a\tau\theta+a^2$ polinomunu göz önüne alalım. $f'(\theta)=0$ dan bu polinom fonksiyonu $\theta=\frac{a}{\tau}$ noktasında minimum değerini alacaktır. Halbuki $a=|x-y|>2\tau$ olduğunda $\frac{a}{\tau}>2$ dır. Dolayısıyla $\theta=\frac{a}{\tau}$ noktası $0<\theta<1$ aralığının dışında kalacağından, $f(\theta)$ fonksiyonu minimum değerini $\theta=1$ noktasında alacaktır.Böylece

$$\begin{aligned}\left||t+h|^{\alpha-n}-|t|^{\alpha-n}\right| &\leq |\alpha-n|\left(\sqrt{(a-\tau)^2}\right)^{\alpha-n-1}\tau\\ &= M\tau\,|a-\tau|^{\alpha-n-1}\\ &\leq M\tau\,|a|^{\alpha-n-1}\left|1-\frac{\tau}{a}\right|^{\alpha-n-1}\\ &\leq M\tau\,|x-y|^{\alpha-n-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.4: $0<\alpha-\frac{n}{p}<1$ olsun. $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^{\alpha-n}\,|f(y)|\,dy<\infty$$

şartı sağlanıyorsa,

$$\left(\sup_{r>0} r^{-np} \int_{|z|<\tau} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)|^p \, dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\,|x|^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

dır.

İspat: $\tau = |x-z|$ için

$$\begin{aligned} U_\alpha f(z) &= \int_{B(x,2\tau)} |z-y|^{\alpha-n} f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(x,2\tau)} |z-y|^{\alpha-n} f(y)dy \\ &= u_1(z) + u_2(z) \end{aligned}$$

yazılır. $(\alpha-n)p' + n > 0$ için $u_1(z)$'e Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |u_1(z)| &\leq \left(\int_{B(x,2\tau)} |z-y|^{(\alpha-n)p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B(x,2\tau)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{B(x,2\tau)} |x-y|^{(\alpha-n)p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \\ &= C\tau^{[(\alpha-n)p'+n]/p'} \|f\|_p \end{aligned}$$

elde edlir. $u_2(x)$ için Lemma 2.2.3 gözönüne alınırsa,

$$|u_2(x) - u_2(z)| \leq C\tau \int_{\mathbb{R}^n - B(x,2\tau)} |x-y|^{\alpha-n-1} f(y)dy$$

yazılır.$(\alpha-n-1)p' + n < 0$ için son eşitsizliğin sağ tarafina Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |u_2(x) - u_2(z)| &\leq C\tau \left(\int_{\mathbb{R}^n - B(x,2\tau)} |x-y|^{(\alpha-n-1)p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n - B(x,2\tau)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\tau^{[(\alpha-n)p'+n]/p'} \|f\|_p \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leq C\,|x-z|^{\alpha-\frac{n}{p}}\,\|f\|_p$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Lemma 2.2.2 den

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{r>0} r^{-np} \int\limits_{|z|<r} |U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sup_{r>0} r^{-np} \int\limits_{|z|<r}^{p} (C\,|x-z|^{\alpha-\frac{n}{p}}\,\|f\|_p)^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C\,\|f\|_p \left(\sup_{r>0} r^{-np} \int\limits_{|z|<r}^{p} |x-z|^{\alpha p-n}\,dz\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C\,|x|^{\alpha-\frac{n}{p}}\,\|f\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Teoremin ispatıdır.

III.BÖLÜM

3.1.Riesz Potansiyellerin Taylor Açılımı

$0 < \alpha < n$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir f fonksiyonu için $U_\alpha f$ 'yi

$$U_\alpha f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

şeklinde tanımlayacağız. Burada $U_\alpha f \not\equiv \infty$ olduğu açıktır[Mizuta,1998]. Ayrıca $U_\alpha f$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{\alpha-n} f(y)dy < \infty \qquad (15)$$

ye denktir[Mizuta, 1998]. Genel sonuçları elde etmek için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_p\left(f(y)\right) w(|y|)dy < \infty \qquad (16)$$

koşulunu sağlayacak f fonksiyonunu ele alalım. Burada $\Phi_p(r)$ ve $w(r)$ aşağıdaki özellikleri sağlayan $(0,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif monoton fonksiyonlardır.

(φ_1). $\Phi_p(r)$, $1 \le p < \infty$ ve φ, $\varphi(0) = \lim\limits_{r\to 0}\varphi(r)$ şartı altında $(0,\infty)$ aralığı üzerinde azalmayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere, $r^p\varphi(r)$ formundadır. Yani,

$$\Phi_p(r) = r^p\varphi(r)$$

dır.

(φ_2). φ logaritmik tiptedir. Yani $\forall r > 0$ için

$$A_1^{-1}\varphi(r) \le \varphi(r^2) \le A_1\varphi(r)$$

olacak şekilde $A_1 > 0$ vardır.

(w_1). w çift koşulu sağlar. Yani $\forall r > 0$ için

$$A_2^{-1}w(r) \leq w(2r) \leq A_2 w(r)$$

olacak şekilde $A_2 > 0$ vardır.

Eğer $p > 1$ ve

$$\int_0^1 \left[r^{n-\alpha p}\varphi(r^{-1})\right]^{\frac{-1}{(p-1)}} r^{-1}dr < \infty \tag{17}$$

ise, $U_\alpha f$ orjin dışında $\mathbb{R}^n$de hemen hemen her yerde süreklidir.

$\alpha p > n$ durumunda (φ_2) den (17) elde edilir ve Sobolev teoreminden de süreklidir. Bunu daha belirgin olarak Teorem 3.3.7 de göstereceğiz. Eğer $p = \frac{n}{\alpha} > 1$, $w(r) \equiv 1$ ve (17) bu şartlar altında düzenlenirse,

$$\varphi^*(r) = \left(\int_0^1 \left[\varphi(t^{-1})\right]^{\frac{-1}{(p-1)}} t^{-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

olmak üzere $x \to 0$ için

$$U_\alpha f(x) - U_\alpha f(0) = O(\varphi^*(|x|)) \tag{18}$$

olduğu görülür. Bu ise Teorem 3.3.7 de verilecektir. Bu çalışmada $\mathbb{R}^n - E$ cümlesinde, K bir ağırlık fonksiyonu ve P bir polinomu olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0,\, x\in\mathbb{R}^n-E} \left[K(|x|)\right]^{-1}\left[U_\alpha f(x) - P(x)\right] = 0$$

olduğunu göstererek,

$$\lim_{x\to 0,\, x\in\mathbb{R}^n-E} U_\alpha f(x) = U_\alpha f(0)$$

sonucunu genişleteceğiz. Burada genel olarak $K(0) = 0$ alınacaktır.

$R_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$ olmak üzere, $R_\alpha(x)$ in

$$R_{\alpha,\ell}(x,y) = R_\alpha(x-y) - \sum_{|\eta|\leq \ell} \frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right]$$

Taylor açılımında kalan terimleri gözönüne alarak,

$$U_{\alpha,\ell} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} R_{\alpha,\ell}(x,y) f(y)dy$$

ifadesinin orijindeki davranışlarını inceleyeceğiz. $B(0,1)$ birim küreyi göstermek üzere (15) in yerine

$$\int_{B(0,1)} |y|^{\alpha-n-\ell} f(y)dy < \infty \tag{19}$$

ve

$$\int_{B(0,1)} |y|^{\alpha-n-\ell-1} f(y)dy < \infty \tag{20}$$

ifadeleri doğal olarak alınabilir.

Çalışmamızda kolaylık sağlaması için, $-n < \beta \leq \alpha p - n$ olmak üzere, $w(r) = r^{\beta}$ durumunu göz önüne alalım ve ℓ, $\ell \leq \alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$ olacak şekilde negatif olmayan bir tam sayı olsun.

Lemma 3.1.1: φ iki kat şartını sağlar. Yani, her ne zaman $r > 0$ ise,

$$A^{-1}\varphi(r) \leq \varphi(2r) \leq A\varphi(r)$$

olacak şekilde $A > 1$ vardır.

Lemma 3.1.2: $r > 0$ ve her $\gamma > 1$ için,

$$A(\gamma)^{-1}\varphi(r) \leq \varphi(r^{\gamma}) \leq A(\gamma)\varphi(r)$$

olacak şekilde $A(\gamma) > 1$ vardır.

Lemma 3.1.3: Eğer $\gamma > 0$ ise, $0 < s < t$ olmak üzere,

$$s^{\gamma}\varphi(s^{-1}) \leq Mt^{\gamma}\varphi(t^{-1})$$

dır.

İspat : $\gamma > 0$ ise, $0 < s < t \leq A_1^{-1/\gamma}$ olduğunda; eğer

$$(t^{-1})^{2^m} \leq s^{-1} < (t^{-1})^{2^{m+1}}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir m tam sayısı var ise,

$$\begin{aligned}
\varphi(s^{-1}) &\leq \varphi\left((t^{-1})^{2^{m+1}}\right) \\
&\leq A^{m+1}\varphi(t^{-1}) \\
&\leq A^{2^m-1}\left(A\varphi(t^{-1})\right) \\
&\leq (t^{-\gamma})^{2^m-1}\left(A\varphi(t^{-1})\right) \\
&\leq s^{-\gamma}t^{\gamma}\left(A\varphi(t^{-1})\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Pozitif ve azalmayan bir φ fonksiyonu için, $0 < s < t \leq 1$ olduğunda

$$s^{\gamma}\varphi(s^{-1}) \leq Mt^{\gamma}\varphi(t^{-1}) \tag{21}$$

dır. Eğer $\psi(r) = [\varphi(r^{-1})]^{-1}$ eşitliğini göz önüne alırsak, ψ, φ gibi aynı koşulu sağlayacaktır. Dolayısıyla $0 < s < t \leq 1$ olduğunda,

$$\frac{s^{\gamma}}{\varphi(s)} \leq M\frac{t^{\gamma}}{\varphi(t)} \tag{22}$$

olur. Özellikle (22)' de $t = 1$ alınırsa $0 < s < 1$ olduğunda,

$$M^{-1}\varphi(1) \leq s^{-\gamma}\varphi(s) \tag{23}$$

dır. Böylece, $0 < s < 1 \leq t$ durumunda (21) ve (23) ten

$$s^{\gamma}\varphi(s^{-1}) \leq M\varphi(1) \leq M' t^{\gamma}\varphi(t^{-1})$$

elde edilir. Eğer $t > s \geq 1$ ise, $0 < t^{-1} < s^{-1} \leq 1$ ve (22) den

$$\frac{t^{-\gamma}}{\varphi(t^{-1})} \leq \frac{s^{-\gamma}}{\varphi(s^{-1})}$$

yazılır. Böylece Lemma 3.1.3 ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.4: Eğer $a > 0$ ve $b > 0$ ise, $0 < r < 1$ için

$$\int_r^1 t^{-a}[\varphi(t^{-1})]^{-b}t^{-1}dt \leq Mr^{-a}[\varphi(r^{-1})]^{-b}$$

dır.

İspat : $0 < r < t < 1$ ise, $r^{\gamma}\varphi(r^{-1}) \leq Mt^{\gamma}\varphi(t^{-1})$ olduğundan

$$(\varphi(t^{-1}))^{-b} \leq \left[M(\frac{r}{t})^{\gamma}\varphi(r^{-1})\right]^{-b}$$

yazılır. $0 < \gamma < a/b$ ise,

$$\begin{aligned}
\int_r^1 t^{-a}[\varphi(t^{-1})]^{-b}t^{-1}dt &\leq \int_r^1 t^{-a}M^{-b}\,(\frac{r}{t})^{-b\gamma}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}\,t^{-1}dt \\
&= M^{-b}\,r^{-b\gamma}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}\int_r^1 t^{-a+\gamma b-1}dt \\
&= M^{-b}\,r^{-b\gamma}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}\,(\frac{t^{-a+\gamma b}}{-a+\gamma b}\,|_r^1) \\
&= M^{-b}\,r^{-b\gamma}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}\,\frac{1}{-a+\gamma b}(1-r^{-a+\gamma b}) \\
&= M^{-b}\,\frac{1}{b(\gamma - a/b)}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}\,r^{-a}(r^{b(a/b-\gamma)}-1) \\
&\leq Mr^{-a}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.1.5: $0 < r < 1/2$ ve φ üzerindeki çift kat şartından,

$$\begin{aligned}
\int_r^1 t^{-a}[\varphi(t^{-1})]^{-b}t^{-1}dt &\geq \int_r^{2r} t^{-a}[\varphi(t^{-1})]^{-b}t^{-1}dt \\
&\geq Mr^{-a}\,[\varphi(r^{-1})]^{-b}
\end{aligned}$$

dır.

Lemma 3.1.6: Eğer $a > 0$ ve b bir reel sayı ise, $r > 0$ için

$$\int_0^r t^a[\varphi(t^{-1})]^b t^{-1}dt \leq Mr^a\left[\varphi(r^{-1})\right]^b$$

dır.

İspat : $0 < t < r$ ise, $t^\gamma\varphi(t^{-1}) \leq Mr^\gamma\varphi(r^{-1})$ olduğunda, $b > 0$ için

$$\begin{aligned} \varphi(t^{-1}) &\leq M(\frac{r}{t})^\gamma\varphi(r^{-1}) \\ [\varphi(t^{-1})]^b &\leq M^b(\frac{r}{t})^{b\gamma}\left[\varphi(r^{-1})\right]^b \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu son eşitsizliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^r t^a[\varphi(t^{-1})]^b t^{-1}dt &\leq M^b r^{\gamma b}\left[\varphi(r^{-1})\right]^b \int_0^r t^{a-\gamma b-1}dt \\ &= M^b r^{\gamma b}\left[\varphi(r^{-1})\right]^b \tfrac{1}{a-\gamma b} t^{a-\gamma b} \\ &= Mr^a\left[\varphi(r^{-1})\right]^b \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca $b \leq 0$ için $\left[\varphi(r^{-1})\right]^{-1}$ azalmayan olduğundan Lemmanın gerçeklendiği kolayca görülür.

3.2. $U_{\alpha,\ell}f$ 'nin Kestirimleri (Estimates)

Bir ℓ tam sayısı için,

$$U_{\alpha,\ell}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

potansiyelini göz önüne alalım. $\ell \leq -1$ durumunda, $U_{\alpha,\ell}f(x) = 0$ olacağından $\ell > 0$ olarak alacağız.

$$U_1(x) = \int_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

$$U_2(x) = \int_{B(0,|x|/2)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

$$U_3(x) = \int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ için

$$U_{\alpha,\ell}f(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür.

Lemma 3.2.1: Eğer $y \in B(0, |x|/2)$ ise,

$$|R_{\alpha,\ell}(x,y)| \leq M\, |x|^{\ell}\, |y|^{\alpha-n-\ell}$$

dır.

İspat :

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x-y| \;\Rightarrow |x| - \frac{|x|}{2} \leq |x-y|$$

$$\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \Rightarrow |x-y|^{\alpha-n} \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n}$$

dır. Ayrıca

$$|y| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} < |y|^{\alpha-n}$$

$$|y| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow |y|^{\ell} < \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\ell}$$

olur. Elde edilen bu eşitsizlikler gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,\ell}(x,y) &= R_\alpha(x-y) - \sum_{|\eta|\leq \ell} \frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right] \\
|R_{\alpha,\ell}(x,y)| &\leq |R_\alpha(x-y)| + \sum_{|\eta|\leq \ell} \left|\frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right]\right| \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M \sum_{|\eta|\leq \ell} \frac{|x|^{|\eta|}}{\eta!} |y|^{\alpha-n-|\eta|} \\
&\leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} + M\,|x|^{\ell}\,|y|^{\alpha-n-\ell} \\
&\leq |y|^{\alpha-n} + M\,|x|^{\ell}\,|y|^{\alpha-n-\ell} \\
&= |y|^{\alpha-n-\ell}\left(|y|^{\ell} + M\,|x|^{\ell}\right) \\
&\leq |y|^{\alpha-n-\ell}\left(\left(\frac{|x|}{2}\right)^{\ell} + M\,|x|^{\ell}\right) \\
&= |x|^{\ell}\,|y|^{\alpha-n-\ell}\left(\frac{1}{2^{\ell}} + M\right) \\
&\leq M\,|x|^{\ell}\,|y|^{\alpha-n-\ell}
\end{aligned}$$

olacaktır.

Lemma 3.2.2: Eğer $y \in B(0, 2|x|) - B(0, |x|/2)$ ise,

$$|R_{\alpha,\ell}(x,y)| \leq M\,|x-y|^{\alpha-n}$$

dır.

İspat : $y \in B(0,2|x|) - B(0,|x|/2)$ için,

$$\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2|x|$$

olduğundan,

$$\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2|x| \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{|y|}{|x|} \leq 2 \Rightarrow \frac{|x|}{2} \leq |y| \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} \leq 2$$

olur. Diğer yanda

$$|x-y| \leq |x| + |y| \leq 3|y| \;\Rightarrow\; \frac{|x-y|}{3} < |y| \;\Rightarrow\; |y|^{\alpha-n} < \left(\frac{|x-y|}{3}\right)^{\alpha-n}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,\ell}(x,y) &= R_\alpha(x-y) - \sum_{|\eta| \leq \ell} \frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right] \\
|R_{\alpha,\ell}(x,y)| &\leq |R_\alpha(x-y)| + \sum_{|\eta| \leq \ell} \left|\frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right]\right| \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M \sum_{|\eta| \leq \ell} \frac{|x|^{|\eta|}}{\eta!} |y|^{\alpha-n-|\eta|} \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M|x|^\ell |y|^{\alpha-n-\ell} \\
&= |x-y|^{\alpha-n} + M\left(\frac{|x|}{|y|}\right)^\ell |y|^{\alpha-n} \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M2^\ell |y|^{\alpha-n} \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M2^\ell \left(\frac{|x-y|}{3}\right)^{\alpha-n} \\
&= |x-y|^{\alpha-n}\left(1 + \frac{M2^\ell}{3^{\alpha-n}}\right) \\
&\leq M|x-y|^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.2.3: Eğer $|y| \geq 2|x|$ ise,

$$|R_{\alpha,\ell}(x,y)| \leq M\,|x|^{\ell+1}\,|y|^{\alpha-n-\ell-1}$$

dır.

İspat : Taylor açılımında kalan terimlerden faydalanarak

$$\begin{aligned}
R_{\alpha,\ell}(x,y) &= R_\alpha(x-y) - \sum_{|\eta|\leq\ell}\frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right] \\
|R_{\alpha,\ell}(x,y)| &\leq |R_\alpha(x-y)| + \sum_{|\eta|\leq\ell}\left|\frac{x^\eta}{\eta!}\left[(D^\alpha R_\alpha)(-y)\right]\right| \\
&\leq |x-y|^{\alpha-n} + M\sum_{|\eta|\leq\ell}\frac{|x|^{|\eta|}}{\eta!}\,|y|^{\alpha-n-|\eta|} \\
&\leq M\sum_{|\eta|=\ell+1}\frac{|x|^{|\eta|}}{\eta!}\,|\theta x-y|^{\alpha-n-|\eta|} \qquad (0<\theta<1) \\
&\leq \left(M\sum_{|\eta|=\leq\ell+1}\frac{1}{\eta!}\right)|x|^{\ell+1}\left(\frac{|y|}{2}\right)^{\alpha-n-\ell-1} \\
&\leq M\,|x|^{\ell+1}\,|y|^{\alpha-n-\ell-1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.2.4: $p>1$ ve f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\eta(r)=\varphi(r^{-1})w(r)$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olmak üzere, $0\leq 2r<a<1$ ve $0<\delta<\beta$ ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n-B(0,r)}|y|^{\beta-n}f(y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n-B(0,a)}|y|^{\beta-n}f(y)dy + Ma^{\beta-\delta}$$

$$+M\left(\int_r^a\left[t^{n-\beta p}\eta(t)\right]^{-p'/p}t^{-1}dt\right)^{1/p'}\left(\int_{B(0,a)}\Phi_p(f(y))w(|y|)dy\right)^{1/}$$

dır. $0 \leq 2r < a < 1$ ve $\delta > 0 \geq \beta$ ise,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,r)} |y|^{\beta-n} f(y)dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\beta-n} f(y)dy + Mr^{\beta-\delta}$$

$$+M \left(\int_r^a \left[t^{n-\beta p}\eta(t)\right]^{-p'/p} t^{-1} dt \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^1$$

dır.

İspat : $0 < a < 1$ olsun. O halde

$$\int\limits_{B(0,a)-B(0,r)} |y|^{\beta-n} f(y)dy = \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} |y|^{\beta-n} f(y)dy$$

$$+ \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ 0<f(y)<|y|^{-\delta}\}} |y|^{\beta-n} f(y)dy$$

$$= U_{11} + U_{12}$$

şeklinde yazalım. Burada U_{11}' e Hölder eşitsizliğini uygulayalım. O halde U_{11} için

$$U_{11} = \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} |y|^{\beta-n} f(y) \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} dy$$

$$= \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} f(y) \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{\frac{1}{p}} |y|^{\beta-n} \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{-\frac{1}{p}} dy$$

$$\leq \left(\int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} f^p(y)\varphi(f(y))w(|y|)dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$X \left(\int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,r):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} |y|^{(\beta-n)p'} \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1.2 den eğer $f(y) > |y|^{-\delta}$ ise, φ'nin azalmayan oluşu dikkate alınırsa,

$$f(y) > |y|^{-\delta} \Rightarrow \varphi\left(|y|^{-\delta}\right) \leq \varphi(f(y)) \tag{24}$$

olur ve Lemma 3.2.2 den öyle bir $M > 1$ vardır ki,

$$M\varphi\left(|y|^{-1}\right) \leq \varphi\left(|y|^{-\delta}\right) \tag{25}$$

dır. (24) ve (25)' den

$$\varphi(f(y)) \geq \varphi\left(|y|^{-\delta}\right) \geq M\varphi\left(|y|^{-1}\right) \tag{26}$$

elde edilir. Diğer yandan $\Phi_p(r) = r^p\varphi(r)$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$U_{11} \leq \left(\int \Phi_p(f(y))w(|y|)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |y|^{(\beta-n)p'} \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

şeklinde yazılır ve en sağdaki integral için (26) eşitsizliği kullanılırsa,

$$U_{11} \leq \left(\int \Phi_p(f(y))w(|y|)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int M_1^{-p'/p} |y|^{(\beta-n)} \left[\varphi(|y|^{-1})w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

elde edilir. $\int M_1^{-p'/p} |y|^{(\beta-n)} \left[\varphi(|y|^{-1})w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy$ integraline küresel koordinatlar uygulanırsa,

$$U_{11} \leq \left(\int_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^a M_1^{-p'/p} M_2 t^{(\beta-n)p'} \left[\varphi(t^{-1})w(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{n-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

olur. Burada $M = M_1^{-p'/p}M_2$ *ve* $\eta(r) = \varphi(r^{-1})w(r)$ den

$$U_{11} \leq \left(\int_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)\right)^{\frac{1}{p}} \left(M\int_r^a t^{\beta p'-np'+n\frac{p'}{p'}} \left[\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

olup

$$\left(\beta - n + \tfrac{n}{p'}\right) p' = \left(\beta - n\left(1 - \tfrac{1}{p'}\right)\right) p'$$

$$\left(\beta - \tfrac{n}{p}\right) p' = (\beta p - n) \tfrac{p'}{p}$$

eşitsizliklerinden ve $r < |y| < a$ için

$$U_{11} \le \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y)) w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}} \left(M \int\limits_r^a \left[t^{n-\beta p} \eta(t) \right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

olarak elde edilir. Diğer yandan

$$U_{12} = \int\limits_{\{y \in B(0,a) - B(0,r):\ 0 < f(y) < |y|^{-\delta}\}} |y|^{\beta-n} f(y) dy$$

integralinde $0 < f(y) < |y|^{-\delta}$ olduğundan ,

$$U_{12} \le \int\limits_{B(0,a)-B(0,r)} |y|^{\beta-n} |y|^{-\delta} dy$$

$$= \int\limits_{B(0,a)-B(0,r)} |y|^{\beta-n-\delta} dy$$

yazılır. Bu integrali hesaplamak için küresel koordinatlara geçersek $0 < r < a < 1$ olmak üzere,

$$U_{12} \le \int\limits_{B(0,a)-B(0,r)} |y|^{\beta-n-\delta} dy$$

$$\le M_1 \int\limits_{B(0,a)-B(0,r)} t^{\beta-n-\delta} t^{n-1} dt$$

$$= M_1 \tfrac{1}{\beta-\delta} \left[a^{\beta-\delta} - r^{\beta-\delta} \right]$$

$$= M \begin{cases} a^{\beta-\delta}, & \beta - \delta > 0 \\ r^{\beta-\delta}, & \beta - \delta < 0 \end{cases}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

$$U_{11} \leq \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}} \left(M \int\limits_r^a \left[t^{n-\beta p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

de $\eta(t) = \varphi(t^{-1})w(t)$ yazılırsa

$$U_{11} \leq M \left(\int\limits_r^a \left[t^{n-\beta p}\varphi(t^{-1})w(t)\right]^{-p'/p} t^{-1}dt \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

olur. $p > 1$ için, $\int\limits_{B(0,a)} \Phi(f(y))w(|y|)dy$ integrali sonlu olduğundan

$$U_{11} \leq M \left(\int\limits_r^a \left[t^{n-\beta p}\varphi(t^{-1})w(t)\right]^{-p'/p} t^{-1}dt \right)^{1/p'}$$

olur ve $0 < r \leq 1/2$ için $K_1(r)$ ' yi

$$K_1(r) = \begin{cases} \left(\int\limits_r^1 \left[t^{n-\alpha p+(\ell-1)p}\eta(t)\right]^{-p'/p} t^{-1}dt \right)^{1/p'} & , \ p > 1 \\ \sup\limits_{r \leq t < 1} t^{\alpha-\ell-1-n}[\eta(t)]^{-1} & , \ p = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayacağız. Ayrıca $r > 1/2$ için $K_1(r) = K_1(1/2)$ olarak tanımlayacağız.

Hatırlatma 3.2.5: φ ve w üzerindeki çift koşuldan dolayı $0 < r \leq 1/2$ olduğunda,

$$K_1(r) \geq M\left[r^{n-\alpha p+(\ell+1)p}\eta(r)\right]^{-1/p}$$

dir.

Lemma 3.2.6: f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $0 < 2|x| < a < 1$ ve $0 < \delta < \alpha - \ell - 1$ ise,

$$|U_1(x)| \leq M|x|^{\ell+1}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + Ma^{\alpha-\ell-1-\delta}\right\}$$

$$+ \quad M|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy\right)^{1/p}$$

dır. $0 < 2|x| < a < 1$ ve $\delta > 0 \geq \alpha - \ell - 1$ ise,

$$|U_1(x)| \leq M|x|^{\ell+1} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + M|x|^{\alpha-n}$$

$$+ \quad M|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy\right)^{1/p}$$

dır. Burada M, x ve a dan bağımsız bir sabittir.

İspat :

$$U_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

potansiyelini gözönüne alalım. Lemma 2.2.3 ten $2|x| < |y|$ için,

$$|R_{\alpha,\ell}(x,y)| \leq M|x|^{\ell+1}|y|^{\alpha-n-\ell-1}$$

olduğundan,

$$|U_1(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy\right|$$

$$\leq M|x|^{\ell+1} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy$$

elde edilir. Buradan da

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy = \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,2|x|):\ f(y)>|y|^{-\delta}\}} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy$$

$$+ \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,2|x|):\ 0<f(y)<|y|^{-\delta}\}} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy$$

$$= U_{11} + U_{12}$$

şeklinde yazalım. Şimdi U_{11}' e Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$U_{11} \leq \left(\int f^p(y)\varphi(f(y))w(|y|)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |y|^{(\alpha-\ell-1-n)p'} [\varphi(f(y))w(|y|)]^{-\frac{p'}{p}} dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

olur. $f(y) > |y|^{-\delta}$ ve φ azalmayan bir fonksiyon olduğundan,

$$\varphi(\ |y|^{-\delta}) < \varphi(\ f(y))$$

olacaktır. Lemma 3.1.2 den dolayı,

$$(\varphi(f(y)))^{-1} \leq \left(\varphi\left(|y|^{-\delta}\right)\right)^{-1} \leq \left(M\varphi\left(|y|^{-1}\right)\right)^{-1}$$

olur ve $\Phi_p(f(y)) = f^p(y)\varphi(f(y))$ için,

$$U_{11} \leq \left(\int \Phi_p(f(y))w(|y|)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{2|x|}^{a} \left[t^{n-\alpha p-(\ell+1)p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

elde edilir. Diğer yandan ,

$$U_{12} = \int\limits_{\{y\in B(0,a)-B(0,2|x|):\ 0<f(y)<|y|^{-\delta}\}} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy$$

integralinde $0 < f(y) < |y|^{-\delta}$ olduğundan,

$$U_{12} \leq \int\limits_{B(0,a)-B(0,2|x|} |y|^{\alpha-\ell-1-n-\delta} dy$$

yazılır. $\mathbb{R}^n$de küresel koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned}
U_{12} &\leq M_1 \int_{2|x|}^{a} t^{\alpha-\ell-1-n-\delta} t^{n-1} dt \\
&= M_1 \int_{2|x|}^{a} t^{\alpha-\ell-\delta-2} dt \\
&= M_1 \frac{1}{\alpha-\ell-\delta-1} \left[a^{\alpha-\ell-\delta-1} - (2|x|)^{\alpha-\ell-\delta-1} \right] \\
&\leq M_2 \begin{cases} a^{\alpha-\ell-\delta-1} & , \ \alpha-\ell-\delta-1 > 0 \\ |x|^{\alpha-\ell-\delta-1} & , \ \alpha-\ell-\delta-1 < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $p > 1$ için ,

$$K_1(|x|) = \left(\int_{2|x|}^{1} \left[t^{n-\alpha p-(\ell+1)p} \eta(t) \right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

alınırsa, $\alpha - \ell - \delta - 1 > 0$ için,

$$\begin{aligned}
|U_1(x)| &= M|x|^{\ell+1} \int_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y) dy \\
&= M|x|^{\ell+1} (U_{11} + U_{12}) \\
&\leq M|x|^{\ell+1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y) dy + M a^{\alpha-\ell-1-\delta} \right\} \\
&+ M|x|^{\ell+1} K_1(|x|) \left(\int_{B(0,a)} \Phi_p(f(y)) w(|y|) dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M|x|^{\ell+1} \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + M|x|^{\alpha-\delta} \\
&+ M|x|^{\ell+1} K_1(|x|) \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\delta > 0 \geq \alpha - \ell - 1$ durumunda benzer işlemlerle eşitsizlik kolayca elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.2.6 den dolayı aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.7 : f, R^n üzerinde (16) ve (20) şartlarını sağlayan ve negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\alpha - \ell - 1 > 0$ ve $K_1(0) = \infty$ ise,

$$
\lim_{x \to 0} \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|) \right]^{-1} U_1(x) = 0
$$

dır.

İspat : Lemma 2.2.6 ten dolayı

$$
\begin{aligned}
U_1(x) &\leq M|x|^{\ell+1} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + Ma^{\alpha-\ell-1-\delta} \right\} \\
&+ M|x|^{\ell+1} K_1(|x|) \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Buradan da

$$
\begin{aligned}
\left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|) \right]^{-1} U_1(x) &\leq M [K_1(|x|)]^{-1} \{ \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + Ma^{\alpha-\ell-1-\delta} \} \\
&+ M \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

olur. $K_1(0)=\infty$ olduğunda $[K_1(0)]^{-1}=0$ olacaktır. O halde

$$\sup \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) \leq M \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

elde edilir. Bunu takiben her hangi bir $a>0$ için,

$$\lim_{x\to 0} \sup \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) \leq M \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

eşitliğin sağ tarafı sıfır olacağından

$$\lim_{x\to 0} \sup \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) = 0$$

olarak elde edilir.

Sonuş 3.2.8 : f, R^n üzerinde (16) ve (20) şartlarını sağlayan negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\alpha-\ell-1 \leq 0$ ve bazı $\delta>0$ için

$$\lim_{x\to 0} r^{\alpha-\delta} \left[r^{\ell+1} K_1(r)\right]^{-1} = 0$$

ise,

$$\lim_{x\to 0} \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) = 0$$

dır.

İspat : Lemma 2.2.6 dan dolayı

$$U_1(x) \leq M |x|^{\ell+1} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + M |x|^{\alpha-\ell-1-\delta} \right\}$$

$$+ \; M |x|^{\ell+1} K_1(|x|) \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

yazılır. Buradan da

$$\left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} \leq M\,[K_1(|x|)]^{-1}\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,a)} |y|^{\alpha-\ell-1-n} f(y)dy + M\,|x|^{\alpha-\ell-1-\delta}\}$$

$$+ \; M \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

olur. $\alpha - \ell - 1 \leq 0$ ve $\delta > 0$ için $\lim\limits_{x\to 0} r^{\alpha-\delta}\left[r^{\ell+1}K_1(r)\right]^{-1} = 0,\ K_1(0) = \infty$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0} \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) \leq M \left(\int\limits_{B(0,a)} \Phi(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p}$$

elde edilir. Buradaki eşitsizliğin sağ taraftaki integral sıfıra eşit olacağından

$$\lim_{x\to 0} \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) = 0$$

elde edilir.

Lemma 3.2.9: Eğer $0 < \delta < \alpha - \ell$ ise, herhangi bir $x \in B(0, 1/2) - \{0\}$ için

$$|U_2(x)| \leq M\,|x|^{\ell} K_2(|x|) \left(\int\limits_{B(0,|x|/2)} \Phi_p(f(y))w(|y|)dy \right)^{1/p} + M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

olacak şekilde pozitif bir M vardır. Burada

$$K_2(r) = \begin{cases} \left(\int\limits_0^r \left[t^{n-\alpha p-\ell p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt \right)^{\frac{1}{p'}} & , \ p > 1 \\ \sup\limits_{0<t\leq r} t^{\alpha-\ell-n}\,[\eta(t)]^{-1} & , \ p = 1 \end{cases}$$

dır.

İspat : İlk olarak,

$$U_2(x) = \int_{B(0,|x|/2)} R_{\alpha,\ell}(x,y)f(y)dy$$

fonksiyonunu alalım. Lemma 2.2.1 den dolayı;

$$|U_2(x)| \leq \int_{B(0,|x|/2)} \left(\left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} + M\,|x|^{\ell}\,|y|^{\ \alpha-n-\ell} \right) f(y)dy$$

$$= M\,|x|^{\ell} \int_{B(0,|x|/2)} |y|^{\ \alpha-n-\ell} f(y)dy + \int_{B(0,|x|/2)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} f(y)dy$$

$$= U_{11} + U_{12}$$

yazılır. U_{11} 'e Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$U_{11} \leq M\,|x|^{\ell} \left(\int_{B(0,|x|/2)} |y|^{(\alpha-\ell-n)p'} \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$X \left(\int_{B(0,|x|/2)} f^{p}(y)\varphi(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= M\,|x|^{\ell} \left(\int_{B(0,|x|/2)} |y|^{(\alpha-\ell-n)p'} \left[\varphi(f(y))w(|y|)\right]^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$X \left(\int_{B(0,|x|/2)} \Phi_p(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}}$$

olacaktır. Sağdaki son ifadeye küresel koordinatlar uygulanır ve $\eta(t) = \varphi(t^{-1})w(t)$

şeklinde alınırsa,

$$U_{11} \leq M|x|^{\ell} \left(\int_0^{|x|/2} \left[t^{n-\alpha p-\ell p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$X \left(\int_{B(0,|x|/2)} f^p(y)\varphi(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq M|x|^{\ell} K_2(|x|) \left(\int_{B(0,|x|/2)} \Phi_p(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Diğer yanda,

$$U_{12} = \int_{B(0,|x|/2)} \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} f(y)dy \leq \left(\frac{|x|}{2}\right)^{\alpha-n} \int_0^{|x|/2} |y|^{-\delta}\, dy = M|x|^{\alpha-\delta}$$

dir. U_{11} ve U_{12} nin elde edilen eşitsizlikleri için,

$$|U_2(x)| \leq M|x|^{\ell} \left(\int_0^{|x|/2} \left[t^{n-\alpha p-\ell p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$X \left(\int_{B(0,|x|/2)} f^p(y)\varphi(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}} + M|x|^{\alpha-\delta}$$

$$= M|x|^{\ell} K_2(|x|) \left(\int_{B(0,|x|/2)} \Phi_p(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}} + M|x|^{\alpha-\delta}$$

olur. Bura $K_2(r) = K_2(|x|)$,

$$K_2(r) = \begin{cases} \left(\int_0^{r} \left[t^{n-\alpha p-\ell p}\eta(t)\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt \right)^{\frac{1}{p'}} & , \quad p > 1 \\ \sup\limits_{0<t\leq r} t^{\alpha-\ell-n}\left[\eta(t)\right]^{-1} & , \quad p = 1 \end{cases}$$

dır.

Hatırlatma 3.2.10: φ ve w üzerindeki iki kat şartından dolayı $0 < r \leq 1/2$ olduğunda

$$K_2(r) \geq M\left[r^{n-\alpha p+\ell p}\eta(r)\right]^{-1/p}$$

olduğu görülür.

Lemma 3.2.9' nı yardımıyla aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.2.11 : f, $\mathbb{R}^n$ de (16)'yi sağlayan ve negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $0 < \delta < \alpha - \ell$, $K_2(1) < \infty$ ve

$$\lim_{x\to 0} r^{\alpha-\delta}\left[r^{\ell}K_2(r)\right]^{-1} = 0$$

ise,

$$\lim_{x\to 0}\left[|x|^{\ell}K_2(|x|)\right]^{-1}U_2(x) = 0$$

dır.

Hatırlatma 3.2.12: $w(r) = r^{\beta}$ olsun. Eğer $\alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$ ise, Lemma 3.1.4 ten $r \to 0$ için

$$K_1(r) \sim \left[r^{n-\alpha p+(\ell+1)p+\beta}\varphi(r)\right]^{-1/p}$$

oluşunu gerektirir ve böylece $K_1(0) = \infty$ dır. Ayrıca eğer $n + \beta > 0$ ise, Lemma 3.1.3 ten $0 < \delta < (n+\beta)/p$ için

$$\limsup_{r\to 0} r^{\alpha-\delta}\left[r^{\ell+1}K_1(r)\right]^{-1} \leq \limsup_{r\to 0} r^{(n+\beta)/p-\delta}\left[\varphi(r^{-1})\right]^{1/p} = 0$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 3.2.13: : $w(r) = r^{\beta}$ olsun. Eğer $\ell < \alpha - (n+\beta)/p$ ise, Lemma 3.2.6 ten $r \to 0$ için

$$K_2(r) \sim \left[r^{n-\alpha p+\ell p+\beta}\varphi(r^{-1})\right]^{-1/p}$$

oluşunu gerektirir. Ayrıca $n+\beta>0$ ise, Lemma 3.1.3 ten $0<\delta<(n+\beta)/p$ için

$$\limsup_{r\to 0} r^{\alpha-\delta}\left[r^{\ell}K_2(r)\right]^{-1} \;\leq\; \limsup_{r\to 0} r^{(n+\beta)/p-\delta}\left[\varphi(r^{-1})\right]^{1/p}=0$$

olduğu görülür.

Eğer $p>1$ ve $\ell=\alpha-(n+\beta)/p$ ise, $K_2(1)<\infty$ olması

$$\int_0^1 \left[\varphi(r^{-1})\right]^{-p/p'} r^{-1}dr<\infty$$

oluşuna denktir.

3.3. Taylor Açılımı

Bu başlık altında $p > 1$ olsun. Şimdi burada

$$\varphi^*(r) = \left(\int_0^r \left[t^{n-\alpha p} \varphi(t^{-1}) \right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

olmak üzere, $K_3(r)$'yi

$$K_3(r) = [w(r)]^{-1/p} \varphi^*(r)$$

şeklinde tanımlayalım.

Eğer $\varphi^*(1) < \infty$ ise f, (15) ve (16) şartlarını sağladığı zaman $U_\alpha f$, orjin dışında $\mathbb{R}^n$ üzerinde hemen hemen her yerde süreklidir.

Lemma 3.3.1: Eğer $0 < \delta < a$ ise, herhangi bir $x \in B(0, 1/2) - \{0\}$ için

$$|U_3(x)| \leq MK_3(|x|) \left(\int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} \Phi_p(f(y))w(|y|) \right)^{\frac{1}{p}} + M|x|^{\alpha-\delta}$$

olacak şekilde pozitif bir M sayısı vardır.

İspat : $0 < \delta < a$ olmak üzere,

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & , \quad y \in B(0, 2|x|) - B(0, |x|/2) \\ 0 & , \quad y \notin B(0, 2|x|) - B(0, |x|/2) \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$U_3(x) = \int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} R_{\alpha,\ell}(x,y) f(y) dy$$

Taylor açılımın kalan terimleri olan $R_{\alpha,\ell}(x,y)$ 'yi U_3 de yerine yazarsak,

$$U_3(x) = \int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} \left(R_\alpha(x-y) - \sum_{|\eta| \leq \ell} \frac{x^\eta}{\eta!} \left[(D^\alpha R_\alpha)(-y) \right] \right) f(y) dy$$

olur. Böylece Lemma 3.2.2 den, $\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2\,|x|$ olduğu için ,

$$|U_3(x)| \leq M \int\limits_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

yazılır. Bu son integralde $y = x + z$ dönüşümü yapılırsa,

$$|U_3(x)| \leq M \int\limits_{B(0,3|x|)} |z|^{\alpha-n} \tilde{f}(x+z)dz$$

olacaktır. Böylece Lemma 3.2.4 den

$$\begin{aligned} \int\limits_{B(0,3|x|)} |z|^{\alpha-n} \tilde{f}(x+z)dz &= \int\limits_{\{z\in B(0,a)-B(0,r):\, f(z)>|z|^{-\delta}\}} |z|^{\alpha-n} \tilde{f}(x+z)dz \\ &+ \int\limits_{\{z\in B(0,a)-B(0,r):\, f(z)>|z|^{-\delta}\}} |z|^{\alpha-n} \tilde{f}(x+z)dz \\ &= J_{11} + J_{12} \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada J_{11} 'e Hölder eşitsizliği uygulanır ve küresel koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned} J_{11} &\leq \left(\int |z|^{(\alpha-n)p'} \left[\varphi(\tilde{f}(x+z))\right]^{-\frac{p'}{p}} dz\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int \left(\tilde{f}(x+z)\right)^{p} \varphi(\tilde{f}(x+z))dz\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M \left(\int_0^{3|x|} t^{\alpha-np} [\varphi(t^{-1}))]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int \Phi_p(\tilde{f}(x+z))dz\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer yanda,

$$\begin{aligned} J_{12} &= \int\limits_{\{z\in B(0,a)-B(0,r):\, f(z)>|z|^{-\delta}\}} |z|^{\alpha-n} \tilde{f}(x+z)dz \\ &\leq \int_{|x|/2}^{2|x|} |z|^{\alpha-n-\delta}\, dz \end{aligned}$$

$$= \int_{|x|/2}^{2|x|} t^{\alpha-\delta-1} dt$$

$$= M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

olacaktır. O halde,

$$|U_3(x)| \le J_{11} + J_{12}$$

$$= M \left(\int_0^{3|x|} t^{\alpha-np} \left[\varphi(t^{-1})\right]^{-\frac{p'}{p}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int \Phi_p(\widetilde{f}(x+z))dz \right)^{\frac{1}{p}} + M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

olur. Buradan da

$$|U_3(x)| \le M\varphi^*(|x|) \left(\int \Phi_p(\widetilde{f}(x+z))dz \right)^{\frac{1}{p}} + M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

$$\le MK_3(|x|) \left(\int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} \Phi_p(\widetilde{f}(x+z))dz \right)^{\frac{1}{p}} + M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

olduğu görülür. Şimdi de,

$$K(r) = r^{\ell+1}K_1(r) + r^{\ell}K_2(r) + K_3(r)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $r > 0$ için

$$K(r) \ge M\left[r^{n-\alpha p}\eta(r)\right]^{-1/p} \qquad (27)$$

dır.

Teorem 3.3.2: Kabul edelim ki $\ell < \alpha$ için,

$$\lim_{r\to 0} K(r) = 0$$

$\alpha - \ell - 1 > 0$ için,

$$K_1(0) = \infty$$

$\alpha - \ell - 1 \leq 0$ ve bazı $\delta > 0$ için,

$$\lim_{r \to 0} r^{\,\alpha-\delta} \left[r^{\ell+1} K_1(r)\right]^{-1} = 0$$

$0 < \delta < \alpha - \ell$ ve bazı $\delta > 0$ için,

$$\lim_{r \to 0} r^{\,\alpha-\delta} \left[r^{\ell} K_2(r)\right]^{-1} = 0$$

bazı $\delta > 0$ için,

$$\lim_{r \to 0} r^{\,\alpha-\delta} \left[K_3(r)\right]^{-1} = 0$$

olsun. Eğer f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde (16) ve (20) koşullarını sağlayan negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ise,

$$\lim_{x \to 0} \left[K(|x|)\right]^{-1} U_{\alpha,\ell} f(x) = 0$$

dır.

İspat : Kabul edelim ki $0 < \delta < \alpha$ olsun. Lemma 2.3.1 den dolayı,

$$U_3(x) \;\leq\; M K_3(|x|) \left(\int\limits_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} \Phi_p(\widetilde{f}(x+z))dz \right)^{\frac{1}{p}} + M\,|x|^{\alpha-\delta}$$

$$\left[K_3(|x|)\right]^{-1} U_3(x) \;\leq\; M \left(\int\limits_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)} \Phi_p(\widetilde{f}(x+z))dz \right)^{\frac{1}{p}} + M\left[K_3(|x|)\right]^{-1} |x|^{\alpha-\delta}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $\lim\limits_{r \to 0} r^{\,\alpha-\delta} \left[K_3(r)\right]^{-1} = 0$ olduğundan,

$$\lim_{x \to 0} \left[K_3(|x|)\right]^{-1} U_3(x) = 0$$

elde edilir. Diğer yandan Sonuç 3.2.10, Sonuç 3.2.11 ve Sonuç 3.2.12 den,

$\alpha - \ell - 1 > 0$ ve $K_1(0) = \infty$ ise,

$$\lim_{x \to 0} \left[|x|^{\ell+1} K_1(|x|)\right]^{-1} U_1(x) = 0$$

$\alpha - \ell - 1 < 0$ ve $\delta > 0$ için $\lim_{r \to 0} r^{\alpha-\delta}[r^{\ell+1}K_1(r)]^{-1} = 0$ ise,

$$\lim_{x \to 0} [|x|^{\ell+1} K_1(|x|)]^{-1} U_1(x) = 0$$

$0 < \delta < \alpha - \ell$,$K_1(1) < \infty$ ve $\lim_{r \to 0} r^{\alpha-\delta}[r^{\ell}K_2(r)]^{-1} = 0$ ise,

$$\lim_{x \to 0} [|x|^{\ell} K_2(|x|)]^{-1} U_2(x) = 0$$

olur.

$$K(|x|) = |x|^{\ell+1} K_1(|x|) + |x|^{\ell} K_2(|x|) + K_3(|x|)$$

$$U_{\alpha,\ell} f(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x)$$

gözönüne alınırsa,

$$\lim_{x \to 0} [K(|x|)]^{-1} \{U_1(x) + U_2(x)\} = 0$$

yazılır. Böylece

$$\lim_{x \to 0} [K(|x|)]^{-1} U_{\alpha,\ell} f(x) = 0$$

olur.

Hatırlatma 3.3.3 : $w(r) = r^{\beta}$ olsun. Eğer $n + \beta > 0$ ise, Lemma 3.1.3 ten dolayı $0 < \delta < (n+\beta)/p$ için,

$$\lim_{r \to 0} \sup r^{\alpha-\delta} [K_3(r)]^{-1} = 0$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 3.3.4: $-n < \beta \leq \alpha p - n$ olmak üzere, $w(r) = r^{\beta}$ olsun. $\ell \leq \alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$ olacak şekilde ℓ tam sayısı olsun. Dolayısıyla, Hatırlatma 3.2.12, Hatırlatma 3.2.13 ve Hatırlatma 3.3.3 den; $\ell < \alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$, $n - \alpha p < 0$ için,

$$K(r) \sim [r^{n-\alpha p+\beta} \varphi(r^{-1})]^{-1/p}$$

$\ell < \alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1,\ n - \alpha p = 0$ için,

$$K(r) \sim r^{-\beta/p}\left(\int_0^r \left[\varphi(t^{-1})\right]^{-p'/p} t^{-1}dt\right)^{-1/p}$$

$\ell = \alpha - (n+\beta)/p$ için,

$$K(r) \sim r^{\ell}\left(\int_0^r \left[\varphi(t^{-1})\right]^{-p'/p} t^{-1}dt\right)^{1/p'}$$

dır. Yukarıdaki tüm koşullar için $K(1) < \infty$ ise,

$$\lim_{r \to 0} K(r) = 0$$

dır.

Hatırlatma 3.3.5: $-n < \beta \leq \alpha p - n$ olmak üzere, $w(r) = r^{\beta}$ olsun. Eğer $\alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$ ve f, (16)'i sağlıyorsa, Lemma 3.2.4' un ispatı (20)'nın sağladığını gösterir.

Sonuç 3.3.6: $-n < \beta \leq \alpha p - n$ için, $w(r) = r^{\beta}$ ve f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde (15)'yi ve (16)' i sağlayan ve negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\ell \leq \alpha - (n+\beta)/p < \ell + 1$ ve $K(1) < \infty$ ise, K Hatırlatma 3.3.4 deki gibi olmak üzere,

$$\lim_{x \to 0} \left[K(|x|)\right]^{-1} \{U_{\alpha}f(x) - P_{\ell}(x)\} = 0$$

olacak şekilde, derecesi ℓ den büyük olan bir P_{ℓ} polinomu vardır.

Gerçekten de $K_2(1) < \infty$ için (19) elde edilir. Ayrıca Hatırlatma 3.3.5 ile (20) elde edilir. Böylece

$$U_{\alpha,\ell}f(x) \quad = \quad U_{\alpha}f(x) - \sum_{|\eta| \leq \ell} \frac{x^{\eta}}{\eta!} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(D^{\alpha}R_{\alpha}\right)(-y)\right] f(y)dy$$

dır.

Hatırlatma 3.2.12, Hatırlatma 3.2.13, Hatırlatma 3.3.3 ve Hatırlatma 3.3.4 ve Teorem 3.3.1 yardımıyla yukardaki sonuç verilir.

$\lim_{r\to 0} r^{-\ell}K(r) = 0$ için Sonuç 3.3.6, $U_{\alpha,\ell}f$ 'nın orjinde ℓ inci mertebeden diferensiyellenebilir olmasını gerektirir. Diğer yandan Sonuç 3.3.6, $x \to 0$ için

$$U_\alpha f(x) - P_\ell(x) = O(K(|x|))$$

eşitliğini verir.

Elde edilen son eşitlik şöyle verilebilir.

Teorem 3.3.7: φ, $\int_0^1 [\varphi(r^{-1})]^{\frac{-1}{(p-1)}} r^{-1}dr < \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_p(f(y))dy < \infty \tag{28}$$

olsun.

$$\varphi^*(r) = \left(\int_0^r [\varphi(t^{-1})]^{\frac{-1}{(p-1)}} t^{-1}dt\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

olmak üzere eğer f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde (15) ve (16)'i sağlayan negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ise $U_\alpha f$, $\mathbb{R}^n$ de süreklidir. Bununla birlikte $|x-z| \to 0$ olmak üzere

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| = O(\varphi^*(|x-z|))$$

dır.

İspat: $r = |x-z| < \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} U_\alpha f(z) &= \int_{B(x,2r)} |z-y|^{\alpha-n} f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} |z-y|^{\alpha-n} f(y)dy \\ &= u_1(z) + u_2(z) \end{aligned}$$

yazılır. $0<\delta<\alpha$ için $u_1(z)$'ye Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
|u_1(z)| &\leq \int\limits_{B(z,3r)} |z-y|^{\alpha-n-\delta}\,dy \\
&+ \int\limits_{\{x:B(z,3r);\ |f(y)|>|z-y|^{-\delta}\}} \left[|z-y|^{\alpha-n}\varphi(|z-y|^{-\delta})^{\frac{-1}{p}}\right]\left[|f(y)|\,\varphi(|f(y)|)^{\frac{1}{p}}\right] dy \\
&\leq Mr^{\alpha-\delta} + \left(\int\limits_{B(z,3r)} \left[|z-y|^{\alpha-n}\varphi(|z-y|^{-\delta})^{\frac{-1}{p}}\right]^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&X \left(\int\limits_{B(z,3r)} \left[|f(y)|\,\varphi(|f(y)|)^{\frac{1}{p}}\right]^{p} dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Mr^{\alpha-\delta} + M\left(\int\limits_0^{3r} \left[\varphi(t^{-\delta})\right]^{\frac{p'}{p}} t^{-1}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{B(z,3r)} \Phi_p(|f(y)|)dy\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.2 den bu eşitlik,

$$|u_1(z)| \leq Mr^{\alpha-\delta} + M\varphi^*(r)\left(\int\limits_{B(x,4r)} \Phi_p(|f(y)|)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Diğer yandan Teorem 2.2.3 den $y\in\mathbb{R}^n - B(x,2r)$ olmak üzere

$$\left||x-y|^{\alpha-n} - |z-y|^{\alpha-n}\right| < Mr\,|x-y|^{\alpha-n-1}$$

mevcut olduğundan,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} \left||x-y|^{\alpha-n} - |z-y|^{\alpha-n}\right| f(y)dy$$

$$\leq Mr \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} |x-y|^{\alpha-n-1}\,|f(y)|\,dy$$

olur. Böylece $\alpha - 1 < \delta < \alpha$ için

$$
\begin{aligned}
|u_2(x) - u_2(z)| &\leq Mr \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} |x-y|^{\alpha-n-1} |f(y)|\, dy \\
&\leq Mr \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} |x-y|^{\alpha-n-1-\delta}\, dy + Mr\varphi(r^{-\delta})^{\frac{1}{p}} \\
&X \int\limits_{\{x:\mathbb{R}^n - B(x,2r);\ |f(y)|>r^{-\delta}\}} |x-y|^{\alpha-n-1} \left[|f(y)|\,\varphi(|f(y)|)^{\frac{1}{p}}\right] dy \\
&\leq Mr^{\alpha-\delta} + Mr\left[\varphi(r^{-\delta})\right]^{\frac{-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} |x-y|^{(\alpha-n-1)p'}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&X \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n - B(x,2r)} \Phi_p(|f(y)|) dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq Mr^{\alpha-\delta} + M\left[\varphi(r^{-\delta})\right]^{\frac{-1}{p}} \left(\int \Phi_p(|f(y)|) dy \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. φ nin logaritmik koşulundan

$$
\varphi^*(r) \geq \left(\int_{r^2}^{r} \left[\varphi(t^{-1})\right]^{\frac{-1}{(p-1)}} t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \geq M\left[\varphi(r^{-1})\right]^{\frac{-1}{p}} \left[\log(\frac{1}{r})\right]^{\frac{1}{p'}}
$$

dır. Ayrıca $\left[\varphi(r^{-1})\right]^{-1}$ ile Lemma 3.1.3 den $0 < s < 1$ olduğundan

$$
Ms^{\alpha-\delta} \leq \left[\varphi(s^{-1})\right]^{-1}
$$

olacaktır. Böylece

$$
|u_2(x) - u_2(z)| \leq M\varphi^*(r) \left[\log(\frac{1}{r})\right]^{\frac{-1}{p'}} \left(\int \Phi_p(|f(y)|) dy \right)^{1/p}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leq Mr^{\alpha-\delta} + M\varphi^*(r)\left(\int\limits_{B(x,4r)} \Phi_p(|f(y)|)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \; M\varphi^*(r)\left[\log(\frac{1}{r})\right]^{\frac{-1}{p'}}\left(\int \Phi_p(|f(y)|)dy\right)^{1/p}$$

yazılır. Diğer yandan $r > 0$ için

$$\lim_{r \to 0} r^\delta \left[\varphi^*(r)\right]^{-1} = 0$$

oluşu dikkate alınırsa, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir kompakt E cümlesi için $x \in E$ ve $|x - z| < \delta$ olmak üzere,

$$|U_\alpha f(x) - U_\alpha f(z)| \leq \varepsilon\varphi^*(|x-z|)$$

sağlanacak şekilde küçük bir $\varepsilon > 0$ bulabiliriz. Bu ise teoremin ispatıdır.

Önerme 3.3.8: Kabul edelim ki $\varphi^*(1) < \infty$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $p = n/\alpha$ için,

$$U_{\alpha,\ell} f(0) < \infty \quad \text{ve} \lim_{x \to 0} \left[K(|x|)\right]^{-\varepsilon-1}\{U_\alpha f(x) - U_\alpha f(0)\} = -\infty$$

olacak şekilde (28)'i sağlayan $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir f fonksiyonu vardır.

İspat : Hatırlatma 3.3.4 de $K(r) \sim \varphi^*(r)$ dır. $0 < \varepsilon < p' - 1$ ve $p' - 1 - \varepsilon < \delta < p' - 1$ olsun. $y \in B = B(0,1)$ için

$$f(y) = \left[K(|y|)\right]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p}$$

şeklinde tanımlayalım. Lemma 3.1.3 de olduğu gibi $\delta > 0$ için $0 < s < t$ olduğundan

$$s^\gamma K(s)^{-1} < Mt^\gamma K(t)^{-1} \tag{29}$$

dır. Öyleki $y \in B$ için

$$\begin{aligned} \varphi(f(y)) &= \varphi\left([K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p}\right) \\ &\leq \varphi\left(M |y|^{-(\gamma\delta+\alpha)}\right) \\ &\leq \varphi\left(M |y|^{-1}\right) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak $t^* = [\varphi^*(1)]^{p'}$ şeklinde seçilirse,

$$\begin{aligned} \int_B (\Phi_p f(y))\, dy &= \int_B \left([K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p}\right)^p \\ & X \quad \left(\varphi([K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p})\right) dy \\ &\leq M \int_B [K(|y|)]^{-\delta p} |y|^{-\alpha p} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'+1} dy \\ &\leq M \int_B [\varphi^*(|y|)]^{-\delta p} |y|^{-\alpha p} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'+1} dy \\ &= M \int_0^1 \left\{[\varphi^*(r)]^{p'}\right\}^{-\delta p/p'} \left\{[\varphi^*(r)]^{-p'}\right\}' dr \\ &= M \int_0^{t^*} t^{-\delta p/p'} dt < \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece f, (28)'u sağlar. Benzer olarak

$$\begin{aligned} U_\alpha f(0) &= \int_B |y|^{\alpha-n} f(y) dy \\ &= \int_B |y|^{\alpha-n} [K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p} dy \\ &\leq \int_B [\varphi^*(|y|)]^{-\delta} |y|^{-n} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p} dy \end{aligned}$$

$$= M\int_0^1 \left\{[\varphi^*(t)]^{p'}\right\}^{-\delta/p'} \left\{[\varphi^*(t)]^{-p'}\right\}' dt$$

$$= M\int_0^{t^*} t^{-\delta/p'} dt < \infty$$

elde edilir. U_2 için,

$$U_2(x) = -\int_{B(0,|x|/2)} |y|^{\alpha-n} f(y)dy + \int_{B(0,|x|/2)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

$$= -I + J$$

yazarız. $r^* = [\varphi^*(|x|/2)]^{p'}$ için

$$\begin{aligned} I &\geq M\int_0^{r^*} t^{-\delta/p'} dt \\ &= M[\varphi^*(|x|/2)]^{-\delta+p'} \\ &\geq M[K(|x|)]^{-\delta+p'} \end{aligned}$$

yazılabilir. Öyleki

$$\lim_{x\to 0}[K(|x|)]^{-\varepsilon-1} I = \infty \tag{30}$$

dır. Diğer yandan $r = |x| < 1$ için

$$\begin{aligned} J &= \int_{B(0,|x|/2)} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy \\ &= \int_{B(0,|x|/2)} |x-y|^{\alpha-n} [K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p} dy \\ &\leq M|x|^{\alpha-n} \int_{B(0,|x|/2)} [K(|y|)]^{-\delta} |y|^{-\alpha} \left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p} dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M\,|r|^{\alpha-n}\int_0^{r/2}[K(t)]^{-\delta}\,t^{n-\alpha}\,[\varphi(t^{-1})]^{-p'/p}\,t^{-1}dt \\
&\leq M\,|r|^{\alpha-n}\int_0^{r}[K(t)]^{-\delta}\,t^{n-\alpha}\,[\varphi(t^{-1})]^{-p'/p}\,t^{-1}dt \\
&\leq M\,|r|^{\alpha-n}\,[K(r)]^{-\delta}\,r^{n-\alpha}\,[\varphi(r^{-1})]^{-p'/p} \\
&= M\,[K(r)]^{-\delta}\,[\varphi(r^{-1})]^{-p'/p}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 3.1.2 den dolayı

$$
\begin{aligned}
[K(r)]^{p'} &\geq \int_{r^2}^{r}[\varphi(t^{-1})]^{-p'/p}\,t^{-1}dt \\
&\geq [\varphi(r^{-2})]^{-p'/p}\int_{r^2}^{r}t^{-1}dt \\
&\geq M\,[\varphi(r^{-1})]^{-p'/p}\log(\frac{1}{r})\ \ (M>0)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise,

$$
J \leq M\,[K(|x|)]^{-\delta+p'}\left[\log(\frac{1}{|x|})\right]^{-1}
$$

dır. Ayrıca Lemma 3.1.2 den

$$
\begin{aligned}
|U_3(x)| &\leq \int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)}|x-y|^{\alpha-n}\,f(y)dy \\
&= \int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)}|x-y|^{\alpha-n}\,[K(|y|)]^{-\delta}\,|y|^{-\alpha}\,[\varphi(|y|^{-1})]^{-p'/p}dy \\
&\leq M\,[K(|x|)]^{-\delta}\,|x|^{-\alpha}\,[\varphi(|x|^{-1})]^{-p'/p}\int_{B(0,2|x|)-B(0,|x|/2)}|x-y|^{\alpha-n}\,dy
\end{aligned}
$$

$$\leq \; M\,[K(|x|)]^{-\delta}\left[\varphi(|x|^{-1})\right]^{-p'/p}$$

$$\leq \; M\,[K(|x|)]^{-\delta+p'}\left[\log(\frac{1}{|x|})\right]^{-1}$$

yazılır. Benzer olarak Lemma 3.2.3 ve Lemma 3.2.4 den

$$\begin{aligned}
|U_1(x)| &\leq M\,|x| \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-n-1} f(y)dy \\
&= M\,|x| \int\limits_{\mathbb{R}^n - B(0,2|x|)} |y|^{\alpha-n-1}\,[K(|y|)]^{-\delta}\,|y|^{-\alpha}\left[\varphi(|y|^{-1})\right]^{-p'/p} dy \\
&= M\,|x| \int_{2|x|}^{1} [K(t)]^{-\delta}\,[\varphi(t^{-1})]^{-p'/p}\,t^{-2}dt \\
&\leq M\,|x|\,[K(|x|)]^{-\delta} \int_{2|x|}^{1} [\varphi(t^{-1})]^{-p'/p}\,t^{-2}dt \\
&\leq M\,[K(|x|)]^{-\delta}\left[\varphi(|x|^{-1})\right]^{-p'/p} \\
&\leq M\,[K(|x|)]^{-\delta+p'}\left[\log(\frac{1}{|x|})\right]^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bunların sonucu olarak,

$$U_\alpha f(x) - U_\alpha f(0) \;\leq\; -[K(|x|)]^{-\delta+p'}\left(1 - M\left[\log(\frac{1}{|x|})\right]^{-1}\right)$$

yazılır. Dolayısıyla (30) ile birlikte

$$\lim_{x\to 0}\,[K(|x|)]^{-\varepsilon-1}\,\{U_\alpha f(x) - U_\alpha f(0)\} = -\infty$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonu hipotezde verilen tüm şartları sağlar. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

Sadosky, C., Interpolation of Operators and Singular Integrals 1979.

Stein, E.M., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions 1970.

Samko, S.G, Kilbas, A.A. and Marichew, O.I, Integrals and Derivatives of Fractional Orders and Its Some Applications 1993.

Maz'ya, V.G., Sobolev Spaces, Springer-Verlang 1985.

Mizuta, Y., Continuity Properties of Riesz potentials and Boundary Limits of Beppo Levi functions, Math. Scand., (1988), 238-260.

Mizuta, Y., Continuity Properties of Potentials and Beppo- Levi-Deny Functions, Hiroshima Math. S.,23 (1993), 79-153.

Meyers, N.G., Taylor Expansion of Bessel Potentials, Indiana Unv.Math.J., 23(1974), 1043-1049.

Mikhlin. S.6 1962, Multi-Dimensional Singular Integrals and Integral Equations (In Russia) English Edition. Pergamon Press, Oxford1966.

Neri, U. , Singular Integrals. University of Maryland Lecture Notes 1967.

Levitan, B.M. 1962, Generalized Translation Operators and Some of Their Applications Moskova (Translation. 1964).

Shimomura, T. and Mizuta, Y., Taylor Expansion of Riesz Potentials, Hiroshima Math.J.25(1995), 595-621.

Schwarz, L., Mathematics For The Physical Science Hermann, Editeurs des Sciences Et Des Arcts. Paris 1966.

Akın, Ö. and Çelebi, O., Generalized Cauchy-Riemann Equations and the Positive $k-$Subharmonic Functions, the proceedings of the conference on potential theory, held in Prague, July 19-24, (1987), pp. 7-11, 1988, Plenum Pres, New York.

Yıldırım H., Riesz Potentials Generated By A Generalized Shift Operator, Ankara University Graduate School of Natural and Applied Sciences Depertmant of Math. PhD Thesis 1995.

Yıldırım, H., Sarikaya, M.Z., On The Generalized Riesz Type Potentials, Joyr. of Inst. of Math.&Conp. Sci. Vol. 14, No.3(2001)217-224.