



**MONGE YAMASI İLE VERİLEN BAZI YÜZEYLERİN
BİR KARAKTERİZASYONU**

Emine Aydan PAMUK



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MONGE YAMASI İLE VERİLEN BAZI YÜZEYLERİN
BİR KARAKTERİZASYONU**

Emine Aydan PAMUK
0000-0001-9723-3983

Doç. Dr. Betül BULCA
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2020
Her Hakkı Saklıdır.

TEZ ONAYI

E. Aydan PAMUK tarafından hazırlanan “MONGE YAMASI İLE VERİLEN BAZI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Betül BULCA

Başkan : Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza 

Üye : Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
0000-0002-1608-0354
İzmir Demokrasi Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza 

Üye : Doç. Dr. Betül BULCA
0000-0001-5861-0184
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

İmza 

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Akşel EREN
Enstitü Müdürü

.././2020



B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

.../.../.....

E.Aydan PAMUK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MONGE YAMASI İLE VERİLEN BAZI YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

Emine Aydan PAMUK

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Betül BULCA

Bu tez çalışmasında Öklid uzaylarında Monge yamasıyla verilen yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerden öteleme yüzeyleri ve çarpanlara ayrılabilir yüzeylerle ilgili sonuçlara değinilmiş ve bunların ikisini birlikte düşünerek ele alınan öteleme-çarpanlara ayrılabilir (translation-factorable) yüzeylerle ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde Öklid uzayındaki yüzeylerin diferansiyel geometrisi hakkında genel bilgilere yer verilerek sonlu tipten koordinatlara sahip yüzeylerle ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayındaki Monge yaması ile verilen yüzeyler, öteleme yüzeyleri ve çarpanlara ayrılabilir yüzeyler tanıtılmıştır. Bu yüzeylerin eğrilikleri verilip düz ve minimal olma koşulları ile ilgili literatürde bulunan sınıflandırma teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde öteleme ve çarpanlara ayrılabilir yüzeyler yardımıyla elde edilen TF (translation-factorable) tipindeki yüzeyler tanıtılmıştır. 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıp düz ve minimal olmaları ile ilgili sınıflandırma teoremleri verilmiştir. Bununla birlikte Monge yamasıyla verilen yüzeylerle birlikte TF tipindeki yüzeylerin 3-boyutlu Öklid uzayında Laplasları hesaplanıp sonlu tipten koordinatlara sahip olma şartları ele alınmıştır.

Beşinci bölüm çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Çarpanlara ayrılabilir yüzey, Gauss eğriliği, Laplas operatörü, minimal yüzey, ortalama eğrilik, öteleme yüzeyi.

2020, vi + 71 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF SOME SURFACES GIVEN WITH THE MONGE PATCH

Emine Aydan PAMUK

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Betül BULCA

In this thesis, the surfaces given with the Monge patch are considered. Conclusions about translation are mentioned and the original results are obtained for the translation-factorable surfaces which are considering by both of the translation and factorable surfaces.

This thesis consists of five chapters.

The first section is the introduction.

In the second section, general information about the differential geometry of surfaces in Euclidean space is given. Further some basic definitions and concepts are concerned about surfaces having finite type coordinates.

In the third section, surfaces in 3 and 4 dimensional Euclidean space given with the Monge patch, translation surfaces and factorable surfaces are introduced. The curvatures of these surfaces are obtained. Furthermore the classification theorems on the conditions of being flat and minimal are given.

In the fourth section, TF (translation-factorable) surfaces, in 3 and 4 dimensional Euclidean space which are obtained with the help of translation and factorable surfaces, are introduced. The Gaussian and mean curvature of these surfaces is calculated. Also a classification theorems for become flat and minimal of these TF type surfaces are given. However, the Laplacian of the surfaces given with the Monge patch and TF type surfaces are calculated and the conditions of finite type coordinates are obtained in E^3 .

The fifth section is the conclusion of the thesis.

Key words: Factorable surface, Gaussian curvature, Laplace operator, mean curvature, minimal surface, translation surface.

2020, vi + 71 pages.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren tez konumun belirlenmesinden başlayarak çalışmalarımda gerekli yönlendirmeleri yapan, maddi manevi desteğini ve güler yüzünü esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Betül BULCA'ya çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimimde derslerini almış olduğum bilgi ve tecrübeleri ile kendilerini tanımaktan onur duyduğum saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Kadri ARSLAN ve Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm öğrenim hayatım boyunca benden maddi manevi hiçbir yardımı esirgemeyen, öğrettikleri değerlerle bugüne kadar var olmamı sağlayan ve ömrüm boyunca hep yanımda olan aileme, ilgi ve desteğini esirgemeyen başta Gökçe KILIÇ olmak üzere tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler.

Emine Aydan PAMUK

.../.../...

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	6
2.1. E^n de Yüzeyler.....	6
2.2. Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Yüzeyler.....	8
3. MATERYEL ve YÖNTEM.....	11
3.1. E^3 de Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler.....	11
3.2. E^3 de Öteleme Yüzeyleri.....	13
3.3. E^3 de Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler.....	14
3.4. E^4 de Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler.....	17
3.5. E^4 de Öteleme Yüzeyleri.....	19
3.6. E^4 de Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler.....	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	26
4.1. Öklid Uzayında TF Tipindeki Yüzeyler.....	26
4.1.1. 3-boyutlu Öklid uzayında TF tipindeki yüzeyler.....	26
4.1.2. 4-boyutlu Öklid uzayında TF tipindeki yüzeyler.....	34
4.2. E^3 de Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler.....	47
4.2.1. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip öteleme yüzeyleri.....	52
4.2.2. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip çarpanlara ayrılabilir yüzeyler.....	54
4.2.3. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip TF tipindeki yüzeyler.....	55
5. SONUÇLAR.....	57
KAYNAKLAR.....	58
EKLER.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	71

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
g_{ij}	Birinci temel form katsayıları
K	Gauss eğriliği
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
h	İkinci temel form
c_{ij}^k	İkinci temel form katsayıları
∇	İndirgenmiş Riemann konneksiyon
Δ	Laplas operatörü
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alan uzayı
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alan uzayı
∇^\perp	Normal koneksiyon
N_i	Normal vektörler
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
H	Ortalama eğrilik
\bar{H}	Ortalama eğrilik vektörü
λ_{i_k}	Reel değerli sabitler
X	Regüler yama
$\tilde{\nabla}$	Riemann koneksiyon
M	Yüzey

Kısaltmalar	Açıklama
TF	Translation-Factorable

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 4. 1. $h(u) = \cos u$ ve $g(v) = \sin v$ için TF yüzeyi.....	27
Şekil 4. 2. $h(u) = u^2$ ve $g(v) = v^2$ için TF yüzeyi	28
Şekil 4. 3. Düz TF yüzeyleri	30
Şekil 4. 4. Minimal TF yüzeyi	34
Şekil 4. 5. $h_1(u) = h_2(u) = \cos u$ ve $g_1(v) = \cos v, g_2(v) = \sin v$ için TF yüzeyi	35
Şekil 4. 6. $h_1(u) = h_2(u) = e^u$ ve $g_1(v) = \cos v, g_2(v) = \sin v$ için TF yüzeyi	35
Şekil 4. 7. E^4 de düz TF yüzeylerinin E^3 deki izdüşümleri.....	41
Şekil 4. 8. E^4 de minimal TF yüzeyinin E^3 deki izdüşümü.....	47



1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri 17. Yüzyıl boyunca Öklid düzlemindeki eğriler ve 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler üzerindeki eğrilerin, diferansiyel hesabı anlamında incelenmesi olarak çalışılmaya başlanmıştır. Gauss ve Riemann 19. Yüzyılda diferansiyel geometrinin ayrı bir disiplin olarak ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi ele alınacak olursa klasik diferansiyel geometri olarak adlandırılan kısmı, diferansiyel ve integral hesabın başlangıcıyla ortaya çıkmıştır. Yani bu anlamda diferansiyel geometri eğriler ve yüzeylerin yerel özelliklerini araştırır. Yerel özellikler eğri ve yüzeylerin bir nokta komşuluğundaki davranışına bağlı özellikleridir. Diğer taraftan aynı zamanda eğri ve yüzeylerin tümünün davranışı üzerindeki etkileri de global diferansiyel geometri yardımıyla ele alınır. Klasik diferansiyel geometrinin en ilginç ve onu en iyi temsil eden parçası, yüzeylerle ilgili çalışmalardır. Bununla birlikte, yüzeylerle ilgili çalışmalarda eğrilerin kimi yerel özellikleri doğal olarak ortaya çıkar. Global diferansiyel geometri ise eğriler ve yüzeylerin yerel ve genelde topolojik özellikleri arasındaki bağıntılarla ilgilenir (Do Carmo 1976, Korkmaz 2012).

Kapalı yüzeylerin eğriliğinin Gauss-Bonnet teoremi aracılığıyla bir topolojik değişmez, yani Euler karakteristiği ile ilişkili olduğu bilinmektedir. Bunca zamandır, eğrilik değişmezlerinin integrallerinin Riemann geometride indeks teoremi, ısı denklemi, tüplerin ve geodezik topların hacmi, altmanifoldlar teorisi, spektral geometri gibi birçok farklı yönde çok önemli rol oynadığı anlaşılmıştır.

Yüzeyler üzerindeki eğrilik kavramı düşünüldüğünde ilk akla gelen yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleridir. Bu eğriliklerin hesaplanmasında şekil operatörü ve yüzeylerin birinci ve ikinci temel form kavramları önem arz etmektedir. Yüzeyin birinci temel formu yardımıyla yüzey üzerindeki uzunluk, açı, alan vb. basit metrik kavramların nasıl kullanılacağı gösterilebilir. Bu kavramın önemi bu hesaplamaların yüzeyi terk etmeden yapılabilmesidir. Bu nedenle bu kavramlara yüzeyin içsel özellikleri denir. Bir yüzeyin

pek çok önemli yerel özelliği birinci temel form türünden ifade edilebildiği için bu tür özellikleri yüzeyin içsel geometrisini verir.

Yaklaşık 200 yıl önce Gauss geometrinin ne olduğu hakkında yeni ve daha derin bir anlayışa yol açan bir soru sordu: 3 boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin geometrisi şeklinden ne kadar bağımsızdır?

C. F. Gauss, 1827 yılındaki “Kavisli yüzeyler üzerindeki genel tartışmalar” isimli temel çalışmasında bu yüzeyler üzerindeki yayların uzunluğunun ölçülmesine dayanarak yüzeylerin bir içsel geometrisinin varlığını gösterdi (Gauss 1827).

3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzeyin geometrisi incelenirken en önemli geometrik özelliklerinden bazılarının içinde bulunduğu uzaya değil de yüzeyin kendisine ait olduğu bulunmuştur. Yüzeylerin birinci ve ikinci temel formları, alandan bağımsız yüzey bilgilerini elde etmeyi sağlayan bir dizi diferansiyel geometrik özellik sağlar. Gauss eğriliği bir yüzeyin izometrik değişmezine atıfta bulunan doğal bir yüzey özelliğidir. Yani, Gauss eğriliği şekil operatörü yardımıyla tanımlanmış olmasına rağmen izometrik değişmezlik şartlarını sağladığından yüzey için bir içsel geometriye ait olduğu söylenebilir. Bu ifadeyi Gauss meşhur teoremi “Theorema Egregium” da bir yüzeyin Gauss eğriliği K yerel izometrilere altında değişmezdir şeklinde ifade etmiştir. Bu teorem Reimann'ı, Gauss eğriliğinin keyfi Riemann manifoldlarına genelleştirilmesi olan Reimann geometrisinin icadına götürdü (Riemann 1854).

Yüzeyler için önemli olan bir diğer eğrilik de ortalama eğrilik kavramı olup ilk olarak Marie-Sophie Germain tarafından ortaya atılmıştır (Germain 1831). Gauss eğriliğinin tersine ortalama eğrilik yüzeyin uzayda nasıl yattığını ölçen dışsal bir özelliktir. Ortalama eğrilik bir malzeme gövdesinin yüzeyinin karakteri ile ilişkili olduğundan diğer bilimlerle de derinden bağlantılıdır. Ortalama eğrilik yüzey üzerindeki her bir noktadaki iki asli eğriliğin aritmetik ortalaması olarak ifade edilmektedir. Ortalama eğriliğin sıfır olması durumunda yüzey minimal yüzey olarak adlandırılır. Minimal yüzeyler günümüzde de aktif olarak çalışılmakta olan konular olup özellikle fonksiyonlar teorisi alanında analizle ilişkilidirler. Ortalama eğriliği sıfıra eşit olmayan

bir sabit olmak üzere verilen bir yüzey hacmini korurken yüzey alanını en aza indirgeyecek şekilde karşımıza çıkar. Bu anlamda sabit ortalama eğriliğe sahip olan aşikar örnek küre yüzeyidir. Ayrıca 1984 yılında H. Wente tarafından keşfedilen sabit ortalama eğrilik toru geometricilere bu yüzeyleri incelemek için büyük bir motivasyon oluşturmuştur (Wente 1984). Dolayısıyla hem Öklid uzayında hem de diğer uzaylarda sabit ortalama eğriliğe sahip yüzeyler popüler bir çalışma konusu haline gelmiştir (Kenmotsu 2000).

1800 lü yılların başlarında S. Germain ve S.D. Poisson, elastik kabukları tanımlamak için toplam ortalama eğriliği uygulamıştır (Poisson 1812, Germain 1831). 3 boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler için toplam ortalama eğrilik 1920'de Blaschke ve daha sonra 1960'ların ortalarında T.J. Willmore tarafından ortaya atılmıştır (Blaschke 1929, Willmore 1968).

1970'lerin sonunda B.Y. Chen Öklid altmanifoldlarının toplam ortalama eğriliğini ifade edebilmek adına altmanifoldlar için sıra ve tip kavramlarını tanıtmıştır. Ayrıca bu kavramlardan yola çıkarak sonlu tip altmanifoldlar ve sonlu tip dönüşüm kavramlarını tanıtmıştır. Sonlu tip altmanifoldlar ve sonlu tip dönüşümlerin incelenmesi, Riemann manifoldlarının geometrisini immersiyon yardımıyla Riemann manifoldlarının spektral davranışlarıyla ilişkilendirmek için doğal bir yol sağlar. Bu nedenle Nash embedding teoremine göre her zaman Öklid uzayına izometrik olarak gömülebilen bir Riemann manifoldun özdeğerleri hakkında önemli bilgiler elde edilebilir (Chen 1979).

Yüzeyler üzerinde ele alınmış olan diferansiyel geometri kavramı genel olarak altmanifoldlar üzerinde düşünülebilir. Altmanifoldların diferansiyel geometrisinin matematiğin dalları, fen ve mühendislik üzerindeki etkisi büyüktür. Örneğin geodezikler ve minimal yüzeylerin incelenmesi, dinamikler, karmaşık değişkenli fonksiyonlar teorisi, varyasyon hesabı ve topoloji ile yakından ilgilidir. Son zamanlarda altmanifold teorisi bilgisayar tasarımı, görüntü işleme, ekonomik modelleme, sanat ve vizyonun yanı sıra matematiksel fizikte (Kaluza-Klein ve dizi teorileri dahil) ve matematiksel biyolojide önemli bir rol oynamaktadır (Chen 2015).

Son yıllarda sensör görüntü verileri olarak uzaklık ve derinlik haritalarının kullanılmasıyla bilgisayarlı görüntüleme çalışmalarında büyük artış olmuştur. Uzaklık görüntüleme özelliklerinin algılanmasıyla ilgili yöntemler Gauss ve ortalama eğriliğin işaretlerine bağlıdır. Böylece bir görüntü yüzeyinin Monge yaması ile modellenebileceği varsayımları altında Gauss ve ortalama eğriliklerin işaretleri kullanılarak 3-boyutlu konveks yüzeyin varlığını tespit etmek için yöntemler geliştirilmiştir. Monge yaması olarak adlandırılan yüzeylerin grafik formu, yüzey üzerindeki derinlik fonksiyonlarını tanımlamak için kullanılır.

Oyma (carved) yüzeylere düzlemde yatan asli eğrilik çizgileri yüzeye dik olan bir düzlem ailesini veren yüzeyler denir. Yüzey üzerindeki bu asli eğrilik çizgileri de geodezik çizgiler olarak adlandırılır. Bir oyma yüzeyi açılabilir yüzeylerin bir evolutü olmak üzere Monge yüzeyi olarak adlandırılır. Monge yüzeyleri 1807 de keşfeden matematikçinin adına ithafen isimlendirilmiştir. Analizde de iki değişkenli yüzey grafiklerini elde etmede önemli rol oynayan Monge yüzeyleri 3-boyutlu Öklid uzayında

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

parametrelendirmesine sahip yüzeylerdir. Bu parametrelendirmeye verilen önemli yüzeylerden biri öteleme yüzeyleri olup $f(u, v) = h(u) + g(v)$ fonksiyonu ile verilir. Burada $h(u)$ ve $g(v)$ üreteç eğrileri olup Darboux tarafından bu eğrilerin toplamı yardımıyla öteleme yüzeyleri tanımlanmıştır (Darboux 1972). Öteleme yüzeyleri iki eğri tarafından üretilen yüzeyler oldukları için dört kenarlı yapıdaki yüzeylerdir. Bu nedenle bu yüzeyler uygulama alanı olarak mimaride çokça kullanılmaktadır. Binaların çatı ve cam kaplamaları üçgensel cam yüzeyler olup öteleme yüzeyi olarak ele alındığında dörtgensel hale geleceğinden daha ekonomik ve daha kullanışlı bir hal alır (Glymp ve ark. 2004). Bu yüzeyler için önemli bir sınıflandırma olan minimallik durumunu Scherk 1835 yılında iki eğrinin toplamı olarak verilen bu tipte bir yüzeyin düzlemsel olmayan tek minimal yüzey olması için gerek ve yeter şartın

$$f(u, v) = \frac{1}{c} \log \left| \frac{\cos cv}{\cos cu} \right|, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$$

olması gerektiğini ispatlamıştır (Scherk 1835). Öteleme yüzeylerinin minimalliği ile ilgili çalışmalar birçok matematikçi tarafından yapılmıştır (Verstrealen ve ark. 1994, Dillen ve ark. 1998, Lopez 2011, Munteanu ve ark. 2016, Lopez ve Perdomo 2017).

Bununla birlikte sabit Gauss eğriliğine sahip öteleme yüzeyleri ile ilgili problemler daha az bilinmektedir. Bunlarla ilgili yapılan çalışmalarda da sifıra eşit sabit Gauss eğriliğine sahip öteleme yüzeyleri silindirik yüzeyler olarak bulunmuştur. Ayrıca bunun dışında başka sabit Gauss eğriliğine sahip öteleme yüzeyi olmadığı gösterilmiştir (Liu 1999, Lopez ve Moruz 2015, Hasanis ve Lopez 2018). Ayrıca 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında da öteleme yüzeyleri tanımlanmış ve eğriliklerle ilgili özellikleri yardımıyla sınıflandırılmaları verilmiştir (Büyükkütük 2012, Arslan ve ark. 2016, Moruz ve Munteanu 2016).

Monge yamasıyla verilen kullanışlı yüzeylerden bir diğeri de çarpanlara ayrılabilir yüzeylerdir. Bu yüzeyler için de $f(u,v) = h(u)g(v)$ fonksiyonu iki eğrinin çarpımı şeklinde ifade edilir. Bu yüzeyler aynı zamanda homotetik yüzeyler olarak da adlandırılmak üzere ilk olarak 1995 yılında Woestyne tarafından helikoidlerin bir sınıflandırılması olarak verilmiştir (Woestyne 1995). 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında minimal çarpanlara ayrılabilir yüzeyler Yu ve Lie tarafından sınıflandırılmıştır (Yu ve Lie 2007). Bu yüzeyler Öklid uzayı ile birlikte Minkowski ve Galilean uzaylarında da birçok geometrici tarafından çalışılmış ve sınıflandırma teoremleri bulunan popüler bir konu olmuştur (Meng ve Liu 2009, Turhan ve Altay 2010, Bekkar ve Senoussi 2012, Aydın ve ark. 2015, 2018, Lopez ve Moruz 2015, Aydın ve Öğrenmiş 2017, Aydın 2018). Ayrıca 4-boyutlu Öklid ve Minkowski uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerde S. Büyükkütük tarafından çeşitli çalışmalarda verilmiştir (Büyükkütük ve Öztürk 2017, Büyükkütük ve Öztürk 2018, Büyükkütük 2018a,b).

Bu tez çalışmasında da şimdiye kadar verilen kaynaklar yardımıyla literatür taraması yapılmış olup ilk olarak Monge yamasıyla verilen yüzeyler üzerinden hareketle 3 ve 4 boyutlu Öklid uzayında yüzey sınıflandırılmaları verilmiştir. Monge yaması yardımıyla tanımlanan öteleme ve çarpanlara ayrılabilir yüzeyler incelenmiş ve bu iki yüzeyin bir genellemesi olarak ele alınan TF (translation-factorable) tipindeki yüzeyler çalışılmıştır. Bu yüzeylerle ilgili daha önceki kaynaklar da baz alınarak düz ve minimal olması ile ilgili sınıflandırma teoremleri elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde ilk olarak tezin ilerleyen bölümlerinde ihtiyaç duyulacak olan n -boyutlu Öklid uzayında yüzeylerle ilgili temel kavramlara değinilmiştir. Sonrasında ise sonlu tipten koordinatlara sahip yüzeylerin tanımı ve özellikleri verilmiştir.

2.1. E^n de Yüzeyler

Tanım 2.1. M yüzeyi $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$ yaması ile verilsin. M yüzeyinin keyfi seçilmiş bir $p \in X(u, v)$ noktasındaki $T_p(M)$ teğet uzayı $\{X_u, X_v\}$ vektörleri tarafından gerilen bir vektör uzayıdır. Bu takdirde M yüzeyinin birinci temel formu;

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2.1)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle, \\ g_{12} &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle, \\ g_{22} &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

olup \langle, \rangle E^n uzayında Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = W^2 \quad (2.3)$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise $X(u, v)$ ile verilen yüzey yaması regülerdir. Ayrıca bir çok kaynakta birinci temel form katsayıları $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ ve $g_{22} = G$ olarak da ifade edilir.

$M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. E^n de Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $X, Y \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ ile verilmek üzere M yüzeyinin ikinci temel form dönüşümü

$$\begin{aligned}
h: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi^\perp(M) \\
h(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır ve aynı zamanda Gauss denklemi olarak da bilinir (Chen 1973). Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir.

$M \subset E^n$ yüzeyi $X(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. $\forall X \in \chi(M)$ ve $\forall N \in \chi^\perp(M)$ için M yüzeyinin şekil operatörü dönüşümü

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_N X = -\tilde{\nabla}_X N + \nabla_X^\perp N \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $A_N X$, N 'ye karşılık gelen şekil operatörü ve ∇^\perp ise $\chi^\perp(M)$ normal demete ait normal koneksiyondur. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle A_N X, Y \rangle = \langle h(X, Y), N \rangle \tag{2.6}$$

dir ve bu denklem Weingarten denklemi olarak bilinir (Chen 1973). Bu operatör selfadjoint ve 2-lineerdir.

Tanım 2.2. M yüzeyi $X: D \subset E^2 \rightarrow E^n$ yaması ile verilsin. $X(u, v)$ yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları N_1, N_2, \dots, N_{n-2} olmak üzere M nin ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\
c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \\
c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle
\end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

Teorem 2.3. $X: D \subset E^2 \rightarrow E^n$ regüler yaması ile verilen $M \subset E^n$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu;

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \tag{2.8}$$

ve ortalama eğrilik vektör alanı;

$$\vec{H} = \frac{1}{2W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) N_k \quad (2.9)$$

dir. Burada

$$H_k = \frac{1}{2W^2} (c_{11}^k G + c_{22}^k E - 2c_{12}^k F) \quad (2.10)$$

M nin k .inci ortalama eğrilik fonksiyonudur. Böylece M nin ortalama eğrilik fonksiyonu

$H = \|\vec{H}\|$ 'dir (Mello 2003, 2009).

2.2. Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Yüzeyler

Sonlu tipten altmanifoldların tanımı 1970'li yılların sonlarına doğru B. Y. Chen tarafından Öklid uzayında kapalı bir altmanifoldun toplam ortalama eğriliğinin en iyi yaklaşımını bulmak için ve altmanifoldda bir derece kavramı katmak için ortaya atılmıştır (Chen 1984).

Cebirsel geometride temel konu cebirsel değişmezlerdir. Dolayısıyla derece kavramı cebirsel geometride önemli rol oynamaktadır. Bununla birlikte Öklid uzayında altmanifoldlarda derece kavramı eksik kalmıştır. Buna dayanarak Chen tarafından bu altmanifoldlar için bir sınıflandırma ve tip kavramları ile ilgili çalışmalar sonlu tipten altmanifoldlar olarak elde edilmiştir. Cebirsel hiperyüzey ve sonlu tipli altmanifold kavramları birlikte ele alındığında, E^m de bütün sonlu tip hiperyüzeyleri ile sınıflandırma problemi karşımıza çıkmıştır. Bu problem çözümüyle ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Chen 1987, 1996, Garay 1988, Chen ve ark. 1990, Chen ve Dillen 1990, Dillen 1992). Sonlu tipten altmanifoldlar ailesi oldukça geniştir. Bunların içinde en önemli olan ve çokça bilinenler; Öklid uzayında minimal altmanifoldlar, hiperküreler üzerinde minimal altmanifoldlar ve tüm paralel altmanifoldlardır.

Tanım 2.4. $X : M^n \rightarrow N^{n+k} \subset E^m$ dönüşümü n-boyutlu Reimann manifoldu M den m-boyutlu Öklid uzayı E^m ye bir izometrik immersiyon olsun. M manifoldunun lokal koordinatları u_1, u_2, \dots, u_n olarak verildiğinde E^m den indirgenen metriği;

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle, 1 \leq i, j \leq n \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlansın. Böylece $g = \det(g_{ij})$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere M manifoldunun E^m den indirgenmiş metriğe göre Laplas operatörü;

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Bununla birlikte g_{ij} ve g^{ij} matrisleri, $g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ ve $g^{ij} = \frac{1}{\det g_{ij}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir.

Ayrıca g_{ij} ve g^{ij} matrisleri arasındaki ilişki, $\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$ ile verilir.

Bununla birlikte M , n-boyutlu Reimann manifoldu için $X : M \rightarrow E^m$ bir izometrik immersiyon olsun. M manifoldunun Laplas operatörü Δ ve M nin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} olmak üzere

$$\Delta x = -n\vec{H}$$

Beltrami formülü sağlanır (Beltrami 1864).

Tanım 2.5. M , E^m uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu ve $X : M^n \rightarrow N^{n+k} \subset E^m$ bir izometrik immersiyon olsun. M alt manifoldunun Öklid uzayındaki x pozisyon vektörü, $\Delta x_{i_j} = \lambda_{i_j} x_{i_j}$, $\lambda_{i_j} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{i_1} < \dots < \lambda_{i_k}$, x_{i_j} ($j = 1, \dots, k$) olmak üzere $x = x_0 + x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k}$ şeklinde ayrıştırılabilirse M alt manifolduna sonlu tipten alt

manifold denir (Chen 1996). Burada x_0 sabit bir vektör, $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ sabit olmayan vektör değerli Laplas özvektörleri ve $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ reel değerli sabitler de bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerdir. Eğer x_{i_k} özvektörlerine karşılık gelen $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ öz değerlerinin hepsi birbirinden farklı ise M alt manifolduna k -tipinden altmanifold denir. Eğer $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ öz değerlerinin biri sıfır ise M sıfırlı(null) k -tipinden altmanifold olarak adlandırılır.

Takahashi, E^m uzayının n -boyutlu bir altmanifoldunun 1-tipinde olması için gerek ve yeterli koşulun ya E^m uzayının minimal bir altmanifoldu ya da bazı hiperkürelerin minimal bir altmanifoldu olmasını gerektiğini ifade etmiştir (Takahashi 1966). Başka bir deyişle, $\Delta x = \lambda x$ denkleminin çözümleri, E^m uzayının ya minimal altmanifoldları ya da bazı hiperkürelerin minimal altmanifoldlarıdır. Takahashi'nin teoreminin genelleştirilmiş olarak, M alt manifoldunun koordinat fonksiyonları M nin Laplasyenin öz fonksiyonları olarak düşünülebilir. Yani M alt manifoldunun koordinat fonksiyonları x_i ($i = 1, \dots, m$) Δ 'nın öz fonksiyonlarıdır.

Başka bir ifadeyle, $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ koşulunu sağlayan manifoldlara sonlu tipten koordinatları olan altmanifoldlar denir (Garay 1990).

3. MATERYEL ve YÖNTEM

3.1. E^3 de Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Monge yamasıyla verilen yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak örnekler verilmiştir.

Tanım 3.1. E^3 Öklid uzayında

$$\begin{aligned} X : E^2 &\rightarrow E^3 \\ M : X(u, v) &= (u, v, f(u, v)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

parametrelendirilmesine Monge yaması adı verilir. M yüzeyi de Monge yamasıyla verilen bir yüzeydir. Burada $f(u, v)$ reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur (O'Neill 1997).

Teorem 3.2. M , (3.1) parametrelendirilmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{W^4} \quad (3.2)$$

dir. Bu arada $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$ dir (Gray 1997).

İspat. M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, f_u), \\ X_v &= (0, 1, f_v) \end{aligned} \quad (3.3)$$

vektör alanları ile gerilir.

Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}
g_{11} &= 1 + f_u^2, \\
g_{12} &= f_u f_v, \\
g_{22} &= 1 + f_v^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur.

Yüzey yamasının ikinci kısmi türevleri alınırsa;

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= (0, 0, f_{uu}), \\
X_{uv} &= (0, 0, f_{uv}), \\
X_{vv} &= (0, 0, f_{vv})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Ayrıca, M nin birim normal vektörü,

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} (-f_u, -f_v, 1) \tag{3.6}$$

dir. Buradan (2.7), (3.5) ve (3.6) eşitlikleri yardımıyla yüzeyin ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\
c_{12}^1 &= \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \\
c_{22}^1 &= \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, (3.4) ve (3.7) eşitliklerinin (2.8) de yerine yazılmasıyla (3.2) elde edilir.

Teorem 3.3. M , (3.1) parametrelendirmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. Bu takdirde M yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{f_{uu}(1+f_v^2) + f_{vv}(1+f_u^2) - 2f_u f_v f_{uv}}{2W^3} \quad (3.8)$$

dir (Gray 1997).

İspat. (2.9), (3.4) ve (3.7) deki eşitlikler yardımıyla (3.8) denklemini bulunur.

Böylece Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki önermeler verilebilir.

Sonuç 3.4. M , (3.1) parametrelendirmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. M yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul $f_{uu}f_{vv} = f_{uv}^2$ olmasıdır (O'Neill 1997).

Sonuç 3.5. M , (3.1) parametrelendirmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul $f_{uu}(1+f_v^2) + f_{vv}(1+f_u^2) = 2f_u f_v f_{uv}$ olmasıdır (O'Neill 1997).

3.2. E^3 de Öteleme Yüzeyleri

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Monge yamasıyla verilen yüzeylerin özel bir hali olan öteleme yüzeyleri tanıtılmış ve bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile ilgili bilinen sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.6. (3.1) parametrelendirilmesiyle verilen M yüzeyinde $f(u,v) = h(u) + g(v)$ şeklinde yüzey parametrelendirilmesi

$$M : X(u,v) = (u, v, h(u) + g(v)) \quad (3.9)$$

olup bu yüzeyler öteleme yüzeyleri olarak adlandırılır (Dillen ve ark. 1991).

Teorem 3.7. M , (3.9) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \frac{h''g''}{W^4} \quad (3.10)$$

ve

$$H = \frac{h''(1+(g')^2) + g''(1+(h')^2)}{2W^3} \quad (3.11)$$

dır (Liu 1999).

Teorem 3.8. M , (3.9) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin düz (flat) bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin düzlemin bir parçası ya da

$$X(u, v) = (0, v, b + g(v)) + u(1, 0, a)$$

ya da

$$X(u, v) = (u, 0, d + h(u)) + v(0, 1, c)$$

parametrelendirmelerine sahip silindirin bir parçası olmasıdır (Liu 1999).

Teorem 3.9. M , (3.9) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin düzlemin bir parçası ya da

$$f(u, v) = \frac{1}{a} \ln \left(\left| \frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right| \right)$$

olmak üzere bir Scherk yüzeyi olmasıdır (Dillen ve ark. 1998).

3.3. E^3 de Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında çarpanlara ayrılabilir yüzeylerle ilgili tanım ve bilinen bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 3.10. (3.1) parametrelendirmesiyle verilen M yüzeyinde $f(u, v) = h(u)g(v)$ şeklinde alınırsa yüzey parametrelendirmesi

$$M : X(u, v) = (u, v, h(u)g(v)) \quad (3.12)$$

olup bu yüzeyler çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır (Yu ve Liu 2007). Ayrıca bu yüzeyler bazı kaynaklarda homotetik yüzeyler olarak da adlandırılır (Nitsche 1989, Woestyne 1995, Jiu ve Sun 2007, Lopez ve Moruz 2015).

Teorem 3.11. M yüzeyi (3.12) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{hh''gg'' - (h'g')^2}{W^4} \quad (3.13)$$

ve

$$H = \frac{h''g(1+h^2(g')^2) + hg''(1+(h')^2g^2) - 2h(h')^2g(g')^2}{2W^3} \quad (3.14)$$

dir (Bekkar ve Senoussi 2012).

İspat. $f(u, v) = h(u)g(v)$ fonksiyonunun kısmi türevleri alınıp (3.2) ve (3.8) denklemlerinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.12. M yüzeyi (3.12) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. M yüzeyi düz (flat) ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- (1) $X(u, v) = (u, v, c_1g(v))$,
- (2) $X(u, v) = (u, v, c_1h(u))$,
- (3) $X(u, v) = (u, v, \exp(c_1u + c_2v + c_3))$,
- (4) $X(u, v) = (u, v, (c_1(u) + c_2)^{\frac{1}{1-k}} (c_3(u) + c_4)^{\frac{k}{k-1}})$.

Burada k reel sabit, c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) integral sabitleridir (Lopez ve Moruz 2015).

Teorem 3.13. M yüzeyi (3.12) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. M yüzeyi minimal ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- (1) $X(u, v) = (u, v, c_1u + c_2)$,
- (2) $X(u, v) = (u, v, c_1v + c_2)$,
- (3) $X(u, v) = (u, v, c_1u \tan(c_2v))$,
- (4) $X(u, v) = (u, v, c_1v \tan(c_2u))$,
- (5) $X(u, v) = (u, v, h(u)g(v))$ buradan $h(u)$ ve $g(v)$;

$$u = \int \frac{dh(u)}{\sqrt{2a \ln h(u) + c_1}},$$

$$v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2g^4(v) - \frac{b}{2}}}$$

ya da

$$u = \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1h^4(u) - \frac{a}{2}}},$$

$$v = \int \frac{dg(u)}{\sqrt{2b \ln g(v) + c_2}}$$

ya da

$$u = \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1h^{2(1+k)}(u) - c_2}},$$

$$v = \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3g^{2(1-k)}(v) - c_4}}$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca $a, b, k, c_1, c_2, c_3, c_4$ reel sabitler $a^2 + b^2 \neq 0$, $k \neq \pm 1$ dir (Yu ve Liu 2007).

Sonuç 3.14. M yüzeyi (3.12) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart bir düzlemin parçası ya da bir helikoid yüzeyi olmasıdır (Lopez ve Moruz 2015).

Buradaki helikoid yüzeyi standart anlamda bir helikoid yüzeyi olmayıp üreteç eğrisi bir helis olan regle yüzey olarak ele alınabilir. Yani, $f(u, v) = (u+b) \tan(cv+d)$ fonksiyonu için bir helikoid yüzeyidir. Burada $a, b, c \in R$ ve $c \neq 0$ dır (Nitsche 1989).

3.4. E^4 de Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler

Bu bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında, Monge yamasıyla verilen yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıp örnekler verilmiştir.

Tanım 3.15. 4-boyutlu Öklid uzayında

$$\begin{aligned} X : E^2 &\rightarrow E^4 \\ M : X(u, v) &= (u, v, h(u, v), g(u, v)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

parametrelendirilmesine sahip yüzeylere Monge yaması ile verilen yüzeyler denir (Aminov 1994).

Teorem 3.16. M yüzeyi (3.15) parametrelendirmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{C(h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2) - B(h_{uu}g_{vv} + g_{uu}h_{vv} - 2h_{uv}g_{uv}) + A(g_{uu}g_{vv} - g_{uv}^2)}{W^4} \quad (3.16)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} A &= 1 + (h_u)^2 + (h_v)^2 \\ B &= h_u g_u + h_v g_v \\ C &= 1 + (g_u)^2 + (g_v)^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak alındığında $EG - F^2 = AC - B^2$ dir (Aminov 1994).

İspat. Monge yamasıyla verilen M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, h_u, g_u), \\ X_v &= (0, 1, h_v, g_v), \end{aligned}$$

vektör alanları ile gerilir.

Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle = 1 + h_u^2 + g_u^2, \\
F &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle = h_u h_v + g_u g_v, \\
G &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle = 1 + h_v^2 + g_v^2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklindedir. M yüzeyi, $X(u, v)$ parametrelendirilmesi ile verilmek üzere ikinci kısmi türevleri alınırsa;

$$\begin{aligned}
X_{uu}(u, v) &= (0, 0, h_{uu}, g_{uu}), \\
X_{uv}(u, v) &= (0, 0, h_{uv}, g_{uv}), \\
X_{vv}(u, v) &= (0, 0, h_{vv}, g_{vv})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, M nin birim normal vektörleri,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}} (-h_u, -h_v, 1, 0) \\
N_2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}} (Bh_u - Ag_u, Bh_v - Ag_v, -B, A)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dir.

(3.19) ve (3.20) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \langle X_{uu}(u, v), N_1 \rangle = \frac{h_{uu}}{\sqrt{A}}, \\
c_{12}^1 &= \langle X_{uv}(u, v), N_1 \rangle = \frac{h_{uv}}{\sqrt{A}}, \\
c_{22}^1 &= \langle X_{vv}(u, v), N_1 \rangle = \frac{h_{vv}}{\sqrt{A}}, \\
c_{11}^2 &= \langle X_{uu}(u, v), N_2 \rangle = \frac{-Bh_{uu} + Ag_{uu}}{W\sqrt{A}}, \\
c_{12}^2 &= \langle X_{uv}(u, v), N_2 \rangle = \frac{-Bh_{uv} + Ag_{uv}}{W\sqrt{A}}, \\
c_{22}^2 &= \langle X_{vv}(u, v), N_2 \rangle = \frac{-Bh_{vv} + Ag_{vv}}{W\sqrt{A}} \text{ dir.}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Böylece (3.18) ve (3.21) eşitliklerini (2.8) de yerine yazarsak (3.16) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.17. M yüzeyi (3.15) parametrelendirmesine sahip Monge yamasıyla verilen yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2W^2\sqrt{A}}(g_{22}h_{uu} - 2g_{12}h_{uv} + g_{11}h_{vv})N_1 \\ &+ \frac{1}{2W^3\sqrt{A}}(g_{22}(-Bh_{uu} + Ag_{uu}) - 2g_{12}(-Bh_{uv} + Ag_{uv}) + g_{11}(-Bh_{vv} + g_{vv}))N_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

dir. Burada A , B ve C fonksiyonları reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olup (3.17) eşitliğinde verilmiştir (Bulca ve Arslan 2013).

İspat. (3.18) ve (3.21) eşitlikleri (2.9) da yerine yazılırsa (3.22) eşitliği elde edilir.

3.5. E^4 de Öteleme Yüzeyleri

Tanım 3.18. (3.15) parametrelendirilmesiyle verilen M yüzeyinde $h(u, v) = h_1(u) + g_1(v)$ ve $g(u, v) = h_2(u) + g_2(v)$ şeklinde alınırsa yüzey parametrelendirmesi

$$M : X(u, v) = (u, v, h_1(u) + g_1(v), h_2(u) + g_2(v)) \quad (3.23)$$

olup bu yüzeyler öteleme yüzeyleri olarak adlandırılır (Verstrealen ve ark.1994).

Teorem 3.19. M yüzeyi (3.23) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{h_1''g_1''C - (h_1''g_2'' + h_2''g_1'')B + h_2''g_2''A}{W^4} \quad (3.24)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} A(u, v) &= 1 + (h_1')^2 + (g_1')^2 \\ B(u, v) &= h_1'h_2' + g_1'g_2' \\ C(u, v) &= 1 + (h_2')^2 + (g_2')^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

türevlenebilir fonksiyonlardır (Arslan ve ark. 2016).

İspat. M yüzeyinin tanjant uzayı,

$$X_u = (1, 0, h'_1, h'_2)$$

$$X_v = (0, 1, g'_1, g'_2)$$

vektör alanları tarafından gerilmek üzere yüzeyin birinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= 1 + (h'_1)^2 + (h'_2)^2, \\ F &= h'_1 g'_1 + h'_2 g'_2, \\ G &= 1 + (g'_1)^2 + (g'_2)^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklindedir.

Ayrıca yüzey yamasının ikinci kısmı türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (0, 0, h''_1, h''_2), \\ X_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0, 0), \\ X_{vv}(u, v) &= (0, 0, g''_1, g''_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Bununla birlikte, M nin birim normal vektörleri,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}(-h'_1, -g'_1, 1, 0) \\ N_2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}}(Bh'_1 - Ah'_2, Bg'_1 - Ag'_2, -B, A) \end{aligned} \quad (3.28)$$

dir. Burada A ve B türevlenebilir fonksiyonlar olup (3.25) eşitliğinde verilmiştir.

(3.26) ve (3.27) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{h''_1}{\sqrt{A}}, c_{22}^1 = \frac{g''_1}{\sqrt{A}}, \\ c_{12}^1 &= c_{12}^2 = 0, \\ c_{11}^2 &= \frac{Ah''_2 - Bh''_1}{W\sqrt{A}}, c_{22}^2 = \frac{Ag''_2 - Bg''_1}{W\sqrt{A}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

olarak bulunur. Buradan (3.26) ve (3.29) eşitliklerini (2.8) de yerine yazarsak (3.24) eşitliği elde edilir (Arslan ve ark. 2016).

Teorem 3.20. M yüzeyi (3.23) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\vec{H} = \frac{h_1''G + g_1''E}{2\sqrt{AW^2}} N_1 + \frac{G(h_2''A - h_1''B) + E(g_2''A - g_1''B)}{2\sqrt{AW^3}} N_2 \quad (3.30)$$

dir. Burada A ve B fonksiyonları reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olup (3.25) eşitliğinde verilmiştir.

İspat. (3.26) ve (3.29) eşitliklerini (2.9) da yerine yazarsak (3.30) eşitliği elde edilir (Arslan ve ark. 2016).

Teorem 3.21. M yüzeyi (3.23) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin düzlemin bir parçası veya

$$X(u, v) = (0, v, b_1 + g_1(v), b_2 + g_2(v)) + u(1, 0, a_1, a_2)$$

ya da

$$X(u, v) = (u, 0, d_1 + h_1(u), d_2 + h_2(u)) + v(0, 1, c_1, c_2)$$

parametrelendirilmesi ile verilen hipersilindirin bir parçası olmasıdır. Burada $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ reel değerli sabitlerdir (Arslan ve ark. 2016).

Teorem 3.22. M yüzeyi (3.23) parametrelendirmesine sahip öteleme yüzeyi olsun. Bu takdirde M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin düzlemin bir parçası veya

$$h_k(u) = \frac{c_k}{c_1^2 + c_2^2} \left(\log |\cos(\sqrt{a}u)| + cu \right) + e_k u,$$

$$g_k(v) = \frac{c_k}{c_1^2 + c_2^2} \left(-\log |\cos(\sqrt{b}v)| + dv \right) + p_k v, \quad k = 1, 2$$

dir. Burada $a, b, c, d, c_k, e_k, p_k$ reel değerli sabitlerdir (Verstrealen ve ark. 1994).

3.6. E^4 de Çarpanlara Ayrılabilir Yüzeyler

Tanım 3.23. (3.15) parametrelendirilmesiyle verilen M yüzeyinde $h(u, v) = h_1(u)g_1(v)$ ve $g(u, v) = h_2(u)g_2(v)$ şeklinde alınırsa yüzey parametrelendirilmesi

$$M : X(u, v) = (u, v, h_1(u)g_1(v), h_2(u)g_2(v)) \quad (3.31)$$

olup bu yüzeyler çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır (Büyükkütük ve Öztürk 2018).

Teorem 3.24. M yüzeyi (3.31) parametrelendirilmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{(h_1''h_1g_1''g_1 - h_1'^2g_1'^2)C - (h_1''h_2g_1g_2'' + h_2''h_1g_2g_1'' - 2h_1'h_2g_1'g_2')B + (h_2''h_2g_2''g_2 - h_2'^2g_2'^2)A}{W^4} \quad (3.32)$$

dir.

Burada

$$\begin{aligned} A(u, v) &= 1 + (h_1'g_1)^2 + (h_1g_1')^2 \\ B(u, v) &= h_1'h_2'g_1g_2 + h_1h_2g_1'g_2' \\ C(u, v) &= 1 + (h_2'g_2)^2 + (h_2g_2')^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

türevlenebilir fonksiyonlardır.

İspat. M yüzeyinin tanjant uzayı,

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, h_1'g_1, h_2'g_2) \\ X_v &= (0, 1, h_1g_1', h_2g_2') \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından gerilmek üzere yüzeyin birinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
E &= 1 + (h'_1 g_1)^2 + (h'_2 g_2)^2 \\
F &= h'_1 h_1 g'_1 g_1 + h'_2 h_2 g'_2 g_2 \\
G &= 1 + (h_1 g'_1)^2 + (h_2 g'_2)^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklindedir.

Ayrıca yüzey yamasının ikinci kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
X_{uu}(u, v) &= (0, 0, h''_1 g_1, h''_2 g_2), \\
X_{uv}(u, v) &= (0, 0, h'_1 g'_1, h'_2 g'_2), \\
X_{vv}(u, v) &= (0, 0, h_1 g''_1, h_2 g''_2)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Bununla birlikte, M nin birim normal vektörleri,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}} (-h'_1 g_1, -h_1 g'_1, 1, 0) \\
N_2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}} (Bh'_1 g_1 - Ah'_2 g_2, Bh_1 g'_1 - Ah_2 g'_2, -B, A)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dir.

(3.35) ve (3.36) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= \frac{h''_1 g_1}{\sqrt{A}}, \quad c_{22}^1 = \frac{h_1 g''_1}{\sqrt{A}}, \\
c_{12}^1 &= \frac{h'_1 g'_1}{\sqrt{A}}, \quad c_{12}^2 = \frac{Ah'_2 g'_2 - Bh'_1 g'_1}{W\sqrt{A}}, \\
c_{11}^2 &= \frac{Ah''_2 g_2 - Bh''_1 g_1}{W\sqrt{A}}, \quad c_{22}^2 = \frac{Ah_2 g''_2 - Bh_1 g''_1}{W\sqrt{A}}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

olarak bulunur. Buradan (3.34) ve (3.37) eşitliklerini (2.8) de yerine yazarsak (3.32) eşitliği elde edilir (Büyükkütük ve Öztürk 2018).

Teorem 3.25. M yüzeyi (3.31) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir bir yüzey olsun. M yüzeyi düz bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- 1) $X(u, v) = (u, v, c_1 g_1(v), c_2 g_2(v)),$
- 2) $X(u, v) = (u, v, c_1 h_1(u), c_2 h_2(u)),$
- 3) $X(u, v) = (u, v, c_1 g_1(v), c_2 h_2(u)),$
- 4) $X(u, v) = (u, v, c_1, \exp(c_2 u + c_3 v + c_4)),$
- 5) $X(u, v) = (u, v, c_1, (c_2 u + c_3)^{\frac{1}{1-k_1}} (c_4 v + c_5)^{\frac{k_1}{k_1-1}}),$
- 6) $X(u, v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3), \exp(c_4 u + c_4 \frac{c_1}{c_2} v + c_5)),$
- 7) $X(u, v) = (u, v, \exp(c_1 u + c_2 v + c_3), \exp(c_4 u - c_4 \frac{c_2}{c_1} v + c_5)),$
- 8) $X(u, v) = (u, v, r(u) \cos v, r(u) \sin v) :$

$$u = \pm \int \sqrt{\frac{c_1 r(u) - 1}{r(u) + 1}} dr(u).$$

Burada $c_i, i = 1, \dots, 5$ ve $k_1 \neq 1$ reel sabitlerdir (Büyükkütük 2018).

Teorem 3.26. M yüzeyi (3.31) parametrelendirilmesine sahip çarpanlara ayrılabilir yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin ortalama eğriliği;

$$H = \frac{h_1'' g_1 G - h_1 g_1'' E - 2h_1' g_1' F}{2\sqrt{AW^2}} N_1 + \frac{A(h_2'' g_2 G + h_2 g_2'' E - 2h_2' g_2' F) - B(h_1'' g_1 G + h_1 g_1'' E - 2h_1' g_1' F)}{2\sqrt{AW^3}} N_2 \quad (3.38)$$

dir.

İspat. (3.34) ve (3.37) eşitliklerini (2.9) da yerine yazarsak (3.38) eşitliği elde edilir (Büyükkütük ve Öztürk 2018).

Teorem 3.27. M yüzeyi (3.31) parametrelendirmesine sahip çarpanlara ayrılabilir bir yüzey olsun. M yüzeyi minimal bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

1) $X(u, v) = (u, v, c_1u + c_2, c_3u + c_4),$

2) $X(u, v) = (u, v, c_1v + c_2, c_3v + c_4),$

3) $X(u, v) = (u, v, c_1u + c_2, c_1v + c_2),$

4) $X(u, v) = (u, v, c_1, c_2u \tan(c_3v)),$

5) $X(u, v) = (u, v, c_1, c_2v \tan(c_3u)),$

6) $X(u, v) = (u, v, r(u) \cos v, r(u) \sin v) :$

$$r(u) = \frac{1}{2c_1} \left(c_1^2 e^{\pm \frac{2(u+c_2)}{c_1}} + c_1^2 - 1 \right) e^{\pm \frac{(u+c_2)}{c_1}},$$

7) $X(u, v) = (u, v, c_1u \tan(c_2v), c_1u \tan(c_2v)),$

8) $X(u, v) = (u, v, c_1u \tan(c_2v), c_1v \tan(c_2u)),$

9) $X(u, v) = (u, v, c_1, h_2(u)g_2(v)),$

10) $X(u, v) = (u, v, h_i(u)g_i(v), h_i(u)g_i(v)),$

Burada $c_i, i = 1, \dots, 4$ reel sabitler olup $h_i(u), g_i(v)$ fonksiyonları

$$u = \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{2a \ln h_i(u) + c_1}},$$

$$u = \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{c_1 h_i^4(u) - \frac{a}{2}}},$$

$$u = \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{c_1 h_i^{2(1+k)}(u) - c_2}},$$

$$u = \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{2b \ln g_i(v) + c_2}},$$

$$u = \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_2 g_i^4(v) - \frac{b}{2}}},$$

$$u = \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_3 g_i^{2(1-k)}(v) - c_4}}$$

denklemlerini sağlar (Büyükkütük 2018).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde daha önceki bölümlerde ele aldığımız Monge yaması ile verilen yüzeylerden öteleme yüzeyleri ve çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin birlikte ele alınmasıyla elde edilmiş olan TF (translation-factorable) tipindeki yüzeyler üzerinde durulmuştur. 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanmış olan bu yüzeyler bu çalışmada bizim tarafımızdan 4-boyutlu Öklid uzayında da verilmiştir. İlk kısımda 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayında verilen bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanarak düz ve minimal olma şartları incelenmiştir. Bu tezin başlangıcında çalışmaya başladığımız 3-boyutlu Öklid uzayındaki TF tipindeki yüzeyler bağımsız olarak Bekkar ve Senoussi tarafından da 2019 yılı içinde çalışılmıştır (Bekkar ve Senoussi 2019). Bundan fazla olarak bu tez çalışmasında 4-boyutlu uzayda TF tipindeki yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili teoremler verilmiştir. İkinci kısımda ise 3-boyutlu Öklid uzayında şimdiye kadar tanımlanmış olan tüm Monge yamasıyla verilen yüzeylerin sonlu tipten koordinatlara sahip olması ile ilgili sonuçlar incelenmiş ve bunlarla ilgili sınıflandırma teoremleri verilmiştir.

4.1. Öklid Uzayında TF Tipindeki Yüzeyler

Bu bölümde Öklid uzaylarında TF (translation-factorable) tipindeki yüzeyler çalışılmıştır. İlk kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında verilen TF tipindeki yüzey tanımıyla birlikte bu yüzeylerin eğrilikleri hesaplanmış ve sınıflandırma teoremleri verilmiştir. İkinci kısımda ise bu yüzeyler 4-boyutlu Öklid uzayında tanıtılmış ve düz ve minimal olması ile ilgili sınıflandırma teoremleri verilmiştir.

4.1.1. 3-boyutlu Öklid uzayında TF tipindeki yüzeyler

Tanım 4.1. E^3 de (3.1) parametrelendirilmesiyle verilen M yüzeyinde $f(u, v)$ fonksiyonu $f(u, v) = h(u)g(v) + h(u) + g(v)$ şeklinde alınırsa yüzey parametrelendirilmesi

$$M : X(u, v) = (u, v, h(u)g(v) + h(u) + g(v)) \quad (4.1)$$

olup bu yüzey E^3 de öteleme ve çarpanlara ayrılabilir (TF- tipinde) yüzeyler olarak adlandırılır (Difi ve ark. 2018).

Açıklama: Ayrıca (4.1) parametrelendirmesi daha genel olarak

$$M : X(u, v) = (u, v, a(h(u) + g(v)) + bh(u)g(v))$$

şeklinde de ele alınmıştır (Senoussi ve Bekkar 2019). Burada a ve b reel sabitlerdir. Biz bu çalışmada $a = b = 1$ durumunu ele alarak bu yüzeylerle ilgili sınıflandırma teoremi vermiş bulunmaktayız.

Teorem 4.2. $M \subset E^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla;

$$K = \frac{h''g''(h+1)(g+1) - (h'g')^2}{W^4} \quad (4.2)$$

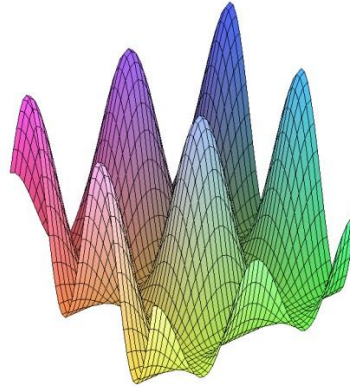
ve

$$H = \frac{g''(1 + (h')^2)(g+1)^2(h+1) + h''(1 + (g')^2)(h+1)^2(g+1) - 2(h')^2(g')^2(g+1)(h+1)}{2W^3} \quad (4.3)$$

dir.

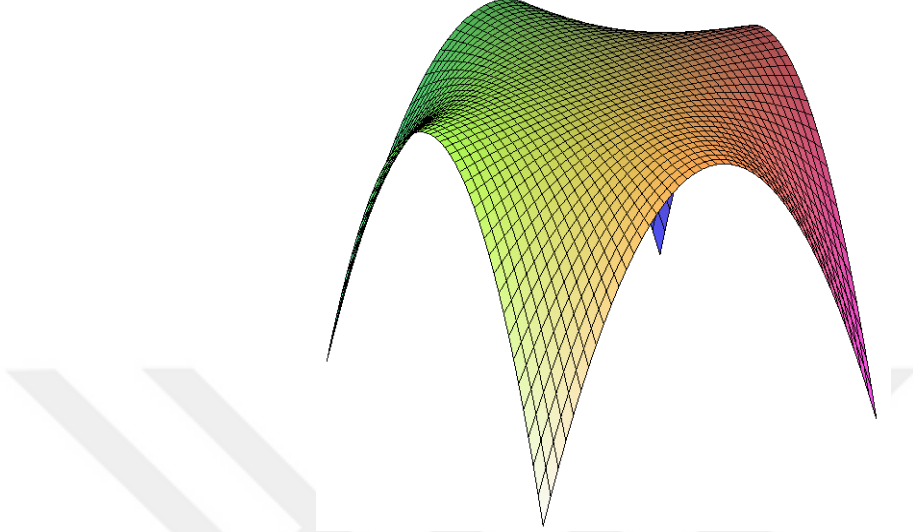
İspat. $f(u, v) = h(u)g(v) + h(u) + g(v)$ fonksiyonu olmak üzere bu fonksiyonun kısmi türevleri alınıp (3.2) ve (3.8) denklemlerinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 4.3. M yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere $h(u) = \cos u$ ve $g(v) = \sin v$ fonksiyonları için TF yüzeyinin grafiği Şekil 4.1 de verilmiş olup bir yumurta kutusuna benzemektedir.



Şekil 4.1. $h(u) = \cos u$ ve $g(v) = \sin v$ için TF yüzeyi

Ayrıca $h(u) = u^2$ ve $g(v) = v^2$ olarak verilen kuadratik polinomlar için TF yüzeyinin grafiği Şekil 4.2 de verilip bir masa modellemesi olarak kullanılabilir.



Şekil 4.2. $h(u) = u^2$ ve $g(v) = v^2$ için TF yüzeyi

Sonuç 4.4. $M \subset E^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$h''g''(h+1)(g+1) = (h'g')^2 \quad (4.4)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.5. $M \subset E^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$g''(1+(h')^2(g+1)^2)(h+1) + h''(1+(g')^2(h+1)^2)(g+1) = 2(h')^2(g')^2(g+1)(h+1) \quad (4.5)$$

olmasıdır.

Teorem 4.6. $M \subset E^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi düz bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- 1) $X(u, v) = (u, v, c_1 g(v) + c_1 + g(v)),$
- 2) $X(u, v) = (u, v, c_2 h(u) + c_2 + h(u)),$
- 3) $X(u, v) = (u, v, c_1 c_3 e^{c_2 u + c_4 v} - 1),$
- 4) $X(u, v) = (u, v, \frac{k-1}{k} \left(-\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} (c_1 u + c_2)^{\frac{1}{1-k}} (c_3 v + c_4)^{\frac{k}{k-1}} + 1), k \neq 0, 1.$

İspat. M yüzeyi E^3 Öklid uzayında (4.1) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi düz bir yüzey olmak üzere (4.4) denklemini sağlar. Buradan,

i. Eğer (4.4) eşitliğinde $h'(u) = 0$ veya $g'(v) = 0$ alınırsa $K = 0$ olur. Böylece (4.1) eşitliğinden sırasıyla (1) ve (2) yüzeyleri elde edilir.

ii. Eğer $h'(u)g'(v) \neq 0$ alınırsa (4.4) eşitliğini u ve v parametrelerine bağlı fonksiyonlara ayırarak;

$$\frac{h''(h+1)}{(h')^2} = \frac{(g')^2}{g''(g+1)} = k, \quad (4.6)$$

bulunur. k reel bir sabittir.

a) Eğer $k = 1$ ise (4.6) eşitliğinden $h''(h+1) = (h')^2$ ve $g''(g+1) = (g')^2$ diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden $h(u) = c_1 e^{c_2 u} - 1$ ve $g(v) = c_3 e^{c_4 v} - 1$ olarak bulunur. Böylece (3) tipindeki yüzeyler elde edilir.

b) $k \neq 1$ olması durumunda ise (4.6) eşitliğinden $h''(h+1) = k(h')^2$ ve $kg''(g+1) = (g')^2$ diferansiyel denklemleri bulunup bu denklemlerin çözümünden

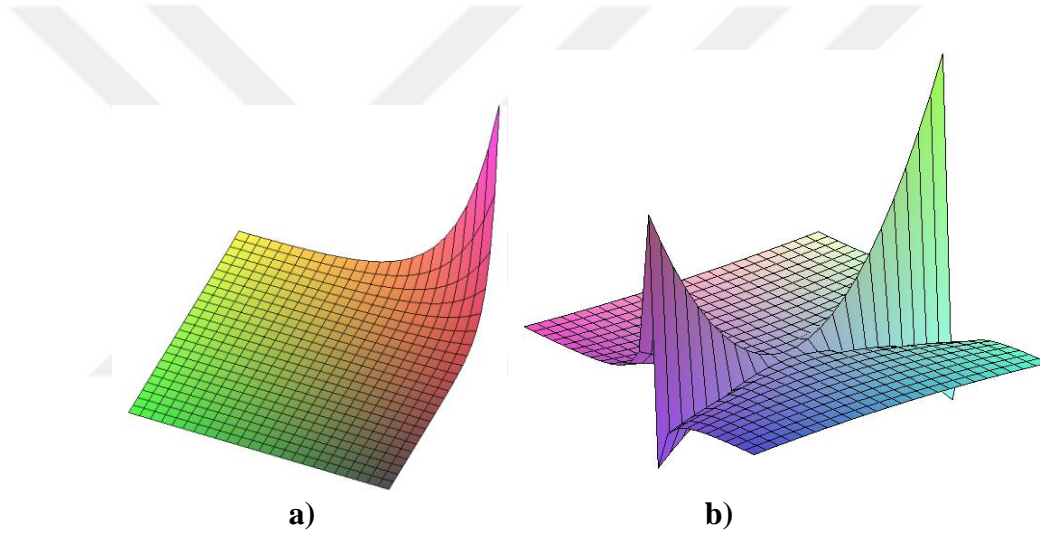
$$h(u) = \left(\frac{1}{(1-k)(c_1u + c_2)} \right)^{\frac{1}{k-1}} - 1 \quad \text{ve} \quad g(v) = \left(\frac{k}{(k-1)(c_3v + c_4)} \right)^{\frac{k}{1-k}} - 1 \quad \text{fonksiyonları}$$

bulunur. Buradan (4) tipindeki TF-yüzeyleri elde edilir (EK 1).

Örnek 4.7. M yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere;

$$X(u, v) = (u, v, 2e^{2u-v} - 1) \quad \text{ve} \quad X(u, v) = (u, v, -\frac{(v+1)^2}{4(u+1)} + 1)$$

parametrelendirmeleri ile verilen TF yüzeyleri düz yüzey örnekleridir (Şekil 4.3 a,b)



Şekil 4.3 Düz TF yüzeyleri

Teorem 4.8. $M \subset E^3$ yüzeyi (4.1) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi minimal bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

1) $X(u, v) = (u, v, av + b),$

2) $X(u, v) = \left(u, v, (c_1u + c_2 + 1) \frac{\tan(c_1c_2v + c_1c_3) - 1}{c_1} \right),$

3) $X(u, v) = \left(u, v, (c_1v + c_2 + 1) \frac{\tan(c_1c_2u + c_1c_3) - 1}{c_1} \right),$

4) $X(u, v) = (u, v, h(u)g(v) + h(u) + g(v))$ olup burada $h(u)$ ve $g(v)$;

$$u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{2a \ln(h(u)+1) - 2c_1 a}}, \quad v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2 (g(v)+1)^4 - \frac{b}{2}}}$$

ya da

$$u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1 (h(u)+1)^4 - \frac{a}{2}}}, \quad v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{2b \ln(g(v)+1) - 2c_2 b}}$$

ya da

$$u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1 (h(u)+1)^{2(k+1)} - c_2}} \quad \text{ve} \quad v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3 (g(v)+1)^{2(1-k)} + c_4}}$$

eşitliklerini sağlar. Ayrıca $a, b, k, c_1, c_2, c_3, c_4$ reel sabitler, $a^2 + b^2 \neq 0$, $k \neq \pm 1$ dir.

İspat. M yüzeyi E^3 Öklid uzayında (4.1) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi minimal bir yüzey olmak üzere (4.5) denklemini sağlar. Buradan,

i. Eğer (4.5) eşitliğinde $h' = 0$ alınırsa yüzeyin minimal olması için $g''(h+1) = 0$ olmalıdır. Burada özel olarak ise $h = -1$ olursa minimal olma şartı sağlanır. Ayrıca $h = c \neq -1$ ve $g'' = 0$ ise yüzey minimal bir yüzey olup $g = c_1 v + c_2$ şeklinde elde edilir. Böyle (1) eşitliği ile verilen TF-tipindeki yüzey bir düzlemdir.

Yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter şart (4.5) denkleminin sağlanması olup bu denklem tekrar düzenlendiğinde

$$(h')^2 (g''(h+1)(g+1)^2 - (g')^2 (h+1)(g+1)) + (g')^2 (h''(h+1)^2 (g+1) - (h')^2 (h+1)(g+1)) + h''(g+1) + g''(h+1) = 0 \quad (4.7)$$

bulunur. Bu eşitlik $(h+1)(g+1)$ ile bölünürse,

$$(h')^2 (g''(g+1) - (g')^2) + (g')^2 (h''(h+1) - (h')^2) + \frac{h''}{h+1} + \frac{g''}{g+1} = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde düzenlenmiş olur.

ii. Eğer $h''(u) = 0$ ise, $h(u) = c_1u + c_2$ olup (4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa $g'' + c_1^2 g''(g+1)^2 - 2c_1^2 g'^2(g+1) = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $g(v) = \frac{-c_1 + \tan(c_1c_2v + c_1c_3)}{c_1}$ bulunur. Böylece aldığımızda (2) parametrelendirilmesi ile verilen TF-tipindeki yüzey elde edilir.

Benzer şekilde $g''(v) = 0$ ise, $h(u) = \frac{-c_1 + \tan(c_1c_2u + c_1c_3)}{c_1}$ bulunur. Buradan da (3) tipindeki TF yüzeyi elde edilir (EK 2).

iii. Eğer $h''(u)g''(v) \neq 0$ alınır (4.8) denkleminde ilk olarak u ya göre türevi alındığında

$$\left(\frac{h''}{(h+1)} \right)' + (h'^2)'(g''(g+1) - g'^2) + (g'^2)(h''(h+1) - h'^2)' = 0 \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) eşitliğinin v ye göre türevi alınır

$$(h'^2)'(g''(g+1) - g'^2)' + (g'^2)'(h''(h+1) - h'^2)' = 0 \quad (4.10)$$

bulunur. (4.10) denklemi de u ve v ye göre tekrar düzenlenirse

$$\frac{(h''(h+1) - h'^2)'}{(h'^2)'} = - \frac{(g''(g+1) - g'^2)'}{(g'^2)'} = k \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada k reel bir sabittir. (4.11) eşitliğinin sırasıyla integrali alınarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} h''(h+1) - (k+1)h'^2 &= a, \\ g''(g+1) - (1-k)g'^2 &= b \end{aligned} \quad (4.12)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada, a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

a) Eğer (4.12) eşitliğinde $k = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} h''(h+1) &= a, \\ g''(g+1) - 2g'^2 &= b \end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin Maple ile çözümünden

$$u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{2a \ln(h(u)+1) - 2c_1 a}} \text{ ve } v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_2(g(v)+1)^4 - \frac{b}{2}}} \text{ elde edilir.}$$

b) Benzer şekilde eğer (4.12) eşitliğinde $k = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} h''(h+1) - 2h'^2 &= a, \\ g''(g+1) &= b \end{aligned}$$

diferansiyel denklemleri bulunup bunların çözümünden de $u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1(h(u)+1)^4 - \frac{a}{2}}}$ ve

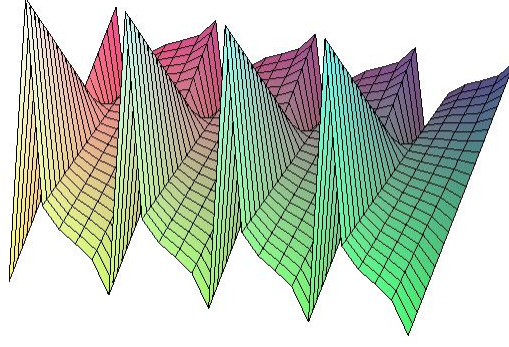
$$v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{2b \ln(g(v)+1) - 2c_2 b}} \text{ bulunur.}$$

c) Ayrıca $k \neq \pm 1$ olmak üzere diferansiyel denklemlerin çözümüne bakılırsa

$$u = \pm \int \frac{dh(u)}{\sqrt{c_1(h(u)+1)^{2(k+1)} - c_2}} \text{ ve } v = \pm \int \frac{dg(v)}{\sqrt{c_3(g(v)+1)^{2(1-k)} + c_4}} \text{ bulunur (EK 3).}$$

Böylece (4) eşitliği ile verilen TF tipindeki minimal yüzeylerin sınıflandırılması verilmiş olur.

Örnek 4.9. M yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere $X(u, v) = (u, v, (v+1) \tan(2u+2) - 1)$ parametrelendirmesi ile verilen TF yüzeyi minimal yüzeydir (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Minimal TF yüzeyi

4.1.2. 4-boyutlu Öklid uzayında TF tipindeki yüzeyler

Tanım 4.10. E^4 de (3.15) parametrelendirilmesiyle verilen M yüzeyinde $h(u, v)$ ve $g(u, v)$ fonksiyonları $h(u, v) = a(h_1(u) + g_1(v)) + bh_1(u)g_1(v)$ ve $g(u, v) = c(h_2(u) + g_2(v)) + dh_2(u)g_2(v)$ şeklinde alınırsa yüzey parametrelendirilmesi

$$M : X(u, v) = (u, v, a(h_1(u) + g_1(v)) + bh_1(u)g_1(v), c(h_2(u) + g_2(v)) + dh_2(u)g_2(v)) \quad (4.13)$$

şeklinde olup E^4 de öteleme ve çarpanlara ayrılabilir (TF-tipindeki) yüzeyler olarak adlandırılır. Burada a, b, c ve d sıfırdan farklı gerçel sayılardır.

Açıklama: Eğer (4.13) parametrelendirmesinde;

$a, c \neq 0$ ve $b, d = 0$ ise yüzey öteleme yüzeyi,

$a, c = 0$ ve $b, d \neq 0$ ise yüzey çarpanlara ayrılabilir yüzeydir.

Bu bölümde (4.13) parametrelendirmesi ile verilen 4-boyutlu Öklid uzayında TF-tipindeki yüzeyler $a, b, c, d = 1$ olmak üzere

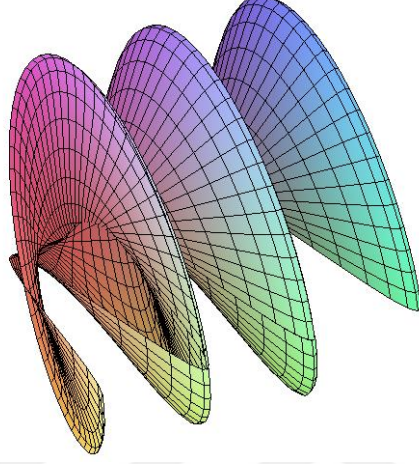
$$X(u, v) = (u, v, h_1(u) + g_1(v) + h_1(u)g_1(v), h_2(u) + g_2(v) + h_2(u)g_2(v)) \quad (4.14)$$

parametrelendirmesi ile ele alınmıştır.

Örnek 4.11. M yüzeyi (4.14) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere

$$X(u, v) = (u, v, \cos u + \cos v + \cos u \cos v, \cos u + \sin v + \cos u \sin v)$$

parametrelendirmesine sahip TF yüzeyinin E^3 deki izdüşümünün grafiği Şekil 4.5 de verilmiştir.

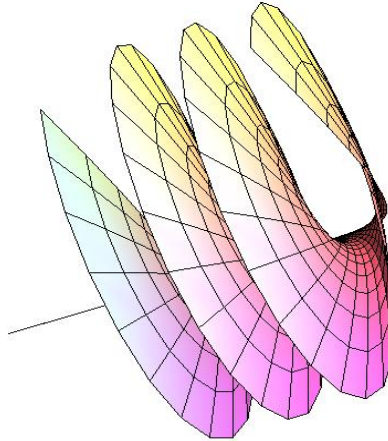


Şekil 4.5. $h_1(u) = h_2(u) = \cos u$ ve $g_1(v) = \cos v, g_2(v) = \sin v$ için TF yüzeyi

Ayrıca

$$X(u, v) = (u, v, e^u + \cos v + e^u \cos v, e^u + \sin v + e^u \sin v)$$

parametrelendirmesi ile verilen yüzey de E^4 de bir TF yüzeyi örneği olup E^3 deki izdüşümünün grafiği Şekil 4.6 da verilmiştir.



Şekil 4.6. $h_1(u) = h_2(u) = e^u$ ve $g_1(v) = \cos v, g_2(v) = \sin v$ için TF yüzeyi

Teorem 4.12. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin Gauss eğriliği;

$$K = \frac{1}{W^4} \left\{ C \left[h_1'' g_1'' (h_1 + 1)(g_1 + 1) - (h_1' g_1')^2 \right] + A \left[h_2'' g_2'' (h_2 + 1)(g_2 + 1) - (h_2' g_2')^2 \right] \right. \\ \left. - B \left[h_2'' g_1'' (h_1 + 1)(g_2 + 1) + h_1'' g_2'' (h_2 + 1)(g_1 + 1) - 2h_1' g_1' h_2' g_2' \right] \right\} \quad (4.15)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} A(u, v) &= 1 + (h_1' g_1 + h_1')^2 + (h_1 g_1' + g_1')^2 \\ B(u, v) &= (h_1' g_1 + h_1')(h_2' g_2 + h_2') + (h_1 g_1' + g_1')(h_2 g_2' + g_2') \\ C(u, v) &= 1 + (h_2' g_2 + h_2')^2 + (h_2 g_2' + g_2')^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

olup türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca burada birinci temel form katsayıları $g_{11} = E$, $g_{12} = F$ ve $g_{22} = G$ olarak ele alınmıştır.

İspat. M yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, h_1' g_1 + h_1', h_2' g_2 + h_2'), \\ X_v &= (0, 1, h_1 g_1' + g_1', h_2 g_2' + g_2'), \end{aligned} \quad (4.17)$$

vektör alanları ile gerilir.

Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= 1 + (h_1')^2 (g_1 + 1)^2 + (h_2')^2 (g_2 + 1)^2 \\ F &= h_1' g_1' (g_1 + 1)(h_1 + 1) + h_2' g_2' (h_2 + 1)(g_2 + 1) \\ G &= 1 + (g_1')^2 (h_1 + 1)^2 + (g_2')^2 (h_2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur. Yüzey yamasının ikinci kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, 0, h_1'' g_1 + h_1'', h_2'' g_2 + h_2'') \\ X_{uv} &= (0, 0, h_1' g_1', h_2' g_2') \\ X_{vv} &= (0, 0, h_1 g_1'' + g_1'', h_2 g_2'' + g_2'') \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Ayrıca, M nin birim normal vektörleri,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{A}}(-h'_1 g_1 - h'_1, -h_1 g'_1 - g'_1, 1, 0) \\ N_2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}}(B(h'_1 g_1 + h'_1) - A(h'_2 g_2 + h'_2), B(h_1 g'_1 + g'_1) - A(h_2 g'_2 + g'_2), -B, A) \end{aligned} \quad (4.20)$$

olup A ve B türevlenebilir fonksiyonları (4.16) da verilmiştir.

(4.19) ve (4.20) eşitlikleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= \frac{h''_1 g_1 + h''_1}{\sqrt{A}}, c_{12}^1 = \frac{h'_1 g'_1}{\sqrt{A}}, c_{22}^1 = \frac{h_1 g''_1 + g''_1}{\sqrt{A}} \\ c_{11}^2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}}(A(h''_2 g_2 + h''_2) - B(h''_1 g_1 + h''_1)) \\ c_{12}^2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}}(Ah'_2 g'_2 - Bh'_1 g'_1) \\ c_{22}^2 &= \frac{1}{W\sqrt{A}}(A(h_2 g''_2 + g''_2) - B(h_1 g''_1 + g''_1)) \end{aligned} \quad (4.21)$$

dir. Böylece (4.18) ve (4.21) eşitliklerini (2.8) de yerine yazarsak (4.15) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.13. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} C[h''_1 g''_1 (h_1 + 1)(g_1 + 1) - (h'_1 g'_1)^2] + A[h''_2 g''_2 (h_2 + 1)(g_2 + 1) - (h'_2 g'_2)^2] \\ - B[h''_2 g''_1 (h_1 + 1)(g_2 + 1) + h''_1 g''_2 (h_2 + 1)(g_1 + 1) - 2h'_1 g'_1 h'_2 g'_2] = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

olmasıdır.

Teorem 4.14. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi düz bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- | | |
|---|--|
| 1) $h(u, v) = c_1 + g_1(v) + c_1 g_1(v),$ | $g(u, v) = c_2 + g_2(v) + c_2 g_2(v)$ |
| 2) $h(u, v) = c_1 + h_1(u) + c_1 h_1(u),$ | $g(u, v) = c_2 + h_2(u) + c_2 h_2(u)$ |
| 3) $h(u, v) = c_1 + g_1(v) + c_1 g_1(v),$ | $g(u, v) = c_2 + h_2(u) + c_2 h_2(u)$ |
| 4) $h(u, v) = c_1 + h_1(u) + c_1 h_1(u),$ | $g(u, v) = c_2 + g_2(v) + c_2 g_2(v)$ |
| 5) $h(u, v) = c_1,$ | $g(u, v) = c_2 + g_2(v) + c_2 g_2(v)$ |
| 6) $h(u, v) = c_1,$ | $g(u, v) = c_2 + h_2(u) + c_2 h_2(u)$ |
| 7) $h(u, v) = c,$ | $g(u, v) = de^{c_4 u} e^{c_2 v} - 1$ |
| 8) $h(u, v) = c,$ | $g(u, v) = h_2(u) + g_2(v) + h_2(u)g_2(v)$ |

$$h_2(u) = ((1-k)(c_3 u + c_4))^{\frac{1}{1-k}} - 1,$$

$$g_2(v) = \left(\frac{(k-1)(c_5 v + c_6)}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1$$

- | | |
|---|---------------|
| 9) $h(u, v) = c_1 + h_1(u) + c_1 h_1(u),$ | $g(u, v) = d$ |
| 10) $h(u, v) = c_1 + g_1(v) + c_1 g_1(v),$ | $g(u, v) = d$ |
| 11) $h(u, v) = ce^{c_4 u} e^{c_2 v} - 1,$ | $g(u, v) = d$ |
| 12) $h(u, v) = h_1(u)g_1(v) + h_1(u) + g_1(v),$ | $g(u, v) = d$ |

$$h_1(u) = ((1-k)(c_3 u + c_4))^{\frac{1}{1-k}} - 1,$$

$$g_1(v) = \left(\frac{(k-1)(c_5 v + c_6)}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1$$

- | | | |
|--|---|----------------------|
| 13) $h(u, v) = c_1 c_5 e^{c_2 u} e^{c_6 v} - 1,$ | $g(u, v) = c_3 c_7 e^{c_4 u} e^{c_8 v} - 1$ | $c_4 c_6 = c_2 c_8$ |
| 14) $h(u, v) = c_1 c_5 e^{c_2 u} e^{c_6 v} - 1,$ | $g(u, v) = c_3 c_7 e^{c_4 u} e^{c_8 v} - 1$ | $c_2 c_4 = -c_6 c_8$ |

İspat. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi düz bir yüzey olmak üzere (4.22) denklemini sağlar. Buradan,

i. Eğer (4.22) eşitliğinde $h_1'(u) = h_2'(u) = 0$ veya $g_1'(v) = g_2'(v) = 0$ veya $h_1'(u) = g_2'(v) = 0$ veya $h_2'(u) = g_1'(v) = 0$ alınırsa $K = 0$ olur. Böylece (4.14) eşitliğinden sırasıyla (1), (2), (3) ve (4) yüzeyleri elde edilir.

ii. Eğer $h_1'(u) = 0, g_1'(v) = 0$ alınırsa (4.22) eşitliğinden;

$$h_2''g_2''(g_2 + 1)(h_2 + 1) - (h_2'g_2')^2 = 0 \quad (4.23)$$

bulunur. Buradan sırasıyla $h_2' = 0$ veya $g_2' = 0$ alınırsa (5) ve (6) tipindeki yüzeyler elde edilir.

Ayrıca eğer $h_2'(u)g_2'(v) \neq 0$ alınırsa (4.23) eşitliğinden u ve v parametrelerine bağlı fonksiyonları ayırarak;

$$\frac{h_2''(h_2 + 1)}{(h_2')^2} = \frac{(g_2')^2}{g_2''(g_2 + 1)} = k, \quad (4.24)$$

elde edilir. Burada k reel bir sabittir.

a) Eğer $k = 1$ ise (4.24) eşitliğinden $h_2''(h_2 + 1) = (h_2')^2$ ve $(g_2')^2 = g_2''(g_2 + 1)$ diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümünden $h_2(u) = c_3 e^{c_4 u} - 1$ ve $g_2(v) = c_5 e^{c_6 v} - 1$ olarak bulunur. Böylece (7) TF-tipindeki yüzey parametrizasyonu elde edilir.

b) Eğer $k \neq 1$ ise (4.24) eşitliğinden $h_2''(h_2 + 1) = k(h_2')^2$ ve $(g_2')^2 = k g_2''(g_2 + 1)$ diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünden

$$h_2(u) = ((1-k)(c_3 u + c_4))^{\frac{1}{1-k}} - 1 \quad \text{ve} \quad g_2(v) = \left(\frac{(k-1)(c_5 v + c_6)}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} - 1 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Böylece (8) TF-tipindeki yüzey parametrizasyonu elde edilir (EK 4).

iii. Benzer durum $h'_2(u) = 0, g'_2(v) = 0$ alınırsa da sağlanmış olacaktır. Bu durumda da (4.22) eşitliğinden;

$$h_1''g_1''(g_1 + 1)(h_1 + 1) - (h_1'g_1')^2 = 0 \quad (4.25)$$

elde edilip bir önceki kısımda verilen sonuçlar aynı şekilde $h_1(u)$ ve $g_1(v)$ fonksiyonları için sağlanmış olur. Böylece (9)-(12) tipindeki yüzeyler de elde edilmiş olur.

iv. Eşitlik (4.22) de

$$\begin{aligned} h_1''g_1''(g_1 + 1)(h_1 + 1) - (h_1'g_1')^2 &= 0, \\ h_2''g_2''(g_2 + 1)(h_2 + 1) - (h_2'g_2')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

ile birlikte

$$h_2''g_1''(g_2 + 1)(h_1 + 1) + h_1''g_2''(g_1 + 1)(h_2 + 1) - 2h_1'g_1'h_2'g_2' = 0 \quad (4.27)$$

ya da

$$B = h_1'h_2'(g_1 + 1)(g_2 + 1) + g_1'g_2'(h_1 + 1)(h_2 + 1) = 0 \quad (4.28)$$

olsun. Böylece eşitlik (4.26) eşitlik (4.23) ve (4.25) ile eşdeğerdir.

Buradan, (4.26) daki eşitlikler u ve v ye bağlı düzenlenirse

$$\frac{h_i''(h_i + 1)}{(h_i')^2} = \frac{(g_i')^2}{g_i''(g_i + 1)} = m \quad i = 1, 2 \quad (4.29)$$

elde edilir. Burada m bir reel sabit sayıdır. O halde (4.29) diferansiyel denklemlerinin çözümünden;

$$\begin{aligned} h_1(u) &= c_1 e^{c_2 u} - 1, & h_2(u) &= c_3 e^{c_4 u} - 1, \\ g_1(v) &= c_5 e^{c_6 v} - 1, & g_2(v) &= c_7 e^{c_8 v} - 1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

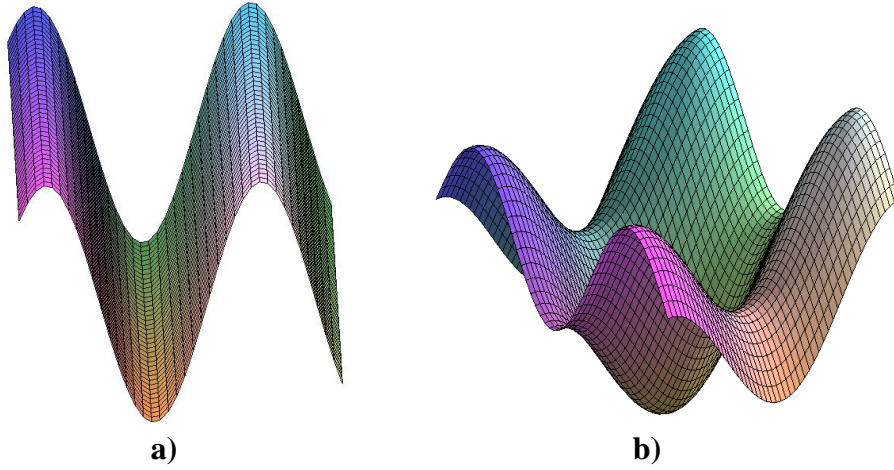
fonksiyonları elde edilir.

Eğer (4.29) diferansiyel denklem çözümünden bulunan (4.30) daki fonksiyonları (4.27) ve (4.28) eşitliklerinde yerine yazıp birlikte çözersek sırasıyla $c_4 c_6 = c_2 c_8$ ve $c_2 c_4 = -c_6 c_8$ elde edilir. Böylece (13) ve (14) deki TF-tipinde yüzeyler elde edilir.

Örnek 4.15. M yüzeyi (4.14) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere;

$$X(u, v) = (u, v, 1 + 2 \cos v, 1 + 2 \sin v) \quad \text{ve} \quad X(u, v) = (u, v, 1 + 2 \cos v, 1 + 2 \sin u)$$

parametrelendirmeleri ile verilen TF yüzeyleri E^4 de düz yüzey örnekleri olup E^3 deki izdüşümleri sırasıyla Şekil 4.7 de verilmiştir.



Şekil 4.7. E^4 de düz TF yüzeylerinin E^3 deki izdüşümleri

Teorem 4.16. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. Bu takdirde, M yüzeyinin ortalama eğrilik vektörü;

$$\begin{aligned} \vec{H} = & \frac{1}{2\sqrt{AW^2}} [Eg_1''(h_1 + 1) + Gh_1''(g_1 + 1) - 2Fh_1'g_1']N_1 \\ & + \frac{1}{2\sqrt{AW^3}} \{A[Eg_2''(h_2 + 1) + Gh_2''(g_2 + 1) - 2Fh_2'g_2'] - B[Eg_1''(h_1 + 1) + Gh_1''(g_1 + 1) - 2Fh_1'g_1']N_2 \} \end{aligned} \quad (4.31)$$

dir.

İspat. (4.18) ve (4.21) eşitliklerini (2.9) da yerine yazarsak (4.31) eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.17. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipinde bir yüzey olsun. M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & 2B(Eg_1''(h_1 + 1) - Gh_1''(g_1 + 1) - 2Fh_1'g_1')(Eg_2''(h_2 + 1) - Gh_2''(g_2 + 1) - 2Fh_2'g_2') \\ & - C(Eg_1''(h_1 + 1) - Gh_1''(g_1 + 1) - 2Fh_1'g_1')^2 \\ & - A(Eg_2''(h_2 + 1) - Gh_2''(g_2 + 1) - 2Fh_2'g_2')^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.18. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipinde bir yüzey olsun. M yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$Eg_i''(h_i + 1) - Gh_i''(g_i + 1) - 2Fh_i'g_i' = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.33)$$

olmasıdır.

Teorem 4.19. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipindeki yüzey olsun. M yüzeyi minimal bir yüzey ise aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- | | |
|----------------------------|------------------------|
| 1) $h(u, v) = c_1v + c_2,$ | $g(u, v) = c_3v + c_4$ |
| 2) $h(u, v) = c_1u + c_2,$ | $g(u, v) = c_3u + c_4$ |
| 3) $h(u, v) = c_1u + c_2,$ | $g(u, v) = c_3v + c_4$ |

- 4) $h(u, v) = c_1 v + c_2$, $g(u, v) = c_3 u + c_4$
5) $h(u, v) = c$, $g(u, v) = (u + d) \tan(av + b) - 1$
6) $h(u, v) = c$, $g(u, v) = (v + d) \tan(au + b) - 1$
7) $h(u, v) = g(u, v) = (au + b) \tan(cv + d) - 1$,
8) $h(u, v) = g(u, v) = (av + b) \tan(cu + d) - 1$,
9) $h(u, v) = h_1(u)g_1(v) + h_1(u) + g_1(v)$, $g(u, v) = h_2(u)g_2(v) + h_2(u) + g_2(v)$

$i = 1, 2$ olmak üzere h_i ve g_i fonksiyonları;

$$u = \pm \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{2a \ln(h_i(u) + 1) - 2c_1 a}}, \quad v = \pm \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_2 (g_i(v) + 1)^4 - \frac{b}{2}}} \quad (4.34)$$

veya

$$u = \pm \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{c_1 (h_i(u) + 1)^4 - \frac{a}{2}}}, \quad v = \pm \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{2b \ln(g_i(v) + 1) - 2c_2 b}} \quad (4.35)$$

veya

$$u = \pm \int \frac{dh_i(u)}{\sqrt{c_1 (h_i(u) + 1)^{2(1+k)} - c_2}}, \quad v = \pm \int \frac{dg_i(v)}{\sqrt{c_3 (g_i(v) + 1)^{2(1-k)} + c_4}} \quad (4.36)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat. M yüzeyi E^4 Öklid uzayında (4.14) parametrelendirilmesine sahip TF-tipinde bir yüzey olsun. M yüzeyi minimal ise $H = 0$ dır. Eşitlik (4.33) de (4.18) eşitliği yani birinci temel form katsayıları yerine yazılarak;

$$\begin{aligned} 0 &= g_1''(h_1 + 1) \left(1 + (h_1')^2 (g_1 + 1)^2 + (h_2')^2 (g_2 + 1)^2 \right) \\ &+ h_1''(g_1 + 1) \left(1 + (g_1')^2 (h_1 + 1)^2 + (g_2')^2 (h_2 + 1)^2 \right) \\ &- 2h_1'g_1'(h_1'g_1'(h_1 + 1)(g_1 + 1) + h_2'g_2'(h_2 + 1)(g_2 + 1)) \end{aligned} \quad (4.37)$$

ve

$$\begin{aligned}
0 &= g_2''(h_2 + 1)(1 + (h_1')^2(g_1 + 1)^2 + (h_2')^2(g_2 + 1)^2) \\
&+ h_2''(g_2 + 1)(1 + (g_1')^2(h_1 + 1)^2 + (g_2')^2(h_2 + 1)^2) \\
&- 2h_2'g_2'(h_1'g_1'(h_1 + 1)(g_1 + 1) + h_2'g_2'(h_2 + 1)(g_2 + 1))
\end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir.

i. Eğer (4.37) ve (4.38) eşitliklerinde $h_1'(u) = 0, h_2'(u) = 0$ alınrsa yüzeyin minimal olması için $g_1''(h_1 + 1) = 0$ ve $g_2''(h_2 + 1) = 0$ olmalıdır. Burada özel olarak ise $h_1 = h_2 = -1$ olursa minimal olma şartı sağlanır. Ayrıca $h_1 = c \neq -1, h_2 = d \neq -1$ ve $g_1'' = g_2'' = 0$ ise yüzey minimal bir yüzey olup $h(u, v) = c_1v + c_2$ ve $g(u, v) = c_3v + c_4$ şeklinde elde edilir. Böyle (1) eşitliği ile verilen TF-tipindeki yüzey bir düzlemdir. Benzer işlemler (4.37) ve (4.38) eşitliklerinde sırasıyla $g_1'(v) = 0, g_2'(v) = 0$ veya $h_2'(u) = 0, g_1'(v) = 0$ veya $h_1'(u) = 0, g_2'(v) = 0$ alınması durumunda tekrarlanırsa sırasıyla (2), (3) ve (4) yüzeylerini de elde ederiz.

ii. Eğer $h_1'(u) = 0, g_1'(v) = 0$ alınrsa (4.37) eşitliği sağlanır. Ayrıca, (4.38) eşitliğinden $g_2''(h_2 + 1)(1 + (h_2')^2(g_2 + 1)^2) + h_2''(g_2 + 1)(1 + (g_2')^2(h_2 + 1)^2) - 2(h_2')^2(g_2')^2(h_2 + 1)(g_2 + 1) = 0$ bulunur. Burada eşitliğin iki tarafı $(g_2 + 1)(h_2 + 1)$ ile bölünüp yeniden düzenlenirse

$$\frac{g_2''}{(g_2 + 1)} + \frac{h_2''}{(h_2 + 1)} + (h_2')^2(g_2''(g_2 + 1) - (g_2')^2) + (g_2')^2(h_2''(h_2 + 1) - (h_2')^2) = 0 \tag{4.39}$$

elde edilir. Eğer (4.39) eşitliğinde sırasıyla $h_2''(u) = 0$ alınrsa $g_2(v) = \frac{\tan(cv + d)}{c_1} - 1$

olarak veya $g_2''(v) = 0$ alınrsa $h_2(u) = \frac{\tan(cu + d)}{c_2} - 1$ olarak bulunur. Böylece (5) ve (6)

yüzey parametrisasyonlarını elde edilir.

Ayrıca $h_2''(u)g_2''(v) \neq 0$ olması durumunda (4.39) eşitliğinin önce u ya göre kısmi türevi alınrsa

$$\left(\frac{h_2''}{h_2 + 1} \right)' + \left((h_2')^2 \right)' (g_2''(g_2 + 1) - (g_2')^2) + (g_2')^2 (h_2''(h_2 + 1) - (h_2')^2)' = 0 \tag{4.40}$$

eşitliği elde edilir. Bulunan bu eşitliğin de v ye bağlı kısmi türevi alınıp düzenlenirse

$$\frac{(h_2''(h_2 + 1) - (h_2')^2)'}{((h_2')^2)'} = -\frac{(g_2''(g_2 + 1) - (g_2')^2)'}{((g_2')^2)'} = k \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Burada k reel bir sabittir. Böylece $(h_2''(h_2 + 1) - (h_2')^2)' = k((h_2')^2)'$ ve $(g_2''(g_2 + 1) - (g_2')^2)' = -k((g_2')^2)'$ eşitliklerinin her iki tarafının integralleri alınıp yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} h_2''(h_2 + 1) - (1 + k)(h_2')^2 &= a, \\ g_2''(g_2 + 1) - (1 - k)(g_2')^2 &= b \end{aligned} \quad (4.42)$$

olarak bulunur. Burada a ve b sıfırdan farklı gerçel sayılar olup integral sabitleridir.

a) Eğer (4.42) eşitliğinde $k = -1$ alınırsa

$$\begin{aligned} h_2''(h_2 + 1) &= a, \\ g_2''(g_2 + 1) - 2(g_2')^2 &= b \end{aligned} \quad (4.43)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin Maple ile çözümünden

$$u = \pm \int \frac{dh_2(u)}{\sqrt{2a \ln(h_2(u) + 1) - 2c_1 a}} \quad v = \pm \int \frac{dg_2(v)}{\sqrt{c_2(g_2(v) + 1)^4 - \frac{b}{2}}}$$

elde edilir.

b) Benzer şekilde $k = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} h_2''(h_2 + 1) - 2(h_2')^2 &= a, \\ g_2''(g_2 + 1) &= b \end{aligned} \quad (4.44)$$

olup bu diferansiyel denklemlerin çözümünden de

$$u = \pm \int \frac{dh_2(u)}{\sqrt{c_1(h_2(u)+1)^4 - \frac{a}{2}}} \text{ ve } v = \pm \int \frac{dg_2(v)}{\sqrt{2b \ln(g_2(v)+1) - 2c_2b}}$$

bulunur.

c) Eğer $k \neq \pm 1$ durumuna bakıldığında (4.42) diferansiyel denklemlerinin çözümüne bakılırsa

$$u = \pm \int \frac{dh_2(u)}{\sqrt{c_1(h_2(u)+1)^{2(k+1)} - c_2}} \text{ ve } v = \pm \int \frac{dg_2(v)}{\sqrt{c_3(g_2(v)+1)^{2(1-k)} + c_4}}$$

bulunur (EK 5).

iii. Benzer durum $h_2'(u) = 0, g_2'(v) = 0$ alınır da sağlanmış olacaktır. Bu durumda da (4.38) eşitliği sağlanır ve (4.37) eşitliğinden

$$g_1''(h_1+1)(1+(h_1')^2(g_1+1)^2) + h_1''(g_1+1)(1+(g_1')^2(h_1+1)^2) - 2(h_1')^2(g_1')^2(h_1+1)(g_1+1) = 0$$

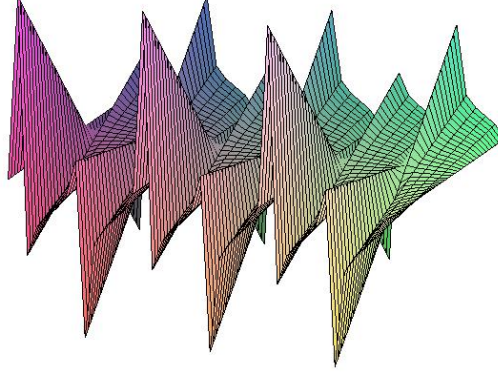
bulunur. İkinci durumda ki işlemler aynı şekilde $h_1(u)$ ve $g_1(v)$ fonksiyonları için uygulanırsa benzer sonuçlar bu fonksiyonlar için elde edilir.

iv. Eğer $h_1(u) = h_2(u)$ ve $g_1(v) = g_2(v)$ ise eşitlik (4.37) ve eşitlik (4.38) birbirine denktir. Buradan

$$\frac{g_1''}{(g_1+1)} + \frac{h_1''}{(h_1+1)} + 2(h_1')^2(g_1''(g_1+1) - (g_1')^2) + 2(g_1')^2(h_1''(h_1+1) - (h_1')^2) = 0 \quad (4.45)$$

elde edilir. Burada sırasıyla $h_1'' = 0$ veya $g_1'' = 0$ alınır ve ikinci durumda ki işlemler tekrarlanırsa (7) ve (8) parametrelendirmesine sahip TF tipindeki yüzeyler elde edilir. Ayrıca $h_1''g_1'' \neq 0$ ise (4.45) eşitliğinin önce u ya sonra da v ye göre kısmi türevi alınır (4.41) elde edilir. Böylece bu diferansiyel denklemin çözümünden de (9) tipindeki TF yüzeyleri bulunmuş olur.

Örnek 4.20. M yüzeyi (4.14) parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olmak üzere $X(u, v) = (u, v, (2u + 1) \tan(2v - 1) - 1, (2u + 1) \tan(2v - 1) - 1)$ parametrelendirmesi ile verilen TF yüzeyi E^4 de minimal yüzey olup E^3 deki izdüşümü Şekil 4.8 de verilmiştir.



Şekil 4.8. E^4 deki minimal TF yüzeyinin E^3 deki izdüşümü

4.2. E^3 de Sonlu Tipten Koordinatlara Sahip Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler

Bu bölümde, ilk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında koordinatları sonlu tipten olan yani, $\Delta x_i = \lambda_i x_i, 1 \leq i \leq 3$ koşulunu sağlayan Monge yaması ile verilen yüzeylerin sınıflandırılması yapılmıştır. Bu sınıflandırmaya bağlı olarak diğer alt bölümlerde bu yüzeylerin özel hali olarak karşımıza çıkan öteleme yüzeyleri, çarpanlara ayrılabilir yüzeyler ve TF tipindeki yüzeylerin de sonlu tipten koordinatlara sahip olması incelenmiş ve bunlarla ilgili sınıflandırma teoremleri verilmiştir.

M , yüzeyi $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ parametrelendirmesi ile verilen bir yüzey olsun. (3.4) eşitliğiyle verilen yüzeyin birinci temel form katsayıları yardımıyla;

$$\sqrt{g} = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} = W \quad (4.46)$$

olduğundan

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1+f_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

elde edilir. Böylece (2.12) ve (4.47) eşitliği yardımıyla Laplas operatörü;

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\sqrt{g} g^{1j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\sqrt{g} g^{2j} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} g_{22} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}} g_{12} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{1}{\sqrt{g}} g_{12} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{g}} g_{11} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

elde edilir. (3.4) ve (4.47) eşitlikleri (4.48) de yerine yazılırsa ve (3.8) denklemi ile verilen ortalama eğrilik fonksiyonu göz önüne alınırsa Laplas operatörü;

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{W} \left\{ \frac{g_{22}}{W} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{g_{12}}{W} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{g_{11}}{W} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g_{22}}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_{12}}{W} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(-\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{g_{12}}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_{11}}{W} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} \right\} \\ &= -\frac{1}{W^2} \left\{ g_{22} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + g_{11} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} + \frac{2H}{W} \left\{ f_u \frac{\partial}{\partial u} + f_v \frac{\partial}{\partial v} \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla M yüzeyinin Laplaseni;

$$\Delta = -\frac{1}{W^2} \left\{ (1+f_v^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2f_u f_v \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + (1+f_u^2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} + \frac{2H}{W} \left\{ f_u \frac{\partial}{\partial u} + f_v \frac{\partial}{\partial v} \right\} \quad (4.50)$$

dir. Buradan (3.1) ve (4.50) eşitlikleri yardımıyla x dönüşümünün Laplası olarak

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 = \Delta u &= -\frac{1}{W^2} \left\{ (1 + f_v^2) \frac{\partial^2(u)}{\partial u^2} - 2f_u f_v \frac{\partial^2(u)}{\partial u \partial v} + (1 + f_u^2) \frac{\partial^2(u)}{\partial v^2} \right\} \\
&\quad + \frac{2H}{W} \left\{ f_u \frac{\partial(u)}{\partial u} + f_v \frac{\partial(u)}{\partial v} \right\} \\
&= \frac{2H}{W} f_u,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_2 = \Delta v &= -\frac{1}{W^2} \left\{ (1 + f_v^2) \frac{\partial^2(v)}{\partial u^2} - 2f_u f_v \frac{\partial^2(v)}{\partial u \partial v} + (1 + f_u^2) \frac{\partial^2(v)}{\partial v^2} \right\} \\
&\quad + \frac{2H}{W} \left\{ f_u \frac{\partial(v)}{\partial u} + f_v \frac{\partial(v)}{\partial v} \right\} \\
&= \frac{2H}{W} f_v,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
\Delta x_3 = \Delta f(u, v) &= -\frac{1}{W^2} \left\{ (1 + f_v^2) \frac{\partial^2(f(u, v))}{\partial u^2} - 2f_u f_v \frac{\partial^2(f(u, v))}{\partial u \partial v} + (1 + f_u^2) \frac{\partial^2(f(u, v))}{\partial v^2} \right\} \\
&\quad + \frac{2H}{W} \left\{ f_u \frac{\partial(f(u, v))}{\partial u} + f_v \frac{\partial(f(u, v))}{\partial v} \right\} \\
&= -\frac{1}{W^2} \left\{ (1 + f_v^2) f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv} \right\} + \frac{2H}{W} \{ f_u^2 + f_v^2 \} \\
&= -\frac{2H}{W}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$\Delta x = \left(\frac{2H}{W} f_u, \frac{2H}{W} f_v, -\frac{2H}{W} \right) \tag{4.54}$$

olarak yazılabilir.

$\Delta x = -2\vec{H}$ Beltrami eşitliğinden $\Delta x = 0$ ise $H = 0$ dır.

Teorem 4.21. M , yüzeyi Monge yaması ile verilen yüzey olsun. M yüzeyinin $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki gibi verilen yüzeylerin bir parçası olmasıdır;

i) M yüzeyi minimal bir yüzeydir.

ii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{\sqrt{-\lambda_2 v^2 + \lambda_3 c}}{\sqrt{\lambda_3}} \right), \text{ veya } X(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\sqrt{-\lambda_1 u^2 + \lambda_3 d}}{\sqrt{\lambda_3}} \right),$$

parametrelendirmesine sahiptir.

iii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{\sqrt{-\lambda_1 u^2 + \lambda_3 \phi(v)}}{\sqrt{\lambda_3}} \right), \text{ veya } X(u, v) = \left(u, v, \frac{\sqrt{-\lambda_2 v^2 + \lambda_3 \phi(u)}}{\sqrt{\lambda_3}} \right),$$

parametrelendirmesine sahiptir.

İspat. M , yüzeyi (3.1) parametrelendirmesi ile verilen yüzey olmak üzere $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlasın. Bu takdirde (4.51)-(4.53) denklemleri yardımıyla,

$$2Hf_u = W\lambda_1 u, \quad (4.55)$$

$$2Hf_v = W\lambda_2 v, \quad (4.56)$$

$$2H = -W\lambda_3 f(u, v) \quad (4.57)$$

elde edilir.

1) $\lambda_3 = 0$ ise (4.57) denkleminde $H = 0$ bulunur. Böylece $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olur. Bu takdirde M yüzeyi minimal bir yüzeydir.

2) $\lambda_3 \neq 0$ olsun.

i) Eğer $f(u, v) = 0$ ise (4.57) denkleminde $H = 0$ olup yüzey minimal bir yüzey olur.

ii) $f(u, v) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $H \neq 0$ dır. Buradan dört durum karşımıza çıkar.

a) $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde (4.55) ve (4.56) denklemlerinden $f_u = 0$, $f_v \neq 0$ olur. Ayrıca $H = \frac{f_{vv}}{2W^3}$ olur. Böylece $f(u, v) = g(v)$, $g'(v) \neq 0$ olup $H = \frac{g''}{2W^3}$ şeklinde yazılır. Buradan (4.56) ve (4.57) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} g'g'' &= \lambda_2 v(1 + g'^2)^2 \\ g'' &= -\lambda_3 g(1 + g'^2)^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden $g(v) = \pm \frac{\sqrt{(-\lambda_2 v^2 + \lambda_3 c)}}{\sqrt{\lambda_3}}$

elde edilir.

b) $\lambda_1 \neq 0$ ve $\lambda_2 = 0$ olsun. Bu takdirde (4.55) ve (4.56) denklemlerinden $f_u \neq 0$, $f_v = 0$ olur. Ayrıca $H = \frac{f_{uu}}{2W^3}$ olur. Böylece $f(u, v) = h(u)$, $h'(u) \neq 0$ olup $H = \frac{h''}{2W^3}$ şeklinde yazılır. Buradan (4.55) ve (4.56) denklemleri tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned} h'h'' &= \lambda_1 u(1 + h'^2)^2 \\ h'' &= -\lambda_3 h(1 + h'^2)^2 \end{aligned} \quad (4.59)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden $h(u) = \pm \frac{\sqrt{(-\lambda_1 u^2 + \lambda_3 d)}}{\sqrt{\lambda_3}}$

elde edilir.

c) $\lambda_1 \neq 0$ ve $\lambda_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde (4.55) ve (4.56) denklemlerinden $f_u \neq 0$, $f_v \neq 0$ olur. (4.55) denklemini f_v ile (4.56) denklemini de f_u ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 2f_u f_v H &= W\lambda_1 u f_v, \\ 2f_u f_v H &= W\lambda_2 v f_u \end{aligned} \quad (4.60)$$

olup buradan

$$\lambda_1 u f_v = \lambda_2 v f_u \quad (4.61)$$

elde edilir. Ayrıca (4.55) ve (4.57) ile (4.56) ve (4.57) tekrar düzenlenirse

$$\lambda_1 u = -\lambda_3 f f'_u \quad (4.62)$$

$$\lambda_2 v = -\lambda_3 f f'_v \quad (4.63)$$

bulunur. Buradan (4.61) ve (4.62) denklemlerinden $-f f'_v = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v$ diferansiyel denklemi

bulunur. Kısmi diferansiyel denklemin çözümünden $f(u, v) = \frac{\sqrt{(-\lambda_2 v^2 + \lambda_3 \phi(u))}}{\sqrt{\lambda_3}}$ elde

edilir. Benzer şekilde (4.61) ve (4.63) denklemlerinden $-f f'_u = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} u$ diferansiyel

denklemi bulunur. Kısmi diferansiyel denklemin çözümünden

$$f(u, v) = \frac{\sqrt{(-\lambda_1 u^2 + \lambda_3 \phi(v))}}{\sqrt{\lambda_3}} \text{ elde edilir (EK 6).}$$

d) $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 0$ olsun. Bu takdirde (4.55) ve (4.56) denklemlerinden $f'_u = 0$, $f'_v = 0$ olur. Böylece $H = 0$ olur. Bu durumda $\lambda_3 = 0$ olacağından çelişki yaratır. Bu şartı sağlayan Monge yamasıyla verilen yüzey yoktur.

4.2.1. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip öteleme yüzeyleri

Bir önceki bölümde Monge yaması ile verilen yüzeylerin Laplas operatörü yardımıyla bu yüzeylerin özel bir hali olan öteleme yüzeylerinin de sonlu tipten koordinatlara sahip olması ele alınabilir.

Bu takdirde M , yüzeyi $f(u, v) = h(u) + g(v)$ parametrelendirmesi ile verilen öteleme yüzeyi olsun. Buradan (4.54) eşitliği yardımıyla;

$$\Delta x = \left(\frac{2H}{W} h', \frac{2H}{W} g', -\frac{2H}{W} \right) \quad (4.64)$$

elde edilir. Burada $W = \sqrt{1 + h'^2 + g'^2}$ dir.

Teorem 4.22. M , (3.9) parametrelendirmesi ile verilen öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyinin $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki gibi verilen yüzeylerin bir parçası olmasıdır;

i) M yüzeyi minimal bir yüzeydir.

ii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 a^2 - \lambda_2 v^2 - 2\lambda_2 c_1}}{\sqrt{\lambda_3}} \right),$$

parametrelendirmesine sahiptir.

iii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 b^2 - \lambda_1 u^2 - 2\lambda_1 c_2}}{\sqrt{\lambda_3}} \right),$$

parametrelendirmesine sahiptir.

İspat. M , yüzeyi (3.9) parametrelendirmesi ile verilen öteleme yüzeyi olmak üzere $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlasın. Böylece (4.51)-(4.53) denklemlerine benzer şekilde (4.64) deki eşitliği düzenlersek;

$$2Hh' = W\lambda_1 u, \quad (4.65)$$

$$2Hg' = W\lambda_2 v, \quad (4.66)$$

$$2H = -W\lambda_3 (h(u) + g(v)) \quad (4.67)$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 4.21 in ispatından faydalanacak olursak ilk olarak $\lambda_3 = 0$ olması durumunda minimal yüzey sonucu elde edilmiş olur.

Ayrıca $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ durumu için (4.58) denkleminin çözümü ele alınırsa

$$g(v) = -a \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 a^2 - \lambda_2 v^2 - 2\lambda_2 c_1}}{\sqrt{\lambda_3}} \text{ elde edilir.}$$

Benzer şekilde $\lambda_1 \neq 0$ ve $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ durumu için de (4.59) denkleminin çözümü

$$\text{ele alınrsa } h(u) = -b \pm \frac{\sqrt{\lambda_3 b^2 - \lambda_1 u^2 - 2\lambda_1 c_2}}{\sqrt{\lambda_3}} \text{ elde edilir.}$$

Diğer durumlar da çelişki yarattığından bu şartları sağlayan öteleme yüzeyi yoktur.

4.2.2. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip çarpanlara ayrılabilir yüzeyler

Benzer işlemler çarpanlara ayrılabilir yüzeyler için de uygulanacak olursa aşağıdaki gibi sınıflandırma verilebilir. O halde M , yüzeyi (3.12) parametrelendirmesi ile verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey olmak üzere yüzeyin Laplasyeni (4.50) eşitliği yardımıyla

$$\Delta = -\frac{1}{W^2} \left\{ (1 + (hg')^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2hh'gg' \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + (1 + (h'g)^2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right\} + \frac{2H}{W} \left\{ h'g \frac{\partial}{\partial u} + hg' \frac{\partial}{\partial v} \right\} \quad (4.68)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradan x dönüşümünün Laplası da

$$\Delta x_1 = \Delta u = \frac{2H}{W} h'g \quad (4.69)$$

$$\Delta x_2 = \Delta v = \frac{2H}{W} hg' \quad (4.70)$$

$$\Delta x_3 = \Delta(h(u)g(v)) = -\frac{2H}{W} \quad (4.71)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikten

$$\Delta x = \left(\frac{2H}{W} h'g, \frac{2H}{W} hg', -\frac{2H}{W} \right) \quad (4.72)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 4.23. M , yüzeyi (3.12) parametrelendirmesi ile verilen çarpanlara ayrılabilir bir yüzey olmak üzere M yüzeyinin $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki gibi verilen yüzeylerin bir parçası olmasıdır;

i) M yüzeyi minimal bir yüzeydir

ii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\lambda_2 v}{\lambda_3} \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 - \beta}{\lambda_2 v^2 + \beta + 1}} \right), \quad -1 < \lambda_2 v^2 + \beta < 0$$

parametrelendirmesine sahiptir.

iii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \frac{\lambda_1 u}{\lambda_3} \sqrt{\frac{-\lambda_1 u^2 - \beta}{\lambda_1 u^2 + \beta + 1}} \right), \quad -1 < \lambda_1 u^2 + \beta < 0$$

parametrelendirmesine sahiptir (Bekkar ve Senoussi 2012).

4.2.3. E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip TF tipindeki yüzeyler

Son olarak TF tipindeki yüzeyler ele alınırsa bu yüzeylerin de sonlu tipten koordinatlara sahip olması ile ilgili sınıflandırma teoremi aşağıdaki gibi verilebilir.

M , yüzeyi $f(u, v) = h(u)g(v) + h(u) + g(v)$ parametrelendirmesi ile verilen TF tipindeki yüzey olsun. Böylece (4.54) denkleminde;

$$\Delta x = \left(\frac{2H}{W} h'(g+1), \frac{2H}{W} (h+1)g', -\frac{2H}{W} \right) \quad (4.73)$$

elde edilir. Burada $W = \sqrt{1 + (h'g + h')^2 + (hg' + g')^2}$ dir.

Teorem 4.24. M , yüzeyi (4.1) parametrelendirmesi ile verilen TF tipinde bir yüzey olmak üzere M yüzeyinin $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart M nin aşağıdaki gibi verilen yüzeylerin bir parçası olmasıdır;

i) M yüzeyi minimal bir yüzeydir.

ii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad -1 < -\lambda_2 v^2 + a^2 \lambda_3 < 0$$

parametrelendirmesine sahiptir.

iii) M yüzeyi

$$X(u, v) = \left(u, v, \pm \sqrt{\frac{-\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3}{\lambda_3}} \right), \quad -1 < -\lambda_2 u^2 + a^2 \lambda_3 < 0$$

parametrelendirmesine sahiptir (Difi ve ark. 2018).



5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Öklid uzayında Monge yamasıyla verilen yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerden öteleme yüzeyleri ile çarpanlara ayrılabilen yüzeyler incelenip bunlar yardımıyla yeniden tanımladığımız ve TF (translation-factorable) tipindeki yüzeyler olarak adlandırılan yüzey sınıfları çalışılmıştır. Bu yüzeyler 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlanmış olup 4-boyutlu Öklid uzayında bu tez çalışmasında ilk defa tanımlanmıştır. 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayında TF tipindeki yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmış ve bu yüzeylerin düz ve minimal olma koşulları verilerek yüzey sınıflandırılmaları elde edilmiştir. Sınıflandırılmaları verilen E^3 ve E^4 de TF tipindeki yüzeylerin bazıları ile ilgili örnekler verilmiştir. Bu örneklerin Maple programı yardımıyla çözümleri yapılarak grafikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yüzey şekilleri çalışma içerisinde belirtildiği gibi gösterilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında sonlu tipten koordinatlara sahip Monge yamasıyla verilen yüzeylerin Laplasları hesaplanmıştır.

Özet olarak bu çalışmada Öklid uzayında TF tipindeki yüzey sınıflandırılmaları ve E^3 de sonlu tipten koordinatlara sahip yüzeyler ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma değerlendirilerek TF tipindeki yüzeylerin Lorentz-Minkowski gibi farklı uzaylardaki yüzey sınıflandırılmaları ile ilgili veya 4-boyutlu Öklid uzayında sonlu tipten koordinatlara sahip yüzeylerin Laplaslarının hesaplanması ile ilgili bir çalışmaya kaynak oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

- Aminov, Y. 1994.** Surfaces in E^4 with a Gaussian curvature coinciding with a Gaussian torsion up to the sign, *Math. Notes*, 56: 1211-1215.
- Arslan, K., Bayram, B., Bulca, B., Öztürk, G. 2016.** On Translation surfaces in 4-dimensional Euclidean space, *Acta Comm. Univ. Tartuensis Math.*, 20(2): 123-133.
- Aydın, M.E. 2018.** Constant curvature factorable surfaces in 3-dimensional isotropic space, *J. Korean Math. Soc.*, 55(1): 59-71.
- Aydın, M.E., Öğrenmiş, A.O. 2017.** Linear Weingarten factorable surfaces in isotropic spaces, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 62(2): 261-268.
- Aydın, M.E., Külahcı, M., Öğrenmiş, A.O. 2018.** Non-zero constant curvature factorable surfaces in pseudo-Galilean space, *Comm. Korean Math. Soc.*, 33(1): 247-259.
- Aydın, M.E., Öğrenmiş, A.O., Ergüt, M. 2015.** Classification of factorable surfaces in the Pseudo-Galilean 3 space, *Glasnik Matematički*, 50 (70): 441-451.
- Baba-Hamed, C., Bekkar, M., Zoubir, H. 2010.** Translation surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, *Int. J. Math. Analysis*, 4(17): 797-808.
- Bekkar, M., Zoubir, H. 2008.** Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski spaces satisfying $\Delta x^i = \lambda^i x^i$, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 3: 1173-1185.
- Bekkar, M., Senoussi, B. 2012.** Factorable surfaces in three-dimensional Euclidean and Lorentzian spaces satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, *Int. J. Geom.*, 103: 17-29.
- Beltrami, E. 1864.** Ricerche di analisi applicata alla geometria, *Giornale di Math. II*, 150-162.
- Blaschke, W. 1929.** Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, Berlin. 474 pp.
- Bulca, B., Arslan, K. 2013.** Surfaces given with the Monge patch in E^4 , *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 9(4): 435-447.
- Büyükkütük, S. 2012.** Öklid uzaylarında öteleme yüzeylerinin bir karakterizasyonu. *Yüksek Lisans Tezi*, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kocaeli.
- Büyükkütük, S. 2018a.** Çarpanlara ayrılabilir yüzeylerin bir karakterizasyonu. *Doktora Tezi*, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kocaeli.
- Büyükkütük, S. 2018b.** Timelike factorable surfaces in Minkowski space-time, *Sakarya Uni. J. Sci.*, 22(6): 1939-1946.
- Büyükkütük, S., Öztürk, G. 2017.** Spacelike factorable surfaces in four dimensional Minkowski space, *Bull. Math. An. App.*, 9(4): 12-20.
- Büyükkütük, S., Öztürk, G. 2018.** A Characterization of factorable surfaces in Euclidean 4-space E^4 , *Koc. J. Sci. Eng.*, 1(1): 15-20.
- Chen, B.Y. 1973.** Geometry of submanifolds, Dekker, New York, USA, 192 pp.
- Chen, B.Y. 1979.** On submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.*, 9: 65-81.

- Chen, B.Y. 1984.** Total mean curvature and submanifolds of finite type, World Scientific, Singapore, 352 pp.
- Chen, B.Y. 1987.** Surfaces of finite type in Euclidean 3-space, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B.*, 39: 243-254.
- Chen, B.Y. 1996.** A Report on submanifolds of finite type, *Soochow Journal of Mathematics*, 22(2): 117-337.
- Chen, B.Y. 2015.** Total mean curvature and submanifolds of finite type: Second Edition, Michigan State University, USA, 488 pp.
- Chen, B.Y., Dillen F. 1990.** Quadrics of finite type, *J.Geo.*, 38: 16-22.
- Chen, B.Y., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L. 1990.** Ruled surfaces of finite type, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 42: 447–453.
- Darboux G. 1972.** Leçons sur la theorie generale des surfaces et ses applications geometriques du calcul infinitesimal, Chelsea Publ. Co., 524 pp.
- Do Carmo, M.P. 1976.** Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall Inc, New Jersey, 503 pp.
- Difi, S.A., Ali, H., Zoubir, H. 2018.** Translation-Factorable surfaces in the 3-dimensional Euclidean and Lorentzian spaces satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$, *EJMAA*, 6(2): 227-236.
- Dillen, F. 1992.** Ruled submanifolds of finite type, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114: 795-798.
- Dillen, F., Verstraelen, L., Zafindratafa, G. 1991.** A generalization of the translation surfaces of Scherk differential geometry in honor of Radu Rosca: Meeting on pure and applied differential geometry, Leuven, Belgium. 1989, *KU Leuven, Department Wiskunde*: 107-109.
- Dillen, F., Van de Woestyne, I., Verstraelen, L., Walrave, J.T. 1998.** The surface of Scherk in E^3 : A special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, 26: 257–267.
- Erdur, A. 2016.** 3-boyutlu Galilean uzayında Factorable yüzeyler. *Yüksek Lisans Tezi*, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Elazığ.
- Gauss, C.F. 1827.** Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Comment. Soc. Sci. Gotting. Recent. Classis Math.*, 6.
- Garay, O.J. 1988.** Finite type cones shaped on spherical submanifolds, *ibid*, 104: 868-870.
- Garay, O.J. 1990.** An extension of Takahashi's theorem, *Gem. Dedicata*, 34: 105-112.
- Germain, S. 1831.** Memoire sur la theories des surfaces, *J. Reine Angrew. Math.*, 7: 1-29.
- Glymph J., Schelden D., Ceccato C., Mussel J., Schober H. 2004.** A Parametric strategy for free-from glass structures using quadrilateral planar facets, *Automation in Construction*, 13: 187-202.
- Gray, A. 1997.** Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Second Edition, CCR Press, USA, 1016 pp.

- Hasanis, T. Lopez, R. 2018.** Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature, arXiv:1809.02758v1.
- Jiu, L., Sun, H. 2007.** On minimal homothetical hypersurfaces, *Colloq. Math.*, 109: 239– 249.
- Kenmotsu, K. 1942.** Surfaces with constant mean curvature, American Mathematical Society, 142 pp.
- Korkmaz, B. 2012.** Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler, TÜBA Ders Kitapları, Ankara, 553 s.
- Liu, H. 1993.** Translation surfaces with dependent Gaussian and mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Northeast Univ. Tech.*, 14(1): 88-93.
- Liu, H. 1999.** Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, *J. Geom.*, 64: 141-149.
- Lopez, R. 2011.** Minimal translation surfaces in hyperbolic space, *Beitrage Algebra Geom.*, 52(1): 105-112.
- Lopez, R., Moruz, M. 2015.** Translation and homothetical surfaces in Euclidean spaces with constant curvature, *J.Korean Math. Soc.*, 52: 523-535.
- Lopez, R., Perdomo, O. 2017.** Minimal translation surfaces in Euclidean space, *J. Geom. Anal.*, 27: 2926–2937.
- Mello, L.F. 2003.** Mean directionally curved lines on surfaces immersed in R^4 , *Publ. Math.*, 47: 415-440.
- Mello, L.F. 2009.** Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in R^4 , *Rocky Mountain J. Math.*, 39(5): 1597-1612.
- Meng, H., Liu, H. 2009.** Factorable surfaces in 3-Minkowski space, *Bull. Korean Math. Soc.*, 46(1): 155-169.
- Moruz, M., Munteanu, M. 2016.** Minimal translation hypersurfaces in E^4 . *J. Math. Anal. Appl.*, 439: 798–812.
- Munteanu, M., Nistor, A.I. 2011.** On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in E^3 . *Houston J. Math.*, 37: 1087-1102.
- Munteanu, M., Palmas, O., Ruiz-Hernandez, G. 2016.** Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. *Mediterr. J. Math.* 13: 2659-2676.
- Nitsche, J.C.C. 1989.** Lectures on minimal surfaces, Cambridge University Press, Cambridge, 563 pp.
- O’Neill, B. 1997.** Elementary differential geometry, Academic Press, USA, 520 pp.
- Poisson, S.D. 1812.** Memoire sur les surfaces Elastiques, *Mem. Cl. Sci. Math. Phys.*
- Riemann, B. 1854.** Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Habili. Abhand. Königlichen Ges. Wissen. Göttingen*, 13: 133-152.
- Scherk H. F. 1835.** Bemerkungen ber die Kleinste fläche innerhalb Gegebener Grenzen, *J. R. Angew. Math.*, 13: 185-208.
- Senoussi, B., Bekkar, M. 2019.** Translation and homothetical TH- surfaces in the 3-dimensional Euclidean space E^3 and Lorentzian-Minkowski space E_1^3 . *Open J. Math. Sci.*, 3: 234-244.

- Şasi, G. 2018.** Üç boyutlu Galile uzayında öteleme ve factorable yüzeylerin sınıflandırılması. *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul.
- Takahashi, T. 1966.** Minimal immersions of Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, 18: 380-385.
- Turhan, E., Altay, G. 2010.** Maximal and minimal surfaces of factorable surfaces in $Heis_3$, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, 3(2): 200-212.
- Van de Woestyne, I. 1995.** Minimal homothetical hypersurfaces of a semi-Euclidean space, *Results Math.*, 27: 333–342.
- Verstraelen, L., Walrave, J., Yaprak, S. 1994.** The minimal translation surface in Euclidean space, *Soochow J. Math.*, 20: 77-82.
- Yu, Y., Liu, H. 2007.** The factorable minimal surfaces, *Proceedings of the Eleventh International Workshop on Diff. Geom.*, 11: 33-39.
- Willmore, T.J. 1968.** Mean curvature of Riemannian immersion, *J. London Math. Soc.*, 3: 307-310.

EKLER

- EK 1** E^3 de (4) tipindeki düz TF yüzeyi
- EK 2** E^3 de (3) tipindeki minimal TF yüzeyi
- EK 3** E^3 de (4) tipindeki minimal TF yüzeyleri
- EK 4** E^4 de (8) tipindeki düz TF yüzeyi
- EK 5** E^4 de (9) tipindeki minimal TF yüzeyleri
- EK 6** E^3 de $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan Monge yamasıyla verilen yüzey



EK 1 E^3 de (4) tipindeki düz TF yüzeyi

> `ode2:=diff(h(u),u,u)*(h(u)+1)=k*diff(h(u),u)^2;`

$$ode2 := \left(\frac{d^2}{du^2} h(u) \right) (h(u) + 1) = k \left(\frac{d}{du} h(u) \right)^2$$

> `dsolve(ode2);`

$$h(u) = \left(\frac{1}{(-k+1)(_C1u +_C2)} \right)^{\left(\frac{1}{k-1} \right)} - 1$$

> `ode4:=k*diff(g(v),v,v)*(g(v)+1)=diff(g(v),v)^2;`

$$ode4 := k \left(\frac{d^2}{dv^2} g(v) \right) (g(v) + 1) = \left(\frac{d}{dv} g(v) \right)^2$$

> `dsolve(ode4);`

$$g(v) = \frac{1}{\left(\frac{k}{(k-1)(_C1v +_C2)} \right)^{\left(\frac{k}{k-1} \right)}} - 1$$

EK 2 E^3 de (3) tipindeki minimal TF yüzeyi

```
> ode5:=diff(g(v),v,v)+c^2*diff(g(v),v,v)*(g(v)+1)^2-  
2*c^2*diff(g(v),v)^2*(g(v)+1)=0;
```

$$ode5 := \left(\frac{d^2}{dv^2} g(v) \right) + c^2 \left(\frac{d^2}{dv^2} g(v) \right) (g(v) + 1)^2 - 2c^2 \left(\frac{d}{dv} g(v) \right)^2 (g(v) + 1) = 0$$

```
> dsolve(ode5);
```

$$g(v) = \frac{-c + \tan(_C1 v c + _C2 c)}{c}$$

EK 3 E^3 de (4) tipindeki minimal TF yüzeyleri

> **ode6:=diff(x(u),u,u)*(x(u)+1)=c;**

$$ode6 := \left(\frac{d^2}{du^2} x(u) \right) (x(u) + 1) = c$$

> **dsolve(ode6);**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2c \ln(a+1) - 2C_1 c}} d_{a-u-C_2} = 0,$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{2c \ln(a+1) - 2C_1 c}} d_{a-u-C_2} = 0$$

> **ode7:=diff(y(v),v,v)*(y(v)+1)-2*diff(y(v),v)^2=b;**

$$ode7 := \left(\frac{d^2}{dv^2} y(v) \right) (y(v) + 1) - 2 \left(\frac{d}{dv} y(v) \right)^2 = b$$

> **dsolve(ode7);**

$$\int -\frac{2}{\sqrt{-2b + 2C_1 a^4 + 8C_1 a^3 + 12C_1 a^2 + 8C_1 a + 2C_1}} d_{a-v-C_2} = 0,$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{-2b + 2C_1 a^4 + 8C_1 a^3 + 12C_1 a^2 + 8C_1 a + 2C_1}} d_{a-v-C_2} = 0$$

> **ode8:=diff(x(u),u,u)*(x(u)+1)-(k+1)*diff(x(u),u)^2=c;**

$$ode8 := \left(\frac{d^2}{du^2} x(u) \right) (x(u) + 1) - (k+1) \left(\frac{d}{du} x(u) \right)^2 = c$$

> **dsolve (ode8) ;**

$$\int^{x(u)} \frac{(_a+1)^{(-2k-2)} (k+1)}{\sqrt{-(_a+1)^{(-2k-2)} (k+1) ((_a+1)^{(-2k-2)} c - _C1)}} d_a - u - _C2 = 0,$$

$$\int^{x(u)} -\frac{(_a+1)^{(-2k-2)} (k+1)}{\sqrt{-(_a+1)^{(-2k-2)} (k+1) ((_a+1)^{(-2k-2)} c - _C1)}} d_a - u - _C2 = 0$$

> **ode9:=diff (y (v) , v , v) * (y (v)+1) - (1-k) *diff (y (v) , v) ^2=b;**

$$ode9 := \left(\frac{d^2}{dv^2} y(v) \right) (y(v) + 1) - (-k + 1) \left(\frac{d}{dv} y(v) \right)^2 = b$$

> **dsolve (ode9) ;**

$$\int^{y(v)} \frac{(_a+1)^{(2k-2)} (k-1)}{\sqrt{(_a+1)^{(2k-2)} (k-1) ((_a+1)^{(2k-2)} b + _C1)}} d_a - v - _C2 = 0,$$

$$\int^{y(v)} -\frac{(_a+1)^{(2k-2)} (k-1)}{\sqrt{(_a+1)^{(2k-2)} (k-1) ((_a+1)^{(2k-2)} b + _C1)}} d_a - v - _C2 = 0$$

EK 4 E^4 de (8) tipindeki düz TF yüzeyi

> `ode:=diff(h2(u),u,u)*(h2(u)+1)=k*diff(h2(u),u)^2;`

$$ode := \left(\frac{d^2}{du^2} h2(u) \right) (h2(u) + 1) = k \left(\frac{d}{du} h2(u) \right)^2$$

> `dsolve(ode);`

$$h2(u) = \left(\frac{1}{(-k+1)(-C1u - C2)} \right)^{\left(\frac{1}{k-1} \right)} - 1$$

> `ode2:=k*diff(g2(v),v,v)*(g2(v)+1)=diff(g2(v),v)^2;`

$$ode2 := k \left(\frac{d^2}{dv^2} g2(v) \right) (g2(v) + 1) = \left(\frac{d}{dv} g2(v) \right)^2$$

> `dsolve(ode2);`

$$g2(v) = \frac{1}{\left(\frac{k}{(k-1)(-C1v - C2)} \right)^{\left(\frac{k}{k-1} \right)}} - 1$$

EK 5 E^4 de (9) tipindeki minimal TF yüzeyleri

> **ode:=diff(h2(u),u,u)*(h2(u)+1)=a;**

$$ode := \left(\frac{d^2}{du^2} h2(u) \right) (h2(u) + 1) = a$$

> **dsolve(ode);**

$$\int \frac{1}{\sqrt{2a \ln(-a+1) - 2_{CI} a}} d_{-a-u}_{-C2} = 0,$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{2a \ln(-a+1) - 2_{CI} a}} d_{-a-u}_{-C2} = 0$$

> **ode2:=diff(g2(v),v,v)*(g2(v)+1)-2*diff(g2(v),v)^2=b;**

$$ode2 := \left(\frac{d^2}{dv^2} g2(v) \right) (g2(v) + 1) - 2 \left(\frac{d}{dv} g2(v) \right)^2 = b$$

> **dsolve(ode2);**

$$\int -\frac{2}{\sqrt{-2b+2_{CI} a^4+8_{CI} a^3+12_{CI} a^2+8_{CI} a+2_{CI}}} d_{-v}_{-C2} = 0,$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{-2b+2_{CI} a^4+8_{CI} a^3+12_{CI} a^2+8_{CI} a+2_{CI}}} d_{-v}_{-C2} = 0$$

> **ode3:=diff(h2(u),u,u)*(h2(u)+1)-(1+k)*diff(h2(u),u)^2=a;**

$$ode3 := \left(\frac{d^2}{du^2} h2(u) \right) (h2(u) + 1) - (1+k) \left(\frac{d}{du} h2(u) \right)^2 = a$$

> **dsolve(ode3);**

$$\int^{h2(u)} \frac{(-a+1)^{(-2-2k)} (1+k)}{\sqrt{-(-a+1)^{(-2-2k)} (1+k) ((-a+1)^{(-2-2k)} a - C1)}} d_{a-u} - C2 = 0,$$

$$\int^{h2(u)} - \frac{(-a+1)^{(-2-2k)} (1+k)}{\sqrt{-(-a+1)^{(-2-2k)} (1+k) ((-a+1)^{(-2-2k)} a - C1)}} d_{a-u} - C2 = 0$$

> **ode4 := diff (g2 (v) , v , v) * (g2 (v) +1) - (1-k) *diff (g2 (v) , v) ^2=b ;**

$$ode4 := \left(\frac{d^2}{dv^2} g2(v) \right) (g2(v) + 1) - (1-k) \left(\frac{d}{dv} g2(v) \right)^2 = b$$

> **dsolve (ode4) ;**

$$\int^{g2(v)} \frac{(-a+1)^{(-2+2k)} (-1+k)}{\sqrt{(-a+1)^{(-2+2k)} (-1+k) ((-a+1)^{(-2+2k)} b + C1)}} d_{a-v} - C2 = 0,$$

$$\int^{g2(v)} - \frac{(-a+1)^{(-2+2k)} (-1+k)}{\sqrt{(-a+1)^{(-2+2k)} (-1+k) ((-a+1)^{(-2+2k)} b + C1)}} d_{a-v} - C2 = 0$$

EK 6 E^3 de $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan Monge yamasıyla verilen yüzey

> **PDE := -l3*f(u,v)*diff(f(u,v),u)=l1*u;**

$$PDE := -l3 f(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \right) = l1 u$$

> **pdsolve(PDE);**

$$f(u, v) = \frac{\sqrt{l3 (-l1 u^2 + _F1(v) l3)}}{l3}$$



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emine Aydan PAMUK
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA / 06.01.1991
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Bursa Anadolu Erkek Lisesi
Lisans : Anadolu Üniversitesi
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Bursa Anadolu Erkek Lisesi (2017-2018)
: Özel Altınşehir Okulları (2018-2019)

İletişim (e-posta) : aydanpamuk91@hotmail.com

Yayınları :

Pamuk, A.E., Bulca, B. 2019. Translation–Factorable Surfaces in 4-Dimensional Euclidean Space. 2nd International Conference on Mathematical Advances and Applications, Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey, May 3-5, ICOMAA 2019.