



T.C.
Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

**BAZI HIZLI VE HASSAS FREKANS KESTİRİCİLERİNİN
KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ**

Sevim Hazal UZ



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI HIZLI VE HASSAS FREKANS KESTİRİCİLERİNİN
KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ**

Sevim Hazal UZ

0000-0001-8607-4163

Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

0000-0002-8432-623X

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA-2020
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Sevim Hâzal UZ tarafından hazırlanan "Bazı Hızlı ve Hassas Frekans Kestiricilerinin Karşılaştırmalı Performans Analizi" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Başkan : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU
0000-0002-8432-623X
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye : Doç. Dr. Hakan GÜRKAN
0000-0002-7008-4778
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Elektrik -Elektronik Mühendisliği Anabilim
Dalı

İmza



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esin KARPAT
0000-0002-2740-8183
Uludağ Üniversitesi ,
Mühendislik Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
... / ... / 2020

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/01/2020

Sevim Hazal UZ



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI HIZLI VE HASSAS FREKANS KESTİRİCİLERİNİN KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ

Sevim Hazal UZ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Gürültü içindeki bir reel sinüsün frekansının az sayıda veri örneklerinden anlık kestirimi işaret işleme alanında önemli bir problemdir. Bu problem için literatürde birçok frekans kestiricisi önerilmiştir. Bu tez çalışmasında, ayırık enerji ayrışım algoritmaları (DESA) ve diğer bazı popüler kestiriciler ele alınmıştır. Bir Taylor seri açılımı tekniği kullanılarak, kestiricilerin yanlılık ve değışintileri için çok basit fakat kesin kapalı biçim ifadeler çıkarılmıştır. Kuramsal sonuçları teyit eden bilgisayar benzetimleri dâhil edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reel sinüs sinyali, Frekans kestirimi, Cramér – Rao sınırı.

2020, viii + 80 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A COMPARATIVE PERFORMANCE ANALYSIS OF SOME FAST AND ACCURATE FREQUENCY ESTIMATORS

Sevim Hazal UZ

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electronics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Instantaneous estimation of the frequency of a real sinusoid in noise from a small number of data samples is an important problem in the signal processing area. Several frequency estimators are proposed for this problem in the literature. In this thesis, some of the popular ones including the discrete energy separation algorithms (DESAs) are considered. Using a Taylor series expansion technique, very simple and yet accurate closed form expressions for the bias and the variance of the estimators are derived. Computer simulations are included to validate the theoretical results.

Keywords: Real sinusoidal signal, Frequency estimation, Cramér – Rao bound.

2020, viii + 80 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği destek ve yardımdan dolayı değerli hocam Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU'na ve her zaman yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sevim Hazal UZ

24. 10/ 2020



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	2
2.1. Veri Modeli ve Anlık Frekans Tahmin Edicileri	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	3
3.1. Bias ve Varyans Geliştirme.....	3
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	5
5. SONUÇ	18
KAYNAKLAR	20
EKLER.....	211
EK A. DESA-1 Frekans Kestiricisi(N=4).....	21
EK B. Modifiye Edilmiş Kovaryans Frekans Kestiricisi (N=4)	28
EK C. Prony Frekans Kestiricisi(N=4)	33
EK D. DESA-1 Frekans Kestiricisi (N=5).....	39
EK E. DESA-2 Frekans Kestiricisi(N=5)	51
EK F. Modifiye Edilmiş Kovaryans Frekans Kestiricisi (N=5).....	58
EK G. Modifiye Edilmiş Prony Frekans Kestiricisi (N=5).....	69
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklamalar

ω	Frekans $\omega \in (0, \pi)$ bilinmeyen değer
$\hat{\omega}$	Kestirilen Frekans
N	Örnek Sayısı
α	Genlik
\emptyset	Faz $\emptyset \sim U(-\pi, \pi]$ rastgele değişken
var	Varyans
σ^2	Varyans Gürültüsü
$E\{.\}$	Beklenen Değer
e_n	Beyaz Gauss Gürültü Örneği, varyansı σ^2 ve \emptyset 'den Bağımsız

Kısaltmalar

Açıklamalar

SNR	Sinyal -Gürültü Oranı
MSE	Ortalama Kare Hatası
CRLB	Cramer-Rao Alt Sınırı
AWGN	Beyaz Gauss Gürültüsü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1.	SNR = 30dB' de örnek sayısı N=4 iken varyansın ω/π ' ye göre değişimi ..	6
Şekil 4.2.	SNR = 30 dB' de örnek sayısı N=4 iken biasın ω/π ' ye göre değişimi	7
Şekil 4.3.	SNR = 30 dB' de örnek sayısı N=5 iken varyansın ω/π ' ye göre değişimi...	8
Şekil 4.4.	SNR = 30 dB' de örnek sayısı N=5 iken biasın ω/π ' ye göre değişimi.....	9
Şekil 4.5.	$\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı N=4 iken varyansın SNR' ye göre değişimi ...	10
Şekil 4.6.	$\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı N=4 iken biasın SNR' ye göre değişimi.....	11
Şekil 4.7.	$\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı N=5 iken varyansın SNR' ye göre değişimi....	12
Şekil 4.8.	$\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı N=5 iken biasın SNR' ye göre değişimi.....	13
Şekil 4.9.	SNR = 30 dB' de DESA-2' nin ω/π ' ye göre varyans değişimi.....	14
Şekil 4.10.	SNR = 30 dB' de DESA-2' nin ω/π ' ye göre bias değişimi.....	15
Şekil 4.11.	$\omega = 3\pi/16$ ' da DESA-2' nin SNR' ye göre varyans değişimi.....	16
Şekil 4.12.	$\omega = 3\pi/16$ ' da DESA-2' nin SNR' ye göre bias değişimi.....	17

1. GİRİŞ

Bu tezde yüksek sinyal-gürültü oranlarında bazı anlık frekans tahmin edicilerinin gerçek bir sinüzoidin frekansını tahmin etmek için istatistiksel performans analizi sunulmaktadır. Modifiye edilmiş kovaryans ve Prony yöntemlerinden türetilen ayrık enerji ayırma algoritmalarından (DESA-1a, DESA-1, DESA-2) [2] ve önerilen dört ek tahmin ediciden türetilen frekans tahmin edicileri [1] dikkate alındı. Bir Taylor serisi genişletme tekniği kullanılarak, tahmin edicilerin sapmaları ve çok basit ama doğru bir şekilde kapalı form ifadeleri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin performans karşılaştırması da verilmiştir. Burada ele alınan veri modeli ve anlık frekans tahmin edicileri Bölüm 2'de açıklanmaktadır. Bias ve varyans gelişimi Bölüm 3'te verilmiştir. Bilgisayar simülasyonları teorik sonuçları doğrulama Bölüm 4'te sunulmuştur. Son olarak, Bölüm 5'de sonuçlar çıkarılmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Veri Modeli ve Anlık Frekans Tahmin Edicileri

Gürültüde gerçek bir sinüzoidden oluşan veri modeli denklem 2.1 de verilmiştir.

$$x_n = \alpha \cos(\omega_n + \phi) + e_n, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.1)$$

Burada sinüzoidin genliği α ve frekansı bilinmeyen sabitler iken, sinüzoidin fazının $(-\pi, \pi]$ aralığında eşit olarak dağıtılmış rastgele bir değişken olduğu varsayılır. Gürültü e_n 'nin σ^2 varyanslı sıfır-ortalama beyaz bir Gauss olduğu varsayılır ve fazdan (ϕ) bağımsızdır. N, kullanılan veri örneklerinin sayısını belirtir.

Ele alınan anlık frekans tahmin edicileri, dört veya beş veri örneği gerektirir. x_0, x_1, x_2, x_3 (ve 5 veri örneği gerektiren tahmin ediciler için x_4) olan tahminleri hesaplamak için kullanılan formüller Bölüm 3'te gösterilmektedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Bias ve Varyans Geliştirme

Desa-2 dışında ki kestiriciler için $\rho = \cos(\hat{\omega})$, Desa-2 için ise $\rho = \cos(2\hat{\omega})$ olarak tanımlanmıştır.

$$\rho = \rho(A, B) = \frac{A}{B} \quad (3.1)$$

$SNR = \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}$ olarak tanımlanmış sinyal -gürültü oranı(SNR) yeterince büyük seçilirse, ρ değeri $\cos\omega$ 'ya oldukça yakın olacaktır (DESA-2 için $\cos 2\omega$). Böylece ρ ve beklenen değerden türetilmiş olan $\rho(A, B)$ Taylor Serisi'nin genişletilmesine dayanan aşağıdaki formüller kullanılabilir:[3] [4]

$$\bar{\rho} \approx \rho(A, B)|_{A=\bar{A}, B=\bar{B}} \quad (3.2)$$

$$var(\rho) \approx var(A) \left(\frac{d\rho(A, B)}{dA} \Big|_{A=\bar{A}, B=\bar{B}} \right)^2 \quad (3.3)$$

$$+ var(A) \left(\frac{d\rho(A, B)}{dB} \Big|_{A=\bar{A}, B=\bar{B}} \right)^2$$

$$+ 2cov(A, B) \frac{d\rho(A, B)}{dA} \frac{d\rho(A, B)}{dB} \Big|_{A=\bar{A}, B=\bar{B}}$$

Bias, $bias(\hat{\omega}) = \hat{\omega} - \omega$ olarak tanımlanır. $bias(\hat{\omega})$ ve $\bar{\rho}$ arasında ve $var(\hat{\omega})$ ve $var(\rho)$ arasındaki ilişkiyi denklem 3.4 ve 3.5 'de görebiliriz; [3]

$$bias(\hat{\omega}) \approx \arccos(\bar{\rho}) - \omega \quad (3.4)$$

$$var(\hat{\omega}) \approx \frac{var(\rho)}{1-\bar{\rho}^2} \quad (3.5)$$

Desa-2 için $bias(\hat{\omega}) \approx \frac{\arccos(\bar{\rho})}{2} - \omega$ ve $var(\hat{\omega}) \approx \frac{var(\rho)}{4(1-\bar{\rho}^2)}$ olarak tanımlanır.

(3.2) ve (3.3) 'den, her kestirici için \bar{A} , \bar{B} , var (A), var (B) ve cov (A, B) değerlerinin gerekli olduğunu görüyoruz. Bu terimlerin nasıl türetildiği ekler bölümünde gösterilmiştir. Desa-1a (N=4) Ek A'da, Modifiye edilmiş kovaryans (N=4) Ek B'de, Prony (N=4) Ek C'de, Desa-1 (N=5) Ek D'de, Desa-2 (N=5) Ek E'de, Modifiye edilmiş kovaryans (N=5) Ek F'de, Modifiye edilmiş Prony (N=5) Ek G'de ele alınmıştır. ρ 'nun (ve dolayısıyla ω 'nin) ortalama ve varyans ifadeleri, ω 'nin ve SNR'ın fonksiyonudur.

Tablo 2'de özetlenen nihai sonuçlar, yukarıda belirtilen terimlerin türetilmiş (3.2) ve (3.3) ifadelerinde sadece büyük SNR için baskın terim (3.3) korunarak elde edilmiştir.

Büyük SNR değerleri için $\rho(\hat{\omega})$ 'nin yaklaşık olarak unbiased olduğu ve ortalama kare hatasının ana parçası haline gelen $var(\rho)$ ($var(\hat{\omega})$)'nin tahmin edicilerin her biri için SNR'nin ilk gücü ile ters orantılı olduğu görülebilir.

TABLO 1
ANLIK FREKANS KESTİRİCİLERİ

Kestirici	$\hat{\omega}$
DESA-1a (4 pt)	$\arccos\left(\frac{(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) + (x_1x_2 - x_0x_3)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$
Modifiye Edilmiş Kovaryans (4 pt)	$\arccos\left(\frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_3}{2(x_1^2 + x_2^2)}\right)$
Prony (4 pt)	$\arccos\left(\frac{x_1x_2 - x_0x_3}{(x_1^2 - x_0x_2) + (x_2^2 - x_1x_3)}\right)$
DESA-1 (5 pt)	$\arccos\left(\frac{2(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4) + x_1x_2 - x_0x_3 + x_2x_3 - x_1x_4}{4(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$
DESA-2 (5 pt)	$\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{(x_2^2 - x_0x_4) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$
Modifiye Edilmiş Kovaryans (5 pt)	$\arccos\left(\frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right)$
Modifiye Edilmiş Prony (5 pt)	$\arccos\left(\frac{(x_1x_2 - x_0x_3) + (x_2x_3 - x_1x_4)}{4(x_2^2 - x_1x_3)}\right)$

TABLO 2
 $\bar{\rho}$ VE $\text{var}(\rho)$ 'NUN YAKLAŞIK İFADELERİ

Kestirici	$\bar{\rho}$	$\text{var}(\rho)$
DESA-1a (4 pt)	$\frac{2\text{SNR} \sin^2 \omega \cos \omega}{1 + 2\text{SNR} \sin^2 \omega}$	$\frac{3 + 2\cos 2\omega}{4\text{SNR} \sin^2 \omega \cos^2(\omega/2)}$
Modifiye Edilmiş Kovaryans (4 pt)	$\frac{\text{SNR} \cos \omega}{\text{SNR} + 1}$	$\frac{1}{4\text{SNR}}$
Prony (4 pt)	$\frac{2\text{SNR} \sin^2 \omega \cos \omega}{1 + 2\text{SNR} \sin^2 \omega}$	$\frac{3 + 2\cos 2\omega}{4\text{SNR} \sin^2 \omega}$
DESA-1 (5 pt)	$\frac{2\text{SNR} \sin^2 \omega \cos \omega}{1 + 2\text{SNR} \sin^2 \omega}$	$\frac{12 - 14 \cos \omega + 8 \cos 2\omega - \cos 3\omega}{32\text{SNR} \sin^2 \omega \cos^2(\omega/2)}$
DESA-2 (5 pt)	$\frac{4\text{SNR} \sin^2 \omega \cos 2\omega - 1}{2(1 + 2\text{SNR} \sin^2 \omega)}$	$\frac{4 + \cos 2\omega}{2\text{SNR} \sin^2 \omega}$
Modifiye Edilmiş Kovaryans (5 pt)	$\frac{\text{SNR} \cos \omega}{\text{SNR} + 1}$	$\frac{1}{9\text{SNR}}$
Modifiye Edilmiş Prony (5 pt)	$\frac{2\text{SNR} \sin^2 \omega \cos \omega}{1 + 2\text{SNR} \sin^2 \omega}$	$\frac{5(4 + 3\cos 2\omega)}{32\text{SNR} \sin^4 \omega}$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Sayısal Örnekler

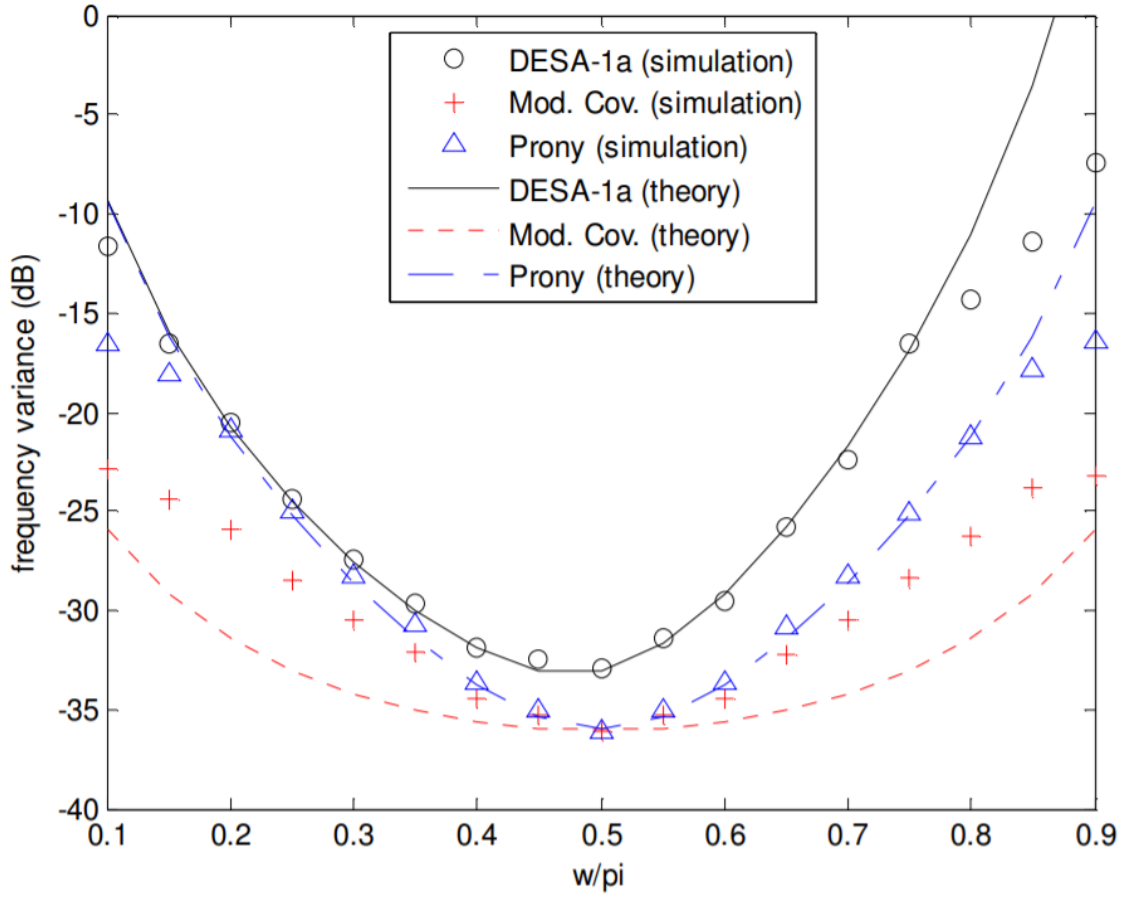
Teorik sonuçlarımızı doğrulamak için bilgisayar simülasyonları yapılmıştır. Sinüzoid genliği, gürültü örneklerinin uygun şekilde ölçeklendirilmesiyle farklı SNR'ler de elde edilmiştir. Tüm simülasyon sonuçları ortalama 1000 bağımsız çalışma ile elde edilmiştir. Grafiklerde SNR=30 dB'de $\omega \in [0.1\pi, 0.9\pi]$ için sırasıyla dört ve beş örnekli kestirimcilerin frekans varyanslarını göstermektedir. Grafiklerde hem teorik ifadeleri hem de simülasyon ifadeleri gösterilmiştir. Ölçülen varyansların, ω frekansının 0 veya π 'ye yakın olmaması şartıyla, teorik ifadelerle uygun olduğunu gözlemliyoruz.

N=4 için kestiriciler arasında aşağıdaki bağıntının tüm ω 'lar için geçerli olduğu görülebilir.

$$\text{var}(\hat{\omega}_{DESA-1a}) > \text{var}(\hat{\omega}_{Prony}) > \text{var}(\hat{\omega}_{Mod.Cov})$$

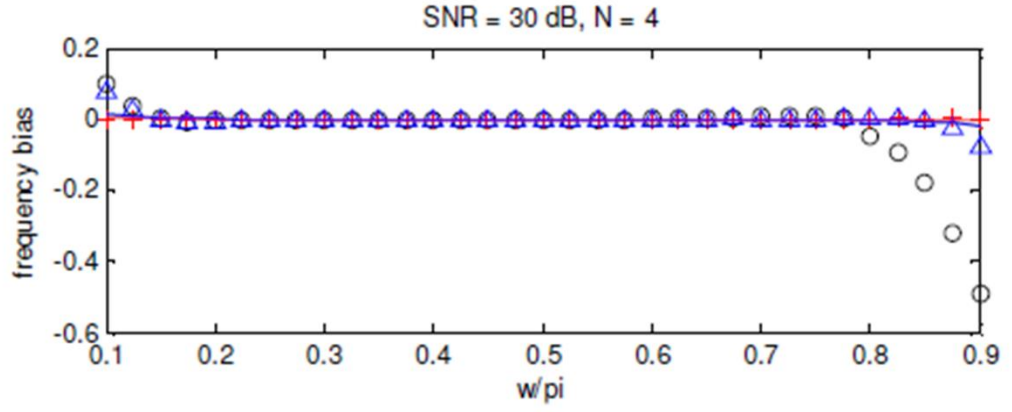
N=5 tahminciler için modifiye edilmiş kovaryans yönteminin varyansının yine DESA-1 veya modifiye edilmiş Prony'den daha az olduğunu görüyoruz. Ayrıca, $\text{var}(\hat{\omega}_{Mod.Prony}) > \text{var}(\hat{\omega}_{DESA-1})$ için $\omega \leq 0.46\pi$ iken, bu ilişki $\omega > 0.46\pi$ için tersine çevrildiği gözlemlenmiştir.

Grafiklerde $\omega = 3\pi/8$ 'de SNR'ye karşı sırasıyla dört ve beş örnekli kestiricilerin frekans varyanslarını da göstermektedir. Teorik ifadelerin $SNR \geq 15$ dB için simülasyon sonuçlarıyla iyi anlaştığı gözlemlenebilir. Beş örnekli kestirici DESA-2'nin yukarıdaki deneylere dahil edilmediğine dikkat edin, çünkü $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığında çalışmaz. DESA-2'nin ölçülen ve teorik frekans varyansları SNR=30 dB'de $\omega \in [0.05\pi, 0.45\pi]$ için Şekil 4.9 'da gösterilmektedir ve Şekil 4.11'de $\omega = 3\pi/16$ 'de SNR'ye karşı varyansları göstermektedir. DESA-2 varyansının $\omega < 0.35\pi$ için değiştirilmiş Prony ve DESA-1 arasında yer aldığı görülebilir, ancak $\omega \geq 0.35\pi$ için diğer tüm tahmin edicilerden daha büyüktür.



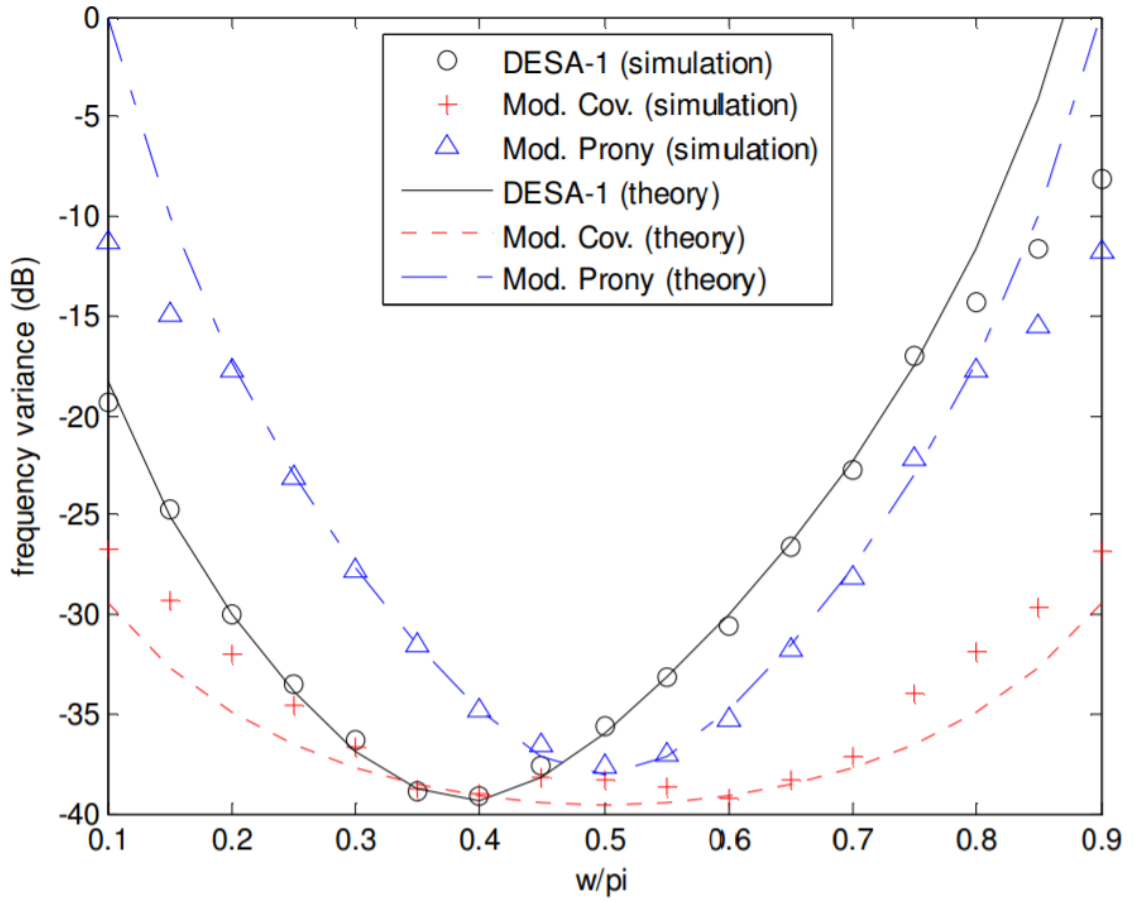
Şekil 4.1. SNR = 30 dB' de örnek sayısı N=4 iken varyansın ω/π ' ye göre değişimi

Şekil 4.1'de örnek sayısı N=4 ve SNR=30 dB iken varyansın ω/π ' ye göre değişimi gösterilmiştir. N=4 için kestiriciler arasında $\text{var}(\hat{\omega}_{DESA-1a}) > \text{var}(\hat{\omega}_{Prony}) > \text{var}(\hat{\omega}_{Mod.Cov})$ ilişkisinin tüm ω 'lar için geçerli olduğu görülebilir.



Şekil 4.2. SNR = 30 dB' de örnek sayısı N=4 iken biasın ω/π ' ye göre değişimi

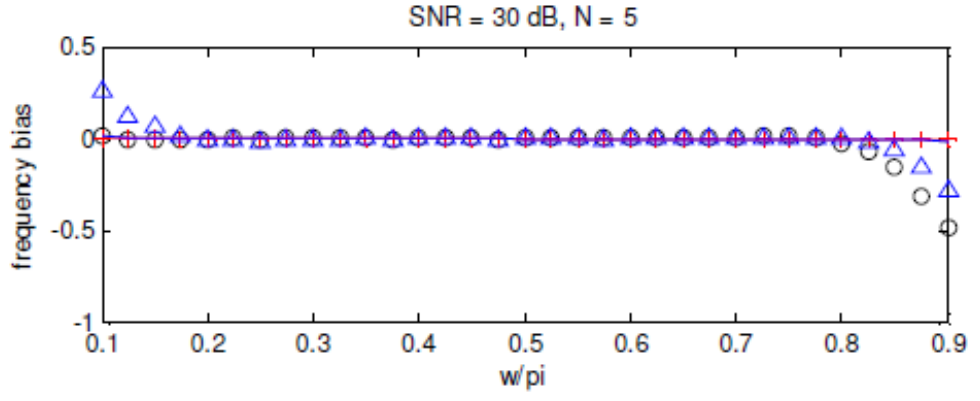
Şekil 4.2' de örnek sayısı N=4 ve SNR=30 dB iken biasın ω/π ' ye göre değişimi gösterilmiştir. Ölçülen biasların frekansın 0 ve π ye yakın olmadığı yerlerde teorik ifadelere uygun olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 4.3. SNR = 30 dB’ de örnek sayısı N=5 iken varyansın ω/π ’ ye göre değişimi

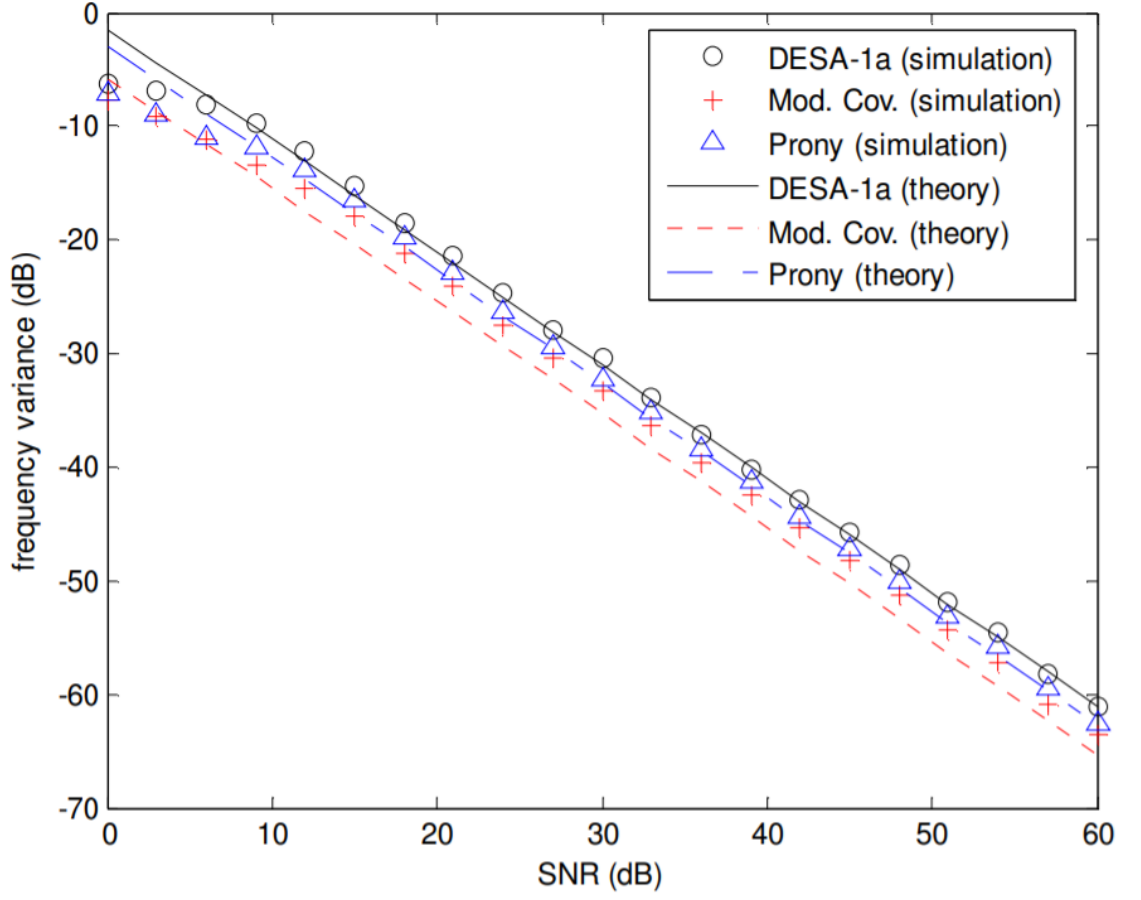
Şekil 4.3’ te örnek sayısı N=5 ve SNR=30 dB iken varyansın ω/π ’ ye göre değişimi gösterilmiştir. N=5 için de modifiye edilmiş kovaryans yönteminin varyansının yine Des-1a veya modifiye edilmiş Prony ‘den daha az olduğu görülmektedir.

Ayrıca $\omega < 0,46$ iken modifiye edilmiş prony varyansı, desa-1 varyansından büyüktür. $\omega > 0,46$ iken aralarındaki ilişki tersine çevrilir.



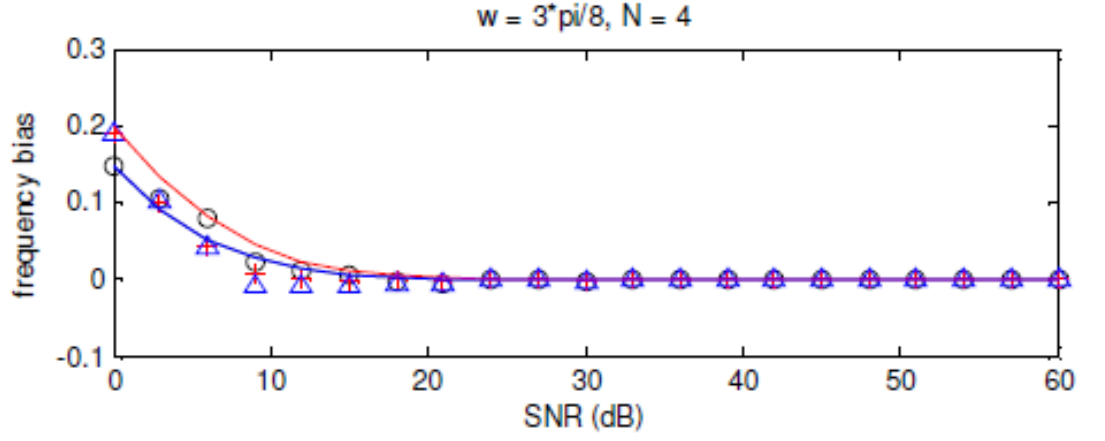
Şekil 4.4. SNR = 30 dB’ de örnek sayısı N=5 iken biasın ω/π ’ ye göre değişimi

Şekil 4.4’ te örnek sayısı N=5 ve SNR=30 dB iken biasın ω/π ’ ye göre değişimi gösterilmiştir.



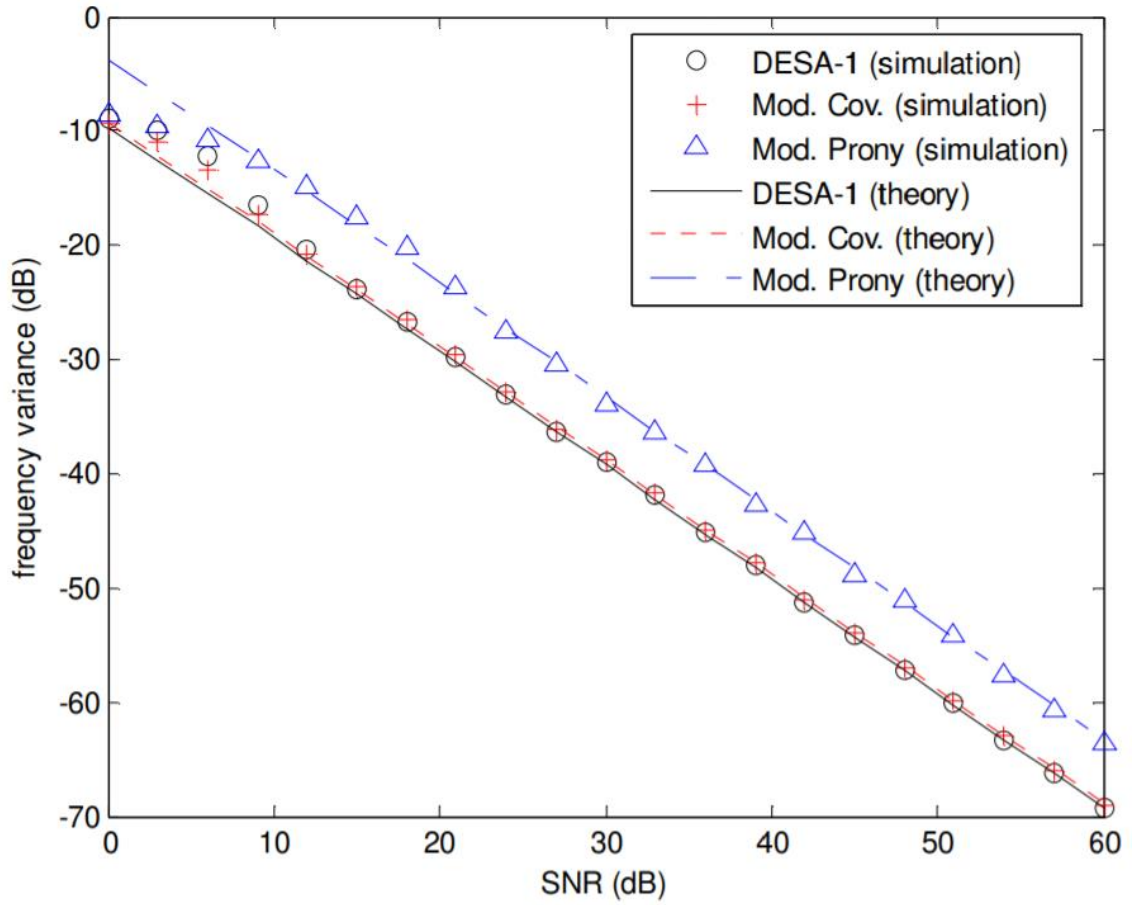
Şekil 4.5. $\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı $N=4$ iken varyansın SNR' ye göre değişimi

Şekil 4.5.' te örnek sayısı $N=4$ ve $\omega = 3\pi/8$ iken varyansın SNR' ye göre değişimi gösterilmiştir.



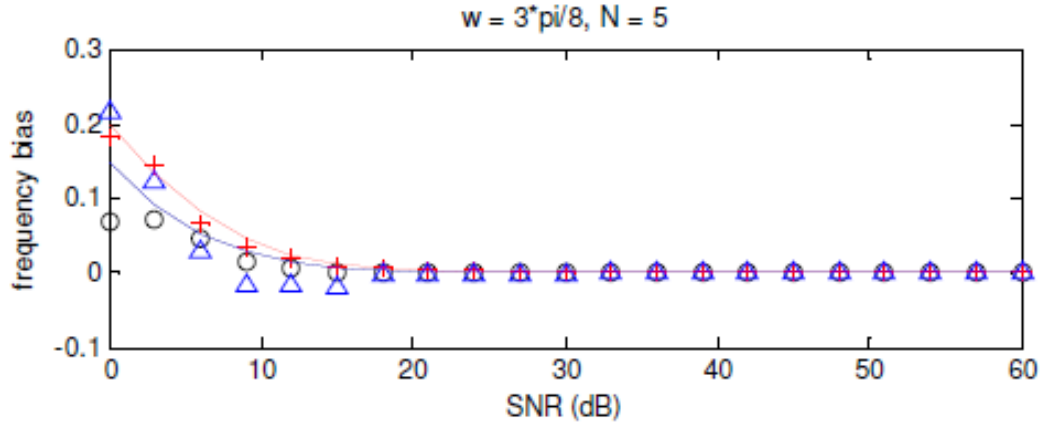
Şekil 4.6. $\omega = 3\pi/8$ de örnek sayısı $N=4$ iken biasın SNR' ye göre değişimi

Şekil 4.6.' da örnek sayısı $N=4$ ve $\omega = 3\pi/8$ iken biasın SNR' ye göre değişimi gösterilmiştir. Teorik ifadelerin $\text{SNR}=15\text{dB}$ ve üzeri değerleri için simülasyon sonuçları ile yakın değerler olduğu gözlemlenebilir.



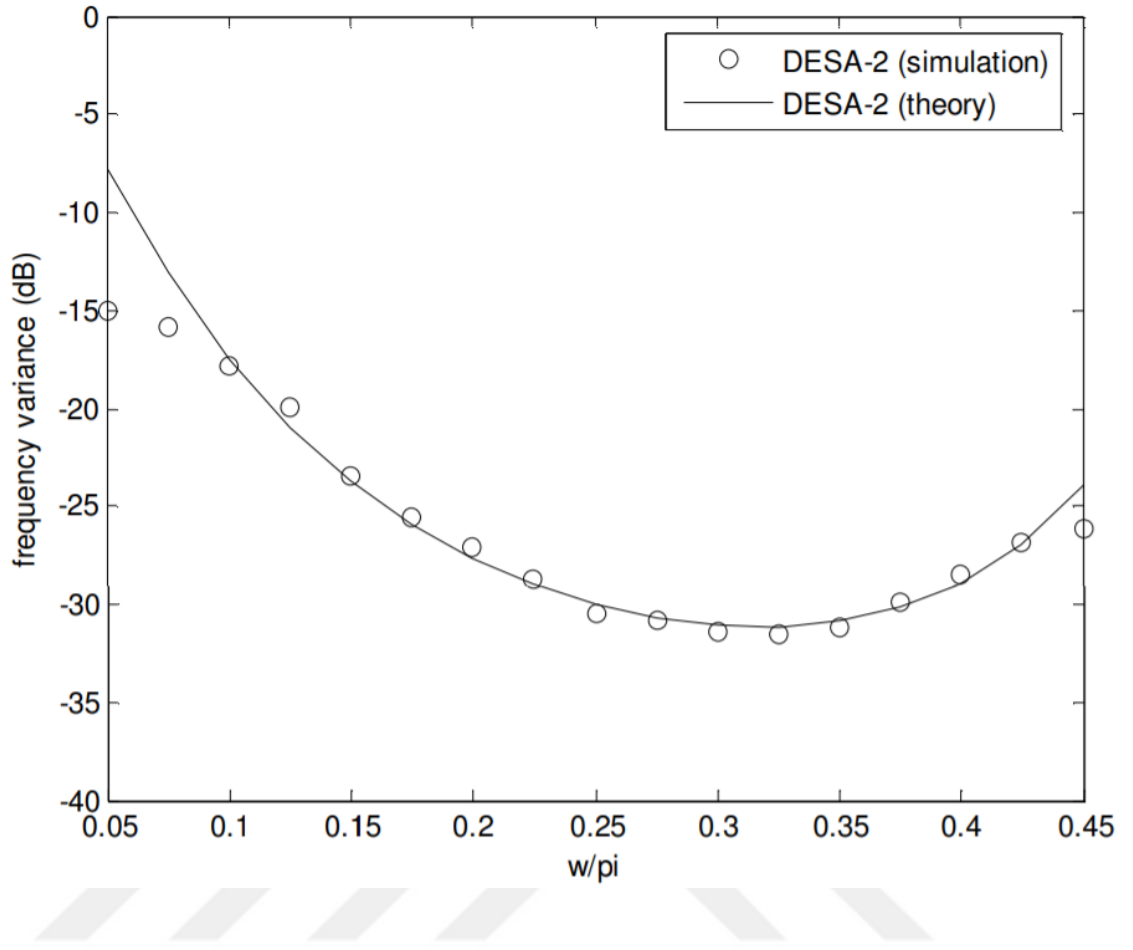
Şekil 4.7. $\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı $N=5$ iken varyansın SNR' ye göre değişimi

Şekil 4.7.' de örnek sayısı $N=5$ ve $\omega = 3\pi/8$ iken varyansın SNR' ye göre değişimi gösterilmiştir.



Şekil 4.8. $\omega = 3\pi/8$ ' de örnek sayısı $N=5$ iken biasın SNR' ye göre değişimi

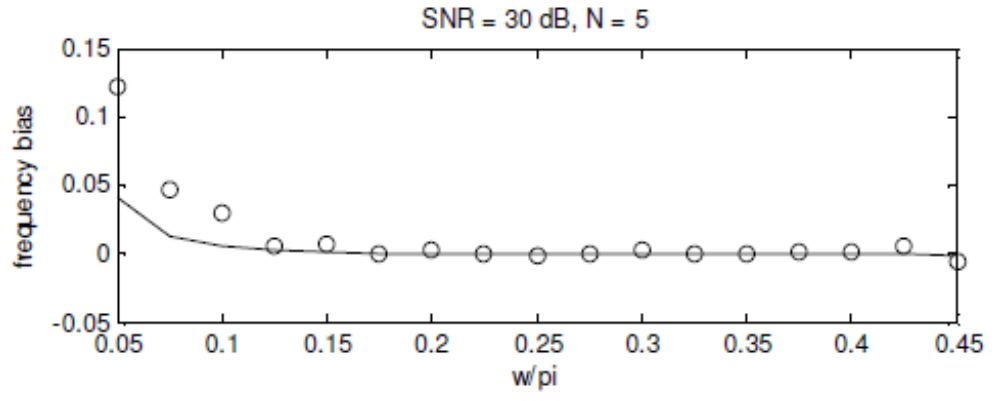
Şekil 4.8.' de örnek sayısı $N=5$ ve $\omega = 3\pi/8$ iken biasın SNR' ye göre değişimi gösterilmiştir. Teorik ifadelerin SNR=15 dB ve üzeri değerler için simülasyon sonuçları ile yakın değerler olduğunu gözlemleyebiliriz.



Şekil 4.9. SNR = 30 dB’ de DESA-2’ nin ω/π ’ ye göre varyans değişimi

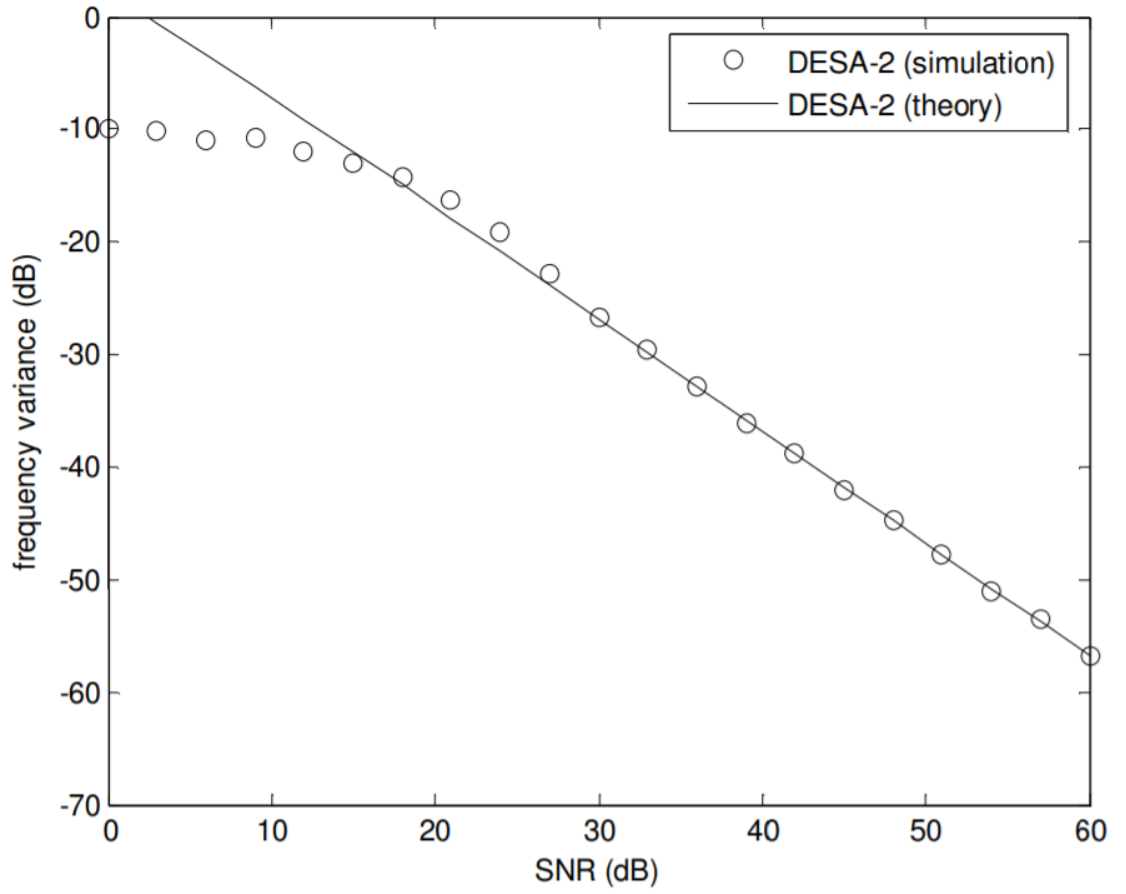
Şekil 4.9.’ da SNR = 30 dB iken DESA-2’ nin ω/π ’ ye göre varyans değişimi gösterilmiştir.

Desa-2 ‘nin ölçülen ve teorik frekans bias ve varyansları bu grafiklerde gösterilmiştir. SNR=30dB ve $\omega \in [0.05\pi, 0.45\pi]$ aralığındadır.



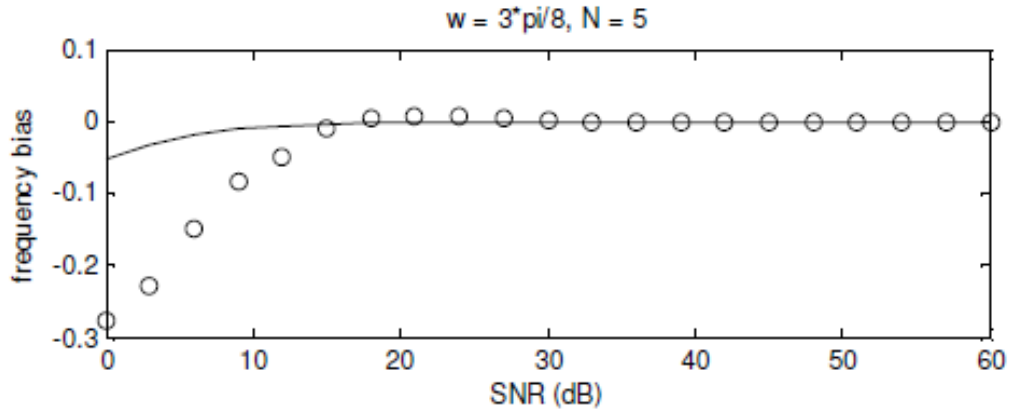
Şekil 4.10. SNR = 30 dB' de DESA-2' nin ω/π ' ye göre bias değışimi

Şekil 4.10.' da SNR = 30 dB iken DESA-2' nin ω/π ' ye göre bias değışimi gösterilmiştir.



Şekil 4.11. $\omega = 3\pi/16$ ' da DESA-2' nin SNR' ye göre varyans değışimi

Şekil 4.11.' de $\omega = 3\pi/16$ iken DESA-2' nin SNR' ye göre varyans değışimi gösterilmiştir.



Şekil 4.12. $\omega = 3\pi/16$ ' da DESA-2' nin SNR' ye göre bias değişimi

Şekil 4.12.' de $\omega = 3\pi/16$ iken DESA-2' nin SNR' ye göre bias değişimi gösterilmiştir. Teorik ifadelerin SNR=15 dB ve üzeri değerler için simülasyon sonuçları ile yakın değerler olduğunu gözlemleyebiliriz.

5. SONUÇLAR

Beyaz Gauss gürültüsündeki gerçek bir sinüzoidin frekansını tahmin edebilmek için 7 anlık frekans tahmin edicisinin istatistiksel analizi sunulmuştur.

Kestiricilerin Bias ve varyansı çok basit ve kapalı form ifadeleri yüksek SNR için elde edilmiştir. Teorik sonuçları doğrulamak için bilgisayar simülasyonları gösterilmiştir.

Simülasyon sonuçlarında da teorik sonuçlara yakın değerler elde edilmiş, böylelikle frekans kestiricileri için kullanılan genel ifadelerin geçerliliği kanıtlanmıştır.



KAYNAKLAR

- [1] **Fertig, L. B., McClellan, J. H. 1996.** Instantaneous frequency estimation using linear prediction with comparisons to DESAs. *IEEE Signal Processing Letters*, 3(2):54-56.
- [2] **Maragos, P., Kaiser, J. F., Quateri, T. F. 1992.** On separating amplitude from frequency modulations using energy operators. *Proc. ICASSP-92*, vol. 2: 1-4.
- [3] **Papoulis, A. 1991.** Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. New York: McGraw-Hill.
- [4] **So, H. C., Chan, Y. T., Ho, K. C., Yuan Chen 2013.** Simple formulas for bias and mean square error computation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(4): 162-165.



EKLER

EK A DESA-1A FREKANS KESTİRİCİSİ

$\hat{\rho}$ denklemini A,B olarak pay ve paydasına ayrıldığını varsayarsak,

$$\hat{\rho} = \frac{x_2^2 - x_1x_3 - x_1^2 + x_0x_2 + x_1x_2 - x_0x_3}{2(x_2^2 - x_1x_3)} = \frac{A}{B} \quad (\text{A.1})$$

A 'nın beklenen değeri denklem A.2 ile hesaplanır:

$$E[A] = \frac{\sigma^2}{2} s(z_1 - z_3) \quad (\text{A.2})$$

B'nin beklenen değeri denklem A.3 ile hesaplanır:

$$E[B] = 2\sigma^2(s + 1) - 2\frac{\sigma^2}{2}sz_2 = \frac{\sigma^2}{2} [4(s + 1) - 2sz_2] \quad (\text{A.3})$$

$\hat{\rho}$ 'nın beklenen değeri A ve B nin beklenen değer cinsinden yazılırsa,

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A]}{E[B]} = \frac{s(z_1 - z_3)}{4(s+1) - 2sz_2} = \frac{2s(\cos\omega - \cos 3\omega)}{4(s+1) - 4s\cos 2\omega} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{2s(\cos\omega - 4\cos^3\omega + 3\cos\omega)}{4s(1 - \cos 2\omega) + 4} = \frac{8s\cos\omega(1 - \cos^2\omega)}{8s\sin^2\omega + 4}$$

$$= \frac{\cos\omega}{1 + \frac{4}{8s\sin^2\omega}}$$

$\hat{\rho}$ 'ın bias değeri denklem A.5 ile hesaplanır:

$$\text{bias}(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho \cong \cos\omega \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2s\sin^2\omega}} - 1 \right) = -\frac{\cos\omega}{1 + 2s\sin^2\omega} \quad (\text{A.5})$$

A^2 hesaplanır;

$$\begin{aligned} A^2 &= x_2^4 + x_1^2 x_3^2 + x_1^4 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2 \\ &\quad - 2x_2^2 x_1 x_3 - 2x_1^2 x_2^2 + 2x_2^3 x_0 + 2x_2^3 x_1 - 2x_2^2 x_0 x_3 \\ &\quad + 2x_1^3 x_3 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 - 2x_1^2 x_2 x_3 + 2x_3^2 x_0 x_1 \\ &\quad - 2x_1^2 x_0 x_2 - 2x_1^3 x_2 + 2x_1^2 x_0 x_3 \\ &\quad + 2x_2^2 x_0 x_1 - 2x_0^2 x_2 x_3 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 \\ &= x_2^4 + x_1^4 + 2x_2^3 x_0 + 2x_2^3 x_1 + 2x_1^3 x_3 - 2x_1^3 x_2 \\ &\quad + x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2 \\ &\quad - 2x_2^2 x_1 x_3 - 2x_2^2 x_0 x_3 - 2x_1^2 x_2 x_3 + 2x_3^2 x_0 x_1 \\ &\quad - 2x_1^2 x_0 x_2 + 2x_1^2 x_0 x_3 + 2x_2^2 x_0 x_1 - 2x_0^2 x_2 x_3 - 4x_0 x_1 x_2 x_3 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A^2 'nin beklenen değeri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} E[A^2] &= 2 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 - 4s + 2) + 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2)z_2 \\ &\quad + 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_4] - \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] \\ &\quad + \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 s^2 z_6] - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_2] - 4 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) \\ &= \frac{\sigma^4}{4} \{ [12s^2 + 48s + 24] + 8(s + 1)^2 - 8s^2 - 8s^2 \} \\ &\quad + [12s(s + 2) - s^2 - 8s(s + 1) - 4s^2]z_2 + (2s^2 - 4s^2)z_4 + s^2 z_6 \} \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(4s^2 + 64s + 32) + (-s^2 + 16s)z_2 - 2s^2 z_4 + s^2 z_6] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$(E[A])^2$ hesaplaması denklem A.8’de gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}(E[A])^2 &= \frac{\sigma^4}{4} s^2 [(z_2 + 2) + (z_6 + 2) - 2(z_4 + z_2)] \\ &= \frac{\sigma^4}{4} (4s^2 - s^2 z_2 - 2s^2 z_4 + s^2 z_6)\end{aligned}\tag{A.8}$$

Hesaplanan değerler formülde yerine yerleştirilirse A ‘nın varyansı denklem A.9 ‘da ki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}var(A) &= E[A^2] - (E[A])^2 \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(64s + 32) + 16sz_2]\end{aligned}\tag{A.9}$$

Aynı işlemler B^2 içinde yapılır:

$$B^2 = 4x_2^2 + 4x_1^2 x_3^2 - 8x_2^2 x_1 x_3\tag{A.10}$$

B^2 ’nin beklenen değeri hesaplanır:

$$\begin{aligned}E[B^2] &= 4 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_4] \\ &\quad - 8 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_2] \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(24s^2 + 128s + 64) + (-16s^2 - 16s)z_2 + 4s^2 z_4]\end{aligned}\tag{A.11}$$

B'nin varyansını bulmak için $(E[B])^2$ değerinde hesaplanması gerekmektedir.

$$(E[B])^2 = \frac{\sigma^4}{4} [16(s+2)^2 + 4s^2(z_4+2) - 16s(s+1)z_2] \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(24s^2 + 32s + 16) + (-16s^2 - 16s)z_2 + 4s^2z_4]$$

B'nin varyansı denklem A.13'de gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\text{var}(B) = E[B^2] - (E[B])^2 \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} (96s + 48)$$

AB değeri;

$$AB = (x_2^2 - x_1x_3 - x_1^2 - x_0x_2 + x_1x_2 - x_0x_3)(2x_2^2 - 2x_1x_3) \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} &= 2x_2^4 - 2x_2^2x_1x_3 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^3x_0 + 2x_2^3x_1 - 2x_2^2x_0x_3 \\ &\quad - 2x_2^2x_1x_3 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_1^3x_3 - 2x_0x_1x_2x_3 - 2x_1^2x_2x_3 + 2x_3^2x_0x_1 \\ &= 2x_2^4 + 2x_2^3x_0 + 2x_2^3x_1 + 2x_1^3x_3 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 \\ &\quad - 4x_2^2x_1x_3 - 2x_2^2x_0x_3 - 2x_1^2x_2x_3 + 2x_3^2x_0x_1 - 2x_0x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

AB'nin varyansı denklem A.15 ile hesaplanır:

$$E[AB] = 2 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_2 + 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_1 \quad (\text{A.15})$$

$$- 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2z_2] + 2 \frac{\sigma^4}{2} [4(s+1)^2 + s^2z_4]$$

$$- 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_2 + 2s(s+1)z_2] - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_1 + 2s(s+1)z_3]$$

$$- 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_3 + 2s(s+1)z_1] + 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_5 + 2s(s+1)z_1] - 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2(z_4 + z_2 + 2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^4}{4} \{ [12s^2 + 48s + 24 - 8(s+1)^2 + 8(s+1)^2 - 8s^2 - 4s^2] \\
&\quad + [6s(s+2) - 2s^2 - 4s(s+1) + 4s(s+1)]z_1 \\
&\quad + [12s(s+2) - 2s^2 - 8s(s+1) - 2s^2]z_2 \\
&\quad + [-4s(s+1) - 2s^2]z_3 + (2s^2 - 2s^2)z_4 + 2s^2z_5 \}
\end{aligned}$$

[AB] değeri hesaplaması;

$$[AB] = \frac{\sigma^4}{4} [(48s + 24) + (4s^2 + 12s)z_1 + 16sz_2 + (-6s^2 - 4s)z_3 + 2s^2z_5] \quad (\text{A.16})$$

$E[A]E[B]$ değeri hesaplaması:

$$E[A]E[B] = \frac{\sigma^2}{2}s(z_1 - z_3) \frac{\sigma^2}{2} [4(s+1) - 2sz_2] \quad (\text{A.17})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [4s(s+1)z_1 - 2s^2(z_3 + z_1) - 4s(s+1)z_3 + 2s^2(z_5 + z_3)]$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} \{ [4s(s+1) - 2s^2 + 2s^2]z_1 + [-2s^2 - 4s(s+1)]z_3 + 2s^2z_5 \}$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(4s^2 + 4s)z_1 + (-6s^2 - 4s)z_3 + 2s^2z_5]$$

A ve B 'nin kovaryansı denklem A.18 ile hesaplanır.

$$\text{cov}(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(48s + 24) + 8sz_1 + 16sz_2]$$

$(E[B])^2 \text{var}(A)$ hesaplaması:

$$\begin{aligned}
(E[B])^2 var(A) &= \sigma^4[(6s^2 + 8s + 4) + (-4s^2 - 4s)z_2 + s^2z_4]\sigma^4[(16s + 8) + 4sz_2] \\
&= \sigma^8[(64s^3 + 144s^2 + 128s + 32) + (-36s^3 - 64s^2 - 16s)z_2 \\
&\quad - 8s^2z_4 + 4s^3z_6] \tag{A.19}
\end{aligned}$$

$(E[A])^2 var(B)$ hesaplaması:

$$\begin{aligned}
(E[A])^2 var(B) &= \frac{\sigma^4}{4}(4s^2 - s^2z_2 - 2s^2z_4 + s^2z_6)\frac{\sigma^4}{4}16(6s + 3) \tag{A.20} \\
&= \sigma^8[(24s^3 + 12s^2) + (-6s^3 - 3s^2)z_2 + (-12s^3 - 6s^2)z_4 \\
&\quad + (6s^3 + 3s^2)z_6]
\end{aligned}$$

A,B nin beklenen değerleri ile (A,B) 'nin kovaryansının çarpımı denklem A.21 ile bulunur;

$$\begin{aligned}
E[A]E[B]cov(A, B) &= \frac{\sigma^4}{2}[(2s^2 + 2s)z_1 + (-3s^2 - 2s)z_3 + s^2z_5] \tag{A.21} \\
&\quad \cdot \sigma^4[(12s + 6) + 2sz_1 + 4sz_2] \\
&= \frac{\sigma^8}{2}[(8s^3 + 8s^2) + (20s^3 + 36s^2 + 12s)z_1 - 2s^3z_2 \\
&\quad + (-24s^3 - 34s^2 - 12s)z_3 + (-4s^3 - 4s^2)z_4 - 2s^2z_5 \\
&\quad + 2s^3z_6 + 4s^3z_7]
\end{aligned}$$

Diğer yöntemlerde uyguladığımız gibi işimizi kolaylaştırmak adına pay,payda iki kısım olduğunu varsayalım;

$$\begin{aligned}
PAY &= \sigma^8[(80s^3 + 148s^2 + 128s + 32) - (20s^3 + 36s^2 + 12s)z_1 \tag{A.22} \\
&\quad - (40s^3 + 67s^2 + 16s)z_2 + (24s^3 + 34s^2 + 12s)z_3 - (8s^3 + 10s^2)z_4 \\
&\quad + 2s^2z_5 + (8s^3 + 3s^2)z_6 - 4s^3z_7]
\end{aligned}$$

$$PAYDA = (E[B])^4 = \frac{\sigma^8}{16} [4(1 + 2s\sin^2\omega)]^4 \quad (\text{A.23})$$

$$= 16\sigma^8(1 + 2s\sin^2\omega)^4$$

$$var(\hat{\rho}) \cong \frac{(20s^3+37s^2+32s+8)-(5s^3+9s^2+3s)z_1-(10s^3+\frac{67}{4}s^2+4s)z_2+(6s^3+\frac{17}{2}s^2+3s)z_3-(2s^3+\frac{5}{2}s^2)z_4+(\frac{1}{2}s^2)z_5+(2s^3+\frac{3}{4}s^2)z_6-s^3z_7}{4(1+2s\sin^2\omega)^4}$$

$$PAY \rightarrow 20 - 5z_1 - 10z_2 + 6z_3 - 2z_4 + 2z_6 - z_7 \quad (\text{A.24})$$

$$PAYDA \rightarrow 4.16s\sin^8\omega \quad (\text{A.25})$$

$(\hat{\rho})$ 'ın varyansı denklem A.26'da gösterildiği gibidir.

$$var(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{(10-5\cos\omega-10\cos2\omega+6\cos3\omega-2\cos4\omega+2\cos6\omega-\cos7\omega)}{32s\sin^8\omega} \quad (\text{A.26})$$

$$= \frac{3 + 2\cos2\omega}{4s\sin^2\omega\cos^2(\frac{\omega}{2})}$$

EK B MODİFİYE EDİLMİŞ KOVARYANS FREKANS KESTİRİCİSİ (N=4)

$\hat{\rho}$ 'yı A/B olarak ayırdığımızı varsayalım,

$$\hat{\rho} = \frac{A}{B};$$

A denklem B.1'de ki gibi gösterilir.

$$A = x_1(x_0 + x_2) + x_2(x_1 + x_3) = x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_3 \quad (\text{B.1})$$

B denklem B.2'deki gibi gösterilir.

$$B = 2x_1^2 + 2x_2^2 \quad (\text{B.2})$$

A'nın beklenen değeri ;

$$E[A] = 4 \frac{\sigma^2}{2} s z_1 = 2\sigma^2 s z_1 \quad (\text{B.3})$$

B'nin beklenen değeri;

$$E[B] = 4\sigma^2(s + 1) \quad (\text{B.4})$$

$\hat{\rho}$ 'nın beklenen değeri A ve B nin beklenen değerlerinin oranıdır. Denklem B.5'de gösterilmiştir.

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A]}{E[B]} = \frac{2\sigma^2 s z_1}{4\sigma^2(s+1)} = \frac{s}{s+1} \cos\omega = \frac{s}{s+1} \rho \quad (\text{B.5})$$

$\hat{\rho}$ 'nın bias değeri ise denklem B.6 'da ki gibi hesaplanır:

$$\text{bias}(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho = \frac{s}{s+1} \rho - \rho = -\frac{1}{s+1} \rho = -\frac{\cos\omega}{s+1} \quad (\text{B.6})$$

A^2 'nin değeri;

$$A^2 = x_0^2 x_1^2 + 4x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + 4x_1^2 x_0 x_2 + 2x_0 x_1 x_2 x_3 + 4x_2^2 x_1 x_3 \quad (\text{B.7})$$

$$= x_0^2 x_1^2 + 4x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + 4x_1^2 x_0 x_2 + 4x_2^2 x_1 x_3 + 2x_0 x_1 x_2 x_3$$

A^2 'nin beklenen değeri denklem B.8'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} E[A^2] &= 6 \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_2] + 8 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s+1)z_2] + 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) \\ &= \frac{\sigma^4}{2} [(22s^2 + 24s + 12) + (12s^2 + 8s)z_2 + s^2 z_4] \end{aligned} \quad (B.8)$$

$(E[A])^2$ nin formül hali;

$$(E[A])^2 = 4\sigma^4 s^2 (z_2 + 2) = \frac{\sigma^4}{2} (16s^2 + 8s^2 z_2) \quad (B.9)$$

Buluntular B.10 denkleminde yerine yazılırsa A 'nın varyansı elde edilir.

$$\begin{aligned} var(A) &= E[A^2] - (E[A])^2 \\ &= \frac{\sigma^4}{2} [(6s^2 + 24s + 12) + (4s^2 + 8s)z_2 + s^2 z_4] \end{aligned} \quad (B.10)$$

B^2 'in değeri;

$$B^2 = 4x_1^4 + 4x_2^4 + 8x_1^2 x_2^2 \quad (B.11)$$

B^2 'in beklenen değeri;

$$E[B^2] = 8 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 8 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(40s^2 + 128s + 64) + 4s^2 z_2]$$

B 'nin varyansını hesaplayabilmemiz için $(E[B])^2$ değeri denklem B.13'deki gibi hesaplanmaktadır.

$$(E[B])^2 = 16\sigma^4 (s + 1)^2 = \frac{\sigma^4}{2} (32s^2 + 64s + 32) \quad (\text{B.13})$$

B'nin varyansı denklem B.14 ile hesaplanır:

$$\text{var}(B) = E[B^2] - (E[B])^2 \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(8s^2 + 64s + 32) + 4s^2 z_2]$$

AB değeri;

$$AB = (x_0 x_1 + 2x_1 x_2 + x_2 x_3)(2x_1^2 + 2x_2^2) \quad (\text{B.15})$$

$$= 2x_1^3 x_0 + 4x_1^3 x_2 + 4x_2^3 x_1 + 2x_2^3 x_3 + 2x_1^2 x_2 x_3 + 2x_2^2 x_0 x_1$$

AB 'nin beklenen değeri denklem B.16'da ki gibi hesaplanmaktadır.

$$E[AB] = 12 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2)z_1 + 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_3 + 2s(s + 1)z_1] \quad (\text{B.16})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} \{ [36s(s+2) + 8s(s+1)]z_1 + 4s^2z_3 \}$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(44s^2 + 80s)z_1 + 4s^2z_3]$$

(A,B)'nin kovaryansının hesaplanabilmesi için $E[A]E[B]$ değerine ihtiyacımız vardır.

$$E[A]E[B] = (2\sigma^2sz_1)[4\sigma^2(s+1)] = 8\sigma^4s(s+1)z_1 = \frac{\sigma^4}{4}(32s^2 + 32s)z_1 \quad (B.17)$$

(A,B) 'nin kovaryansı denklem B.18 'de ki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} cov(A,B) &= E[AB] - E[A]E[B] \quad (B.18) \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(12s^2 + 48s)z_1 + 4s^2z_3] \end{aligned}$$

$\hat{\rho}$ 'in varyansı A,B cinsinden değeri denklem B.19'da ki gibidir.

$$\begin{aligned} var(\hat{\rho}) &\cong \left(\frac{d\hat{\rho}}{dA}\right)^2 var(A) + \left(\frac{d\hat{\rho}}{dB}\right)^2 var(B) + 2\left(\frac{d\hat{\rho}}{dA}\right)\left(\frac{d\hat{\rho}}{dB}\right)cov(A,B) \quad (B.19) \\ &= \frac{B^2 var(A) + A^2 var(B) - 2ABcov(A,B)}{B^4} \end{aligned}$$

$(E[B])^2 var(A)$ değerinin hesaplanması;

$$(E[B])^2 var(A) = 16\sigma^4(s^2 + 2s + 1) \quad (B.20)$$

$$\cdot \frac{\sigma^4}{2} [(6s^2 + 24s + 12) + (4s^2 + 8s)z_2 + s^2z_4]$$

$$= 8\sigma^8 [(6s^4 + 36s^3 + 66s^2 + 48s + 12) + (4s^4 + 16s^3 + 20s^2 + 8s)z_2 + (s^4 + 2s^3 + s^2)z_4]$$

$(E[A])^2 var(B)$ değerinin hesaplanması;

$$(E[A])^2 var(B) = 4\sigma^4 s_2 (2 + z_2) 2\sigma^4 [(2s^2 + 16s + 8) + s^2z_2] \quad (B.21)$$

$$= 8\sigma^8 s^2 [(6s^4 + 32s^3 + 16s^2) + (4s^4 + 16s^3 + 8s^2)z_2 + s^4z_4]$$

A,B 'nin beklenen değerleri ile (A,B) 'nin kovaryansının çarpımı denklem B.22 'de gösterildiği şekildedir:

$$E[A]E[B]cov(A,B) = (2\sigma^2 sz_1) 4\sigma^2 (s + 1) \sigma^4 [(3s^2 + 12s)z_1 + s^2z_3] \quad (B.22)$$

$$= 8\sigma^8 [(6s^4 + 30s^3 + 24s^2) + (4s^4 + 16s^3 + 12s^2)z_2 + (s^4 + s^3)z_4]$$

İşlem kolaylığı olması adına Pay ve Payda ayrı ayrı düşünülürse;

$$PAY = 8\sigma^8 [(8s^3 + 34s^2 + 48s + 12) + (4s^2 + 8s)z_2 + s^2z_4] \quad (B.23)$$

$$PAYDA = (E[B])^4 = [4\sigma^2 (s + 1)]^4 = 256\sigma^8 (s + 1)^4 \quad (B.24)$$

$(\hat{\rho})$ 'nın varyansı denklem B.25 ile hesaplanır.

$$\text{var}(\hat{\rho}) \cong \frac{(4s^3+17s^2+24s+6)+(2s^2+4s)z_2+\frac{1}{2}s^2z_4}{16(s+1)^4} \quad (\text{B.25})$$

$$\text{var}(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{1}{4s} \quad (\text{B.26})$$

EK C PRONY FREKANS KESTİRİCİSİ (N=4)

$\hat{\rho}$ denklemi A,B olarak pay ve paydasına ayrıldığını varsayarsak,

$$\hat{\rho} = \frac{x_1x_2-x_0x_3}{x_1^2-x_0x_2+x_2^2-x_1x_3} = \frac{A}{B} \quad (\text{C.1})$$

A 'nın beklenen değeri denklem C.2'de ki gibi hesaplanır:

$$E[A] = \frac{\sigma^2}{2} s(z_1 - z_3) \quad (\text{C.2})$$

B'nin beklenen değeri denklem C.3 'de ki gibi hesaplanır:

$$E[B] = 2\sigma^2(s+1) - 2\frac{\sigma^2}{2}sz_2 = \sigma^2[2(s+1) - sz_2] \quad (\text{C.3})$$

$\hat{\rho}$ 'nun beklenen değeri ;

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A]}{E[B]} = \frac{s(z_1-z_3)}{4(s+1)-2sz_2} = \frac{2s(\cos\omega-\cos3\omega)}{4s+4-4s\cos2\omega} \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{2s(\cos\omega-4\cos^3\omega+3\cos\omega)}{4s(1-\cos2\omega)+4} = \frac{2ssin^2\omega\cos\omega}{2ssin^2\omega+1}$$

$\hat{\rho}$ 'ın bias 'ı denklem C.5 'de ki gibi hesaplanır:

$$bias(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho \cong -\frac{\cos\omega}{1+2s\sin^2\omega} \quad (C.5)$$

A^2 'ın değeri,

$$A^2 = x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_3^2 - 2x_0 x_1 x_2 x_3 \quad (C.6)$$

A^2 'ın beklenen değeri ,

$$E[A^2] = \frac{\sigma^2}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_2] + \frac{\sigma^2}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_6] \quad (C.7)$$

$$-2 \frac{\sigma^2}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{4} \{ [8(s+1)^2 - 4s^2] + (s^2 - 2s^2)z_2 - 2s^2 z_4 + s^2 z_6 \}$$

$$= \frac{\sigma^2}{4} [(4s^2 + 16s + 8) - s^2 z_2 - 2s^2 z_4 + s^2 z_6]$$

$(E[A])^2$ de hesaplanırsa A 'nın varyansı için gerekli tüm ifadeler ulaşılmış oluruz.

$$(E[A])^2 = \frac{\sigma^2}{4} s^2 [(z_2 + 2) + (z_6 + 2) - 2(z_4 + z_2)] \quad (C.8)$$

$$= \frac{\sigma^2}{4} s^2 (4 - z_2 - 2z_4 + z_6)$$

A'nın varyansı, genel formülde bulunan ifadelerin yerine yazılmasıyla oluşturulur.

$$var(A) = E[A^2] - (E[A])^2 = \frac{\sigma^2}{4} (16s + 8) = \sigma^4 (4s + 2) \quad (C.9)$$

Diğer adım B^2 'nin hesaplanması;

$$\begin{aligned}
B^2 &= x_1^4 + x_0^2 x_2^2 + x_2^4 + x_1^2 x_3^2 & (C.10) \\
&\quad - 2x_1^2 x_0 x_2 + 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^3 x_3 \\
&\quad - 2x_2^3 x_0 + 2x_0 x_1 x_2 x_3 - 2x_2^2 x_1 x_3 \\
&= x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^3 x_3 - 2x_2^3 x_0 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2^2 \\
&\quad - 2x_1^2 x_0 x_2 - 2x_2^2 x_1 x_3 + 2x_0 x_1 x_2 x_3
\end{aligned}$$

B^2 'nin beklenen değeri denklem C.11 ile hesaplanır:

$$\begin{aligned}
E[B^2] &= 2 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) - 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2)z_2 & (C.11) \\
&\quad + 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_4] + 2 \frac{\sigma^4}{2} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] \\
&\quad - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_2] + 2 \frac{\sigma^4}{2} s^2 (z_4 + z_2 + 2) \\
&= \frac{\sigma^4}{4} \{ [(12s^2 + 48s + 24) + 16(s + 1)^2 - 8s^2 + 4s^2] \\
&\quad + [-12s(s + 2) + 2s^2 - 8s(s + 1) + 2s^2]z_2 \\
&\quad + (2s^2 + 2s^2)z_4 \} \\
&= \frac{\sigma^4}{4} [(24s^2 + 80s + 40) + (-16s^2 - 32s)z_2 + 4s^2 z_4] \\
&= \sigma^4 [(6s^2 + 20s + 10) + (-4s^2 - 8s)z_2 + s^2 z_4]
\end{aligned}$$

B'nin beklenen değerinin karesi de hesaplandıktan sonra B 'nın varyans hesaplama formülünde buluntular yerine yerleştirilir:

$$(E[B])^2 = \sigma^4[4(s+1)^2 + s^2(z_4+2) - 4s(s+1)z_2] \quad (C.12)$$

$$= \sigma^4[(6s^2 + 8s + 4) + (-4s^2 - 4s)z_2 + s^2z_4]$$

B'nin varyansı denklem C.13'de ki gibi hesaplanır:

$$var(B) = E[B^2] - (E[B])^2 = \sigma^4[(12s+6) - 4sz_2] \quad (C.13)$$

$$= 2\sigma^4[(6s+3) - 2sz_2]$$

AB ifadesi denklem C.14'de ki gibi elde edilir:

$$AB = (x_1x_2 - x_0x_3)(x_1^2 - x_0x_2 + x_2^2 - x_1x_3) \quad (C.14)$$

$$= x_1^3x_2 - x_2^2x_0x_1 + x_2^3x_1 - x_1^2x_2x_3$$

$$- x_1^2x_0x_3 + x_0^2x_2x_3 - x_2^2x_0x_3 + x_3^2x_0x_1$$

$$= 2\frac{3\sigma^4}{4}s(s+2)z_1 - 2\frac{\sigma^4}{4}[s^2z_3 + 2s(s+1)z_1] - 2\frac{\sigma^4}{4}[s^2z_1 + 2s(s+1)z_3]$$

$$+ 2\frac{\sigma^4}{4}[s^2z_5 + 2s(s+1)z_1]$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} \left\{ [3s(s+2) - 2s(s+1) - s^2 + 2s(s+1)]z_1 + [-s^2 - 2s(s+1)]z_3 \right. \\ \left. + s^2z_5 \right\}$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(2s^2 + 6s)z_1 + (-3s^2 - 2s)z_3 + s^2z_5]$$

A'nın B'nin beklenen değerlerinin çarpımı,

$$E[A]E[B] = \frac{\sigma^4}{2}(sz_1 - sz_3)[2(s+1) - sz_2] \quad (C.15)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}[2s(s+1)z_1 - s^2(z_3 + z_1) - 2s(s+1)z_3 + s^2(z_5 + z_1)]$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}\{[2s(s+1) - s^2 + s^2]z_1 + [-s^2 - 2s(s+1)]z_3 + s^2z_5\}$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}[(2s^2 + 2s)z_1 + (-3s^2 - 2s)z_3 + s^2z_5]$$

A ve B'nin kovaryansı elde edilir,

$$cov(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] \quad (C.16)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2}(4sz_1) = \sigma^4(2sz_1)$$

$(E[B])^2 var(A)$ ve $(E[A])^2 var(B)$ değerleri ayrı ayrı denklem C.17, C.18'de ki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} (E[B])^2 var(A) &= \sigma^4[(6s^2 + 8s + 4) - (4s^2 + 4s)z_2 + s^2z_4]\sigma^4(4s + 2) \quad (C.17) \\ &\cdot \sigma^8[(24s^3 + 44s^2 + 32s + 8) - (16s^3 + 24s^2 + 8s)z_2 \\ &\quad + (4s^3 + 2s^2)] \end{aligned}$$

$$(E[A])^2 var(B) = \frac{\sigma^4}{4}(4s^2 - s^2z_2 - 2s^2z_4 + s^2z_6)2\sigma^4[(6s + 3) - 2sz_2] \quad (C.18)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma^8}{2}[(24s^3 + 12s^2) - 8s^3z_2 - (6s^3 + 3s^2)z_2 + 2s^3(z_4 + 2) \\ &\quad - (12s^3 + 6s^2)z_4 + 4s^3(z_6 + z_2) + (6s^3 + 3s^2)z_6 - 2s^3(z_8 + z_4)] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^8}{2} [(28s^3 + 12s^2) + (10s^3 + 3s^2)z_2 - (12s^3 + 6s^2)z_4 + (10s^3 + 3s^2)z_6 - 2s^3z_8]$$

A 'nın ve B'nin beklenen değerlerinin ve (A,B)'nin kovaryans çarpımını denklem C.19 ile hesaplanır:

$$(E[A]E[B])cov(A, B) = \frac{\sigma^4}{2} [(2s^2 + 2s)z_1 - (3s^2 + 2s)z_3 + s^2z_5]\sigma^4(2sz_1) \quad (C.19)$$

$$= \frac{\sigma^8}{2} [(8s^3 + 8s^2) - 2s^3z_2 - (4s^3 + 4s^2)z_4 + 2s^3z_6]$$

Pay ve Payda ayrı iki birim olarak kabul edilirse ,

$$\begin{aligned} PAY &= \sigma^8 [(24s^3 + 44s^2 + 32s + 8) - (16s^3 + 24s^2 + 8s)z_2 + (4s^3 + 2s^2)z_4 \\ &\quad + (14s^3 + 6s^2) - (5s^3 + \frac{3}{2}s^2)z_2 - (6s^3 + 3s^2)z_4 + (5s^3 + \frac{3}{2}s^2)z_6 - s^3z_8 \\ &\quad - (8s^3 + 8s^2) + 2s^3z_2 + (4s^3 + 4s^2)z_4 - 2s^3z_6] \end{aligned} \quad (C.20)$$

$$\begin{aligned} &= \sigma^8 [(30s^3 + 42s^2 + 32s + 8) - (19s^3 + \frac{51}{2}s^2 + 8s)z_2 \\ &\quad + (2s^3 + 3s^2)z_4 + (3s^3 + \frac{3}{2}s^2)z_6 - s^3z_8] \end{aligned}$$

$$PAYDA = (E[B])^4 = \sigma^8 (2 + 2s - sz_2)^4 \quad (C.21)$$

$$= \sigma^8 [2 + 2s(1 - \cos 2\omega)]^4 = \sigma^8 (2 + 4s \sin^2 \omega)^4$$

$$= 16\sigma^8 (1 + 2s \sin^2 \omega)^4$$

$$PAY \rightarrow 30 - 19z_2 + 2z_4 + 3z_6 - z_8 \quad (C.22)$$

$$PAYDA \rightarrow (16.16)ssin^8\omega \quad (C.23)$$

$\hat{\rho}$ 'nin varyansının en sade hali 94'de gösterildiği gibidir:

$$var(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{15-19cos\omega+2cos4\omega+3cos6\omega-cos8\omega}{128ssin^8\omega} \quad (C.24)$$

$$= \frac{3 + 2cos2\omega}{4ssin^2\omega}$$

EK D DESA-1 FREKANS KESTİRİCİSİ (N=5)

$\hat{\rho}$ denklem D.1'de gösterildiği gibidir:

$$\hat{\rho} = \frac{2(x_2^2-x_1x_3)-(x_1^2-x_0x_2)-(x_3^2-x_2x_4)+x_1x_2-x_0x_3+x_2x_3-x_1x_2}{4(x_2^2-x_1x_3)} \quad (D.1)$$

Denklemleri A_5, B_5 olarak sınıflandırırsak,

$$= \frac{A_5}{B_5};$$

A_5 denklem D.2 ile gösterilir,

$$A_5 = x_2^2 - x_1x_3 - x_1^2 + x_0x_2 + x_1x_2 - x_0x_3 \quad (D.2)$$

$$+ x_2^2 - x_1x_3 - x_3^2 + x_2x_4 + x_2x_3 - x_1x_4$$

$$= A_4 + (x_2^2 - x_1x_3 - x_3^2 + x_2x_4 + x_2x_3 - x_1x_4) = A_4 + \widetilde{A}_4$$

B_5 denklem D.3 ile gösterilir;

$$B_5 = 2[2(x_2^2 - x_1x_3)] = 2B_4 \quad (D.3)$$

\widetilde{A}_4 nın değeri;

$$\widetilde{A}_4 = x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_3 - x_1x_4 \quad (D.4)$$

\widetilde{A}_4 'in beklenen değeri;

$$E[\widetilde{A}_4] = \frac{\sigma^2}{2}sz_1 - \frac{\sigma^2}{2}sz_3 = \frac{\sigma^2}{2}s(z_1 - z_3) \quad (D.5)$$

A_5 'in beklenen değeri denklem D.6'da gösterilmiştir.

$$E[A_5] = E[A_4] + E[\widetilde{A}_4] = \sigma^2s(z_1 - z_3) \quad (D.6)$$

B_5 'in beklenen değeri D.7 'de gösterilmiştir.

$$E[B_5] = 2E[B_4] = \sigma^2[4(s + 1) - 2sz_2] \quad (D.7)$$

$\hat{\rho}$ 'un beklenen değeri denklem D.8'de gösterilmiştir.

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A_5]}{E[B_5]} = \frac{s(z_1 - z_3)}{4(s+1) - 2sz_2} = \frac{2s\sin^2\omega\cos\omega}{1 + 2s\sin^2\omega} \quad (D.8)$$

$\hat{\rho}$ 'nın bias değeri denklem D.9'da gösterilmiştir.

$$\text{bias}(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho \cong -\frac{\cos\omega}{1+2s\sin^2\omega} \quad (\text{D.9})$$

\widetilde{A}_4^2 değeri denklem D.10'da gösterildiği gibidir:

$$\widetilde{A}_4^2 = x_2^4 + x_3^4 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{aligned} & -2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_1 x_3 + 2x_2^3 x_4 + 2x_2^3 x_3 - 2x_2^2 x_1 x_4 \\ & + 2x_3^3 x_1 - 2x_3^2 x_2 x_4 - 2x_3^2 x_2 + 2x_3^2 x_1 x_4 \\ & - 2x_1 x_3 x_2 x_4 - 2x_3^2 x_1 x_2 + 2x_1^2 x_4 x_3 \\ & + 2x_2^2 x_4 x_3 - 2x_4^2 x_1 x_2 - 2x_1 x_3 x_2 x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_4^2 & = x_2^4 + x_3^4 + 2x_2^3 x_4 + 2x_2^3 x_3 + 2x_3^3 x_1 - 2x_3^3 x_2 \\ & + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_4^2 - x_2^2 x_3^2 + x_1^2 x_4^2 \\ & - 2x_2^2 x_1 x_3 - 2x_2^2 x_1 x_4 - 2x_3^2 x_2 x_4 + 2x_3^2 x_1 x_4 \\ & - 2x_3^2 x_1 x_2 + 2x_1^2 x_3 x_4 + 2x_2^2 x_3 x_4 - 2x_4^2 x_1 x_2 - 4x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

\widetilde{A}_4^2 'in beklenen değeri:

$$E[\widetilde{A}_4^2] = 2\frac{3\sigma^4}{2}(s^2 + 4s + 2) + 4\frac{3\sigma^4}{4}s(s + 2)z_2 \quad (\text{D.11})$$

$$+ 2\frac{\sigma^4}{4}[4(s + 1)^2 + s^2 z_4] - \frac{\sigma^4}{4}[4(s + 1)^2 + s^2 z_2] + \frac{\sigma^4}{4}[4(s + 1)^2 + s^2 z_6]$$

$$- 4\frac{\sigma^4}{4}[s^2 + 2s(s + 1)z_2] - 2\frac{\sigma^4}{4}[s^2 z_1 + 2s(s + 1)z_3] - 4\frac{\sigma^4}{4}s^2(z_4 + z_2 + 2)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4}\{[(12s^2 + 48s + 24) + 8(s + 1)^2 - 8s^2 - 8s^2]\}$$

$$\begin{aligned}
& +[12s(s+2) - s^2 - 8s(s+1) - 4s^2]z_2 + (2s^2 - 4s^2)z_4 + s^2z_6\} \\
& = \frac{\sigma^4}{4} [(4s^2 + 64s + 32) + (-s^2 + 16s)z_2 - 2s^2z_4 + s^2z_6]
\end{aligned}$$

\widetilde{A}_4^2 'nin beklenen değerinin karesi denklem D.12'deki gibi hesaplanır:

$$(E[\widetilde{A}_4])^2 = (E[A_4])^2 = \frac{\sigma^4}{4} (4s^2 - s^2z_2 - 2s^2z_4 + s^2z_6) \quad (D.12)$$

\widetilde{A}_4^2 'nin varyansı denklem D.13'de gösterildiği gibi hesaplanır:

$$var(\widetilde{A}_4) = E[\widetilde{A}_4^2] - (E[\widetilde{A}_4])^2 = \frac{\sigma^4}{4} [(64s + 32) + 16sz_2] = var(A_4) \quad (D.13)$$

$$A_4\widetilde{A}_4 = (x_2^2 - x_1x_3 - x_1^2 + x_0x_2 + x_1x_2 - x_0x_3) \quad (D.14)$$

$$. (x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_3 - x_1x_4)$$

$$= x_2^4$$

$$A_4\widetilde{A}_4 = x_2^4 - x_2^2x_3^2 - x_2^2x_1x_3 + x_2^3x_4 + x_2^3x_3 - x_2^2x_1x_4 \quad (D.15)$$

$$-x_2^2x_1x_3 + x_3^3x_1 + x_1^2x_3^2 - x_1x_2x_3x_4 - x_3^2x_1x_2 + x_1^2x_3x_4$$

$$-x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^3x_3 - x_1^2x_2x_4 - x_1^2x_2x_3 + x_1^3x_4$$

$$+x_2^3x_0 - x_3^2x_0x_2 - x_0x_1x_2x_3 + x_2^2x_0x_4 + x_2^2x_0x_3 - x_0x_1x_2x_3$$

$$+x_2^3x_1 - x_3^2x_1x_2 - x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_4 + x_2^2x_1x_3 - x_1^2x_2x_4$$

$$-x_2^2x_0x_3 + x_3^3x_0 + x_3^2x_0x_1 - x_0x_1x_2x_3 - x_3^2x_0x_2 + x_0x_1x_2x_3$$

$$\begin{aligned}
&= x_2^4 + x_2^3 x_4 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_3 + x_1^3 x_4 + x_2^3 x_0 + x_2^3 x_1 + x_3^3 x_0 \\
&\quad - x_2^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_2^2 \\
&\quad - x_2^2 x_1 x_3 - 2x_3^2 x_1 x_2 + x_1^2 x_3 x_4 - 2x_1^2 x_2 x_4 - 2x_1^2 x_2 x_3 \\
&\quad - 2x_3^2 x_0 x_2 + x_2^2 x_0 x_4 + x_3^2 x_0 x_1 \\
&\quad - x_1 x_2 x_3 x_4 - x_0 x_1 x_2 x_3 - x_0 x_1 x_2 x_4 - x_0 x_2 x_3 x_4 + x_0 x_1 x_3 x_4
\end{aligned}$$

$A_4 \widetilde{A}_4$ 'ın beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E[A_4 \widetilde{A}_4] &= \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) & (D.16) \\
&+ 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_2 + 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_1 + 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_3 \\
&- 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_2] + 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_4] \\
&- \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s+1)z_2] - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_3 + 2s(s+1)z_1] \\
&+ 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_5 + 2s(s+1)z_1] - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_4 + 2s(s+1)z_2] \\
&+ \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s+1)z_4] \\
&- 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) - 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_5 + z_3 + z_1) \\
&+ \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_6 + z_2 + 2)
\end{aligned}$$

$A_4 \widetilde{A}_4$ 'ın beklenen değeri düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
E[A_4 \widetilde{A}_4] &= \frac{\sigma^2}{4} \{ (6s^2 + 24s + 12 - 2s^2 + 2s^2 - 4s^2 + 2s^2) & (D.17) \\
&+ [6s(s+1) - 8s(s+1) + 4s(s+1) - 2s^2] z_1 \\
&+ [12s(s+2) - 2s^2 - 2s(s+1) - 8s(s+1) - 2s^2 + s^2] z_2 \\
&+ [6s(s+2) - 4s^2 - 2s^2] z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[2s^2 - 4s^2 + 2s(s + 1) - 2s^2]z_4 \\
& + (2s^2 - 2s^2)z_5 + s^2z_6\} \\
& = \frac{\sigma^2}{4} [(4s^2 + 24s + 12) + 8sz_1 + (-s^2 + 14s)z_2 + 12sz_3 + (-2s^2 + 2s)z_4 \\
& \quad + s^2z_6]
\end{aligned}$$

$$E[A_4]E[\widetilde{A}_4] = E[A_4]E[A_4] = (E[A_4])^2 = \frac{\sigma^4}{4} (4s^2 - s^2z_2 - 2s^2z_4 + s^2z_6) \quad (D.18)$$

$(A_4\widetilde{A}_4)$ 'in kovaryansı denklem D.19'deki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
cov(A_4\widetilde{A}_4) &= E[A_4\widetilde{A}_4] - E[A_4]E[\widetilde{A}_4] \\
&= \frac{\sigma^4}{4} [(24s + 12) + 8sz_1 + 14sz_2 + 12sz_3 + 2sz_4]
\end{aligned} \quad (D.19)$$

$var(A_5)$ 'in A_4 ve \widetilde{A}_4 cinsinden değeri denklem D.20'de gösterildiği gibidir;

$$\begin{aligned}
var(A_5) &= var(A_4 + \widetilde{A}_4) = var(A_4) + var(\widetilde{A}_4) + 2cov(A_4, \widetilde{A}_4) \\
&= var(A_4) + var(A_4) + 2cov(A_4, \widetilde{A}_4) \\
&= 2var(A_4) + 2cov(A_4, \widetilde{A}_4) \\
&= \frac{\sigma^4}{4} \{[64s + 32) + 16sz_2] + [(24s + 12) + 8sz_1 + 14sz_2 + 12sz_3 \\
& \quad + 2sz_4]\}
\end{aligned} \quad (D.20)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(88s + 44) + 8sz_1 + 30sz_2 + 12sz_3 + 2sz_4]$$

$var(B_5)$ in B_4 cinsinden ifadesi;

$$\begin{aligned} var(B_5) &= var(2B_4) = 4var(B_4) & (D.21) \\ &= \frac{\sigma^4}{4} (192S + 96) \end{aligned}$$

(A_5, B_5) 'in kovaryansı ,

$$\begin{aligned} cov(A_5, B_5) &= cov(A_4 + \widetilde{A}_4, 2B_4) & (D.22) \\ &= 2cov(A_4, B_4) + 2cov(\widetilde{A}_4, B_4) \end{aligned}$$

\widetilde{A}_4, B_4 ifadesi açılır ise,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_4, B_4 &= (x_2^2 - x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_3 - x_1x_4)(2x_2^2 - 2x_1x_3) & (D.23) \\ &= 2x_2^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_2^2x_1x_3 + 2x_2^3x_4 + 2x_2^3x_3 - 2x_2^2x_1x_4 \\ &\quad - 2x_2^2x_1x_3 + 2x_3^3x_1 + 2x_1^2x_3^2 - 2x_1x_2x_3x_4 - 2x_3^2x_1x_2 + 2x_1^2x_3x_2 \\ &= 2x_2^4 + 2x_2^3x_4 + 2x_2^3x_3 + 2x_3^3x_1 - 2x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_3^2 \\ &\quad - 4x_2^2x_1x_3 - 2x_2^2x_1x_4 - 2x_3^2x_1x_2 + 2x_1^2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

$\widetilde{A}_4 B_4$ 'in beklenen değeri denklem D.24'de ki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{A}_4 B_4] &= 2 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 4 \frac{3\sigma^4}{2} s(s + 2)z_2 + 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2)z_1 & (D.24) \\
&\quad - 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] + 2 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_4] \\
&\quad - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_2 + 2s(s + 1)z_2] - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_1 + 2s(s + 1)z_3] \\
&\quad - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_3 + 2s(s + 1)z_1] + 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_5 + 2s(s + 1)z_1] \\
&\quad - 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) \\
&= \frac{\sigma^4}{4} \{ [12s^2 + 48s + 24] - 8s^2 - 4s^2 \\
&\quad + [6s(s + 2) - 2s^2]z_1 [12s(s + 2) - 2s^2 - 8s(s + 1) - 2s^2]z_2 \\
&\quad + [-4s(s + 1) - 2s^2]z_3 + (2s^2 - 2s^2)z_4 + 2s^2 z_5 \} \\
&= \frac{\sigma^4}{4} [(48s + 24) + (4s^2 + 12s)z_1 + 16sz_2 - (6s^2 + 4s)z_3 + 2s^2 z_3
\end{aligned}$$

Bulutular denklem D.25'de yerine yerleştirilirse;

$$E[\widetilde{A}_4]E[B_4] = E[A_4]E[B_4] = \frac{\sigma^4}{4} [(4s^2 + 4s)z_1 - (6s^2 + 4s)z_3 + 2s^2 z_5] \quad (D.25)$$

\widetilde{A}_4, B_4 'in kovaryansı;

$$\begin{aligned}
cov(\widetilde{A}_4, B_4) &= E[\widetilde{A}_4 B_4] - E[\widetilde{A}_4]E[B_4] & (D.26) \\
&= \frac{\sigma^4}{4} [(48s + 24) + 8sz_1 + 16sz_2]
\end{aligned}$$

$$= cov(A_4, B_4)$$

(A_5, B_5) 'in kovaryansı

$$cov(A_5, B_5) = \sigma^4[(48s + 24) + 8sz_1 + 16sz_2] \quad (D.27)$$

$$= 4cov(A_4, B_4)$$

$$(E[B_5])^2 var(A_5) = (2E[B_4])^2 var(A_5) = 4(E[B_4])^2 var(A_5) \quad (D.28)$$

$$= \frac{\sigma^8}{2} [(24s^2 + 32s + 16) - (16s^2 + 16s)z_2 + 4s^2z_4] \\ \cdot [(2s^2 - 88s + 44 + 8sz_1 + 30sz_2 + 12sz_3 + 2sz_4]$$

$$= 4\sigma^8 [(6s^2 + 8s + 4) - (4s^2 + 4s)z_2 + s^2z_4] \\ \cdot [s^2 + 44s + 22 + 4sz_1 + 15sz_2 + 6sz_3 + sz_4]$$

$$= 4\sigma^8 [(63^4 + 264s^3 + 484s^2 + 352s + 88) \\ + (24s^3 + 32s^2 + 16s)z_1 + (90s^3 + 120s^2 + 60s)z_2 \\ + (36s^3 + 48s^2 + 24s)z_3 + (6s^3 + 8s^2 + 4s)z_4 \\ - (4s^4 + 176s^3 + 264s^2 + 88s)z_2 - (16s^3 + 16s^2)(z_3 + z_1) \\ - (60s^3 + 60s^2)(z_4 + 2) - (24s^3 + 24s^2)(z_5 + z_1) \\ - (4s^3 + 4s^2)(z_6 + z_2) + (s^4 + 44s^3 + 22s^2)z_4 + 4s^3(z_5 + z_3) \\ - 15s^3(z_6 + z_2) + 6s^3(z_7 + z_1) + s^3(z_8 + 2)]$$

$$(E[B_5])^2 var(A_5) = 4\sigma^8 [(264s^3 + 484s^2 + 352s + 88 - 120s^3 - 120s^2 + 2s^3) \quad (D.29)$$

$$\begin{aligned}
&+(24s^3 + 32s^2 + 16s - 16s^3 - 16s^2 - 24s^3 - 24s^2 + 6s^3)z_1 \\
&+(90s^3 + 120s^2 + 60s - 176s^3 - 264s^2 - 88s - 4s^3 \\
&-4s^2 + 15s^3)z_2 \\
&+(36s^3 + 48s^2 + 24s - 16s^3 - 16s^2 + 4s^3)z_3 \\
&+(6s^3 + 8s^2 + 4s - 60s^3 - 60s^2 + s^4 + 44s^3 + 22s^2)z_4 \\
&+(-24s^3 - 24s^2 + 4s^3)z_5 + (-4s^3 - 4s^2 + 15s^3)z_6 \\
&+6s^3z_7 + s^3z_8]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sigma^8[(6s^4 + 146s^3 + 364s^2 + 352s + 88) \\
&\quad +(-10s^3 - 8s^2 + 16s)z_1 + (-75s^3 - 148s^2 - 28s)z_2 \\
&\quad +(24s^3 + 32s^2 + 24s)z_3 + (-10s^3 - 30s^2 + 4s)z_4 \\
&\quad +(-20s^3 - 24s^2)z_5 + (11s^3 - 4s^2)z_6 + 6s^3z_7 + s^3z_8]
\end{aligned}$$

$(E[A_5])^2 var(B_5)$ in değeri A_4B_4 cinsinden denklem D.30 'da gösterildiği gibi yazılırsa,

$$\begin{aligned}
(E[A_5])^2 var(B_5) &= (E[A_4 + \widetilde{A}_4])^2 var(2B_4) = (2E[A_4])^2 var(2B_4) \quad (D.30) \\
&= 16(E[A_4])^2 var(B_4) \\
&= 16\sigma^8[(24s^3 + 12s^2) - (6s^3 + 3s^2)z_2 - (12s^3 + 6s^2)z_4 \\
&\quad + (6s^3 + 3s^2)z_6]
\end{aligned}$$

$$E[A_5]E[B_5]cov(A_5, B_5) = (2E[A_4])(2E[B_4])4cov(A_4, B_4) \quad (D.31)$$

$$= 16E[A_4]E[B_4]cov(A_4, B_4)$$

$$\begin{aligned}
&= 8\sigma^8[(8s^3 + 8s^2) + (20s^3 + 36s^2 + 12s)z_1 - 2s^3z_2 \\
&\quad - (24s^3 + 34s^2 + 12s)z_3 - (4s^3 + 4s^2)z_4 \\
&\quad - 2s^2z_5 + 2s^3z_6 + 4s^3z_7]
\end{aligned}$$

Denklem pay ve payda olarak iki bileşene ayrıldığında pay denklem D.32'deki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
PAY &= 4\sigma^8 \\
&\cdot \{ [634 + 146s^3 + 364s^2 + 352s + 88] + (96s^3 + 48s^2) - (32s^3 + 32s^2) \} \\
&+ [(-10s^3 - 8s^2 + 16s) - (80s^3 + 144s^2 + 48s)]z_1 \quad (D.32) \\
&+ [(4s^4 - 75s^3 - 148s^2 - 28s) - (24s^3 + 12s^2) + (8s^3)]z_2 \\
&+ [(24s^3 + 32s^2 + 24s) + (96s^3 + 136s^2 + 48s)]z_3 \\
&+ [(s^4 - 10s^3 - 30s^2 + 4s) - (48s^3 + 24s^2) + (16s^3 + 16s^2)]z_4 \\
&+ [(-20s^3 - 24s^2) + (8s^2)]z_5 + [(11s^3 - 4s^2) + (24s^3 + 12s^2) - (8s^3)]z_6 \\
&+ [(6s^3) - (16s^3)]z_7 + s^3z_8 \} \\
&= 4\sigma^8[(6s^4 + 210s^3 + 380s^2 + 352s + 88) \\
&\quad - (90s^3 + 152s^2 + 32s)z_1 \\
&\quad - (4s^4 + 91s^3 + 160s^2 + 28s)z_2 \\
&\quad + (120s^3 + 168s^2 + 72s)z_3 \\
&\quad + (s^4 - 42s^3 - 38s^2 + 4s)z_4 \\
&\quad - (20s^3 + 16s^2)z_5 + (27s^3 + 8s^2)z_6 \\
&\quad - 10s^3z_7 + s^3z_8]
\end{aligned}$$

Payda denklem D.33'de ki gibi hesaplanır:

$$PAYDA = (E[B_5])^4 = (2E[B_4])^4 = 16(E[B_4])^4 \quad (D.33)$$

$$= 256\sigma^8(1 + 2s\sin^2\omega)^4$$

$\hat{\rho}$ 'nın varyansı hesaplanırsa;

$$var(\hat{\rho}) \cong [(105s^3 + 190s^2 + 176s + 44) - (45s^3 + 76s^2 + 16s)z_1 \quad (D.34)$$

$$- \left(\frac{91}{2}s^3 + 80s^2 + 14s\right)z_2 + (60s^3 + 84s^2 + 36s)z_3$$

$$- (21s^3 + 19s^2 - 2s)z_4 - (10s^3 + 8s^2)z_5$$

$$+ \left(\frac{27}{2}s^3 + 4s^2\right)z_6 - 5s^3z_7 + \left(\frac{1}{2}s^3\right)z_8]$$

$$= 32(1 + 2s\sin^2\omega)^4$$

$\hat{\rho}$ 'nın varyansının en sade şekli denklem D.35'de gösterildiği gibi bulunur.

$$var(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{(105 - 90\cos\omega - 91\cos 2\omega + 120\cos 3\omega - 42\cos 4\omega - 20\cos 5\omega + 27\cos 6\omega - 10\cos 7\omega + \cos 8\omega)}{512s\sin^8\omega} \quad (D.35)$$

$$= \frac{12 - 14\cos\omega + 8\cos 2\omega - \cos 3\omega}{32s\sin^2\cos^2(\omega/2)}$$

EK E DESA-2 FREKANS KESTİRİCİSİ (N=5)

$\hat{\rho}$ denklemini A,B olarak pay ve paydasına ayrıldığını varsayarsak,

$$\hat{\rho} = \frac{x_2^2 - x_0x_4 - x_1^2 + x_0x_2 - x_3^2 + x_2x_4}{2x_2^2 - 2x_1x_3} = \frac{A}{B} \quad (\text{E.1})$$

$$A = x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 - x_0x_4 + x_0x_2 + x_2x_4 \quad (\text{E.2})$$

A 'nın beklenen değeri denklem E.3 'de gösterildiği gibidir.

$$\begin{aligned} E[A] &= \sigma^2(s+1) - \frac{\sigma^2}{2}sz_4 + 2\frac{\sigma^2}{2}sz_2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2}[-2(s+1) + 2sz_2 - sz_4] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

B'nin beklenen değeri denklem E.4'de gösterildiği gibidir.

$$E[B] = 2\sigma^2(s+1) - 2\frac{\sigma^2}{2}sz_2 = \sigma^2[2(s+1) - sz_2] \quad (\text{E.4})$$

$\hat{\rho}$ 'nın beklenen değeri;

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A]}{E[B]} = \frac{-2(s+1) + 2sz_2 - sz_4}{2[2(s+1) - sz_2]} = \frac{(-2 + 2z_2 - z_4)s - 2}{2[(2 - z_2)s + 2]} \quad (\text{E.5})$$

$$= \frac{(2 - z_2)z_2s - 2}{2[(2 - z_2)s + 2]} = \frac{z_2 - \frac{2}{(2 - z_2)s}}{2[1 + \frac{2}{(2 - z_2)s}]}$$

$$= \frac{z_2 - \frac{2}{4s\sin^2\omega}}{2(1 + \frac{2}{4s\sin^2\omega})} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2s\sin^2\omega}} \right) \cos 2\omega - \left(\frac{1}{2 + 4s\sin^2\omega} \right)$$

$\hat{\rho}$ 'ın bias değeri;

$$\begin{aligned} \text{bias}(\hat{\rho}) &= E[\hat{\rho}] - \rho = -\frac{1}{1+2s\sin^2\omega} \cos\omega - \frac{1}{2+4s\sin^2\omega} \\ &= -\frac{1 + 2\cos 2\omega}{2(1 + 2s\sin^2\omega)} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A^2 denklem E.7 'de gösterildiği gibi bulunur,

$$\begin{aligned} A^2 &= x_2^4 + x_1^4 + x_3^4 + x_0^2 x_4^2 + x_0^2 x_2^2 + x_2^2 x_4^2 \\ &\quad - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_0 x_4 + 2x_2^3 x_0 + 2x_2^3 x_4 \\ &\quad + 2x_1^2 x_3^2 + 2x_1^2 x_0 x_4 - 2x_1^2 x_0 x_2 - 2x_1^2 x_2 x_4 \\ &\quad + 2x_3^2 x_0 x_4 - 2x_3^2 x_0 x_2 - 2x_3^2 x_2 x_4 \\ &\quad - 2x_0^2 x_2 x_4 - 2x_4^2 x_0 x_2 + 2x_2^2 x_0 x_4 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

A^2 'nin beklenen değeri denklem E.8'de gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[A^2] &= 3 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2) z_2 \\ &\quad + \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_8] 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_4] \\ &\quad - 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] \\ &\quad + 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_2 + 2s(s + 1) z_4] - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1) z_2] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned}
& -4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_4 + 2s(s+1)z_2] - 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_6 + 2s(s+1)z_2] \\
& = \frac{\sigma^4}{4} [(14s^2 + 80s + 40) + (-12s^2)z_2 + (8s^2 + 8s)z_4 - 4s^2 z_6 + s^2 z_8]
\end{aligned}$$

A'nın varyans değerinin hesaplaması için E.9 denkleminde buluntular yerine yazılırsa,

$$var(A) = E[A^2] - (E[A])^2 \quad (E.9)$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{\sigma^4}{4} [(72s + 36) + 8sz_2 + 4sz_4] \\
& = \sigma^4 [(18s + 9) + 2sz_2 + sz_4]
\end{aligned}$$

Aynı işlemleri B^2 içinde yaparsak;

$$B^2 = 4x_2^4 + 4x_1^2 x_3^2 - 8x_2^2 x_1 x_3 \quad (E.10)$$

B^2 'in beklenen değeri hesaplanır:

$$\begin{aligned}
E[B^2] & = 4 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_4] \\
& \quad - 8 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_2 + 2s(s+1)z_2]
\end{aligned} \quad (E.11)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} \{[(24s^2 + 96s + 48) + 16(s+1)^2 - 16s^2] - 16s(s+1)z_2 + 4s^2 z_4\}$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(24s^2 + 128s + 64) - (16s^2 + 16s)z_2 + 4s^2 z_4]$$

$$= \sigma^4[(6s^2 + 32s + 16) - (4s^2 + 4s)z_2 + s^2z_4]$$

B'nin varyansını hesaplamak için ihtiyaç duyulan $(E[B])^2$ değeri denklem E.12 ile hesaplanır.

$$(E[B])^2 = \sigma^4[4(s + 1)^2 + s^2(z_4 + 2) - 4s(s + 1)z_2] \quad (E.12)$$

$$= \sigma^4[(6s^2 + 8s + 4) - (4s^2 + 4s)z_2 + s^2z_4]$$

B'nin varyansı E.13 genel formülde buluntular yerleştirilerek hesaplanır.

$$var(B) = E[B^2] - (E[B])^2 \quad (E.13)$$

$$= \sigma^4(24s + 12)$$

AB içinde aynı sistemi uygulayacağız,

$$AB = (x_2^2 - x_0x_4 - x_1^2 + x_0x_2 - x_3^2 + x_2x_4)(2x_2^2 - 2x_1x_3) \quad (E.14)$$

$$\begin{aligned} &= 2x_2^4 - 2x_2^2x_0x_4 - 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^3x_0 - 2x_2^2x_3^2 + 2x_2^3x_4 \\ &\quad - 2x_2^2x_1x_3 + 2x_0x_1x_2x_3 + 2x_1^3x_3 - 2x_0x_1x_2x_3 - 2x_0x_1x_2x_3 \\ &\quad + 2x_3^3x_1 - 2x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2x_2^4 + 2x_2^3x_0 + 2x_2^3x_4 + 2x_1^3x_3 + 2x_3^3x_1 \\ &\quad - 2x_2^2x_0x_4 - 2x_2^2x_1x_3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 \\ &\quad + 2x_0x_1x_3x_4 - 2x_0x_1x_2x_3 - 2x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

AB 'nin beklenen değeri denklem E.15'de gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
E[AB] &= 2 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + 8 \frac{3\sigma^4}{4} s(s + 2)z_2 & (E.15) \\
&\quad - 4 \frac{\sigma^4}{2} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_4] \\
&\quad - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_2] \\
&\quad + 2 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_6 + z_2 + 2) - 4 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) \\
&= \frac{\sigma^4}{4} [(-16s^2 + 16s + 8) + (14s^2 + 44s)z_2 + (-8s^2 - 4s)z_4 + 2s^2 z_6] \\
&= \frac{\sigma^4}{2} [(-8s^2 + 8s + 4) + (7s^2 + 22s)z_2 + (-4s^2 - 2s)z_4 + s^2 z_6]
\end{aligned}$$

Kovaryans (A,B)'yi hesaplamamız için $E[A]E[B]$ denkleminde ihtiyacımız bulunmaktadır. Denklem E.16 'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
E[A]E[B] &= \frac{\sigma^4}{2} [-2(s + 1) + 2sz_2 - sz_4][2(s + 1) - sz_2] & (E.16) \\
&= \frac{\sigma^4}{2} [-4(s + 1)^2 + 2s(s + 1)z_2 + 4s(s + 1)z_2 \\
&\quad - 2s^2(z_4 + 2) - 2s(s + 1)z_4 + s^2(z_6 + z_2)] \\
&= \frac{\sigma^4}{2} [(-8s^2 - 8s - 4) + (7s^2 + 6s)z_2 + (-4s^2 - 2s)z_4 + s^2 z_6]
\end{aligned}$$

Kovaryans (A,B) denklem E.17 'de ki gibi hesaplanır:

$$cov(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] \quad (E.17)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(16s + 8) + 16sz_2]$$

$(E[B])^2 var(A)$ hesaplaması;

$$\begin{aligned} (E[B])^2 var(A) &= \sigma^8 [(6s^2 + 8s + 4) - (4s^2 + 4s)z_2 + s^2z_4][(18s + 9) \\ &\quad + 2sz_2 + sz_4] \quad (E.18) \\ &= \sigma^8 [(94s^3 + 182s^2 + 144s + 36) + (-62s^3 - 96s^2 - 28s)z_2 \\ &\quad + (16s^3 + 9s^2 + 4s)z_4 + (-2s^3 - 4s^2)z_6 + s^3z_8] \end{aligned}$$

$(E[A])^2 var(B)$ hesaplaması:

$$\begin{aligned} (E[A])^2 var(B) &= \sigma^8 [(14s^2 + 8s + 4) + (-12s^2 - 8s)z_2 + (8s^2 + 4s)z_4 \\ &\quad - 4s^2z_6 + s^2z_8](6s + 3) \quad (E.19) \\ &= \sigma^8 [(84s^3 + 90s^2 + 48s + 12) + (-72s^3 - 84s^2 - 24s)z_2 \\ &\quad + (48s^3 + 48s^2 + 12s)z_4 + (-24s^3 - 12s^2)z_6 + (6s^3 + 3s^2)z_8] \end{aligned}$$

$E[A]E[B] cov(A, B)$ hesaplaması:

$$\begin{aligned} E[A]E[B] cov(A, B) &= \frac{\sigma^8}{2} [-(8s^2 + 8s + 4) + (7s^2 + 6s)z_2 \\ &\quad - (4s^2 + 2s)z_4 + s^2z_6][(8s + 4) + 8sz_2] \quad (E.20) \\ &= \frac{\sigma^8}{2} [(48s^3 + 64s + 16) - (40s^3 + 4s^2 + 8s)z_2 \\ &\quad + (32s^3 + 16s^2 - 8s)z_4 - (24s^3 + 12s^2)z_6 + 8s^3z_8] \end{aligned}$$

Pay ve Payda olarak denklem E.21 ve E.22 ‘de gösterildiği gibi iki kısma ayırdığımızda;

$$PAY = \sigma^8[(130s^3 + 272s^2 + 256s + 64) - (94s^3 + 176s^2 + 44s)z_2 \quad (E.21)$$

$$+(32s^3 + 41s^2 + 24s)z_4 - (2s^3 + 4s^2)z_6 - (s^3 - 3s^2)z_8]$$

$$PAYDA = (E[B])^4 = \sigma^8[2(s + 1) - sz_2]^4 = 16\sigma^8(1 + 2ssin^2\omega)^4 \quad (E.22)$$

$\hat{\rho}$ ’ın varyansı denklem E.23 ‘de ki gibi hesaplanır.

$$var(\hat{\rho}) \cong$$

$$= \frac{[(65s^3 + 136s^2 + 128s + 32) - (47s^3 + 88s^2 + 22s)z_2 + (16s^3 + \frac{41}{2}s^2 + 12s)z_4 - (s^3 + 2s^2)z_6 - (\frac{1}{2}s^3 - \frac{3}{2}s^2)z_8]}{8(1 + 2ssin^2\omega)^4}$$

$$var(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{65 - 94cos2\omega + 32cos4\omega - 2cos6\omega - cos8\omega}{128ssin^8\omega} \quad (E.23)$$

$$= \frac{4 + cos2\omega}{2ssin^2\omega}$$

EK F MODİFİYE EDİLMİŞ KOVARYANS FREKANS KESTİRİCİSİ (N=5)

A_5, B_5 değerleri denklem F.1 ve F.2'de ki gibi hesaplanır;

$$A_5 = A_4 + \widetilde{A}_4; \widetilde{A}_4 = x_3(x_2 + x_4) = x_2x_3 + x_3x_4 \quad (\text{F.1})$$

$$B_5 = B_4 + \widetilde{B}_4; \widetilde{B}_4 = 2x_3^2 \quad (\text{F.2})$$

\widetilde{A}_4 'ın beklenen değerinin değeri denklem F.3 'de hesaplanmıştır.

$$E[\widetilde{A}_4] = \sigma^2sz_1 \quad (\text{F.3})$$

A_5 'in beklenen değerinin değeri denklem F.4 'de hesaplanmıştır.

$$E[A_5] = E[A_4] + E[\widetilde{A}_4] = 2\sigma^2sz_1 + \sigma^2sz_1 = 3\sigma^2sz_1 \quad (\text{F.4})$$

\widetilde{B}_4 'ün beklenen değerinin değeri denklem F.4 'de hesaplanmıştır.

$$E[\widetilde{B}_4] = 2\sigma^2(s + 1) \quad (\text{F.5})$$

B_5 'in beklenen değerinin değeri denklem F.6 'da hesaplanmıştır.

$$E[B_5] = E[B_4] + E[\widetilde{B}_4] = 4\sigma^2(s + 1) + 2\sigma^2(s + 1) = 6\sigma^2(s + 1) \quad (\text{F.6})$$

$\hat{\rho}$ 'in beklenen değeri denklem F.7 'de ki gibi hesaplanmıştır.

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A_5]}{E[B_5]} = \frac{3\sigma^2 s z_1}{6\sigma^2(s+1)} = \frac{s z_1}{2(s+1)} = \frac{s}{s+1} \cos\omega = \frac{s}{s+1} \rho \quad (\text{F.7})$$

$\hat{\rho}$ 'in bias değeri denklem F.8 'de ki gibi hesaplanır.

$$\text{bias}(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho = \frac{s}{s+1} \rho - \rho = -\frac{1}{s+1} \rho = -\frac{\cos\omega}{s+1} \quad (\text{F.8})$$

A_5 'in varyans değeri denklem F.9 'da gösterilmiştir.

$$\text{var}(A_5) = \text{var}(A_4 + \widetilde{A}_4) = \text{var}(A_4) + \text{var}(\widetilde{A}_4) + 2\text{cov}(A_4, \widetilde{A}_4) \quad (\text{F.9})$$

\widetilde{A}_4^2 'in değeri;

$$\widetilde{A}_4^2 = x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_4^2 + 2x_3^2 x_2 x_4 \quad (\text{F.10})$$

\widetilde{A}_4^2 'nin beklenen değeri denklem F.11 'de gösterildiği gibi hesaplanır.

$$E[\widetilde{A}_4^2] = 2\frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2 z_2] + 2\frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s+1)z_2] \quad (\text{F.11})$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(6s^2 + 8s + 4) + (3s^2 + 2s)z_2]$$

Varyans'ı hesaplayabilmemiz için gerekli olan $(E[\widetilde{A}_4])^2$ değeri denklem F.12 'de gösterildiği gibi bulunur.

$$(E[\widetilde{A}_4])^2 = \sigma^4 s^2 (z_2 + 2) = \frac{\sigma^4}{2} (4s^2 + 2s^2 z_2) \quad (\text{F.12})$$

(\widetilde{A}_4) 'ün varyansı denklem F.13 'de gösterilmiştir.

$$\text{var}(\widetilde{A}_4) = E[\widetilde{A}_4^2] - (E[\widetilde{A}_4])^2 \quad (\text{F.13})$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(2s^2 + 8s + 4) + (s^2 + 2s)z_2]$$

$A_4 \widetilde{A}_4$ değeri denklem F.14'de gösterilmiştir.

$$A_4 \widetilde{A}_4 = (x_0 x_1 + 2x_1 x_2 + x_2 x_3)(x_2 x_3 + x_3 x_4) \quad (\text{F.14})$$

$$= x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 x_3 x_4 + 2x_2^2 x_1 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_2 x_4$$

$$= x_2^2 x_3^2 + 2x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_2 x_4 + x_0 x_1 x_2 x_3 + x_0 x_1 x_3 x_4 + 2x_1 x_2 x_3 x_4$$

$A_4 \widetilde{A}_4$ 'ın beklenen değeri denklem F.15'de gösterilmiştir.

$$E(A_4 \widetilde{A}_4) = \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2 z_2] + 3 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 2 + 2s(s + 1)z_2] \quad (\text{F.15})$$

$$+ 3 \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_4 + z_2 + 2) + \frac{\sigma^4}{4} s^2 (z_6 + z_2 + 2)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(18s^2 + 8s + 4) + (11s^2 + 6s)z_2 + 3s^2z_4 + s^2z_6]$$

$E[A_4]E[\widetilde{A}_4]$ değeri denklem F.16'da gösterilmiştir.

$$E[A_4]E[\widetilde{A}_4] = (2\sigma^1sz_1)(\sigma^2sz_1) = 2\sigma^4s^2(z_2 + 2) \quad (\text{F.16})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} (16s^2 + 8s^2z_2)$$

(A_4, \widetilde{A}_4) değerinin kovaryansı denklem F.17'de gösterilmiştir.

$$\text{cov}(A_4, \widetilde{A}_4) = E[A_4\widetilde{A}_4] - E[A_4]E[\widetilde{A}_4] \quad (\text{F.17})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(2s^2 + 8s + 4) + (3s^2 + 6s)z_2 + 3s^2z_4 + s^2z_6]$$

A_5 'in varyans değeri denklem F.18'de gösterilmiştir.

$$\text{var}(A_5) = \frac{\sigma^4}{2} [(6s^2 + 24s + 12) + (4s^2 + 8s)z_2 + s^2z_4] \quad (\text{F.18})$$

$$+ \frac{\sigma^4}{2} [(2s^2 + 8s + 4) + (s^2 + 2s)z_2]$$

$$+ \frac{\sigma^4}{2} [(2s^2 + 8s + 4) + (3s^2 + 6s)z_2 + 3s^2z_4 + s^2z_6]$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(10s^2 + 40s + 20) + (8s^2 + 16s)z_2 + 4s^2z_4 + s^2z_6]$$

B_5 'in varyansı denklem F.19 'da gösterildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$var(B_5) = var(B_4 + \widetilde{B}_4) = var(B_4) + var(\widetilde{B}_4) + 2cov(B_4, \widetilde{B}_4) \quad (F.19)$$

\widetilde{B}_4^2 'in beklenen değeri denklem F.20 'de gösterildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$E[\widetilde{B}_4^2] = E[4x_3^4] = 4 \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) = \frac{\sigma^4}{2} (12s^2 + 48s + 24) \quad (F.20)$$

$$(E[\widetilde{B}_4])^2 = [2\sigma^2(s + 1)]^2 = 4\sigma^4(s^2 + 2s + 1) = \frac{\sigma^4}{2} (8s^2 + 16s + 8)$$

\widetilde{B}_4 'in varyansı denklem F.21 'de hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} var(\widetilde{B}_4) &= E[\widetilde{B}_4^2] - (E[\widetilde{B}_4])^2 \\ &= \frac{\sigma^4}{2} (4s^2 + 32s + 16) \end{aligned} \quad (F.21)$$

$B_4\widetilde{B}_4$ değeri denklem F.22 'de gösterilmiştir.

$$B_4\widetilde{B}_4 = (2x_1^2 + 2x_2^2)(2x_3^2) = 4x_1^2x_3^2 + 4x_2^2x_3^2 \quad (F.22)$$

$B_4\widetilde{B}_4$ 'in beklenen değeri denklem F.23 'de ki gibi hesaplanmaktadır.

$$E[B_4\widetilde{B}_4] = 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2z_4] + 4 \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2z_2] \quad (F.23)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(32s^2 + 64s + 32) + 4s^2z_2 + 4s^2z_4]$$

B_4, \widetilde{B}_4 beklenen değerleri çarpımı denklem F.24 ‘de hesaplanır.

$$E[B_4]E[\widetilde{B}_4] = [4\sigma^2(s + 1)][2\sigma^2(s + 1)] = 8\sigma^4(s^2 + 2s + 1) \quad (\text{F.24})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} (32s^2 + 64s + 32)$$

B_4, \widetilde{B}_4 ‘in kovaryansının hesaplanması için F.25 denkleminde buluntular yerine yerleştirilir:

$$\text{cov}(B_4, \widetilde{B}_4) = E[B_4\widetilde{B}_4] - E[B_4]E[\widetilde{B}_4] \quad (\text{F.25})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} (4s^2z_2 + 4s^2z_4)$$

B_5 ‘in varyansı F.26 denkleminde gsterilmiřtir.

$$\text{var}(B_5) = \frac{\sigma^4}{2} [(8s^2 + 64s + 32) + 4s^2z_2] \quad (\text{F.26})$$

$$+ \frac{\sigma^4}{2} (4s^2 + 32s + 16) + \frac{\sigma^4}{2} (4s^2z_2 + 4s^2z_4)$$

$$= \frac{\sigma^4}{2} [(12s^2 + 96s + 48) + 8s^2z_2 + 4s^2z_4]$$

A_5, B_5 'in kovaryansı denklem F.27 ile gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} cov(A_5, B_5) &= cov(A_4 + \widetilde{A}_4, B_4 + \widetilde{B}_4) \\ &= cov(A_4, B_4) + cov(A_4, \widetilde{B}_4) + cov(\widetilde{A}_4, B_4) + cov(\widetilde{A}_4, \widetilde{B}_4) \end{aligned} \quad (F.27)$$

$A_4\widetilde{B}_4$ değeri denklem F.28 'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} A_4\widetilde{B}_4 &= (x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_3)(2x_3^2) \\ &= 2x_3^2x_0x_1 + 4x_3^2x_1x_2 + 2x_3^2x_2 \end{aligned} \quad (F.28)$$

$A_4\widetilde{B}_4$ 'in beklenen değeri denklem F.29 'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} E[A_4\widetilde{B}_4] &= 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_1 + 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_5 + 2s(s+1)z_1] + 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2z_3 \\ &\quad + 2s(s+1)z_1] \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(18s^2 + 24s)z_1 + 4s^2z_3 + 2s^2z_5] \end{aligned} \quad (F.29)$$

A_4 ve \widetilde{B}_4 ün beklenen değerleri çarpımını denklem F.30 'da gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[A_4]E[\widetilde{B}_4] &= (2\sigma^2sz_1)[2\sigma^2(s+1)] = 4\sigma^4(s^2 + s)z_1 \\ &= \frac{\sigma^4}{4} (16s^2 + 16s)z_1 \end{aligned} \quad (F.30)$$

A_4, \widetilde{B}_4 'in kovaryans hesaplaması denklem F.31 'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} cov(A_4, \widetilde{B}_4) &= E[A_4 \widetilde{B}_4] - E[A_4]E[\widetilde{B}_4] \\ &= \frac{\sigma^4}{4} (2s^2 + 8s)z_1 + 4s^2z_3 + 2s^2z_5 \end{aligned} \quad (F.31)$$

$\widetilde{A}_4 B_4$ değeri denklem F.32 'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_4 B_4 &= (x_2 x_3 + x_3 x_4)(2x_1^2 + 2x_2^2) \\ &= 2x_1^2 x_2 x_3 + 2x_1^2 x_3 x_4 + 2x_2^2 x_3 + 2x_2^2 x_3 x_4 \end{aligned} \quad (F.32)$$

$\widetilde{A}_4 B_4$ 'ın beklenen değeri denklem F.33 'de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} E[\widetilde{A}_4 B_4] &= 2 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_1 + 4 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_3 + 2s(s+1)z_1] \\ &\quad + 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 z_5 + 2s(s+1)z_1] \\ &= \frac{\sigma^4}{4} [(18s^2 + 24s)z_1 + 4s^2 z_3 + 2s^2 z_5] \end{aligned} \quad (F.33)$$

\widetilde{A}_4 ve B_4 ün beklenen değerlerinin çarpımı denklem F.34'de gösterilmiştir.

$$E[\widetilde{A}_4]E[B_4] = (\sigma^2 s z_1)4\sigma^2(s+1) = 4\sigma^4(s^2 + s)z_1 = \frac{\sigma^4}{4}(16s^2 + 16s)z_1 \quad (F.34)$$

\widetilde{A}_4, B_4 'ın kovaryansı denklem F.35'de ki gibi gösterilmektedir.

$$cov(\widetilde{A}_4, B_4) = E[\widetilde{A}_4 B_4] - E[\widetilde{A}_4]E[B_4] \quad (F.35)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(2s^2 + 8s)z_1 + 4s^2z_3 + 2s^2z_5]$$

$\widetilde{A}_4\widetilde{B}_4$ değeri denklem F.36'da gösterilmiştir.

$$\widetilde{A}_4\widetilde{B}_4 = (x_2x_3 + x_3x_4)(2x_3^2) = 2x_3^3x_2 + 2x_3^3x_4 \quad (\text{F.36})$$

$\widetilde{A}_4\widetilde{B}_4$ 'ın beklenen değeri denklem F.37 'de gösterilmiştir.

$$E[\widetilde{A}_4\widetilde{B}_4] = 4 \frac{3\sigma^4}{4} s(s+2)z_1 = \frac{\sigma^4}{4} (12s^2 + 24s)z_1 \quad (\text{F.37})$$

$\widetilde{A}_4, \widetilde{B}_4$ 'ün kovaryansının hesaplanabilmesi için $\widetilde{A}_4, \widetilde{B}_4$ ayrı ayrı beklenen değerlerinin çarpımlarına ihtiyacımız vardır . Bu çarpımlar denklem F.38'de gösterilmiştir.

$$E[\widetilde{A}_4]E[\widetilde{B}_4] = (\sigma^2sz_1)2\sigma^2(s+1) = 2\sigma^4(s^2 + s)z_1 = \frac{\sigma^4}{4} (8s^2 + 8s)z_1 \quad (\text{F.38})$$

$\widetilde{A}_4, \widetilde{B}_4$ 'ün kovaryansı denklem F.39'da gösterilmiştir.

$$\text{cov}(\widetilde{A}_4, \widetilde{B}_4) = E[\widetilde{A}_4\widetilde{B}_4] - E[\widetilde{A}_4]E[\widetilde{B}_4] \quad (\text{F.39})$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} (4s^2 + 16s)z_1$$

A_5B_5 'in kovaryansı denklem F.40 'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} cov(A_5B_5) &= \frac{\sigma^4}{4} [(12s^2 + 48s)z_1 + 4s^2z_3] + \frac{\sigma^4}{4} [(2s^2 + 8s)z_1 + 4s^2z_3 + 2s^2z_5] \\ &\quad + \frac{\sigma^4}{4} [(2s^2 + 8s)z_1 + 4s^2z_3 + 2s^2z_5] + \frac{\sigma^4}{4} [(4s^2 + 16s)z_1] \end{aligned} \quad (F.40)$$

$$= \frac{\sigma^4}{4} [(20s^2 + 80s)z_1 + 12s^2z_3 + 4s^2z_5]$$

$(E[B_5])^2 var(A_5)$ değeri hesaplaması denklem F.41 'de verilmiştir:

$$\begin{aligned} (E[B_5])^2 var(A_5) &= 36\sigma^4(s^2 + 2s + 1) \quad (F.41) \\ &\quad \cdot \frac{\sigma^4}{2} [(10s^2 + 40s + 20) + (8s^2 + 16s)z_2 + 4s^2z_4 + s^2z_6] \\ &= 18\sigma^8[10s^4 + 60s^3 + 110s^2 + 80s + 20) + (8s^4 + 32s^3 \\ &\quad + 40s^2 + 16s)z_2 + (4s^4 + 8s^3 + 4s^2)z_4 \\ &\quad + (s^4 + 2s^3 + s^2)z_6] \end{aligned}$$

$(E[A_5])^2 var(B_5)$ hesaplaması denklem F.42 'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} (E[A_5])^2 var(B_5) &= 9\sigma^2s^2(z_2 + 2)4\frac{\sigma^4}{2} [(3s^2 + 24s + 12) + 2s^2z_4 + s^2z_6] \quad (F.42) \\ &= 18\sigma^8[(10s^4 + 48s^3 + 24s^2) + (8s^4 + 24s^3 + 12s^2)z_2 \\ &\quad + 4s^4z_4 + s^4z_6] \end{aligned}$$

$E[A_5]E[B_5]cov(A_5, B_5)$ değeri denklem F.43’de hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
 E[A_5]E[B_5]cov(A_5, B_5) &= (3\sigma^2sz_1)6\sigma^2(s+1)2\frac{\sigma^4}{4}[(10s^2+40s)z_1 \\
 &\quad +6s^2z_3+2s^2z_5] \\
 &= 9\sigma^8[(20s^4+100s^3+80s^2) \\
 &\quad +(16s^4+56s^3+40s^2)z_2 \\
 &\quad +(8s^4+8s^3)z_4+(2s^4+2s^3)z_6]
 \end{aligned} \tag{F.43}$$

İşlem kolaylığı olması açısından denklem F.44 ve F.45 ‘de gösterildiği gibi pay ve payda olarak iki kısma ayrılırsa;

$$PAY = 18\sigma^8[(8s^3+54s^2+80s+20)+(12s^2+16s)z_2+4s^2z_4+s^2z_6] \tag{F.44}$$

$$PAYDA = (E[B_5])^4 = [6\sigma^6(s+1)]^4 = (36.36)\sigma^8(s+1)^4 \tag{F.45}$$

$\hat{\rho}$ ‘nın varyansı denklem F.46 ile hesaplanır.

$$var(\hat{\rho}) \cong \frac{(4s^3+27s^2+40s+10)+(6s^2+8s)z_2+2s^2z_4+\frac{1}{2}s^2z_6}{36(s+1)^4} \tag{F.46}$$

$$var(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{1}{9s}$$

EK G MODİFİYE EDİLMİŞ PRONY FREKANS KESTİRİCİSİ

$\hat{\rho}$ aşağıda görülen denklem G.1 ile bulunur.

$$\hat{\rho} = \frac{x_1 \cdot x_2 - x_0 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_4}{4(x_2^2 - x_1 \cdot x_3)} \triangleq \frac{A}{B} \quad (\text{G.1})$$

Burada $\hat{\rho}$ 'nın pay ve paydasına A, B dersek Denklem G.2 , G.3 ile gösterilirse;

$$A = x_1 \cdot x_2 - x_0 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_4 \quad (\text{G.2})$$

$$B = 4(x_2^2 - x_1 \cdot x_3) \quad (\text{G.3})$$

A'nın beklenen değeri denklem G.4 ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[A] &= E[x_1 \cdot x_2] - E[x_0 \cdot x_3] + E[x_2 \cdot x_3] - E[x_1 \cdot x_4] \\ &= \frac{\sigma^2 s}{2} (z_1 - z_3 + z_1 - z_3) = \sigma^2 s (z_1 - z_3) \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

B'nin beklenen değeri denklem G.5 ile gösterilmiştir.

$$E[B] = 4(E[x_2^2] - E[x_1 \cdot x_3]) \quad (\text{G.5})$$

$$= 4\sigma^2 \left[(s + 1) - \frac{s}{2} z_2 \right]$$

$$= \sigma^2 [4(S + 1) - 2s z_2]$$

$\hat{\rho}$ 'nın beklenen değeri denklem G.6 ile hesaplanır .

$$E[\hat{\rho}] \cong \frac{E[A]}{E[B]} = \frac{s(z_1 - z_3)}{4(s+1) - 2sz_2} \quad (G.6)$$

$$= \frac{2s(\cos \omega - \cos 3\omega)}{4(s+1) - 4s \cos 2\omega}$$

$$= \frac{\cos \omega - 4 \cos^3 \omega + 3 \cos \omega}{2(s+1) - 2s \cos 2\omega}$$

$$= \frac{2s \cos \omega (1 - \cos^2 \omega)}{s(1 - \cos 2\omega) + 1}$$

En sade şekli denklem G.7 'de gösterildiği gibidir.

$$E[\hat{\rho}] = \frac{\cos \omega \sin^2 \omega}{\sin^2 \omega + 1/2s} = \frac{\cos \omega}{1 + \frac{1}{2s \sin^2 \omega}} \quad (G.7)$$

$\hat{\rho}$ 'nın bias'ı denklem G.8'de gösterildiği gibi bulunur:

$$\text{bias}(\hat{\rho}) = E[\hat{\rho}] - \rho \cong \frac{\cos \omega}{1 + \frac{1}{2s \sin^2 \omega}} - \cos \omega \quad (G.8)$$

$$= -\frac{\frac{\cos \omega}{2s \sin^2 \omega}}{1 + \frac{1}{2s \sin^2 \omega}} = -\frac{\cos \omega}{1 + 2s \sin^2 \omega}$$

İşleme denklem G.9 'da gösterildiği gibi A^2 'yi bularak başlanırsa;

$$\begin{aligned}
 A^2 &= (x_1x_2 - x_0x_3 + x_2x_3 - x_1x_4)^2 & (G.9) \\
 &= x_1^2x_2^2 + x_0^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 - 2x_0x_1x_2x_3 + 2x_2^2x_1x_3 - 2x_1^2x_2x_4 \\
 &\quad - 2x_3^2x_0x_2 + 2x_0x_1x_3x_4 - 2x_1x_2x_3x_4
 \end{aligned}$$

A^2 'nin beklenen değeri denklem G.10 'da gösterildiği gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
 E[A^2] &= E[x_1^2x_2^2] + E[x_0^2x_3^2] + E[x_2^2x_3^2] + E[x_1^2x_4^2] - 2E[x_0x_1x_2x_3] & (G.10) \\
 &\quad + 2E[x_2^2x_1x_3] - 2E[x_1^2x_2x_4] - 2E[x_3^2x_0x_2] + 2E[x_0x_1x_3x_4] \\
 &\quad - 2E[x_1x_2x_3x_4] \\
 &= \frac{\sigma^4}{4} [4(s+1)^2 + s^2z_2 + 4(s+1)^2 + s^2z_6 + 4(s+1)^2 + s^2z_2 \\
 &\quad + 4(s+1)^2s^2z_6] \\
 &\quad - 2\frac{\sigma^4}{4}s^2(z_4 + z_2 + 2) + 2\frac{\sigma^4}{4}s^2z_2 + 2s(s+1)z_2 - 2\frac{\sigma^4}{4}s^2z_4 \\
 &\quad + 2s(s+1)z_2 + 2\frac{\sigma^4}{4}s^2(z_6 + z_2 + 2) - 2\frac{\sigma^4}{4}s^2(z_4 + z_2 + 2)
 \end{aligned}$$

A^2 'nin beklenen değeri denklem G.1 'de gösterildiği gibi düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
 E[A^2] &= \frac{\sigma^4}{2} [8(s+1)^2 + s^2z_2 + s^2z_6 - s^2(z_4 + z_2 + 2 - z_6 - z_2 - 2 + z_4 + z_2 + 2) \\
 &\quad + s^2(2 - z_4 - z_4) + 2s(s+1)(z_2 - z_2 - z_2)] & (G.11) \\
 &= \frac{\sigma^4}{2} [8(s+1)^2 + s^2z_2 + s^2z_6 - s^2(2 + z_2 + 2z_4 - z_6) + 2s^2(1 - z_4) \\
 &\quad - 2s(s+1)z_2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^4}{2} [8(s+1)^2 - 2s^2 + 2s^2 + s^2 - s^2 - 2s(s+1)]z_2 - (2s^2 + 2s^2)z_4 \\
&\quad + (s^2 + s^2)z_6] \\
&= \frac{\sigma^4}{2} [8s^2 + 16s + 8 - 2s(s+1)]z_2 - 4s^2(z_4 + 2s^2z_6]
\end{aligned}$$

A^2 'nin beklenen değerinin karesi denklem G.12 'de elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
(E[A])^2 &= \sigma^4 s^2 (z_1 - z_3)^2 = \sigma^4 s^2 (z_1^2 - 2z_1z_3 + z_3^2) \\
&= \sigma^4 s^2 [(z_2 + 2) - 2(z_4 + z_2) + (z_6 + 2)] \\
&= \frac{\sigma^4}{2} 2s^2 (4 - z_2 - 2z_4 + z_6)
\end{aligned} \tag{G.12}$$

A'nın varyansı denklem G.13 genel formülü ile bulunur. Bu formülde diğer bulduğumuz sayısal değerleri yerine yazarsak ,

$$\begin{aligned}
var(A) &= E[A^2] - (E[A])^2 \\
&= \frac{\sigma^4}{2} [8s^2 + 16s + 8 - 8s^2 - (2s^2 + 2s - 2s^2)z_2 - (4s^2 - 4s^2)z_4 \\
&\quad + (2s^2 - 2s^2)z_6]
\end{aligned} \tag{G.13}$$

$$\text{var}(A) = \frac{\sigma^4}{2} (16s + 8 - 2sz_2) \quad (\text{G.14})$$

$$= \sigma^4(8s + 4 - sz_2)$$

B^2 'nin sayısal değeri denklem G.15'de gösterilmiştir.

$$B^2 = 16(x_2^2 - x_1x_3)^2 = 16(x_2^4 + x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_1x_3) \quad (\text{G.15})$$

B^2 'nin beklenen değeri denklem G.16 ile bulunur:

$$E[B^2] = 16(E[x_2^4] + E[x_1^2x_3^2] - 2E[x_2^2x_1x_3]) \quad (\text{G.16})$$

$$= 16 \left\{ \frac{3\sigma^4}{2} (s^2 + 4s + 2) + \frac{\sigma^4}{4} [4(s + 1)^2 + s^2z_4] - 2 \frac{\sigma^4}{4} [s^2 + 2s(s + 1)z_2] \right\}$$

$$= 16 \frac{\sigma^4}{4} [6(s^2 + 4s + 2) + 4(s + 1)^2 - 4s^2 + 4s(s + 1)z_2 + s^2z_4]$$

$$= 4\sigma^4[6s^2 + 32s + 16 - 4s(s + 1)z_2 + s^2z_4]$$

$(E[B])^2$ denklem G.17 ile elde edilir:

$$(E[B])^2 = \sigma^4[4(s + 1) - 2sz_2]^2 \quad (\text{G.17})$$

$$= \sigma^4[16(s + 1)^2 + 4s^2(z_4 + 2) - 16s(s + 1)z_2]$$

$$= \sigma^4[16(s + 1)^2 + 8s^2 - 16s(s + 1)z_2 + 4s^2z_4]$$

$$= \sigma^4[24s^2 + 32s + 16 - 16s(s + 1)z_2 + 4s^2z_4]$$

$$= 4\sigma^4[6s^2 + 8s + 4 - 4s(s + 1)z_2 + s^2z_4]$$

B'nın varyansı denklem G.18'de gösterildiği gibi bulduğumuz sayısal değerlerin yerine yerleştirilmesiyle bulunur:

$$var(B) = E[B^2] - (E[B])^2 \quad (G.18)$$

$$= 4\sigma^4(6s^2 + 32s + 16 - 4s(s + 1)z_2 + s^2z_4 - 6s^2 - 8 - 4 + 4s(s + 1)z_2 - s^2z_4)$$

$$= 4\sigma^4(24s + 12) = 48\sigma^4(2s + 1)$$

AB denklem G.19 'da gösterildiği gibi bulunur:

$$AB = 4(x_1x_2 - x_0x_3 + x_2x_3 - x_1x_4)(x_2^2 - x_1x_3) \quad (G.19)$$

$$= 4 \left(\begin{aligned} &x_2^3x_1 - x_1^2x_2x_3 - x_2^2x_0x_3 + x_3^2x_0x_1 + x_2^3x_3 - x_3^2x_1x_2 \\ &- x_2^2x_1x_4 + x_1^2x_3x_4 \end{aligned} \right)$$

AB 'nın beklenen değeri denklem G. 20'de ki gibi bulunur:

$$E[AB] = 4(E[x_2^3x_1] - E[x_1^2x_2x_3] - E[x_2^2x_0x_3] + E[x_3^2x_0x_1] \quad (G.20)$$

$$= E[x_2^3x_3] - E[x_3^2x_1x_2] - E[x_2^2x_1x_4] + E[x_1^2x_3x_4])$$

$$\begin{aligned}
&= 4\left\{\frac{3\sigma^4}{4}s(s+2)z_1 - \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_3 + 2s(s+1)z_1]\right. \\
&\quad - \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_1 + 2s(s+1)z_3] + \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_5 + 2s(s+1)z_1] \\
&\quad + \frac{3\sigma^4}{4}s(s+2)z_1 - \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_3 + 2s(s+1)z_1] - \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_1 + 2s(s+1)z_3] \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^4}{4}[s^2z_5 + 2s(s+1)z_1]\right. \\
&= \sigma^4[6s(s+2)z_1 - s^2(z_3 + z_1 - z_5 + z_3 + z_1 - z_5) \\
&\quad \left. - 2s(s+1)(z_1 + z_3 - z_1 + z_1 + z_3 - z_1)] \\
&= \sigma^4[6s(s+2)z_1 - 2s^2(z_1 + z_3 - z_5) - 4s(s+1)z_3] \\
E[AB] &= \sigma^4[(4s^2 + 12s)z_1 - (6s^2 + 4s)z_3 + 2s^2z_5] \tag{G.21}
\end{aligned}$$

A'nın beklenen değeri ve B'nin beklenen değerinin çarpımı denklem G.22'de ki gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned}
E[A]E[B] &= \sigma^4s(z_1 - z_3)[4(s+1) - 2sz_2] \tag{G.22} \\
&= \sigma^4s[4(s+1)z_1 - 2s(z_3 + z_1) - 4(s+1)z_3 + 2s(z_5 + z_1)] \\
&= \sigma^4s[(4s+4-2s+2s)z_1 - (2s+4s+4)z_3 + 2sz_5] \\
&= \sigma^4s[4(s+1)z_1 - 2(3s+2)z_3 + 2sz_5]
\end{aligned}$$

A ve B 'nin kovaryansı denklem G.23 'de ki gibi bulunur:

$$cov(A, B) = E[AB] - E[A]E[B] \quad (G.23)$$

$$= \sigma^4[(4s^2 + 12s - 4s^2 - 4s)z_1 - (6s^2 + 4s - 6s^2 - 49)z_3 \\ + (2s^2 - 2s^2)z_5]$$

$$= \sigma^4 8sz_1$$

$(\hat{\rho})$ 'nin varyansı denklem G.24 'de gösterilmiştir.

$$var(\hat{\rho}) \cong \left(\frac{d\hat{\rho}}{dA}\right)^2 var(A) + \left(\frac{d\hat{\rho}}{dB}\right)^2 var(B) + 2\frac{d\hat{\rho}}{dA}\frac{d\hat{\rho}}{dB} cov(A, B) \quad (G.24)$$

$$= \left(\frac{1}{B}\right)^2 var(A) + \left(-\frac{A}{B^2}\right)^2 var(B) + 2\left(\frac{1}{B}\right)\left(-\frac{A}{B^2}\right) cov(A, B)$$

$$\frac{B^2 var(A) + A^2 var(B) - 2AB cov(A, B)}{B^4} \Big|_{A = E[A]}$$

$$\Big|_{B = E[B]}$$

$$(E[B])^2 var(A) = 4\sigma^8 [2(s+1) - sz_2]^2 [4(2s+1) - sz_2] \quad (G.25)$$

$$= 4\sigma^8 [4(s+1)^2 + s^2(z_4 + 2) - 4s(s+1)z_2] [4(2s+1) - sz_2]$$

$$= 4\sigma^8 \left[16(s+1)^2(2s+1) - 4s(s+1)^2 z_2 + 4s^2(2s+1)(z_4 + 2) \right. \\ \left. - 2s^3 z_2 - s^3 z_6 - s^3 z_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
& -16s(s+1)(2s+1)z_2 + 4s^2(s+1)(z_4+2)] \\
& = 4\sigma^8\{[16(s+1)^2(2s+1) + 8s^2(2s+1) + 8s^2(s+1)] \\
& \quad -[4s(s+1)^2 + 3s^3 + 16s(s+1)(2s+1)]z_2 \\
& \quad +[4s^2(2s+1) + 4s^2(s+1)]z_4 - s^3z_6\} \\
& \quad .16(s+1)^2(2s+1) + 8s^2(2s+1) + 8s^2(s+1) \\
& = 16(s^2+2s+1)(2s+1) + 16s^3 + 8s^2 + 8s^3 + 8s^2 \\
& = 32s^3 + 16s^2 + 64s^2 + 32s + 32s + 16 + 24s^3 + 16s^2 \\
& = 56s^3 + 96s^2 + 64s + 16 = 8(7s^3 + 12s^2 + 8s + 2) \\
& \quad .4s(s+1)^2 + 3s^3 + 16s(s+1)(2s+1) \\
& = 4s(s^2+2s+1) + 3s^3 + 16s(2s^2+3s+1) \\
& = 4s^3 + 8s^2 + 4s + 3s^3 + 32s^3 + 48s^2 + 16s \\
& = 39s^3 + 56s^2 + 20s \\
& \quad .4s^2(2s+1) + 4s^2(s+1) = 8s^3 + 4s^2 + 4s^3 + 4s^2 \\
& = 12s^3 + 8s^2
\end{aligned}$$

$(E[B])^2 var(A)$ denklem G.26 'da gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
(E[B])^2 var(A) & = 4\sigma^8[(56s^3 + 96s^2 + 64s + 16) - (39s^3 + 56s^2 + 20s)z_2 \quad (G.26) \\
& \quad +(12s^3 + 8s^2)z_4 - s^3z_6]
\end{aligned}$$

$(E[A])^2 var(B)$ denklem G.27'de gösterildiği gibidir.

$$(E[A])^2 var(B) = \sigma^4 s^2 (z_1 - z_3)^2 48\sigma^4 (2s + 1) \quad (G.27)$$

$$= 48\sigma^8 s^2 (2s + 1) [(z_2 + 2) + (z_6 + 2) - 2(z_4 - z_2)]$$

$$= 48\sigma^8 s^2 (2s + 1) (4 - z_2 - 2z_4 + z_6)$$

$$= 48\sigma^8 [4s^2 (2s + 1) - s^2 (2s + 1)z_2 - 2s^2 (2s + 1)z_4 + s^2 (2s + 1)z_6]$$

$$= 48\sigma^8 [(8s^3 + 4s^2) - (2s^3 + s^2)z_2 - (4s^3 + 2s^2)z_4 + (2s^3 + s^2)z_6]$$

$-2E[A]E[B]cov(A, B)$ denklem G.28'de ki gibi bulunur.

$$-2E[A]E[B]cov(A, B) = -2\sigma^2 s (z_1 - z_3) 2\sigma^2 [2(s + 1) - sz_2] 8\sigma^4 sz_1 \quad (G.28)$$

$$= -32\sigma^8 s^2 z_1 (z_1 - z_3) [2(s + 1) - sz_2]$$

$$= -32\sigma^8 s^2 [(z_2 + 2) - (z_4 + z_2)] [2(s + 1) - sz_2]$$

$$= -32\sigma^8 s^2 (2 - z_4) [2(s + 1) - sz_2]$$

$$= -32\sigma^8 s^2 [4(s + 1) - 2sz_2 - 2(s + 1)z_4 + s(z_6 + z_2)]$$

$$\begin{aligned}
&= -32\sigma^8 s^2 [(4s + 4) - sz_2 - (2s + 2)z_4 + sz_6] \\
&= -32\sigma^8 [(4s^3 + 4s^2) - s^3 z_2 - (2s^3 + 2s^2)z_4 + s^3 z_6]
\end{aligned}$$

Denklem G.29,G.30 'da gösterildiği gibi pay ve paydayı ayrı ayrı sınıflandırırsak:

$$\begin{aligned}
PAY &= 4\sigma^8 [(56s^3 + 96s^2 + 64s + 16 + 96s^3 + 48s^2 - 32s^3 - 32s^2) & (G.29) \\
&\quad + (-39s^3 - 56s^2 - 20s - 24s^3 - 12s^2 + 8s^3)z_2 \\
&\quad + (12s^3 + 8s^2 - 48s^3 - 24s^2 + 16s^3 + 16s^2)z_4 \\
&\quad + (-s^3 + 24s^3 + 12s^2 - 8s^3)z_6] \\
&= 4\sigma^8 [(120s^3 + 112s^2 + 64s + 16) \\
&\quad - (55s^3 + 68s^2 + 20s)z_2 - 20s^3 z_4 + (15s^3 + 12s^2)z_6]
\end{aligned}$$

$$PAYDA = (E[B])^4 = 16\sigma^8 [2(s + 1) - sz_2]^4 \quad (G.30)$$

$\hat{\rho}$ nın varyansı denklem G.31 'de gösterildiği gibi Pay/Payda cinsinden yazılırsa ;

$$var(\hat{\rho}) \cong \frac{PAY}{PAYDA} = \frac{[30s^3 + 28s^2 + 16s + 4(-\frac{55}{4}s^3 + 17s^2 + 5s)z_2 - 5s^3 z_4 + (\frac{15}{4}s^3 + 3s^2)z_6]}{[2(s+1) - sz_2]^4} \quad (G.31)$$

$$2(s + 1) - sz_2 = 2s + 2 - 2s \cos \omega = 2 + 2s(1 - \cos 2\omega)$$

$$= 2 + 4s \sin^2 \omega = 2(1 + 2s \sin^2 \omega)$$

Denklemi düzenlersek,

$$\text{var}(\hat{\rho}) \cong \frac{\left[\frac{30}{16}s^3 + \frac{28}{16}s^2 + \frac{16}{16}s + \frac{4}{16} - \left(\frac{55}{64}s^3 + \frac{17}{16}s^2 + \frac{5}{16}s\right)2\cos 2\omega - \frac{5}{16}s^3 2\cos 4\omega + \left(\frac{15}{64}s^3 + \frac{3}{16}s^2\right)2\cos 6\omega\right]}{(1+2s\sin^2\omega)^4} \quad (\text{G.32})$$

$$= \frac{-\frac{15}{8}s^3 + \frac{7}{4}s^2 + s + \frac{1}{4} - \left(\frac{55}{32}s^2 + \frac{17}{8}s + \frac{5}{8}\right)s\cos 2\omega - \frac{5}{8}s^3 \cos 4\omega + \left(\frac{15}{32}s + \frac{3}{8}\right)s^2 \cos 6\omega}{(1+2s\sin^2\omega)^4}$$

$$= \frac{[(15s^3 + 14s^2 + 8s + 2) - \left(\frac{55}{4}s^2 + 17s + 5\right)s\cos 2\omega - 5s^3 \cos 4\omega + \left(\frac{15}{4}s + 3\right)s^2 \cos 6\omega]}{8(1+2s\sin^2\omega)^4}$$

$$s \rightarrow \infty \text{ iken } \text{var}(\hat{\sigma}) \rightarrow = \frac{15 - \frac{55}{4}\cos 2\omega - 5\cos 4\omega + \frac{15}{4}\cos 6\omega}{8(2\sin^2\omega)^4 s} \quad (\text{G.33})$$

$$= \frac{15 - \frac{55}{4}\cos 2\omega - 5\cos 4\omega + \frac{15}{4}\cos 6\omega}{128s\sin^8\omega}$$

Düzenlenmiş hali ile $\hat{\rho}$ 'nın varyans değeri denklem G.34 'de gösterilmiştir.

$$\text{var}(\hat{\rho}) \rightarrow \frac{60 - 55\cos 2\omega - 20\cos 4\omega + 15\cos 6\omega}{512s\sin^8\omega} \quad (\text{G.34})$$

$$= \frac{5(4 + 3\cos 2\omega)}{32s\sin^4\omega}$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sevim Hazal UZ

Doğum Yeri ve Tarihi : Tekirdağ / 1991

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çorlu Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi, 2009

Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2014

Çalıştığı Kurum/Kurumlar :

İletişim (e-posta) : uzhazal@gmail.com