TOPOLOJİK ÖTELEME DÜZLEMLERİNDE YAYILIMLAR VE BİRİMLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Oğuzhan DEMİREL

Danışman
Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2005

T.C.
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK ÖTELEME DÜZLEMLERİNDE YAYILIMLAR VE BİRİMLİKLER

Oğuzhan DEMİREL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Danışman
Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

Afyon
2005

TEZ JÜRİSİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Oğuzhan DEMİREL' in yüksek lisans tezi olarak hazırladığı **"Topolojik Öteleme Düzlemlerinde Yayılımlar ve Birimlikler"** başlıklı bu çalışma, lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, değerlendirilerek oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

08./09./...2005

İmza

Jüri Üyesi (Başkan) : Prof. Dr. Fatih NURAY ....

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç. Dr. Emine SOYTÜRK ....

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. İbrahim GÜNALTILI ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .14./..9../2005 gün ve .12./8.. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatih NURAY

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

TOPOLOJİK ÖTELEME DÜZLEMLERİNDE YAYILIMLAR ve BİRİMLİKLER

Bu çalışmada, topolojik öteleme düzlemlerinde yayılımlar ve birimlikler incelenmiştir. Birinci bölümde giriş, ikinci bölümde gerekli olan temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde stable düzlemler, topolojik öteleme düzlemleri, lineer düzlemler, n-boyutlu afin ve projektif uzaylar incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise; self-ortogonal yayılımlar tanımlanıp, self-ortogonal yayılımlara klasik ve klasik olmayan örnekler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ kuaterniyonlar uzayı üzerinde yayılımlar tanımlanmıştır. Son bölümde ise birimlik, ovoid ve kabuk gibi nokta kümeleri ve bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Topolojik Öteleme Düzlemi, Yayılım, Birimlik, Ovoid, Konveks Küme

ABSTRACT

SPREADS and UNİTALS İN TOPOLOGİCAL TRANSLATİON PLANES

In this study, spreads and unitals in topological translation planes have been examined. In the first chapter introduction and in the second chapter all the fundamental notions necessary for this study are given. In the third chapter stable planes, topological translation planes, linear planes, n-dimensional affine and projective spaces are considered. In the fourth chapter, self-orthogonal spreads are defined and then its classical and non-classical examples are given. Also in this chapter spreads in $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ quaternions space are defined. In last chapter; the point sets named unitals, ovoids and shells are considered with relations between themselves.

KEY WORDS : Topological Translation Plane, Spread, Unital, Ovoid, Convex Set

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{N}$	Noktalar kümesi
$\mathcal{L}$	Doğrular kümesi
$\circ$	Üzerinde bulunma bağıntısı
$(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$	Geometrik yapı
$\mathbb{A}$	Afin düzlem
$\mathbb{P}$	Projektif düzlem
$\mathcal{F}$	Cisim
$\mathbb{S}_l$	l-boyutlu küre
boy	Boyut
$\mathcal{P}_n\mathcal{F}$	n-boyutlu projektif uzay
$\mathcal{A}_n\mathcal{F}$	n-boyutlu afin uzay
$\mathcal{S}$	Yayılım elemanlarının kümesi
$\mathcal{S}^{\perp}$	Yayılımın ortogonali
L_M	M matrisi yardımıyla tanımlanan yayılım elemanı
$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$	L_M tipindeki yayılım elemanlarının oluşturduğu küme
$\langle \quad \rangle_A$	A matrisi yardımıyla tanımlanan skalar çarpım
$G_{n,k}$	Grassmann manifoldu
$V^{\star}$	V uzayının duali
$epig f$	f fonksiyonunun epigrafı
$\mathbb{Q}$	Kuaterniyonlar halkası
$\mathbb{U}$	Birimlik
$\mathcal{O}$	Ovoid
F_K	K doğrusunun sonsuzdaki noktasının ayaklar kümesi
$K + x$	K doğrusunun x vektörü kadar ötelenmişi
H_p	p noktasındaki destekleyici hiperdüzlem
$\mathcal{A}(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L})$	Lokal kompakt bağlantılı afin öteleme düzlemi
$GL_{2l}\mathbb{R}$	Genel lineer grup

1. GİRİŞ

Topolojik geometri ilk olarak 1932 yılında Kolmogoroff 'un "*Zur Begründung der Projektiven Geometrie*" adlı çalışmasıyla ortaya çıkmıştır. Kolmogoroff ilk olarak projektif uzaylar ile topoloji arasında bir bağ kurmuştur. Kolmogoroff'un çalışmaları, Skornyakov (1954) ve Freudenthal (1957) tarafından geliştirilmiştir. Topolojik düzlem geometrilerinin sistematik bir araştırması ise 1950 li yıllarda Salzmann tarafından başlatılmıştır. Günümüz projektif geometrisinin en önemli araştırma alanlarından biri topolojik afin ve projektif düzlemlerdir.

Bu çalışmada esas olarak topolojik öteleme düzlemlerinde yayılımlar, self-ortogonal yayılımlar ve tamamlayıcı boyutu bir olan birimlikler incelenmiştir. $\mathbb{R}^{2l}$ uzayı üzerinde tanımlı bir S yayılımının standart skalar çarpıma göre veya simetrik, pozitif tanımlı $2l \times 2l$ tipindeki bir A matrisi yardımıyla tanımlanan skalar çarpıma göre self-ortogonalliği incelenmiştir. $\mathbb{R}^{2l}$ uzayı üzerinde tanımlı S ve T yayılımlarının birbirlerine izomorfik olma koşulu tanımlanmış ve bu konuyla ilgili örnek verilmiştir.

$\mathbb{R}^{2l}$ reel afin uzayındaki bir kompakt $\mathcal{O}$ ovoidinin $\mathbb{R}^{2l}$ üzerinde tanımlı herhangi lokal kompakt, bağlantılı $\mathcal{A}$ afin öteleme düzleminde tamamlayıcı boyutu bir olan birimlik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ reel afin uzayında kabuk tanımlanıp, kabuk olan fakat ovoid olmayan örnek verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı temel kavramlar tanımlanarak kullanılan bazı özellikler verilmiştir. Bu çalışmada nokta, doğru ve üzerinde bulunma kavramları ilkel kavramlar (tanımsız) olarak alınmış olup, diğer geometrik kavramlar bunlar yardımıyla tanımlanmıştır. Söz konusu nokta ve doğrular Öklid anlamında bildiğimiz geometrik kavramlar olmayabilirler.

Noktalardan oluşan küme $\mathcal{N}$ ile ve bu kümenin elemanları $a, b, c, ...x, y, z, ...$ gibi küçük harflerle; doğrulardan oluşan küme $\mathcal{L}$ ile ve bu kümenin elemanları $A, B, C, ...X, Y, Z, ...$ gibi büyük harflerle ifade edilmiştir. "Üzerinde bulunma" bağıntısı ile bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması veya bir doğrunun bir noktadan geçmesi anlaşılacaktır. Üzerinde bulunma bağıntısı "$\circ$" ile gösterilmiştir. $(p, L) \in \circ$ ise $p \circ L$ veya $L \circ p$ gösterimi, benzer biçimde $(p, L) \notin \circ$ ise $p \phi L$ veya $L \phi p$ gösterimi kullanılmıştır.

Tanım 2.1 : $x_1, x_2, x_3, ... \in \mathcal{N}$ ve $L \in \mathcal{L}$ olsun. $x_i \circ L$, $i = 1, 2, 3, ...$ ise $\{x_i$: $x_i \circ L, x_i \in \mathcal{N}$ $i = 1, 2, 3, ...\}$ kümesine **doğrudaş küme**, bu kümedeki noktalara da **doğrudaş noktalar** denir.

Tanım 2.2 : $L_1, L_2, L_3, ... \in \mathcal{L}$ ve $p \in \mathcal{N}$ olsun. $p \circ L_i$, $i = 1, 2, 3, ...$ ise $\{L_i : p \circ L_i$, $L_i \in \mathcal{L}$ $i = 1, 2, 3, ...\}$ kümesine **noktadaş küme**, bu kümedeki doğrulara da **noktadaş doğrular** denir.

Tanım 2.3 : Noktalardan ve doğrulardan oluşan kümeler sırasıyla $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$, "$\circ$" da üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ ise $(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ üçlü sistemine bir **geometrik yapı** denir.

Tanım 2.4 : $L_1 \neq L_2$ özelliğindeki $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ doğruları için, $p \circ L_1$ ve $p \circ L_2$ olacak şekilde $p \in \mathcal{N}$ noktası yoksa L_1 ve L_2 doğrularına **paralel doğrular** denir ve $L_1 \| L_2$ ile gösterilir. L_1 ve L_2 doğruları paralel değilse $L_1 \nparallel L_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.5 : $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$ elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ özelliğine sahip iki küme, "$\circ$" ise $\mathcal{N} \times \mathcal{L}$ kümesinde tanımlı bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıda verilen $A1$, $A2$, $A3$ aksiyomlarını sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ geometrik yapısına **afin düzlem** denir ve bu afin düzlem $\mathbb{A} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ ile gösterilir.

$A1.$ $p \neq k$ olacak şekildeki $\forall\, p, k \in \mathcal{N}$ noktaları için $p \circ L$ ve $k \circ L$ olacak biçimde bir tek $L \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

$A2.$ $p \phi L$ olmak üzere her $p \in \mathcal{N}$ ve her $L \in \mathcal{L}$ için $p \circ K$ ve $K \| L$ olacak biçimde bir ve yalnız bir $K \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

$A3.$ Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Tanım 2.6 : $(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ geometrik yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu geometrik yapıya **projektif düzlem** denir ve $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ ile gösterilir.

$P1.$ $p \neq k$ özellikli $\forall\, p, k \in \mathcal{N}$ noktaları için $p \circ L$ ve $k \circ L$ olacak şekilde bir tek $L \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.

$P2.$ $\forall\, K, L \in \mathcal{L}$ için $p \circ K$ ve $p \circ L$ olacak biçimde en az bir $p \in \mathcal{N}$ vardır.

$P3.$ Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 2.1 : Her sonlu $\mathbb{A}$ afin düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ pozitif tamsayısı vardır. Bu tamsayıya $\mathbb{A}$ afin düzleminin **mertebesi** denir.

i. $\mathbb{A}$ nin her doğrusu üzerinde n nokta vardır.

ii. $\mathbb{A}$ nin her noktasından $n+1$ doğru geçer.

iii. $\mathbb{A}$ deki tüm noktaların sayısı n^2 dir.

iv. $\mathbb{A}$ deki tüm doğruların sayısı n^2+n dir.

Tanım 2.7 : V boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise ve yalnız böyle ise, V kümesine $\mathcal{F}$ cismi üstünde bir **vektör uzayı** (lineer uzay) denir.

$V1.$ V kümesinde " + " ile gösterilen ve adına toplama denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V,+)$ değişmeli gruptur.

$V2.$

$$\mathcal{F} \times V \to V$$
$$(a,u) \mapsto au$$

biçiminde, adına skalerle çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular.

i. $\forall a \in \mathcal{F},\ \forall u,v \in V$ için $a(u+v) = au+av$ dir.

ii. $\forall a,b \in \mathcal{F},\ \forall u \in V$ için $(a+b)u = au+bu$ dir.

iii. $\forall a,b \in \mathcal{F},\ \forall u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$ dir

iv. V nin her u elemanı için $1u = u$ tir

Burada 1, $\mathcal{F}$ cisminin çarpma işlemine göre birim elemanıdır, (Sabuncuoğlu 2000).

Tanım 2.8 : V, $\mathcal{F}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olsun.

$$f : V \times V \to \mathcal{F}$$

biçiminde, (u,v) deki değeri $\langle u,v \rangle$ ile gösterilen ve aşağıdaki önermeleri doğrulayan f fonksiyonuna V üstünde bir **iç çarpım** denir. V vektör uzayı üstünde bir iç çarpım varsa bu vektör uzayına bir **iç çarpım uzayı** adı verilir.

1. $\forall u \in V,\ u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$
2. $\forall u, v \in V$ için $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
3. $\forall u, v, w \in V$ için $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
4. $\forall a \in \mathcal{F}$ ve $\forall u, v \in V$ için $\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$

Tanım 2.9 : H; V iç çarpım uzayının bir altvektör uzayı olmak üzere,

$$H^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0\ ,\ \forall u \in H\}$$

biçiminde tanımlanan $H^{\perp}$ kümesi V nin bir altvektör uzayıdır ve bu altvektör uzayına H uzayının **ortogonal tümleyeni** denir.

Tanım 2.10 : $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı ile eşlenen ve üzerine $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + ... + |x_n - y_n|^2}$$

şeklinde tanımlı Öklid metriği konulan uzaya **Öklid uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$ uzayının

$$H = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{E}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \quad 1 \leq i \leq n \quad a_i, b \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde tanımlanan afin alt uzayına bir **hiperdüzlem** denir. H hiperdüzleminin boyutu ise $n - 1$ dir.

Tanım 2.11 : $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme ve τ ise $\mathcal{X}$ in bütün altkümelerinin oluşturduğu $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Eğer τ açıklar aksiyomu adı verilen aşağıdaki $T1$, $T2$, $T3$ aksiyomlarını sağlıyorsa bu takdirde τ, $\mathcal{X}$ üzerinde bir **topolojik yapı** veya kısaca **topoloji** olarak adlandırılır. $(\mathcal{X}, \tau)$ ikilisine bir **topolojik uzay** ya da kısaca $\mathcal{X}$ topolojik uzayı, τ nun elemanlarına da bu $\mathcal{X}$ topolojik uzayının **açık alt kümeleri** denir.

$T1$. Boş küme ve $\mathcal{X}$, τ nun elemanlarıdır

(Yani; $\emptyset$, $\mathcal{X} \in \tau$)

$T2$. τ nun sonlu sayıdaki elemanlarının arakesiti yine τ ya aittir.

$\left(\text{Yani; } (A_i)_{i \in I} \text{ , } A_i \in \tau, \ I \text{ sonlu } \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \tau\right)$

$T3$. τ nun herhangi sayıdaki elemanlarının birleşimi yine τ ya aittir.

$\left(\text{Yani; } (A_i)_{i \in I} \text{ , } A_i \in \tau, \ I \text{ sonlu yada sonsuz } \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau\right)$

(Özdamar vd. 1999).

Tanım 2.12 : $(\mathcal{X}, \tau_1)$ ve $(\mathcal{Y}, \tau_2)$ birer topolojik uzay olmak üzere

$$f : (\mathcal{X}, \tau_1) \to (\mathcal{Y}, \tau_2)$$

bir fonksiyon ve $x_o \in \mathcal{X}$ olsun. $\mathcal{Y}$ uzayında $f(x_o)$ ın her $N^{\prime}$ komşuluğu için $f(N) \subset N^{\prime}$ olacak biçimde x_o ın bir N komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_o noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $\mathcal{X}$ uzayının her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna **süreklidir** denir.

Tanım 2.13 : $(\mathcal{X}, \tau_1)$ ve $(\mathcal{Y}, \tau_2)$ birer topolojik uzay olmak üzere

$$f : (\mathcal{X}, \tau_1) \to (\mathcal{Y}, \tau_2)$$

fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve terside sürekli ise f fonksiyonuna bir **homeomorfizma** denir.

Tanım 2.14 : M, n-boyutlu topolojik uzay olmak üzere M için aşağıdaki önermeler doğru ise M **uzayına n-boyutlu topolojik manifold** denir.

$M1$. M bir Hausdorff uzayıdır.

$M2$. M nin her bir açık altkümesi $\mathbb{E}^n$ e yada $\mathbb{E}^n$ in bir açık altkümesine homeomorftur.

$M3$. M, sayılabilir çoklukta açık küme ile örtülebilir.

Tanım 2.15 : n-boyutlu bir V vektör uzayının k-boyutlu alt uzaylarının kümesi bir topolojik manifold olup bu manifolda **Grassmann manifoldu** denir. Grassmann manifoldu $G_{n,k}$ ile gösterilir. Bu manifoldun koordinatlarına ise **Grassmann koordinatları** adı verilir.

Tanım 2.16 : M bir topolojik manifold, N ise M nin bir altmanifoldu olsun. $boyM - boyN$ sayısına N manifoldunun **tamamlayıcı boyutu** denir.

Tanım 2.17 : $(\mathcal{X},\tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere (X,τ) uzayının herbir açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa $(\mathcal{X},\tau)$ uzayına **kompakttır** denir.

Teorem 2.2 : (Heine-Borel teoremi)
$A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$A \text{ kompakttır} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ kapalı ve sınırlıdır.}$$

Tanım 2.18 : $(\mathcal{X},\tau)$ topolojik uzay olmak üzere $\forall x \in \mathcal{X}$ için x elemanı kompakt bir komşuluğa sahipse $(\mathcal{X},\tau)$ uzayına **lokal kompakt uzay** denir.

Tanım 2.19 : $(\mathcal{X},\tau)$ bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{X} = U \cup V$ ve $U \cap V = \phi$ olacak şekilde boş kümeden farklı $U, V \in \tau$ varsa $(\mathcal{X},\tau)$ topolojik uzayına **bağlantısız uzay** denir. Bağlantısız olmayan topolojik uzaya ise **bağlantılı uzay** denir.

Tanım 2.20 : $(\mathcal{Y},\tau_{\mathcal{Y}})$ uzayı $(\mathcal{X},\tau)$ topolojik uzayının bir altuzayı olsun. $(\mathcal{Y},\tau_{\mathcal{Y}})$ uzayı bağlantısız uzay ise bu altuzaya **bağlantısız küme** denir.

Tanım 2.21 : $(\mathcal{X},\tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere $x \neq y$ özelliğindeki $\forall x, y \in \mathcal{X}$ için $G \cap H = \phi$ olacak biçimde x in bir G komşuluğu ve y nin bir H komşuluğu varsa $(\mathcal{X}, \tau)$ topolojik uzayına **Hausdorff uzayı** yada T_2 **uzayı** denir.

Tanım 2.22 : $\mathbb{S}_n$, n-boyutlu küre olmak üzere;

$$\begin{array}{rcll} f & : & \mathbb{S}_n \setminus \{p\} & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \end{array}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = \tfrac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

biçimde tanımlanan dönüşüme **stereografik izdüşüm** denir. Burada tanımlanan $p = (0, 0, ..., 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktasına S_n **küresinin kutup noktası** denir. Ayrıca f fonksiyonu bir homeomorfizmadır, (Munkres 1975).

Tanım 2.23 : Q üzerinde "+" ve "$\cdot$" iki ikili işlem olsun. $0, 1 \in Q$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan Q kümesine bir **kuasicisim** (quasifield) denir.

$Q1$. $(Q, +)$; birim elemanı 0 olan bir gruptur.

$Q2$. $(Q - \{0\}, \cdot)$ bir loop tur. Yani $x \in Q$ için $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ olup $x \mapsto a \cdot x$ ve $x \mapsto x \cdot a$ dönüşümleri birebir ve örtendir. $(a \neq 0)$

$Q3$. "$\cdot$" işleminin "+" işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır. Yani

$$x(y+z) = xy + xz \qquad \forall x, y, z \in Q$$

$Q4$. $\forall x \in Q$ için $0x = 0$ dır.

$Q5$. $a \neq b$ için

$$\begin{array}{rcll} f_{a,b} & : & Q & \rightarrow & Q \\ & & x & \mapsto & ax - bx \end{array}$$

toplamsal dönüşümü birebir ve örtendir.

Burada tanımlanan "$\cdot$" işlemine göre $(Q, \cdot)$ yapısı birleşmeli ise bu cebirsel yapıya bir **yaklaşık cisim** (nearfield) adı verilir, (Salzmann vd. 1995).

Tanım 2.24 : S, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altkümesi olmak üzere $\forall x, y \in S$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$ oluyorsa S kümesine **konveks küme** denir. Geometrik olarak S kümesinin konveks olması, S de seçilen farklı her nokta çiftini birleştiren doğru parçasının yine S kümesi içinde kalmasıdır.

Tanım 2.25 : S konveks bir küme ve f ise S kümesi üzerinde çok değişkenli bir fonksiyon olsun. $\forall x, x' \in S$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda x'\right) \geq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(x')$$

ise f fonksiyonu S üzerinde **konkav**,

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda x'\right) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(x')$$

ise f fonksiyonu S üzerinde **konvekstir** denir.

Tanım 2.26 : $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ olmak üzere ikinci mertebeden diferensiyellenebilen n-değişkenli homojen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonu için f nin x noktasındaki Hessian' ı,

$$H(x) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x) & f_{x_1x_2}(x) & . \; . \; . & f_{x_1x_n}(x) \\ f_{x_2x_1}(x) & f_{x_2x_2}(x) & . \; . \; . & f_{x_2x_n}(x) \\ . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . \; . \; . & . \\ f_{x_nx_1}(x) & f_{x_nx_2}(x) & . \; . \; . & f_{x_nx_n}(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $f_{x_ix_j}(x) = f_{x_jx_i}(x)$ olduğundan f simetriktir.

Önerme 2.3 : S konveks bir küme ve f ise S kümesi üzerinde birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip çok değişkenli bir fonksiyon olsun.

a. f nin konkav olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in S$ için $H(x)$ in negatif yarı tanımlı olmasıdır.

b. $\forall x \in S$ için $H(x)$ negatif tanımlı ise f kesin konkavdır.

c. f nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in S$ için $H(x)$ in pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

d. $\forall x \in S$ için $H(x)$ pozitif tanımlı ise f kesin konvekstir.

Tanım 2.27 : S, $\mathbb{R}^n$ üzerinde boş kümeden farklı bir küme olmak üzere

$$f : S \to R$$

fonksiyonu tanımlansın. f nin **epigrafı**

$$epigf = \{(x, y) : x \in S \ , \ y \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq y\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir altkümesidir.

Teorem 2.4 : S, $\mathbb{R}^n$ in boş kümeden farklı konveks bir altkümesi olsun. $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $epigf$ kümesinin konveks olmasıdır.

3. TOPOLOJİK ÖTELEME DÜZLEMLERİ ve LİNEER DÜZLEMLER

3.1 Stable Düzlemler

$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$, elemanlarına sırasıyla nokta ve doğru denilen kümeler olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathbb{M} = (\mathcal{N},\mathcal{L})$ geometrik yapısına **stable düzlem** adı verilir.

*SD*1. Herhangi x, $y \in \mathcal{N}$ için $x \vee y \in \mathcal{L}$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $x \vee y$ doğrusu vardır.

*SD*2. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$ uzayları lokal kompakt Hausdorff uzayları olup, örtme boyutları pozitif ve sonludur.

*SD*3.

$$\begin{array}{cccc} \vee : & (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \setminus \Delta(\mathcal{N}^2) & \to & \mathcal{L} \\ & (p,q) & \mapsto & p \vee q \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \wedge : & (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \setminus \Delta(\mathcal{L}^2) & \to & \mathcal{N} \\ & (K,L) & \mapsto & K \wedge L \end{array}$$

dönüşümleri süreklidir. Buradaki $\Delta(\mathcal{N}^2)$ ve $\Delta(\mathcal{L}^2)$ kümeleri

$$\Delta(\mathcal{N}^2) = \{(p,p) \in \mathcal{N}^2 : p \in \mathcal{N}\}$$

$$\Delta(\mathcal{L}^2) = \{(L,L) \in \mathcal{L}^2 : L \in \mathcal{L}\}$$

şeklinde tanımlanan köşegen altkümelerdir.

$\mathbb{M} = (\mathcal{N},\mathcal{L})$ bir stable düzlem olmak üzere, $\mathcal{N}$ nin her E açık altkümesi ile $\mathcal{L}$ nin E ile en az iki noktada kesişen doğrularının $\mathcal{E}$ kümesinden oluşan $\mathbb{E} = (E,\mathcal{E})$ geometrik yapısı yine bir stable düzlemdir. Her kompakt bağlantılı projektif düzlem bir stable düzlemdir, (Stroppel 1992, Löwe 2001).

Stable düzlemler arasında izomorfizmler, nokta uzayları arasında tanımlanan ve doğruları doğrulara eşleyen homeomorfizmler olarak tanımlanır. Ayrıca $l \in \{1,2,4,8\}$ olmak üzere $\mathcal{N}$ nin örtme boyutu $2l$ dir. $\mathcal{L}$ doğru uzayı ise $\mathcal{N}$ nokta uzayına lokal homeomorfik olup örtme boyutu $2l$ dir. $\mathcal{L}$ nin her L doğrusu $\mathcal{N}$ nin kapalı bir alt uzayı olup boyutu $l := (\dim \mathcal{N})/2$ dir. p noktasından geçen tüm doğruların oluşturduğu her $\mathcal{L}_p$ resudal uzayı bir kompakt bağlantılı homotopi l-küresidir, (Löwen 1983, Grundhöfer vd. 1995).

Stable düzlemlere verilebilecek ilk örnek $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{O}$ cisimleri yardımıyla elde edilen klasik projektif düzlemlerin açık altgeometrileridir. Diğer bir örnek ise topolojik (=stable) afin öteleme düzlemleridir.

3.2 Topolojik Öteleme Düzlemleri

$(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ bir afin düzlem olmak üzere $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$ üzerinde;

$$\begin{array}{cccccc} \vee & : & (\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \setminus \Delta(\mathcal{N}^2) & \to & \mathcal{L} \\ & & (p,q) & \mapsto & p \vee q \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \wedge & : & (\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \setminus \Delta(\mathcal{L}^2) & \to & \mathcal{N} \\ & & (K,L) & \mapsto & K \wedge L \end{array}$$

işlemleri sürekli olacak biçimde topoloji tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ geometrik yapısına bir **topolojik afin düzlem** adı verilir. Üstelik $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{L}$ üzerindeki topolojiler ne ayrık topoloji ne de ayrık olmayan topolojidir. $\mathcal{N}^2$ ve $\mathcal{L}^2$ üzerindeki topolojiler ise çarpım topolojisidir. $\mathcal{N}$ nokta uzayı (lokal) kompaktlık, bağlantılılık,..vs gibi topolojik özelliklere sahip olması durumunda $(\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ topolojik afin düzlemi de bu özelliklere sahiptir denir.

Topolojik projektif düzlem de benzer biçimde tanımlanır.

$l \in \{1,2,4,8\}$ olmak üzere nokta uzayı $\mathbb{R}^{2l}$ reel afin uzayın noktaları, doğruları $\mathbb{R}^{2l}$ nin ötelemeler altında invaryant kalan l-boyutlu alt uzaylarının $\mathcal{L}$ kümesi biçiminde tanımlanan $(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L})$ geometrik yapısına **topolojik öteleme düzlemi** adı verilir ve Öklid'in paralellik postulatı sağlanır. Burada $\mathcal{L}$ doğru uzayının $\mathcal{L}_o$ 1-demetinin bütün elemanlarının tüm afin kosetlerinin kümesine özdeş olduğu açıktır. Burada tanımlanan $\mathcal{L}_o$ 1-demeti aşağıdaki özellikleri sağlar.

i **.** $\mathcal{L}_o$ bir yayılımdır yani $\forall p \in \mathbb{R}^{2l} - \{0\}$ için p noktasından geçen $\mathcal{L}_o$ ın bir ve yalnız bir elemanı vardır.

***ii*.** $\mathcal{L}_o$ 1-demeti, $\mathbb{R}^{2l}$ *nin* l-boyutlu tüm altuzaylarının Grassmann manifoldunun kompakt bir altkümesidir.

Böylece, $\mathbb{R}^{2l}$ nin l-boyutlu lineer altuzaylarından oluşan $\mathcal{L}_o$ ailesi kompakt bir yayılımdır.

Tersine $\mathcal{L}_o$, $\mathbb{R}^{2l}$ nin kompakt bir yayılımı olsun. Bu durumda $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o$ uzayı $\mathcal{L}_o$ ın bütün elemanlarının tüm kosetler kümesi şeklinde tanımlanır. Böylece $(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L})$ bir topolojik öteleme düzlemidir. $\mathbb{R}^{2l}$ üzerindeki topoloji alışılmış topoloji, $\mathcal{L}$ üzerindeki topoloji ise $\mathcal{L}_o$ üzerindeki Grassmann topolojisidir, (Salzmann vd. 1995, Löwe 2001).

Örnek 3.2.1 : Reel afin düzlem, iki boyutlu topolojik öteleme düzlemidir. Ayrıca bu düzlem iki boyutlu tek topolojik öteleme düzlemidir. Bu düzlem üzerinde bir tek yayılım vardır.

3.3 Lineer Düzlemler

Tanım 3.3.1 : $\mathcal{N}$ noktalar kümesi ve $\mathcal{L}$ ise elemanlarına doğru denilen $\mathcal{N}$ nin altkümelerinin bir sistemi olsun. $p \neq q$ özelliğindeki $\forall p, q \in \mathcal{N}$ için $p \circ L$ ve $q \circ L$ olacak şekilde bir tek $L \in \mathcal{L}$ doğrusu varsa $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ ikilisine bir **bağlı uzay** denir. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bağlı uzayına bir **lineer düzlem** denir.

$L1$. $\mathcal{N}$, $\mathcal{F}$ aykırı cismi üstünde bir vektör uzayıdır.

$L2$. Bütün doğrular $\mathcal{N}$ nin afin altuzaylarıdır.

$L3$. Kesişen iki doğru tamamlayıcı altvektör uzaylarının kosetleridir.

Burada ki $(L3)$ koşulu, x gibi bir noktada kesişen herhangi iki K ve L doğrusu için

$$\mathcal{N} = (K - x) \oplus (L - x)$$

eşitliğinin sağlanması anlamına gelir.

Literatürde bağlı uzaylar genellikle lineer uzaylar olarak adlandırılır. Burada 'lineer' teriminin kullanılmasının sebebi bir vektör uzayı yapısının varlığından kaynaklanmaktadır. Bu yapının düzlem diye adlandırılmasının nedeni ise $(L3)$ koşulundan kaynaklanır.

$\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere $\dim_{\mathcal{F}} = 2$ için yukarıdaki aksiyomlar sağlanır. Bu durumda 1-boyutlu her altuzay bu bağlı uzayın bir doğrusu olup böylece $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bağlı uzayı $\mathcal{F}$ üzerinde Dezargsel afin düzlemdir, (Löwen vd. 2003).

Önerme 3.3.1 : Bir lineer düzlem için aşağıdaki koşullar denktir.

TP 1. Öklid'in paralellik postulatı sağlanır yani $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir afin düzlemdir.

TP 2. $\mathcal{L}$ doğru sistemi ötelemeler altında invaryanttır yani $\mathcal{L} + N = \mathcal{L}$ dir.

İspat : $\mathcal{L}$ doğru sistemi ötelemeler altında invaryant kalsın. $x \phi L$ olacak şekilde $x \in \mathcal{N}$ ve $L \in \mathcal{L}$ seçilsin. y ise L doğrusu üzerinde seçilen bir nokta olsun. L doğrusu $x-y$ kadar ötelenirse $L+x-y=K$ biçiminde yeni bir K doğrusu elde edilir ve x noktası K doğrusu üzerindedir. Kabulden dolayı $K \in \mathcal{L}$ dir. Burada $x \neq y$ olduğundan K doğrusu ile L doğrusu ayrıktır. x noktasından geçen diğer bütün $K^{'}$ doğruları L doğrusunu keser. Çünkü $(K-x)$ ve $(K^{'}-x)$ tamamlayıcı alt vektör uzayları olduğuna göre $k-x+k^{'}-x=y-x$ olacak şekilde $k \in K$ ve $k^{'} \in K^{'}$ vardır. Buradan $y-(k-x)=k^{'}$ olup $k^{'} \in L \cap K^{'}$ olur. Sonuç olarak x noktasından geçen L ye paralel tek doğru K doğrusudur. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlandı.

Tersine $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir afin düzlem olsun. $L \in \mathcal{L}$ ve $v \in \mathcal{N}$ için $L+v \in \mathcal{L}$ olduğu gösterilmelidir. $L+v \neq L$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $y \in L$ için $y+v=x$ noktası L nin üzerinde değildir. $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ afin düzlem olduğuna göre x noktasından geçen L ye paralel birtek K doğrusu vardır. Ayrıca $L+v \subseteq K$ dir. Kabul edelim ki $L+v \nsubseteq K$ olsun. L doğrusu üzerinde alınan bir z noktası için $z+v=x^{'}$ denirse $x^{'} \notin K$ olur. Bu durumda x ve $x^{'}$ noktalarından geçen bir W doğrusu vardır ki L doğrusunu w gibi bir noktada keser. Halbuki, $L+v=L+x^{'}-z$ olduğundan $x-y=x^{'}-z$ dir. Buradan $x-x^{'}=y-z$ olup $x-x^{'}$, W ye paralel ve $y-z$ vektörü de L ye paralel olduğundan $W=L$ yada $W \| L$ olur. $x \in W$ ve $x \notin L$ olduğu için $W=L$ olamaz. x noktasından geçen L doğrusuna paralel tek doğru K doğrusu olduğundan $W \| L$ olamaz. O halde $L+v \subseteq K$ dir.

Yukarıdaki ispata benzer olarak $K-v \subseteq L$ olduğu gösterilirse $L+v=K$ eşitliği elde edilir ve böylece ötelemeler altında $\mathcal{L}$ doğrular kümesi invaryant kalır.

Lineer düzlem olan afin düzlemlere **afin öteleme düzlemleri** adı verilir.

$(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ öteleme düzlemi tamamen orjinden geçen tüm doğruların oluşturduğu $\mathcal{L}_o$ 1-demeti tarafından tanımlanır. Gerçekten $\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{N}$ dir. Çünkü; $x \in L$ ve $L \in \mathcal{L}$ için $L - x \in \mathcal{L}_o$ dir. $(L - x) + x = L - x + x$ doğrusu $\mathcal{L}_o + \mathcal{N}$ kümesinin elemanıdır. Yani $L \in \mathcal{L}_o + \mathcal{N}$ dir. Buradan $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_o + \mathcal{N}$ dir.

Tersine $L_o + x \in \mathcal{L}_o + \mathcal{N}$ olsun. Buradan $L_o \in \mathcal{L}_o$ ve $\mathcal{L}_o \subset \mathcal{L}$ dir. Halbuki $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ öteleme düzlemi olduğundan $L_o + x \in \mathcal{L}$ dir.

1-demet; $\mathcal{N}$ nin ikişerli tamamlayıcı altvektör uzaylarından oluşan ve $\mathcal{N}$ vektör uzayını örten $\mathcal{N}$ nin bir parçalanışıdır.

Önerme 3.3.2 : $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir lineer düzlem olsun. $\forall v \in \mathcal{N}$ için tanımlanan $\mathcal{L}_v$ 1-demeti, ikişerli altvektör uzaylarından oluşan $\mathcal{N}$ nin bir $\mathcal{L}_v - v$ parçalanmasını tanımlar ve özellikle $(\mathcal{N}, \mathcal{L}_v + \mathcal{N})$ bir öteleme düzlemidir.

İspat : $(\mathcal{N}, \mathcal{L}_v + \mathcal{N})$ geometrik yapısının öteleme düzlemi olması için $\mathcal{L}_v + \mathcal{N} = \mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ olmalıdır. $\mathcal{L}_v + x \in \mathcal{L}_v + \mathcal{N}$ olsun. $\mathcal{N}$ vektör uzayı olduğuna göre $0 \in \mathcal{N}$ dir. $\mathcal{L}_v + x = \mathcal{L}_v + x + 0 \in \mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ olup buradan $\mathcal{L}_v + \mathcal{N} \subset \mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ dir.

Tersine $\mathcal{L}_v + x + y \in \mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ olsun. $x, y \in \mathcal{N}$ olduğuna göre $x + y \in \mathcal{N}$ dir. Buradan $\mathcal{L}_v + x + y \in \mathcal{L}_v + \mathcal{N}$ olup böylece $\mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N} \subset \mathcal{L}_v + \mathcal{N}$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{L}_v + \mathcal{N} = \mathcal{L}_v + \mathcal{N} + \mathcal{N}$ eşitliği elde edilir.

Farklı noktalar tarafından tanımlanan öteleme düzlemleri özdeş olup burada verilen lineer düzlemin kendisi bir öteleme düzlemidir. Sonlu durumda öteleme düzlemlerinin dışında lineer düzlem yoktur.

Önerme 3.3.3 : Her sonlu lineer düzlem bir afin öteleme düzlemidir.

İspat : ($L3$) aksiyomundan anlaşıldığı gibi $\mathcal{F}$ cismi üzerindeki tüm doğrular aynı (sonlu) boyutludur. O halde hepsi n sayıda nokta kapsar ve $\mathcal{N}$, n^2 noktaya sahiptir. Orjinden geçen doğruların sayısı ise $\frac{n^2-1}{n-1} = n+1$ tanedir. Orjinden geçmeyen fakat orjinden geçen n tane doğru ile kesişen tek bir L doğrusu vardır. Böylece L doğrusuna dışındaki bir noktadan (orjinden) bir tek paralel doğru çizilebilir. Önerme 3.3.1. den dolayı iddia doğrulanır, (Löwen vd. 2003).

3.4 Afin ve Projektif Uzaylar

$\mathcal{F}$ bir (aykırı) cisim olmak üzere W, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $n+1$ boyutlu (sol) vektör uzayı olsun. W nin bütün altvektör uzaylarının kafesi (lattice) n-**boyutlu projektif uzayı** oluşturur. Bu uzay $\mathcal{P}(W) = \mathcal{P}_n\mathcal{F}$ ile gösterilir. W nin tüm $k+1$ boyutlu altvektör uzaylarının kümesi $P_k(W)$ ile gösterilir ve bu kümenin elemanlarına k-**flat** adı verilir. $Y \in \mathcal{P}_k(W)$ olmak üzere Y nin projektif boyutu k dır ve $prj\ boyY = k$ ile gösterilir.

$\mathcal{F}$ bir (aykırı) cisim olmak üzere V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n-boyutlu (sol) vektör uzayı olsun. n-boyutlu $\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}_n\mathcal{F}$ **afin uzayı**; $V = A_0(V)$ vektör uzayının noktaları ve tüm afin altuzaylarından oluşur. Afin altuzay; $U \leq V$ olmak üzere $B = U + v$,($v \in V$) şeklinde kosettir. Bu durumda U altuzayına B altuzayının **doğrultman uzayı** denir ve bu uzay B_0 ile gösterilir. 0 ve B yi kapsayan en küçük afin altuzay (0 ve B nin gerdiği altuzay) ise $\widetilde{B}$ ile gösterilir. V nin tüm k-boyutlu afin altuzaylarının kümesi ise $A_k(V)$ ile gösterilir. 1-boyutlu afin altuzaylar, lineer düzlemlerin doğrularından ayırt edilmesi için $\mathcal{F}$-doğrular olarak adlandırılır.

$V = \mathcal{F}^n$ ve $W = \mathcal{F}^{n+1}$ olmak üzere $\mathcal{A}_n\mathcal{F}$ afin uzayı $\mathcal{P}_n\mathcal{F}$ projektif uzayı içine gömülür. $H = \mathcal{F}^n \times \{0\} \in P_{n-1}(W)$ altuzayı bir hiperdüzlemdir ve $\mathcal{F}^n$ ile $P_0(W) - P_0(H)$ uzayı

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^n & \longrightarrow & P_0(W) - P_0(H) \\ (a_1, a_2, ..., a_n) & \longmapsto & \mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n, 1) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan birebir, örten bir dönüşümle eşlenebilir. Bu eşleme altında $\mathcal{F}^n$ nin k-boyutlu her B afin altuzayına $P_0(X) - P_0(H)$ formunda bir küme karşılık gelir. Burada $X \in P_k(W)$ tek şekilde tanımlı olup $X = \overline{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}_n\mathcal{F}$ afin uzayının $\mathcal{P}_n\mathcal{F}$ projektif uzayı içindeki bu gömülmesine göre H ye **sonsuzdaki hiperdüzlem** denir. $\overline{B}$, B ve H nin $P_0(W)$ kümesinin altkümeleri olarak düşünülmesiyle $\overline{B} - B = \overline{B} \cap H$ formunda tümleyen elde edilir ve B_∞ ile gösterilir, (Löwen vd. 2003).

4. SELF-ORTOGONAL YAYILIMLAR

4.1 Self-Ortogonal Yayılımlar

Tanım 4.1.1 : V, $\mathcal{F}$ (aykırı) cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\mathcal{S}$ ise V nin afin altuzaylarının oluşturduğu aile olsun. $\mathcal{S}$ ailesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathcal{S}$ ye V vektör uzayı üstünde bir **yayılım** denir.

$\mathcal{S}1.$ $|\mathcal{S}| \geq 3$ tür.

$\mathcal{S}2.$ $U \neq W$ özelliğindeki $\forall\, U, W \in \mathcal{S}$ için $U \oplus W = V$

$\mathcal{S}3.$ Sıfırdan farklı her $v \in V$ noktası $\mathcal{S}$ nin bir ve yalnız elemanı üzerindedir.

Bu çalışmada ele alınan düzlemler lokal kompakt bağlantılı afin öteleme düzlemleridir. Böyle bir düzlemi oluşturmak için $\mathbb{R}^{2l}$ uzayı içinde bir yayılıma ihtiyaç duyulur. Oluşturulan düzlemin noktaları $\mathbb{R}^{2l}$ uzayının noktaları, doğruları ise yayılım elemanlarının ötelenmesinden oluşur. Düzlemin topolojik gereklilikleri sağlaması için (kesişim ve birleşimin sürekliliği) gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ yayılımının, $\mathbb{R}^{2l}$ uzayının bütün l-boyutlu altuzaylarının Grassmann manifoldunun kapalı bir altkümesi olmasıdır. Bu durumda $\mathcal{S}$ yayılımı $\mathbb{S}_l$ küresine homeomorftur. Burada l nin alabileceği değerler $1, 2, 4,$ ve 8 dir. Her kompakt yayılım aynı zamanda bir **dual yayılımdır.** Başka bir ifade ile $\mathbb{R}^{2l}$ uzayının herbir lineer hiperdüzlemi $\mathcal{S}$ yayılımının tam olarak bir elemanını içerir.

Tanım 4.1.2 : $\mathbb{R}^{2l}$ vektör uzayı içinde $\mathcal{S}$ yayılımı için $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp}$ eşitliği sağlanıyorsa, $\mathcal{S}$ yayılımına **self-ortogonal yayılım** denir ve bu yayılımın ortogonali

$$\mathcal{S}^{\perp} = \left\{K \leq \mathbb{R}^{2l} : K \perp L \ , \ \forall L \in \mathcal{S}\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Bu durumda $\mathcal{S}$ yayılımı yardımıyla oluşturulan düzlemler kendi transpozuna izomorftur. Reel, Kompleks, Kuaterniyon ve Oktanyon düzlemleri klasik yayılımlar olup bu yayılımlar self-ortogonaldir.

$\mathbb{R}^{2l} = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ uzayındaki bir yayılım genellikle Grassmann koordinatları ile verilebilir, yani $l \times l$ tipindeki matrisler kümesi $\mathcal{M}$ olmak üzere yayılım doğruları

$$V = 0 \times \mathbb{R}^l$$

şeklindeki dikey doğrulardan ve $M \in \mathcal{M}$ olmak üzere

$$L_M = \left\{(x, Mx) : x \in \mathbb{R}^l\right\}$$

formdaki doğrulardan oluşur. $M = [a_{ij}]_{l \times l}$ olmak üzere $\mathbb{R}^{2l}$ uzayındaki

$$L_M = \left\{(x, Mx) : x \in \mathbb{R}^l\right\}$$

yayılım elemanı bir l-düzlem olup bu doğrunun noktaları,

$$\begin{aligned}
(x, Mx) &= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_l \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ll}x_l \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
u_1 &= x_1 \\
u_2 &= x_2 \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
u_l &= x_l \\
u_{l+1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1l}x_l \\
u_{l+2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2l}x_l \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
u_{2l} &= a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ll}x_l
\end{aligned}
$$

biçiminde $\mathbb{R}^{2l}$ uzayının noktaları elde edilir.

$\mathbb{R}^{2l}$ uzayında l-düzlemlerin ortak noktası $(u_1, u_2, ..., u_{2l})$ olsun.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= y_1 \\
u_2 &= y_2 \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
u_l &= y_l \\
u_{l+1} &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + ... + b_{1l}y_l \\
u_{l+2} &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + ... + b_{2l}y_l \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
. \quad & . \quad . \\
u_{2l} &= b_{l1}y_1 + b_{l2}y_2 + ... + b_{ll}y_l
\end{aligned}
$$

olup buradan $1 \leq i \leq l$ için $x_i = y_i$ dir. Ayrıca $x_i = y_i$ olduğundan

$$\begin{array}{ccc} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1l}y_l & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + ... + b_{1l}y_l \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2l}y_l & = & b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + ... + b_{2l}y_l \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2l}y_l & = & b_{l1}y_1 + b_{l2}y_2 + ... + b_{ll}y_l \end{array}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{array}{ccc} (a_{11} - b_{11})\, y_1 + (a_{12} - b_{12})\, y_2 + ... + (a_{1l} - b_{1l})\, y_l & = & 0 \\ (a_{21} - b_{21})\, y_1 + (a_{22} - b_{22})\, y_2 + ... + (a_{2l} - b_{2l})\, y_l & = & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ (a_{l1} - b_{l1})\, y_1 + (a_{l2} - b_{l2})\, y_2 + ... + (a_{ll} - b_{ll})\, y_l & = & 0 \end{array}$$

homojen lineer denklemi elde edilir. Katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması durumunda $y_i = 0$ olup bu ise $u_j = 0$ olmasını gerektirir, $(1 \leq i \leq l \quad , \quad 1 \leq j \leq 2l)$.

Bu yayılım $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ ile gösterilir. M matrisinin transpozu M^t, adjointi ise $(M^t)^{-1} = M^*$ olmak üzere $V = L_0^{\perp}$ ve $L_M^{\perp} = L_{-M^*}$ dir. Çünkü

$$L_0 = \left\{(x, 0x) : x \in \mathbb{R}^l\right\}$$

dir. Bu durumda

$$L_0^{\perp} = \left\{(0, y) : y \in \mathbb{R}^l\right\}$$

olup buradan $V = L_0^{\perp}$ eşitliği sağlanır. L_M yayılım elemanının ortogonali ise

$$
\begin{aligned}
\langle (x, Mx), (y, -M^* y) \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle Mx, -M^* y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - \langle Mx, M^* y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - \langle M^{-1} Mx, y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eşitliğinden L_{-M^*} dir.

Lemma 4.1.1 : $\mathcal{M}$ kümesi tarafından tanımlanan $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ yayılımının standart skalar çarpıma göre self-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{M}$ nin sıfır matrisini kapsaması ve $\forall M \in \mathcal{M}$ için

$$-M^* = -\left((M)^t\right)^{-1}$$

olmasıdır, (Löwe vd. 2000).

İspat : $\mathcal{M}$ kümesi tarafından tanımlanan $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ yayılımı standart skalar çarpıma göre self-ortogonal olsun. $V = 0 \times \mathbb{R}^l$ doğrusu bir yayılım elemanıdır. $\mathcal{S}_{\mathcal{M}} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{\perp}$ olduğundan dolayı $V^{\perp} = L_0 = \left\{(x, 0x) : x \in \mathbb{R}^l\right\} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ olup buradan $0 \in \mathcal{M}$ elde edilir. $L_M \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ olsun. Yayılım self-ortogonal olduğu için $L_M^{\perp} \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ dir. $L_M^{\perp} = L_{-M^*}$ olduğuna göre sıfırdan farklı her $M \in \mathcal{M}^*$ için $-\mathcal{M}^* = -\left((M)^t\right)^{-1}$ dir.

Karşıt olarak $\mathcal{M}$ kümesi sıfır matrisini kapsasın ve $\forall M \in \mathcal{M}$ matrisi için $-M^* = -\left((M)^t\right)^{-1}$ olsun. $V = 0 \times \mathbb{R}^l \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ olup $V^{\perp} = \mathbb{R}^l \times 0$ dir.

$$
\begin{aligned}
V^{\perp} &= \mathbb{R}^l \times 0 \\
&= \left\{(x, 0x) : x \in \mathbb{R}^l\right\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $V^{\perp} = L_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ dir, $(0 \in \mathcal{M})$.

$L_M \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ olsun. $\forall M \in \mathcal{M} - \{0\}$ için $-M^* = -\left((M)^t\right)^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle (x, Mx), (y, -M^*y) \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle Mx, -M^*y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle Mx, M^*y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle M^{-1}Mx, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece yayılım standart skalar çarpıma göre self-ortogonaldir.

Örnek 4.1.1 : Klasik olmayan lokal kompakt bağlantılı afin öteleme düzlemine ilk örnek Betten tarafından verildi. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ düzlemleri

$$f :]0, \infty[\to]0, \infty[$$

şeklinde tanımlanan birebir, örten, monoton sürekli f dönüşümüne bağlıdır. Yayılım elemanlarının Grassmann koordinatları

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -f(a^2+b^2)\,b & f(a^2+b^2)\,a \end{bmatrix}$$

formundaki matrislerdir. Burada lemma 4.1.1'in sağlanması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun simetrik olmasıdır. Buradaki simetri $\forall r > 0$ için $f\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{f(r)}$ olması anlamındadır. Bu durumda yayılım standart skalar çarpıma göre self-ortogonaldir, (Löwe vd. 2000).

İspat :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ -f(a^2+b^2)\,b & f(a^2+b^2)\,a \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$
\begin{aligned}
-\left((M)^t\right)^{-1} &= -\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -f\left(a^2+b^2\right)b & f\left(a^2+b^2\right)a \end{bmatrix}^t\right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -a & f\left(a^2+b^2\right)b \\ -b & -f\left(a^2+b^2\right)a \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{(a^2+b^2)f(a^2+b^2)}\begin{bmatrix} -f\left(a^2+b^2\right)a & -f\left(a^2+b^2\right)b \\ b & -a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{(a^2+b^2)f(a^2+b^2)} & \frac{-a}{(a^2+b^2)f(a^2+b^2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dir. Burada $c = \frac{-a}{a^2+b^2}$ ve $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$ eşitlikleri kullanılırsa matris

$$
\begin{bmatrix} c & d \\ -f\left(c^2+d^2\right)d & f\left(c^2+d^2\right)c \end{bmatrix}
$$

formuna dönüşür ve

$$
\frac{-a}{(a^2+b^2)f(a^2+b^2)} = cf\left(c^2+d^2\right) \qquad \frac{-b}{(a^2+b^2)f(a^2+b^2)} = -df\left(c^2+d^2\right)
$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{f(a^2+b^2)} &= f\left(c^2+d^2\right) \\
&= f\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)
\end{aligned}
$$

olup f simetriktir.

Burada $\langle x, y\rangle$ standart skalar çarpımı gösterirken $2l \times 2l$ tipinde pozitif tanımlı, simetrik A matrisi yardımıyla tanımlanan skalar çarpım ise $\langle x, Ay\rangle_A$ biçiminde gösterilir. Bu iç çarpım

$$
\begin{aligned}
\langle\,,\rangle_A \;:\; \mathbb{R}^{2l}\times\mathbb{R}^{2l} &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto \langle\,,\rangle_A(x,y) = \langle x, Ay\rangle_A
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlıdır.

Lemma 4.1.2 : $\langle x, Ay\rangle_A$ skalar çarpımına göre $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ dir. Özellikle $\mathcal{S}$ yayılımının bu skalar çarpıma göre self-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul $A\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp}$ olmasıdır.

İspat : İspatın ikinci kısmının gösterilmesi için öncelikle A matrisi yardımıyla tanımlanan skalar çarpıma göre $\mathcal{S}$ yayılımının ortogonalinin $A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ olduğu yani $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ olduğu gösterilmelidir.

$L' \in \mathcal{S}^{\perp_A}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yayılımının öyle bir L elemanı vardır ki, L elemanının $\langle\ ,\ \rangle_A$ skalar çarpımına göre ortogonali $L^{\perp_A}$ dir. O halde $L' = L^{\perp_A}$ dır. L nin doğal iç çarpıma göre ortogonali $L^{\perp}$ olsun. Bu durumda $A^{-1}L^{\perp} \in A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ olur. $u \in L^{\perp}$ olmak üzere $v \in L$ için

$$\begin{aligned}
\langle A^{-1}u, v\rangle_A &= \langle A^{-1}u, Av\rangle \\
&= \langle A^{t}A^{-1}u, v\rangle \\
&= \langle AA^{-1}u, v\rangle \\
&= \langle u, v\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Böylece teoremin ilk kısmı ispatlandı.

$\mathcal{S}$ yayılımı A matrisi yardımıyla tanımlanan skalar çarpıma göre self-ortogonal olsun. Bu durumda $\mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{S}$ dir. Lemmanın ilk kısmından elde edilen $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ eşitliği kullanılarak $\mathcal{S} = A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafı A matrisi ile soldan çarpılırsa $A\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp}$ elde edilir.

Karşıt olarak $A\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp}$ olsun. Yine $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}\mathcal{S}^{\perp}$ eşitliği kullanılarak $A\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp}$ olduğundan $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}A\mathcal{S} = \mathcal{S}$ elde edilir.

4.2 Yayılımların İzomorfizmaları

Burada amaç izomorfizmlere nazaran, açıkça belirtilmeyen skalar çarpıma göre yayılımların self ortogonalliği için gerek ve yeter koşul elde etmektir.

Tanım 4.2.1 : $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$; $\mathbb{R}^{2l}$ üzerinde iki yayılım olmak üzere $\mathbb{R}^{2l}$ nin $\mathcal{S}$ yi $\mathcal{T}$ ye eşleyen tersinir bir α lineer dönüşüm varsa $\mathbb{R}^{2l}$ üzerindeki $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{T}$ yayılımları **izomorfiktir** denir.

Örnek 4.2.1 : Keyfi bir $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ yayılımı için

$$\begin{array}{rcll} \alpha_{\mp} & : & \mathbb{R}^{2l} & \longrightarrow \mathbb{R}^{2l} \\ & & (x,y) & \longmapsto \alpha_{\mp}(x,y) = (y, \mp x) \end{array}$$

lineer dönüşümleri birer izomorfizma olup $\mathcal{S}_{\mathcal{M}} \cong \mathcal{S}_{\mp\mathcal{M}^{-1}}$ dir.

$\alpha_{\mp}$ dönüşümü lineerdir. Aynı zamanda $\ker \alpha_{\mp} = \{0\}$ olduğundan $\alpha_{\mp}$ dönüşümü birebir olup dolayısıyla örtendir. O halde $\alpha_{\mp}$ lineer dönüşümü tersinirdir.

α_{-} lineer dönüşümünde $\mathbb{R}^{2l} = \mathbb{R}^{l} \times \mathbb{R}^{l}$ uzayından seçilen (x,y) elemanı için;

$$\alpha_{-}(x_1, x_2, ..., x_{2l}) = (x_{l+1}, x_{l+2}, ..., x_{2l}, -x_1, -x_2, ..., -x_l)$$

olup buradan

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{-}(e_1) & = & -1e_{l+1} \\ \alpha_{-}(e_2) & = & -1e_{l+2} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \alpha_{-}(e_{2l-1}) & = & 1e_{l-1} \\ \alpha_{-}(e_{2l}) & = & 1e_l \end{array}$$

elde edilir. α_- lineer dönüşüme karşılık gelen matris

$$C = \begin{bmatrix} 0_{l\times l} & 1_{l\times l} \\ -1_{l\times l} & 0_{l\times l} \end{bmatrix}_{2l\times 2l}$$

matrisidir. Böylece $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{\perp} = \mathcal{S}_{-\mathcal{M}^*}$ yayılımı daima $\mathcal{S}_{\mathcal{M}^t}$ transpozuna izomorfiktir. $M = [a_{ij}]_{l\times l}$ olmak üzere M^t matrisiyle tanımlanan yayılım elemanı

$$L_{M^t} = \left\{ \left(x, M^t x\right) : x \in \mathbb{R}^l \right\}$$

şeklindedir.

$$CL_{M^t} = \begin{bmatrix} 0_{l\times l} & 1_{l\times l} \\ -1_{l\times l} & 0_{l\times l} \end{bmatrix}_{2l\times 2l} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_l \\ \sum_{i=1}^{l} a_{i1}x_i \\ \sum_{i=1}^{l} a_{i2}x_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{l} a_{il}x_i \end{bmatrix}_{2l\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{l} a_{i1}x_i \\ \sum_{i=1}^{l} a_{i2}x_i \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{i=1}^{l} a_{il}x_i \\ -x_1 \\ -x_2 \\ . \\ . \\ . \\ -x_l \end{bmatrix}_{2l\times 1}$$

olup

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{l} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{l} a_{i2}x_i, ... - x_{(l-1)}, -x_l \right), \left(x_1, ..., \sum_{i=1}^{l} a_{1i}x_i, ..., \sum_{i=1}^{l} a_{li}x_i \right) \right\rangle = 0$$

dır. Böylece $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{\perp} = C\mathcal{S}_{\mathcal{M}^t}$ olup, $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{\perp}$ yayılımı $\mathcal{S}_{\mathcal{M}^t}$ transpozuna izomorfiktir.

Geometrik olarak α_- dönüşümü yayılım elemanının birinci açıortay doğrusuna göre simetrisinin yatay doğruya göre simetrisidir.

Tanım 4.2.2 : (Yayılımın duali) $\mathcal{S} \subseteq G_{2l,l}$ olmak üzere $\mathcal{S}$, $V = \mathbb{R}^{2l}$ uzayının kompakt bir yayılımı olsun. V nin **dual uzayı**

$$V^* = \{f^* : f^* : V \to \mathbb{R} \text{ lineer dönüşüm}\}$$

şeklinde tanımlanır. V^* dual uzayında $\mathcal{S}^\circ$ kompakt yayılımı ise;

$$L^\circ = \{f^* \in V^* : f^*(L) = \{0\} \ , L \in \mathcal{S}\}$$

kümelerinin oluşturduğu ailedir. Bu şekilde tanımlanan L° kümesine L yayılım elemanının **sıfırlayanlar** (annihilatörler) kümesi denir.

Teorem 4.2.1 : $V = \mathbb{R}^{2l}$ uzayının kompakt bir $\mathcal{S}$ yayılımı için V vektör uzayının her lineer hiperdüzlemi $\mathcal{S}$ yayılımın bir ve yalnız bir elemanını kapsar, (Salzmann vd. 1995).

İspat : $\mathcal{S}^\circ$ nin elemanları da ikişerli tamamlayıcı olup $L \leq V$ olduğundan $boyL + boyL^\circ = boy\mathbb{R}^{2l}$ olduğundan $boyL^\circ = l$ dir, (Hacısalihoğlu 1982). Her $L_i^\circ, L_j^\circ \in \mathcal{S}^\circ$ için $L_i^\circ \cap L_j^\circ \neq \phi$ dir. Çünkü $\{0\} \in L_i^\circ \cap L_j^\circ$ dir. $L^\circ \leq V^*$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

İlk olarak $\forall f^*, g^* \in L^\circ$ için $f^* + g^* \in L^\circ$ olduğu gösterilmelidir. $f^*, g^* \in L^\circ$ ise $f^*(L) = \{0\}$ ve $g^*(L) = \{0\}$ dır. Bu durumda $f^*(L) + g^*(L) = \{0\}$ dır. Fonksiyonların noktasal toplama özelliğinden $(f^* + g^*)(L) = \{0\}$ olur. Yani $f^* + g^* \in L^\circ$ dir.

$\forall f^* \in L^\circ$ ve $\forall c \in \mathbb{R}$ için $cf^* \in L^\circ$ olmalıdır. $(cf^*)(L) = cf^*(L) = \{0\}$ olur ki buradan L° kümesi V^* dual uzayın bir altuzayıdır.

$boyV^* = boy\mathbb{R}^{2l}$ olup, $L_i^\circ \leq V^*$ ve $L_j^\circ \leq V^*$ olduğundan $L_i^\circ + L_j^\circ \leq V^*$ dır.

$$boy\left(L_i^\circ + L_j^\circ\right) = boyL_i^\circ + boyL_j^\circ - boy\left(L_i^\circ \cap L_j^\circ\right)$$

olduğundan $L_i^\circ \cap L_j^\circ = \{0\}$ dir. Gerçekten $f^* \in L_i^\circ \cap L_j^\circ$ için $f^* \in L_i^\circ$, $f^* \in L_j^\circ$ olup böylece $f^*(L_i) = 0$ ve $f^*(L_j) = 0$. Buradan $f^*(L_i) + f^*(L_j) = 0$ dır. f^* lineer olduğundan $f^*(L_i + L_j) = 0$ olur ki buradan $f^* = 0$ dir.

$$\begin{aligned} \pi \ : \ \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S}^\circ \\ L &\mapsto L^\circ \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan π fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Öncelikle π fonksiyonunun birebir olduğu gösterilmelidir.

$L_1 \neq L_2$ için $\pi(L_1) \neq \pi(L_2)$ oluyorsa π fonksiyonu birebirdir. $L_1 \neq L_2$ için $\pi(L_1) = \pi(L_2)$ olsun. $0 \neq f \in L_1^\circ$ olmak üzere $f \in L_2^\circ$ dir. Böylece $f(L_2) = 0$ dır. Buradan $f(L_1) + f(L_2) = 0$ olup $f(L_1 + L_2) = 0$ olur ki bu ise $f = 0$ olduğunu gösterir. Halbuki $0 \neq f$ idi. Bu bir çelişki oluşturduğundan π fonksiyonunun birebirdir. O halde $boy\mathcal{S}^\circ = boy\mathcal{S}$ olduğundan π örtendir. Ayrıca π fonksiyonu süreklidir, (Kühne ve Löwen 1992).

Sonuç olarak π bir homeomorfizmadır.

Önerme 4.2.2 :

a. Keyfi bir skalar çarpıma göre self-ortogonal yayılım kendi transpozuna izomorfiktir.

b. Karşıt olarak $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ yayılımı kendi transpozuna $B\mathcal{S}_\mathcal{M} = \mathcal{S}_{\mathcal{M}^t}$ biçiminde izomorfik olsun. $\langle x, Ay \rangle$ skalar çarpımının $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ yayılımını self-ortogonal yapması için gerek ve yeter koşul $A^{-1}CB$ nin $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ yayılımının bir otomorfizması olması yani $A^{-1}CB\mathcal{S}_\mathcal{M} = \mathcal{S}_\mathcal{M}$ olmasıdır.

İspat :

a. Lemma 4.1.2 de ispatlandı.

b. Lemma 4.1.2 deki $A\mathcal{S} = \mathcal{S}^\perp$ eşitliği kullanılarak

$$A\mathcal{S}_\mathcal{M} = \mathcal{S}_\mathcal{M}^\perp = C\mathcal{S}_{\mathcal{M}^t} = CB\mathcal{S}_\mathcal{M}$$

bulunur ve buradan eşitliğin her iki tarafı A^{-1} matrisi ile çarpılırsa

$$\mathcal{S}_\mathcal{M} = A^{-1}CB\mathcal{S}_\mathcal{M}$$

elde edilir.

4.3. Kuaterniyonlar

Tanım 4.3.1 : $(\mathbb{R},+,\cdot)$ reel sayılar cismi olmak üzere

$$\mathbb{Q}=\{(a_1,a_2,a_3,a_4):a_i\in\mathbb{R}\ ;\quad i=1,2,3,4\}$$

kümesi tanımlansın. $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ve $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ olmak üzere $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cismi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri yardımıyla $\mathbb{Q}$ kümesi üzerinde

$$\begin{array}{rcccl}\oplus & : & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}\\ & & (a,b) & \mapsto & \oplus(a,b)=a\oplus b\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl}\odot & : & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q}\\ & & (a,b) & \mapsto & \odot(a,b)=a\odot b\end{array}$$

$$a\oplus b \;=\; (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3,\ a_4+b_4)$$

$$\begin{aligned}a\odot b \;=\; &(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4,\ a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3,\\ &a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2,\ a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)\end{aligned}$$

şeklinde $\oplus$ ve $\odot$ iki ikili işlem tanımlanırsa bu durumda $(\mathbb{Q},\oplus,\odot)$ cebirsel yapısı bir bölümlü halka olup bu halkaya **kuaterniyonlar halkası** denir. Bu halkanın elemanlarına da **kuaterniyon** adı verilir. $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ kuaterniyonu

$$\begin{aligned}1 &= (1,0,0,0)\\ i &= (0,1,0,0)\\ j &= (0,0,1,0)\\ k &= (0,0,0,1)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$a=a_11+a_2i+a_3j+a_4k$$

biçiminde de gösterilir. Bu bölümlü halkanın toplamsal birimi $0 = (0, 0, 0, 0)$ ve çarpımsal birimi ise $1 = (1, 0, 0, 0)$ dir. $a \in \mathbb{Q}$ olmak üzere a kuaterniyonunun eşleniği

$$\begin{array}{rccc} K : & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4) & \mapsto & K(a_1, a_2, a_3, a_4) \end{array}$$

$$K(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$$

şeklinde tanımlanır ve

$$\begin{aligned} K(\lambda a + \mu b) &= \lambda K(a) + \mu K(b) \\ K(K(a)) &= a \\ K(a \odot b) &= K(a) \odot K(b) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

$a \in \mathbb{Q}$ olmak üzere a kuaterniyonunun normu ise

$$\begin{array}{rccc} N : & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{Q} \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4) & \mapsto & N(a_1, a_2, a_3, a_4) \end{array}$$

$$N(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

şeklinde tanımlanır. Norm fonksiyonu

$$N(a \odot b) = N(a) \odot N(b)$$

şeklinde $\odot$ işlemini korur.

$a \in \mathbb{Q}$ olmak üzere a kuaterniyonunun tersi

$$\begin{array}{rccc} (\ \ )^{-1} : & \mathbb{Q} - \{0\} & \rightarrow & \mathbb{Q} - \{0\} \\ & (a_1, a_2, a_3, a_4) & \mapsto & (\ \ )^{-1}(a_1, a_2, a_3, a_4) \end{array}$$

$$(\quad)^{-1}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{K(a_1, a_2, a_3, a_4)}{N(a_1, a_2, a_3, a_4)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu çalışmada a kuaterniyonunun eşleniği $\overline{a}$, normu $|a|$ ve tersi ise a^{-1} ile gösterilecektir. $\mathbb{Q}$ kümesinden, birer özel hal olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve üç-boyutlu $\mathbb{R}^3$ vektörler kümesi elde edilebilir, (Hacısalihoğlu 1983, Kaya 1992).

Örnek 4.3.1 : $l = 4$ olmak üzere $\mathbb{R}^4$ üzerinde

$$\begin{aligned} 0 \circ x &= 0 \\ a \circ x &:= a \cdot \varphi(|a|)^{-1} \cdot x \cdot \varphi(|a|) \qquad a \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde bir çarpım tanımlansın. Burada $x \cdot y$; $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ üzerinde kuaterniyon çarpımı gösterirken

$$\varphi \ : \ ]0, \infty[\ \rightarrow \ \mathrm{Spin}_3\mathbb{R}$$

dönüşümü $\varphi(1) = 1$ eşitliğini sağlayan sürekli bir dönüşümdür. $\mathrm{Spin}_3\mathbb{R}$ kümesi normu 1 olan kuaterniyonlar grubudur. φ dönüşümü yardımıyla doğruları

$$\left\{a \circ x : x \in \mathbb{R}^4\right\}$$

şeklinde olan $\mathcal{S}_\varphi$ yayılımı tanımlanabilir. Burada tanımlanan φ dönüşümünün çarpımsal homomorfizma olması durumunda $\mathbb{R}^4$ uzayı bu çarpımla birlikte bir yaklaşık cisim olur. İzomorfizmlere kadar bütün yaklaşık cisimler

$$\varphi_r(t) = t^{-ir} \in \mathbb{C} \leq \mathbb{H} \qquad 0 \leq r \in \mathbb{R}$$

şeklinde elde edilir. $r = 0$ olması durumunda kuaterniyonları, $r > 0$ olması durumunda ise öz (proper) yaklaşık cisimleri verir. Bu tip yayılımların ortogonallik özellikleri oldukça farklıdır, (Löwe vd. 2000, Salzmann vd. 1995).

Teorem 4.3.1 :

i. φ dönüşümü sürekli ise, $\mathcal{S}_\varphi$ yayılımının standart skalar çarpıma göre self-ortogonal olması için gerek ve yeter koşul her t elemanı için $\varphi(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ olmasıdır.

ii. Her öz (proper) yaklaşık cisim düzlem yayılımı kendi transpozuna izomorfiktir, fakat keyfi bir skalar çarpıma göre self-ortogonal değildir.

İspat:

i.

$$x \;\mapsto\; a \circ x$$

dönüşümleri $\mathcal{S}_\varphi$ yayılımının Grassmann koordinatları olacak şekilde matrislere ayrıştırılabilir. $\mathcal{K}_a(x) := \varphi(|a|)^{-1} \cdot x \cdot \varphi(|a|)$ ve $\lambda_a(x) := a \cdot x$ eşitliklerinden $a \circ x = \lambda_a \mathcal{K}_a(x)$ elde edilir. $\mathbb{R}^4$ uzayının doğal tabanı

$$\sigma = \{1, i, j, k\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a(1) &= 1 \\
\mathcal{K}_a(i) &= i \\
\mathcal{K}_a(j) &= \cos 2(r \ln |a|)\, j - \sin 2(r \ln |a|)\, k \\
\mathcal{K}_a(k) &= \sin 2(r \ln |a|)\, j + \cos 2(r \ln |a|)\, k
\end{aligned}$$

olup $\mathcal{K}_a$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathcal{K}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2(r \ln |a|) & \sin 2(r \ln |a|) \\ 0 & 0 & -\sin 2(r \ln |a|) & \cos 2(r \ln |a|) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin transpozu ise

$$(\mathcal{K}_a)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2(r\ln|a|) & -\sin 2(r\ln|a|) \\ 0 & 0 & \sin 2(r\ln|a|) & \cos 2(r\ln|a|) \end{bmatrix}$$

dır.

$$C = \begin{bmatrix} \cos 2(r\ln|a|) & \sin 2(r\ln|a|) \\ -\sin 2(r\ln|a|) & \cos 2(r\ln|a|) \end{bmatrix}$$

ve

$$D = \begin{bmatrix} \cos 2(r\ln|a|) & -\sin 2(r\ln|a|) \\ \sin 2(r\ln|a|) & \cos 2(r\ln|a|) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a(\mathcal{K}_a)^t &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & D \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}_4 \end{aligned}$$

olduğundan $\left((\mathcal{K}_a)^t\right)^{-1} = (\mathcal{K}_a)^* = \mathcal{K}_a$ dır. O halde $\mathcal{K}_a$ dönüşümü ortogonaldir. Ayrıca a^* ile a elemanının eşleniğinin tersi gösterilmek üzere $\left((\lambda_a)^t\right)^{-1} = (\lambda_a)^* = \lambda_{a^*}$ dir. Çünkü λ_a dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \lambda_a(1) &= a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \\ \lambda_a(i) &= -a_2 + a_1 i + a_4 j - a_3 k \\ \lambda_a(j) &= -a_3 - a_4 i + a_1 j + a_2 k \\ \lambda_a(k) &= -a_4 + a_3 i - a_2 j + a_1 k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\lambda_a = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} -\lambda_a(x) &= -(a \cdot x) \\ &= -a \cdot x \\ &= \lambda_{-a}(x) \end{aligned}$$

olduğundan $-\lambda_a$ matrisinin adjointi yerine λ_{-a} matrisinin adjointi hesaplanabilir. O halde bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \lambda_{-a}(1) &= -a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k \\ \lambda_{-a}(i) &= a_2 - a_1 i - a_4 j + a_3 k \\ \lambda_{-a}(j) &= a_3 + a_4 i - a_1 j - a_2 k \\ \lambda_{-a}(k) &= a_4 - a_3 i + a_2 j - a_1 k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\lambda_{-a} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & -a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & -a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

olup bu matrisin transpozu ise

$$(\lambda_{-a})^t = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

matrisidir. Ayrıca λ_{-a^*} dönüşümüne karşılık gelen matris,

$$\begin{aligned} \lambda_{-a^*}(1) &= -\tfrac{1}{|a|}a_1 - \tfrac{1}{|a|}a_2 i - \tfrac{1}{|a|}a_3 j - \tfrac{1}{|a|}a_4 k \\ \lambda_{-a^*}(i) &= \tfrac{1}{|a|}a_2 - \tfrac{1}{|a|}a_1 i - \tfrac{1}{|a|}a_4 j + \tfrac{1}{|a|}a_3 k \\ \lambda_{-a^*}(j) &= \tfrac{1}{|a|}a_3 + \tfrac{1}{|a|}a_4 i - \tfrac{1}{|a|}a_1 j - \tfrac{1}{|a|}a_2 k \\ \lambda_{-a^*}(k) &= \tfrac{1}{|a|}a_3 + \tfrac{1}{|a|}a_4 i - \tfrac{1}{|a|}a_1 j - \tfrac{1}{|a|}a_2 k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\lambda_{-a^*} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{|a|}a_1 & \frac{1}{|a|}a_2 & \frac{1}{|a|}a_3 & \frac{1}{|a|}a_4 \\ -\frac{1}{|a|}a_2 & -\frac{1}{|a|}a_1 & \frac{1}{|a|}a_4 & -\frac{1}{|a|}a_3 \\ -\frac{1}{|a|}a_3 & -\frac{1}{|a|}a_4 & -\frac{1}{|a|}a_1 & \frac{1}{|a|}a_2 \\ -\frac{1}{|a|}a_4 & \frac{1}{|a|}a_3 & -\frac{1}{|a|}a_2 & -\frac{1}{|a|}a_1 \end{bmatrix}$$

matrsidir. Buradan

$$\frac{1}{|a|}\begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & -a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & -a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_4$$

olup $\lambda_{-a^*} = \left((-\lambda_a)^t\right)^{-1} = (-\lambda_a)^*$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} -(\lambda_a\mathcal{K}_a)^* &= -\left((\lambda_a\mathcal{K}_a)^t\right)^{-1} \\ &= -\left(\mathcal{K}_a^t\lambda_a^t\right)^{-1} \\ &= -\left(\left(\lambda_a^t\right)^{-1}\left(\mathcal{K}_a^t\right)^{-1}\right) \\ &= -(\lambda_a)^*(\mathcal{K}_a)^* \\ &= \lambda_{-a^*}\mathcal{K}_a \end{aligned}$$

olur. Bu yayılımın self-ortogonal olması için yayılımın kendi ortogonali ile çakışık olması gerekir. Bu durumda

$$\lambda_b\mathcal{K}_b = \lambda_{-a^*}\mathcal{K}_a$$

olacak şekilde $b \in \mathbb{R}^4$ kuaterniyonları bulunmalıdır. $\lambda_b\mathcal{K}_b = \lambda_{-a^*}\mathcal{K}_a$ eşitliğinin sağlanması ile

$$\lambda_b^{-1}\lambda_{-a^*} = \mathcal{K}_b\mathcal{K}_a^{-1}$$

eşitliğinin sağlanması denk önermelerdir. Bu eşitlik ancak her iki tarafında birim dönüşüm olması durumunda sağlanır.

$$\begin{aligned} \lambda_b^{-1}\lambda_{-a^*}(x) &= -b^{-1}a^*x \\ \mathcal{K}_b\mathcal{K}_a^{-1}(x) &= \varphi(|b|)^{-1}\cdot\varphi(|a|)\cdot x\cdot\varphi(|a|)^{-1}\cdot\varphi(|b|) \end{aligned}$$

eşitliklerinde özel olarak $x = 1$ alınırsa $\varphi(|b|) \cdot \varphi(|a|)^{-1}$, $\mathrm{Spin}_3\mathbb{R}$ grubunun $\{1, -1\}$ merkezine aittir. Böylece gerek ve yeter koşul $-b^{-1}a^* = 1$ olması ve $\varphi(|b|) = \pm\varphi(|a|)$dır. Ayrıca

$$-b^{-1}a^* = 1 \;\;\Rightarrow\;\; -b^{-1}\overline{a}^{-1} = 1$$

olduğundan $-b^{-1} = \overline{a}$ elde edilir. Her iki tarafın normu alınırsa

$$\left|b^{-1}\right| = \left|-b^{-1}\right| = |\overline{a}| = |a|$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left|b^{-1}\right| &= \left|\tfrac{b_1}{|b|} - \tfrac{b_2}{|b|}i - \tfrac{b_3}{|b|}j - \tfrac{b_4}{|b|}k\right| \\
&= \tfrac{b_1^2}{|b|^2} + \tfrac{b_2^2}{|b|^2} + \tfrac{b_3^2}{|b|^2} + \tfrac{b_4^2}{|b|^2} \\
&= \tfrac{1}{|b|^2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right) \\
&= |b|^{-1}
\end{aligned}$$

olduğundan $|a| = |b|^{-1}$ dir. O halde $-b^{-1}a^* = 1$ olması $|a| = |b|^{-1}$ eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. Burada elde edilen gerek ve yeter koşulun sağlanması durumunda $p(t) = \varphi(t)/\varphi(t^{-1})$ şeklinde sürekli bir dönüşüm elde edilir ve bu dönüşüm $\{1, -1\}$ de değer alır. Böylece $p(t) \equiv p(1) = 1$ sağlanmış olur.

ii. φ_r tarafından tanımlanan yayılım S_r olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(\lambda_a \mathcal{K}_a)^t &= \mathcal{K}_a^t \lambda_a^t \\
&= \mathcal{K}_a^{-1} \lambda_{\overline{a}}
\end{aligned}$$

olup bu dönüşüm

$$\begin{aligned}
(\lambda_a \mathcal{K}_a)^t \;:\; \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\
x &\mapsto (\lambda_a \mathcal{K}_a)^t(x) = |a|^{ir}\, \overline{a} x\, |a|^{-ir}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$b = |a|^{ir} \overline{a} \, |a|^{-ir}$$

olmak üzere eşitliğin her iki tarafının normu alınırsa $|b| = |\overline{a}| = |a|$ elde edilir. Böylece

$$|a|^{ir} \overline{a}x \, |a|^{-ir} = b \, |b|^{ir} \, x \, |b|^{-ir}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ise $1/\varphi_r = \varphi_{-r}$ dönüşümüne göre S_{-r} yayılımıdır. Böylece S_r yayılımının transpozu S_{-r} dir.

Yaklaşık cisim olma durumunda yayılım, yayılım matrislerinin inversiyonları altında değişmez kalır. Çünkü yaklaşık cisim çarpımı grup formundadır. Daha açıkça

$$\begin{array}{rcccl} \mu_a & : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & x & \longmapsto & \mu_a(x) = a \circ_r x \end{array}$$

dönüşümünün tersi

$$y \longmapsto |a|^{ir} a^{-1} y \, |a|^{-ir}$$

şeklindedir.

$$c = |a|^{ir} \, a^{-1} \, |a|^{-ir}$$

olmak üzere görüntü $c \, |a|^{ir} \, y \, |a|^{-ir}$ olur. Bu ise $c \circ_r y$ ye eşittir. Çünkü

$$\varphi_r(|c|) = \varphi_r\left(|a|^{-1}\right) = (\varphi_r(|a|))^{-1}$$

dir.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan köşegen matris için bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüm, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$H [x]_\sigma = [\alpha (x)]_\sigma$$

eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix}$$

olup

$$\alpha (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} -jxj &= -j(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)j \\ &= (-x_1 j + x_2 k + x_3 - x_4 i)\, j \\ &= x_1 - x_2 i + x_3 j - x_4 k \\ &= (x_1, -x_2, x_3, -x_4) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha (x) = -jxj$ yazılabilir. O halde

$$B = Diag\,(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)$$

köşegen matrisine karşılık gelen lineer dönüşüm,

$$B\ \ [(x, y)]_\sigma = [\beta (x, y)]_\sigma$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \beta \ : \ \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ (x, y) &\mapsto (-jxj, -jyj) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u = -jxj$ ve $b = -jaj$ denirse

$$\begin{aligned}
\beta\left(x, a \circ_r x\right) &= \left(-jxj, -ja\left|a\right|^{-ir} x \left|a\right|^{ir} j\right) \\
&= \left(u, b\left(-j\right)\left|a\right|^{-ir} ju\left(-j\right)\left|a\right|^{ir} j\right) \\
&= \left(u, b\left(-j\left|a\right|^{-ir} j\right) u\left(-j\left|a\right|^{ir} j\right)\right) \\
&= \left(u, b\left|b\right|^{ir} u\left|b\right|^{-ir}\right) \\
&= \left(u, b \circ_{-r} u\right)
\end{aligned}$$

Böylece β bir izomorfizmadır yani $BS_r = S_{-r} = S_r^{\perp}$ dir.

Eğer S_r yi self-ortogonal yapacak şekilde bir skalar çarpım varsa lemma 4.1.2 gereğince $AS_r = S_r^{\perp}$ olacak şekilde pozitif tanımlı, simetrik bir A matrisi vardır. $AS_r = S_r^{\perp}$ ve $BS_r = S_r^{\perp}$ olduğundan bu iki eşitlikten $AS_r = BS_r$ elde edilir. Böylece $A^{-1}BS_r = S_r$ olup $A^{-1}B$, S_r nin bir otomorfizması olur. D; bileşenleri pozitif olan köşegen matris, Q ise ortogonal matris ve D ile Q nun her ikiside otomorfizma olmak üzere S_r yayılımının otomorfizmaları DQ formundadır, (Salzmann vd. 1995). Simetrik pozitif tanımlı bir matrisle ortogonal bir matrisin çarpımı, tersinir bir matrisin polar ayrışımının tekliğine benzer olmasından dolayı $A^{-1} = D$ ve $Q = B$ dir. Burada Q matrisi otomorfizma olduğundan ve B matrisi otomorfizma olmadığından $Q = B$ eşitliği sağlanmaz, yani bu yayılım keyfi skalar çarpıma göre self-ortogonal değildir.

5. BİRİMLİK, OVOİD ve KABUK

5.1 Birimlikler

Tanım 5.1.1 : $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ bir projektif düzlem ve $\mathbb{U}$ ise projektif düzlemin nokta kümesinin bir altkümesi olmak üzere, projektif düzlemin tüm doğruları ile arakesiti $0, 1$ veya n noktadan ibaret olmak üzere ve $\forall p \in \mathbb{U}$ için p noktasından bir ve yalnız bir teğet doğru geçecek şekilde tanımlanan $\mathbb{U}$ kümesine **sonlu tipte birbirimlik** adı verilir. Burada n sabit bir sayı olup $n = 2$ için bu birimliğe **oval** denir, (İmmevoll 2001).

Tanım 5.1.2 : $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ bir projektif düzlem olmak üzere $\mathcal{P}$ projektif düzleminin bir **polaritesi**

$$\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{L} \quad \text{ve} \quad \pi : \mathcal{L} \to \mathcal{N}$$

şeklinde tanımlanır ve π^2 birim dönüşüme özdeş olup üzerinde bulunma bağıntısını korur. Yani $\forall p \in \mathcal{N}$ ve $\forall L \in \mathcal{L}$ için

$$p \circ L \;\Leftrightarrow\; \pi(p) \circ \pi(L)$$

dir. p noktası $\pi(p)$ doğrusu üzerinde ise p noktasına bir **mutlak nokta** denir. Birimliğe hemen verilebilecek bir örnek Dezargsel projektif düzlem içinde üniter polaritenin mutlak noktaları ve mutlak olmayan doğrularından oluşan bir kümedir. Klasik kompakt projektif düzlemler üstündeki çeşitli polaritelere karşılık gelen birkaç mümkün boyut vardır, (Salzmann vd. 1995, Dembowski 1968).

Klasik projektif düzlemlerde sürekli polaritelerin mutlak noktalar kümesine **klasik birimlikler** adı verilir.

Tanım 5.1.3 : $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{L}, \circ)$ bir kompakt, bağlantılı projektif düzlem olsun. $\mathcal{N}$ nokta uzayının aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathbb{U}$ altkümesine bir **birimlik** adı verilir.

i. $\forall x \in \mathbb{U}$ için x noktasından geçen bir tek teğet doğru vardır.

ii. $\mathbb{U}$ nun her bir kesen doğrusunun $\mathbb{U}$ ile oluşturduğu arakesit kümesi $\mathbb{S}_k$ küresine homeomorftur. Buradaki k sayısı sabittir, (İmmervoll 2001).

Tanım 5.1.4 : Gömülmüş bir $\mathbb{U}$ birimliğine bir teğet demek $\mathbb{U}$ birimliğini tam olarak bir noktada kesen doğru demektir. p noktasından geçen bütün teğetler birimliğe doğrudaş noktalarda değerse gömülü birimlik $p \notin \mathbb{U}$ noktasına göre **düz ayağa** sahiptir denir. $\mathbb{U}$ birimliği her $p \in L \setminus \mathbb{U}$ için düz ayağa sahipse $\mathbb{U}$ birimliği L doğrusuna göre düz ayağa sahiptir denir.

Sonlu projektif düzlemde $\mathbb{U}$ birimliği her $p \notin \mathbb{U}$ noktasına göre düz ayağa sahipse $\mathbb{U}$ birimliği bir hermityen eğridir, (Thas 1992). Burada ele alınan düzlemler lokal kompakt bağlantılı afin öteleme düzlemleridir. Böyle bir düzlemi oluşturmak için $\mathbb{R}^{2l}$ uzayı içindeki bir yayılıma ihtiyaç duyulur.

Bir lokal kompakt bağlantılı $\mathcal{A}$ afin öteleme düzlemi, bir S yayılımı ile birlikte alınan $\mathbb{R}^{2l}$ nokta kümesiyle birlikte incelenecektir.

Tanım 5.1.5 : $\mathbb{U}$ noktaların bir kümesi, L ise $\mathcal{A}$ düzleminin bir doğrusu olmak üzere $L \cap \mathbb{U}$ kümesi boş küme ise L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir **dış doğrusu**, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi tek elemanlı küme ise L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir **teğet doğrusu**, $L \cap \mathbb{U}$ kümesi birden fazla elemanlı olması durumunda ise L doğrusuna $\mathbb{U}$ kümesinin bir **kesen doğrusu** denir.

Bu çalışmanın bundan sonraki kısımlarında özel bir birimlik tipi olan tamamlayıcı boyutu (*codimension*) bir olan birimlikler incelenecektir.

Tanım 5.1.6 : $\mathbb{U}$, $\mathbb{R}^{2l}$ nin bir altkümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathbb{U}$ kümesine **tamamlayıcı boyutu bir olan birimlik** yada kısaca **hiperbirimlik** adı verilir.

$\mathcal{U}1$. $\mathbb{U}$ kümesinin her noktası bir ve yalnız bir teğet üzerinde bulunur.

$\mathcal{U}2$. $\mathbb{U}$ kümesi, boyutu $2l-1$ olan $\mathbb{S}_{2l-1}$ küresine homeomorftur.

$\mathcal{U}3$. L doğrusu bir kesen ise; $L \cap \mathbb{U}$ kümesi, $\mathbb{S}_{l-1}$ küresine homeomorftur.

Afin öteleme düzlemlerinde hiperbirimlik örnekleri elde etmek oldukça kolaydır. Örneğin $\mathbb{R}^2$ afin öteleme düzleminde her çember bir hiperbirimliktir. Çemberin her noktası bir ve yalnız bir teğet üzerinde bulunur ve düzlemdeki bir çember ile $\mathbb{S}_1$ küresi birbirine homeomorftur. L, çemberin bir keseni ise $L \cap \mathbb{U}$ kümesi iki noktadan oluşur ve bu küme $\mathbb{S}_0$ küresine homeomorftur.

Benzer şekilde $\mathbb{R}^4$ afin öteleme düzlemindeki her elipsoid bir hiperbirimliktir.

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

elipsoidi kendi merkezcil kürelerine homeomorftur. E elipsoidinin merkezcil küreleri

$$C_{a_i} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = a_i^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 5.1.7 : $\mathcal{O}$, $\mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt bir alt kümesi olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathcal{O}$ kümesine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **ovoid** adı verilir.

$O1$. $\mathcal{O}$ kümesinin her keseni tam olarak $\mathcal{O}$ kümesinin iki noktasını kapsar.

$O2$. $p \in \mathcal{O}$ noktasından geçen teğetler bir H_p hiperdüzlemini örter.

Burada $\mathcal{O}$ ovoidinin keseni veya teğeti diye adlandırılan doğrular, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir boyutlu doğruları yani bir boyutlu afin altuzaylarıdır. Kompakt projektif düzlemlerdeki ovaller gibi $\mathbb{R}^n$ kümesindeki her kompakt $\mathcal{O}$ ovoidi $\mathbb{S}_{n-1}$ küresine homeomorftur, (Salzmann vd. 1995). $\mathbb{R}^n$ kümesindeki $\mathcal{O}$ ovoidi için; üzerindeki bir p noktası çıkarılınca geriye kalan küme $\mathbb{R}^{n-1}$ kümesi ile birebir, örten ve sürekli olacak şekilde stereografik izdüşümle eşlenebilir. Bu dönüşüm bir homeomorfizmadır.

Önerme 5.1.1 : $\mathbb{R}^{2l}$ reel uzayındaki $\mathcal{O}$ kompakt ovoidi $\mathbb{R}^{2l}$ uzayı üstünde tanımlanan lokal kompakt afin öteleme düzleminde bir hiperbirimliktir.

İspat : $\mathcal{A}$, lokal kompakt bağlantılı afin öteleme düzlemi olmak üzere $\mathcal{A}$ nın bir L doğrusu kesen ise $L \cap \mathcal{O}$ kümesi l-boyutlu L reel afin uzayında bir kompakt ovoiddir. Böylece $\mathcal{U}3$ önermesi sağlanır. $\mathcal{U}2$ ise yukarıdaki ifadenin bir sonucu olup ispatı açıktır. $\mathcal{O}$ ovoidinin p noktasından geçen bir boyutlu teğetleri bir H_p hiperdüzlemini örterler. $\mathcal{A}$ düzleminin S yayılımı aynı zamanda dual yayılım olduğundan H_p hiperdüzlemi $\mathcal{A}$ düzleminin p noktasından geçen tam olarak bir tek L doğrusunu içerir. Aşikar olarak L doğrusu bir teğettir ve p noktasından geçen diğer bütün doğrular birer kesen olmak zorundadır.

Her Öklidyen $\mathbb{U}$ küresi bir ovoid olup böylece lokal kompakt bağlantılı $\mathcal{A}$ afin öteleme düzleminde bir hiperbirimliktir.

Tanım 5.1.8 : Bir $K \in S$ doğrusu sonsuzda bir nokta tanımlar ve bu noktanın **ayaklarının kümesi,**

$$F_K = \left\{(x+K) \cap \mathbb{U} : x \in \mathbb{R}^{2l}, \ \ x+K \text{ bir teğettir}\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 5.1.2 : $\mathbb{U}$, merkezi başlangıç noktası olan bir küre olmak üzere K doğrusunun sonsuzdaki noktasının ayaklarının kümesi

$$F_K = \mathbb{U} \cap K^{\perp}$$

biçimindedir.

İspat : $p \in F_K$ olsun. K, yayılım elemanı olduğundan başlangıç noktasından geçen bir doğrudur. $l-$boyutlu $p + K$ doğrusunun teğet olması için gerek ve yeter koşul $K \subseteq p^{\perp}$ olmasıdır. Bu ifadeye denk olarak $p \in K^{\perp} \cap \mathbb{U}$ dir. Başka bir anlatımla $K \subseteq p^{\perp}$ ise buradan $K^{\perp} \supseteq \left(p^{\perp}\right)^{\perp}$ olup $p \in \left(p^{\perp}\right)^{\perp}$ olduğundan $p \in K^{\perp}$ olur. Ayrıca $p \in \mathbb{U}$ olduğundan $p \in K^{\perp} \cap \mathbb{U}$ dir. Böylece $F_K \subset \mathbb{U} \cap K^{\perp}$ elde edilir.

l-boyutlu $p + K$ doğrusu bir teğet olsun. $K \subset p^{\perp}$ olduğu gösterilmelidir. $p + K = p + p^{\perp}$ dir. Buradan $-p + p + K = -p + p + p^{\perp}$ olup $K = p^{\perp}$ dir, (Soytürk 2002).

Teorem 5.1.3 : $\mathbb{R}^{2l}$ reel uzayı üstündeki bir S yayılımı ile elde edilen $\mathcal{A}$ öteleme düzlemindeki her Öklidyen küre bir hiperbirimliktir. Sonsuzdaki bir doğruya göre bu hiperbirimliğin düz bir ayağa sahip olması için gerek ve yeter koşul S yayılımının self-ortogonal olmasıdır.

İspat : S yayılımı self ortogonal olsun. Bu durumda $S = S^{\perp}$ dir. Yayılımın tanımı gereği $\mathbb{R}^{2l}$ uzayının her p noktası yayılım elemanlarının bir ve yalnız biri üzerindedir. Bu yayılım elemanı sonsuzda bir nokta tanımlar. Bu nokta p_{∞} ile gösterilsin. p_{∞} noktasından geçen yayılım elemanı küreye teğet olacak şekilde ötelenirse, Öklid küresinin özelliği gereği bu teğet doğruları birbirine paralel olup teğet noktalarından geçen doğru kürenin merkezinden geçer. Böylece p_{∞} noktasına göre hiperbirimlik düz ayağa sahiptir. Bu metodla her doğrultuda yeni bir ideal (sonsuzdaki) nokta tanımlanır ve bu noktalara göre hiperbirimliğin düz ayağa sahip olduğu görülür.

Karşıt olarak sonsuzdaki doğruya göre hiperbirimlik düz ayağa sahip olsun. p_∞ ideal nokta olmak üzere başlangıç noktasından ve p_∞ noktasından geçen doğru bir yayılım elemanıdır. Bu doğru K ile gösterilsin. $x + K$ ve $x' + K$ doğruları birimliğe teğet olsun. Hipotezden $x + K$ ve $x' + K$ doğrularının küreye teğet oldukları noktaları birleştiren L doğrusu kürenin merkezinden geçer. Bu doğru orjine ötelenirse bir yayılım elemanı elde edilir. Lemma 5.1.2 gereğince $K^\perp = L$ dir.

5.2. Kabuk Kavramı

Tanım 5.2.1 : X, $\mathbb{R}^n$ uzayının boş kümeden farklı bir altkümesi ve H ise $\mathbb{R}^n$ uzayının bir hiperdüzlemi olsun. X kümesi H hiperdüzleminin belirttiği kapalı yarı uzaylar tarafından kapsanıyorsa ve $H \cap M \neq \phi$ oluyorsa H hiperdüzlemine X kümesinin bir **destekleyici hiperdüzlemi** denir.

Tanım 5.2.2 : M, $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir altkümesi olmak üzere M nin her noktasında bir ve yalnız bir destekleyici hiperdüzlem varsa ve $\mathbb{R}^n$ uzayını ayrıştırıyorsa yani $\mathbb{R}^n \setminus M$ bağlantısız ise M kümesine bir **kabuk** (shell) denir. H , M kabuğunun bir destekleyici hiperdüzlemi olmak üzere M ile H hiperdüzleminin arakesitine M kabuğunun bir **yüzü** denir. M kabuğu ile H destekleyici hiperdüzleminin arakesiti bir veya birden fazla noktaya sahip olabilir.

Bu tanımdan M kabuğunun afin germesi yani M kabuğunu içine alan en dar afin uzay $\mathbb{R}^n$ uzayının tamamını vermelidir. Bir topolojik uzayda, iç noktaları bulunan bir konveks kümenin kapanışına **konveks cisim** denir. M kabuğunun **konveks örtüsü** yani M kabuğunu içine alan en dar konveks küme (konv$M$) bir **konveks cisimdir**. Destekleyici hiperdüzlemler M kümesini konv$M$ kümesinin sınırı yapar, (Löwe vd. 2003).

x, *konvM* kümesinin bir iç noktası olmak üzere x noktasından geçen K reel doğrusu için $S = K \cap konvM$ segmentinin bitiş noktaları *konvM* kümesinin M sınırındadır. Eğer S segmenti $p \in M$ şeklinde başka bir nokta kapsamış olsaydı p noktasındaki destekleyici hiperdüzlem S nin bitiş noktalarını ayrıştıramazdı. Bu ise $S \subseteq H$ olmasını gerektireceğinden S segmenti x iç noktasını kapsamaz. Böylece çelişki elde edilir.

Sonuç olarak x, konv$M$ kümesinin bir iç noktası olmak üzere x noktasından geçen tüm doğrular konv$M$ yi iki noktada keser ve konv$M$ kümesini ayrıştırır. Buradan M kabuğundan x-merkezli Öklid küresine tanımlanan π_x çapucu dönüşümü birebir ve örtendir. M kompakt küme olduğundan ve M deki yakınsak dizilerin görüntüleri de yakınsak olacağından π_x dönüşümü sürekli bir dönüşüm olur. π_x dönüşümü birebir, örten, sürekli ve terside sürekli olduğundan bir homeomorfizmadır, yani $M \approx \mathbb{S}_{2l-1}$ dir. Bu homeomorfizma konveks cisimler için oldukça iyi bilinen bir sonuçtur. L, x iç noktasından geçen bir kesen doğru olmak üzere π_x dönüşümünün $L \cap M$ kümesine kısıtlanmasıyla $L \cap M \approx \mathbb{S}_{l-1}$ homeomorfizması elde edilir.

Teorem 5.2.1 : M, $\mathbb{R}^{2l}$ de bir kabuk ve $\mathcal{L}$ ise $\mathbb{R}^{2l}$ üzerindeki topolojik öteleme $\mathcal{A}$ düzleminde doğrular kümesi olsun. Eğer M nin destekleyici hiperdüzlemleri M nin hiçbir kesenini kapsamıyorsa bu durumda M kabuğu $\mathcal{A}$ öteleme düzlemine göre bir hiperbirimliktir.

İspat : $M \approx \mathbb{S}_{2l-1}$ homeomorfizmasından dolayı hiperbirimliğin ikinci özelliği sağlanır. $\forall p \in M$ noktası için bu noktadaki H_p destekleyici hiperdüzlemi bu noktadan geçen tek bir doğru kapsar. Eğer bu doğru tek olmasaydı yani H_p hiperdüzlemi p noktasından geçen iki teğet doğru kapsamış olsaydı bu iki doğrunun lineer bileşimi H_p hiperdüzlemi yerine $\mathbb{R}^{2l}$ uzayını verirdi. Kabulden dolayı bu doğru teğet doğrudur. Bu durumda hiperbirimliğin birinci özelliği de sağlanmış olur. Son olarak hiç bir destekleyici hiperdüzlem tarafından kapsanmayan her L doğrusunun, M nin bir keseni olması durumunda $L \cap M \approx \mathbb{S}_{l-1}$ homeomorfizmasının sağlandığı gösterilmelidir.

$p \in M$ için p noktasından geçen fakat H_p hiperdüzleminde bulunmayan tüm reel doğruların oluşturduğu afin $(2l-1)$-uzayı A_p ile gösterilsin. Bu doğrulardan konv$M$ kümesini iç noktalarında kesen doğrular kümesi de X ile gösterilsin. Bu durumda $K \in X$ için K doğrusu hem p noktasından hem de konv$M$ kümesinin iç noktasından geçtiği için bu doğru H_p hiperdüzleminde bulunmaz. Dolayısıyla $K \in A_p$ olup $X \subseteq A_p$ elde edilir. Aynı zamanda $A_p \subseteq X$ dir. Eğer $A_p \nsubseteq X$ olsaydı bu durumda A_p de bulunan fakat X de bulunmayan en az bir K' doğrusu olurdu. Yani K' doğrusu üzerinde konv$M$ kümesinin hiçbir iç noktası yoktur. Bu durumda K' doğrusu H_p hiperdüzleminde yatan teğet doğru olur ki bu bir çelişkidir. İspatın ikinci bir yolu için bakınız (Leichtweiß 1980).

L, H_p tarafından kapsanmayan bir doğru olmak üzere $p \in L \cap M$ olsun. Bu durumda L doğrusu A_p uzayına ait reel doğrulardan oluşur. O halde L doğrusu konv$M$ kümesinin bir iç noktasını kapsar. Buradan L bir kesen olup böylece $L \cap M \approx \mathbb{S}_{l-1}$ dir. Sonuç olarak M kümesi kompakt bir hiperbirimliktir.

Özel olarak diğer hipotezlerin yanında M nin C^1 sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold olduğu kabul edilirse bu durumda H_p destekleyici hiperdüzlemi teğet hiperdüzlem olur. Kabuk kavramı açıkça kesin konvekslikten daha genel bir durumdur.

Önerme 5.2.2 : M kabuğu $(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L})$ topolojik öteleme düzleminde bir hiperbirimlik ve H ise M nin bir destekleyici hiperdüzlemi olsun. Bu durumda H, hiçbir kesen doğru kapsamaz. Sonuç olarak H nin kapsadığı tek doğru $p \in H \cap M$ noktasından geçen $L = T_p$ teğet doğrusudur.

İspat : $(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L})$ topolojik öteleme düzlemindeki her bir hiperdüzlem ikişerli paralel l-boyutlu doğrulardan oluşur ve bu doğruların dışında hiçbir doğru kapsamaz. M kabuğu kendi konveks örtüsünün sınırı olduğuna göre $H \cap M$ yüzü de konvekstir. Böylece H nin kapsadığı doğrunun M ile arakesiti topolojik bir çemberde değil, konveks bir kümede bulunur. Dolayısıyla H hiperdüzlemi M nin hiçbir kesenini kapsamaz.

Tanım 5.2.3 : V bir lineer uzay ve W ise V nin bir alt uzayı olsun. $x \in W$ olmak üzere;

$$x + W = \{x + y : y \in W\}$$

kümesine W nin bir **yan kümesi** denir.

Tanım 5.2.4 : A boş olmayan bir küme, B ise A nın boş olmayan ayrık has altkümelerinin ailesi olsun. B ailesindeki kümelerin birleşimi A kümesini veriyorsa B ye A nın **parçalanışı** (veya A ya ayrılabilir) denir. A nın " $\sim$ " denklik bağıntısına göre $A/\sim$ bölüm kümesi A nın bir parçalanışıdır.

Teorem 5.2.3 : V bir lineer uzay ve W ise V nin bir alt uzayı olsun. Bu takdirde W nin farklı yan kümelerinin

$$V/W = \{x + W : x \in V\}$$

kümesi

$$\begin{aligned} (x+W)+(y+W) &= (x+y)+W \\ \lambda\,(x+W) &= \lambda x + W \end{aligned}$$

işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Üstelik V/W, W nin bir parçalanışıdır.

İspat : $x + W,\ y + W \in V/W$ için $(x+W)+(y+W) = (x+y)+W$ ve $x + y \in V$ olduğundan $(x+y)+W \in V/W$ dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} [(x+W)+(y+W)]+(z+W) &= ((x+y)+W)+(z+W) \\ &= ((x+y)+z)+W \\ &= (x+(y+z))+W \\ &= (x+W)+[(y+W)+(z+W)] \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır. Ayrıca $\forall\ x + W \in V/W$ için

$$(x+W)+(\theta+W) = (x+W) = (\theta+W)+(x+W)$$

olduğundan $\theta + W$, V/W nin birim elemanıdır. Burada θ, V nin birim elemanıdır. Ayrıca $\forall\ x + W \in V/W$ için

$$(x+W)+(-x+W) = \theta + W = (-x+W)+(x+W)$$

olduğundan $x + W$ elemanının tersi $-x + W$ dir. Üstelik

$$\begin{aligned} (x+W)+(y+W) &= (x+y)+W \\ &= (y+x)+W \\ &= (y+W)+(x+W) \end{aligned}$$

olduğundan V/W değişmeli gruptur. Skalar ile çarpma işlemini göstermek oldukça kolaydır.

V/W lineer uzayının V nin bir parçalanışı olduğunu göstermek için V üzerinde $x, y \in V$ olmak üzere $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in W$ şeklinde tanımlanan "$\sim$" nın bir denklik bağıntısı ve x in denklik sınıfının $x + W$ yani $\overline{x} = x + W$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Yansıma özelliği : $\forall x \in V$ için $x - x = \theta \in W$ olduğuna göre "$\sim$" bağıntısı yansıyandır.

Simetri özelliği : $\forall x, y \in V$ için

$$\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow x - y \in W \\ &\Rightarrow -(x-y) \in W \\ &\Rightarrow y - x \in W \end{aligned}$$

olup böylece $y \sim x$ dir.

Geçişme özellği : $\forall x, y, z \in V$ için $x \sim y$ ve $y \sim z$ ise $x - y \in W$ ve $y - z \in W$ dir. W bir lineer uzay olduğundan bu iki vektörün toplamı olan $(x - z)$ vektörü W nin elemanıdır. O halde $x \sim z$ dir.

Sonuç olarak $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. x in denklik sınıfı ise

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \{y : x - y \in W\} \\ &= \{y : x - y = i, \text{uygun bir } i \in W \text{ için}\} \\ &= \{y : y = x + i, \text{uygun bir } i \in W \text{ için}\} \\ &= \{x + i : i \in W\} \\ &= x + W \end{aligned}$$

şeklindedir, (Bayraktar 2000).

Tanım 5.2.3 ve teorem 5.2.3 kullanılarak yeni bir bölüm kümesi elde edilebilir. $H < \mathbb{R}^{2l}$ bir afin hiperdüzlem ve $\mathcal{L}$ ise $\mathbb{R}^{2l}$ üzerindeki topolojik öteleme düzleminin doğrular kümesi olsun. H hiperdüzlemi tarafından kapsanan L doğrularının kümesi $H/\mathcal{L}$ ile gösterilsin. Bu doğrular ikişerli paraleldir ve H hiperdüzlemini örterler. $x \in L$ ve $L \in \mathcal{L}$ olmak üzere $H/\mathcal{L}$ topolojik uzayı $(H-x)/(L-x)$ şeklinde bölüm vektör uzayı ile belirtilebilir. Böylece $(H-x)/(L-x)$ uzayının boyutu

$$\begin{aligned} boy\left((H-x)/(L-x)\right) &= boy\,(H-x) - boy(L-x) \\ &= (2l-1)-l \\ &= l-1 \end{aligned}$$

olup bu uzay $\mathbb{R}^{l-1}$ uzayına homeomorfiktir. Bu homeomorfizma H hiperdüzleminden $H/\mathcal{L}$ topolojik uzayına tanımlanan doğal izdüşüm yardımıyla elde edilir ve bu dönüşüm

$$f_H \;:\; H \;\longrightarrow\; H/\mathcal{L} \;\approx\; \mathbb{R}^{l-1}$$

şeklinde tanımlanır. f_H dönüşümü $\forall h \in H$ noktasını bu noktadan geçen L doğrusuna götürür.

Önerme 5.2.4 : M; $\left(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L}\right)$ topolojik öteleme düzleminde noktalardan oluşan kompakt bir küme ve H ise M nin hiç bir kesenini kapsamayan hiperdüzlem olsun. Bu durumda $H \cap M$ nin boyutu en fazla $l-1$ dir.

İspat : H hiperdüzlemi hiç bir kesen doğru kapsamadığından dolayı H nin kapsadığı doğrular ya teğet yada dış doğrular olmalıdır. O halde f_H dönüşümü $H \cap M$ kümesine kısıtlanırsa $H \cap M$ kümesinin her noktasından bir tek doğru geçtiğinden ve bu doğru teğet olduğundan f_H dönüşümü birebirdir. f_H dönüşümü topolojik bir gömülme olup

$$boy\,(H \cap M) \leq boy\,(H/\mathcal{L}) = l-1.$$

dir.

Bu önerme; önerme 5.2.2 deki durumda da kolayca ispatlanabilir. H hiperdüzleminin $\forall p \in H \cap M$ noktasında l-boyutlu T_p teğetini kapsadığını ve T_p nin $H \cap M$ konveks yüzü ile arakesitinin tek bir nokta olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Önerme 5.2.2 ve 5.2.4, hiperbirimlik olabilecek kabuklar için bir sınırlandırma getirir. Tek bir noktaya indirgenemeyen yüzlerin (aşikar olmayan) sayısı çok fazla olmamak üzere ve yüzlerin boyut sınırına bağlı kalınırsa teorem 5.2.1 deki kesen doğrular koşulu gerçekleştirilebilir.

Tanım 5.2.5 : $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere; $\mathcal{F}$ cismi üzerinde determinantı sıfırdan farklı olan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi matris çarpımı işlemine göre bir grup olup bu gruba **genel lineer grup** adı verilir ve $GL_n(\mathcal{F})$ veya $GL(n, \mathcal{F})$ ile gösterilir.

Teorem 5.2.5 : $M \subset \mathbb{R}^{2l}$ şeklinde bir kabuk olmak üzere M, sayılabilir en fazla sayıda aşikar olmayan yüze sahip ve hepsinin boyutu l den küçük olsun. Bu durumda her topolojik afin $\mathcal{A} = \left(\mathbb{R}^{2l}, \mathcal{L}\right)$ öteleme düzleminin bir izomorfik kopyası vardır ki burada M bir hiperbirimliktir.

İspat : $\delta \in GL_{2l}\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın izomorfik kopyalarının doğrular kümesi $\delta(\mathcal{L})$ formundadır. δ ve β lineer dönüşümlerinin aynı izomorfik kopyaya sahip olması için gerek ve yeter koşul $\beta^{-1}\delta$ bölümünün $\Gamma_{\mathcal{A}}$ otomorfizmalar grubuna ait olmasıdır. Burada $\Gamma_{\mathcal{A}}$ grubu $GL_{2l}\mathbb{R}$ nin kapalı bir altgrubudur, (Salzmann vd. 1995). Böylece bütün izomorfik kopyaların X kümesi

$$GL_{2l}\mathbb{R}/\Gamma_{\mathcal{A}} = \{\delta\Gamma_{\mathcal{A}} : \delta \in GL_{2l}\mathbb{R}\}$$

koset uzayı ile belirtilebilir. Bölüm topolojisine göre $GL_{2l}\mathbb{R}/\Gamma_{\mathcal{A}}$ uzayı bir topolojik manifolddur, (Salzmann vd. 1995).

M nin aşikar olmayan her F yüzü, F ye göre teorem 5.2.1 deki koşulu bozacak şekilde $\mathcal{A}$ ya izomorfik düzlemlerden oluşan $X_F \subseteq X$ kümesiyle birleştirilebilir. Burada her X_F kümesinin X içinde hiç bir yerde yoğun olmadığı gösterilmelidir. Bu durumda bütün X_F kümelerinin birleşimi birinci Baire kategorisinden olup, X in bir öz alt kümesi olur. Bu kümenin boş olmayan tümleyeni teorem 5.2.1 deki koşulu tamamen gerçekleyen $\mathcal{A}$ ya izomorfik öteleme düzlemlerinden oluşur. Bu düzlemler içinde M bir hiperbirimliktir.

Aşikar olmayan F yüzünün tüm noktaları aynı destekleyici hiperdüzlem üzerinde bulunur. Bu hiperdüzlem H ile gösterilsin. H hiperdüzlemi her $\delta(\mathcal{A}) \in X$ düzlemin paralel doğrularının tek bir ailesi tarafından örtülür. X_F ise bu düzlemlerden oluşur ve bu düzlemlerin doğrularının bir kısmı $F = M \cap H$ yüzünü birden fazla noktada keser. Yani bir düzlemin X_F de bulunması için gerek ve yeter koşul H destekleyici hiperdüzlemi tarafından kapsanan bazı doğrularının $\langle F \rangle$ afin örtüsünü birden fazla noktada kesmesidir ve böylece $\langle F \rangle$ ile ilgili olarak F nin içi boştan farklıdır. Buradan bölüm topolojisine göre $X_F \subseteq X$ kapalıdır.

İspatı tamamlamak için X deki bir açık kümenin X_F tarafından kapsanmadığı gösterilmelidir. $\delta(\mathcal{A}) \in X_F$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda öyle bir $L \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır ki, $\delta(L) \subseteq H$ ile F nin arakesiti birden fazla noktadan ibarettir. Arakesit noktalarından biri orjin olarak alınabilir. Hipotezden dolayı

$$boy H - boy\,\langle F \rangle \geq (2l-1) - (l-1) = l$$

olur ve buradan $\beta(L) \subseteq H$ özelliğinde $\langle F \rangle$ yi kesen, δ dönüşümüne keyfi derecede yakın bir $\beta \in GL_{2l}\mathbb{R}$ lineer dönüşümü vardır. Arakesitleri ise orjindir. Bu ise $\delta(\mathcal{A}) \notin X_F$ olduğunu gösterir. X deki bölüm topolojisinin tanımına göre X_F, $\delta(\mathcal{A})$ nın bir komşuluğunu kapsamaz.

Aşağıdaki örnekte ise sayılabilir sayıda olmayan bir boyutlu aşikar olmayan yüzlere sahip bir kabuğun hiçbir öteleme düzleminde bir birimlik olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 5.2.1 :

$$V = \{(x, y, z, w + 1) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \ \ , \ \ w \geq 0\}$$

yarımküresi ile,

$$Z = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ , \ \ w \geq 0\}$$

silindiri için $M := -V \cup V \cup Z$ kümesi bir kabuk olup bu kabuğun 1-boyutlu yüzleri Z silindirinin üreteçleridir.

Önerme 5.2.6 : $M := -V \cup V \cup Z$ kabuğu hiçbir öteleme düzleminde bir hiperbirimlik değildir.

İspat : Doğrular kümesi $\mathcal{L}$ olan bir öteleme düzlemi verilsin. Z nin üreteçleri olan 1-boyutlu yüzleri kapsayan doğrular orjinden geçen tek bir L doğrusuna paraleldir. M nin bir hiperbirimlik olma koşulu Z nin herhangi bir noktasındaki teğet hiperdüzlemlerin hiçbirinin L ye paralel olan doğru kapsamamasıdır. Bu hiperdüzlemler; $w = 0$ tarafından tanımlanan hiperdüzlem H olmak üzere, noktasal teğetlikleri $H \cap U$ küresinde (2-küre) olan adi U küresinin (3-küre) teğet hiperdüzlemleridir. Başka bir ifade ile U hiperbirimliğine $H \cap U$ noktasında teğet olacak şekilde L ye paralel hiçbir doğru yoktur. Halbuki lemma 5.1.2 gereğince L ye paralel olan ve U hiperbirimliğine teğet olan noktasal teğetlikler $L^{\perp} \cap U$ formunda U nun bir çemberidir. Bu çember H ile kesişir ve böylece M nin bir hiperbirimlik olma koşulu sağlanmaz.

Teorem 5.2.7 : $M \subseteq \mathbb{R}^{2l}$ şeklindeki bir M kabuğu için aşağıdaki koşulların herbiri M nin bir ovoid olmasını gerektirir.

i . Her topolojik öteleme düzlemine göre M hiperbirimliktir.

ii . $\delta \in GL_{2l}\mathbb{R}$ olmak üzere her $\delta(M)$ görüntüsü, belirli bir topolojik öteleme düzlemine göre hiperbirimliktir.

İspat : Birinci koşul ikinci koşulu gerektirdiğinden sadece ikinci koşula dayalı bir ispat verilmesi yeterlidir. Alternatif olarak ispat, ikinci koşul yerine birinci koşul kullanılarak da yapılabilir. Eğer M kabuğu, $F = M \cap H$ şeklinde aşikar olmayan bir yüze sahipse destekleyici hiperdüzlemin $\delta(H)$ görüntüsü $L \in \mathcal{L}$ doğrusunu kapsayacak biçimde ve $\delta(F) \cap L$ bir doğru parçası kapsayacak şekilde δ lineer dönüşümü bulunabilir. Bu durumda önerme 5.2.2 gereğince $\delta(M)$ bir hiperbirimlik değildir. O halde tüm yüzler tek noktadan ibaret olup destekleyici hiperdüzlem tarafından kapsanan bir doğrunun M ile arakesiti en fazla tek nokta olmalıdır. Son olarak M ile kesişen diğer bütün doğruların M ile ortak iki noktasının bulunduğu gösterilmelidir. Teorem. 5.2.1. dekine benzer olarak, konv$M$ yi iç noktasında kesen doğrular yardımıyla ispat yapılabilir

5.3. Ovoid Olmayan Kabuklar

Örnek 5.3.1 : $M \subseteq \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $p = (x, y, z)$ noktalarından oluşan ve aşağıdaki iki koşulu sağlayan M kümesine **mail bag** adı verilir ve bu küme iki tane doğru parçası kapsar.

$$x^2 + z^2 + \frac{(1-z^2)y^2}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^2} = 1 \qquad \text{(MB 1)}$$

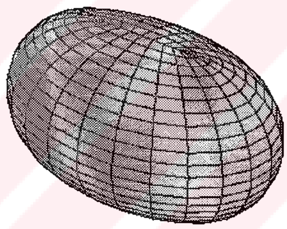
$$|z| < 1 \quad \text{veya} \quad |y| \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{(MB 2)}$$

Katı metal çubuklar yardımıyla oluşturulan açık mekanizması haricinde kesin konveks olan ve tamamen dolu bir çantayı akla getirdiği için böyle bir adlandırılma yapılmıştır.

M kümesinin bir parametrelendirmesi, kutupsal koordinatlarda 3-kürenin alışılmış gösterimine basit bir değişikliğin (y deki $\frac{1}{2}$ sayısının eklenmesi) uygulanmasıyla, $\xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $\phi \in [0, 2\pi]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= \cos\xi \cos\phi \\ y &= \left(\tfrac{1}{2} + \cos\xi\right) \sin\phi \\ z &= \sin\xi \end{aligned}$$

şeklinde gösterilebilir, (Löwe vd. 2003).



Şekil 5.3.1

M kümesinin kendi konveks örtüsünün sınırı olduğunu ve her noktasında bir ve yalnız bir destekleyici hiperdüzlem bulunduğunun gösterilmesi gerekir. $|z| < 1$ tarafından tanımlanan konveks açık küme $X \subseteq \mathbb{R}^3$ olmak üzere, $M \cap X$ arakesiti açık küme olup bu küme $M^{\prime}$ ile gösterilsin. Burada $M^{\prime}$ için (MB 2) koşulu önemsiz olup (MB 1) koşulu

$$\frac{x^2}{1-z^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^2} = 1 \qquad \text{(MB } 1^{\prime}\text{)}$$

şeklinde düzenlenebilir. Eşitliğin sol tarafını oluşturan rasyonel fonksiyonlar $g(x,y,z) = \frac{x^2}{1-z^2}$ ve $h(x,y,z) = \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^2}$ şeklinde gösterilsin. g fonksiyonunun Hessian'ını H_1, h fonksiyonunun Hessian'ını H_2 göstermek üzere;

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-z^2} & 0 & \frac{4xz}{(1-z^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{4xz}{(1-z^2)^2} & 0 & \frac{2x^2\left(1-z^2\right)^2+8x^2z^2(1-z^2)}{(1-z^2)^4} \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^2} & \frac{4yz\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^4} \\ 0 & \frac{4yz\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^4} & \frac{y^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}+6z^2\sqrt{1-z^2}\right)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-z^2}\right)^6} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Hessianları pozitif yarı tanımlı olduğundan $(x,y) \neq (0,0)$ olacak biçiminde bütün (x,y,z) noktaları için Hessianlar toplamı pozitif tanımlıdır. (MB 1') eşitliğinin sol tarafı

$$f : X \to R$$

şeklinde konveks bir fonksiyon tanımlar. O halde,

$$\{(p,a) \in X \times \mathbb{R} : f(p) \leq a\}$$

epigrafı konvekstir ve epigrafın

$$C := \{p \in X : f(p) \leq 1\}$$

hiperdüzlem parçası da konvekstir.

Burada C kesin konvekstir. Eğer konveks olmasaydı C nin M' sınırı tarafından kapsanan öyle bir L doğrusu olurdu ki, f nin $p \in L$ noktasındaki Hessian'ları pozitif tanımlı olmazdı. Son paragraftaki sonuçtan $p = (0,0,z)$ için

$f(p) = 1$ olacağından çelişki elde edilir.

X e göre M', C nin sınırıdır. Üstelik $C = konvM'$ dir. Gerçekten X tarafından kapsanan doğru üzerindeki $c \in C$ noktası için bu doğru M ile iki noktada kesişir ve bu noktalar c nin her iki tarafındadır. Konvekslikten dolayı her p noktasında bir destekleyici hiperdüzlem vardır. f diferensiyellenebilen ve diferensiyeli sıfır olmadığından destekleyici hiperdüzlem bir tek olup teğet hiperdüzlem koşulunu sağlar.

$i = 1, 2$ olmak üzere, mail bag iki tane doğru parçası kapsar ve bu doğru parçaları $x = 0$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ tarafından tanımlanan $z = (-1)^i$ segmentleridir. Bu segmentler S_i ile gösterilsin. Bu doğru parçaları dışında kapsanan doğru parçası yoktur.

$\mathbb{R}^3$ deki C konveks kümesinin kapanışı olan $\overline{C}$ kümeside konvekstir. Ayrıca $\overline{C} = C \cup S_1 \cup S_2$ dir. S_i segmentlerinin bitiş noktaları aynı zamanda $\left\{\left(0, \pm\frac{1}{2}, t\right) : |t| < 1\right\} \subseteq C$ açık segmentinin de bitiş noktalarıdır ve böylece bitiş noktaları gibi S_i segmentleri de $\overline{C}$ ye aittir.

Tersine $c = (x, y, z) \notin C$ noktasına yakınsayan bir $c_n = (x_n, y_n, z_n)$ dizisi için $z = 1$ olduğunda $c \in S_1$ olduğu ispatlanmalıdır. Süreklilikten dolayı c, (MB 1) i sağladığından $x = 0$ dır. $(-x_n, y_n, z_n)$ noktaları C ye aittir ve C nin konveksliğinden dolayı c yi değiştirmeden $x_n = 0$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda $f(c_n) \leq 1$ olup bu koşul $y_n^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - z_n^2}\right)^2$ indirgenirse $|y| \leq \frac{1}{2}$ sağlanmış olur.

Sonuç olarak, $M = M' \cup S_1 \cup S_2$ kümesinin $\overline{C} = konvM$ nin sınırı olduğu gösterilmelidir. Özellikle M, 2-küreye homeomorfiktir.

Son olarak M nin her $p \in S_i$ noktasında bir ve yalnız bir destekleyici hiperdüzlem olduğunu göstermek gerekir. Eğer p, açık segment tarafından kapsanıyorsa, p noktasındaki tüm destekleyici hiperdüzlemler segmentin tamamını kapsar. Bundan dolayı S_i segmentlerinin bitiş noktalarını incelemek yeterlidir. Örneğin $p = (0, \frac{1}{2}, 1)$ noktası ele alınsın.

p de maksimumu alacak şekilde birtek lineer form vardır. $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$ için $\alpha x + \beta y + \gamma z$ dir. $x = 0$ düzlem kesiti için; $(\beta, \gamma) = (0, 1)$ dir. Gerçekten bu kesit S_i paralel segmentlerinden ve bitiş noktalarını birleştiren iki yarım çemberden oluşan sürekli, diferensiyellenebilen bir eğridir.

$\alpha = 0$ olduğunu görmek için $y = \frac{1}{2}$ düzlemi ile kesiştirilirse, bu durumda arakesit $\widetilde{p} = (0, 1)$ ve $-\widetilde{p}$ noktalarından geçen (y-ekseni ihmal edilmiş) iki düzgün eğriden oluşur. Kapalı fonksiyonların diferensiyelinden bu iki eğrinin eğimi, noktaların komşuluğunda 0 a yakınsar. Eğer $\widetilde{p}$, eğimi 0 olmayan destekleyici doğru üzerinde olsaydı; doğru ortalama değer teoremine ters düşer ve eğrinin tümü aşağıda kalırdı.

Önerme 5.3.1 : (MB 1) ve (MB 2) tarafından tanımlı $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mail bag bir kabuktur. $x = 0$, $|y| \leq \frac{1}{2}$ tarafından tanımlanan iki tane $z = (-1)^i$ doğru parçası kapsar.

Burada tanımlanan mail bag ; $M_{n,k} \subseteq \mathbb{R}^n$ şeklinde boyutları k olan iki aşikar olmayan yüze sahip olacak biçimde genelleştirilebilir. Burada k ve n doğal sayıları için $n \geq k + 2$ koşulu sağlanmalıdır. $m = n - k - 1$ ve

$$M_{n,k} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : (\|x\|, \|y\|, z) \in M\right\}$$

Özel olarak $M = M_{3,1}$ dir, (Löwe vd. 2003).

Önerme 5.3.2 : $M_{n,k} \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, $x = 0$, $\|y\| \leq \frac{1}{2}$ ve $z = (-1)^i$ tarafından tanımlı aşikar olmayan iki yüze (k-boyutlu yuvarlar) sahip bir kabuktur, (Löwe vd. 2003).

KAYNAKLAR

Bayraktar, M., 2000, "Fonksiyonel Analiz" Uludağ Üniv. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Dembowski, P., 1968, "Finite Geometries" Springer

Grundhöfer, T., Löwen, R., 1995, "Linear topological geometries" In: Handbook of incidence geometry (F. Buekenhout, ed.), Elsevier Science 1255-1324

Hacısalihoğlu, H.H., 1983, "Hareket Teorisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" Gazi Üniv. Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No.2

Hacısalihoğlu, H.H., 1982, "Lineer Cebir" Gazi Üniv. Yayın no: 152

İmmervoll, S., 2001, "Topological and smooth unitals" Adv. Geom. 1 , 333-344

Kaya, R., 1992, "Projektif Geometri", Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları No. 27

Kühne, R., Löwen, R., 1992, "Topological projective spaces" Abh. Math. Sem.Unv. Hamburg 62, 1-9

Löwe, H., Löwen, R., Soytürk, E., 2000, "Self-orthogonal compact spreads and unitals in topological translation planes" Geom. Dedicata 83: 95-104

Löwe, H., Löwen, R., Soytürk, E., 2003, "Unitals in topological affine translation planes need not be strictly convex" Monatsh Math. 139: 275-284

Löwe, H., 2001, "A rough classification of symmetric planes" , Adv. Geom. 1, 1-21

Löwen, R., Günter, F., Hendrik, V.M., 2003, "Affine line systems in real vector spaces" , Adv. in Geom., 59-74

Löwen, R., 1983, "Topology and dimension of stable planes" On a conjecture by H. Freudenthal, J.Reine Angew. Maths, 108-122

Munkres, R.J., 1975, "Topology a first Course" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey

Özdamar, E., Görgülü, A., Alp, M., 1999, "Genel Topoloji" Uludağ Ünv. Basımevi

Sabuncuoğlu, A. 2000, "Lineer Cebir" Nobel Yayın Dağıtım, Yayın No: 192

Salzmann, H., Betten, D., Grundhöfer, T., Hahl, H., Löwen, R., Stroppel, M., 1995, "Compact Projective Planes" De Gruyter, Berlin

Soytürk, E., 2002, "Topolojik öteleme düzlemlerinde birimlikler" Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi Cilt:3 Sayı:3, 433-436

Stroppel, M., 1992, "Solvable groups of automorphisms of stable planes" Seminar Sophus Lie 2, 69-74

Thas, J., 1992, "A combinatorial characterization of Hermitian curves" J. Algebraic Combin. 1, 97-102

Leichtweiß, K., 1980, "Konvexe Mengen" Berlin Heidelberg New York: Springer

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Emine SOYTÜRK'e en içten teşekkürlerimle saygılar sunarım. Ayrıca tezi hazırladığım süre içerisinde bana olan sevgi ve güvenlerini benden hiç esirgemeyen sevgili babam Raşit DEMİREL'e ve canım annem Sevim DEMİREL'e teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

Oğuzhan DEMİREL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans

Eğitim

Lisans : 2003 Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Lise : 1999 Afyon Kocatepe Anadolu Lisesi

İş

2003-Araştırma Görevlisi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Bolvadin-24.04.1981

Cinsiyet : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce