1. GİRİŞ

İlk defa 1920 yılında G. H. Hardy aşağıdaki integral eşitsizliğini ispatsız olarak vermiştir: $a > 0$, $f(x) \geq 0$, $p > 1$ ve $\int_a^\infty f^p(x)dx < \infty$ ise

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x} \int_a^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx \tag{1.1}$$

dir. Hardy (1.1) eşitsizliğinin diskret halini şu şekilde vermiştir. $a_1, ..., a_n$ negatif olmayan reel sayıları ve $p > 1$ reel sayısı için,

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^\infty a_n^p$$

şeklinde tanımlayarak ispatını vermiştir.

Hardy 1925 yılındaki çalışmasında "Sonsuz seriler için yukardaki teoremin ispatını vermedim" demiştir. Burada Hardy'nin amacı

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{a_n b_m}{n+m} \leq \pi \csc \left(\frac{\pi}{p} \right) \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m=1}^\infty b_m^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindeki çift seriler için Hilbert eşitsizliğinin elemanter ispatından daha iyi bir ispat yöntemi elde etmekti. Daha sonra Hardy 1925 yılında yukarıda ispatlamadığı sonuçların ispatını vermiştir. (1.1) eşitsizliği aşağıdaki şekilde de ifade edilmiştir:

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx. \tag{1.2}$$

(1.2) eşitsizliği genel olarak literatürde Hardy Eşitsizliği olarak tanımlanır.

Hardy 1928 yılında (1.2) eşitsizliğinin genelleşmiş bir versiyonunu aşağıdaki şekilde vererek ispatlamıştır: $m \neq 1$, $p \geq 1$ ve f, $(0, \infty)$ aralığında negatif olmayan integrallenebilen fonksiyonu için,

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt & , \quad m > 1 \text{ için} \\ \int_x^\infty f(t)dt & , \quad m < 1 \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\int_0^\infty x^{-m}F^p(x)dx \quad < \quad \left(\frac{p}{|m-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-m}\left[xf(x)\right]^p dx \tag{1.3}$$

$f(x) \equiv 0$ dışında bu eşitsizlik vardır. Buradaki $\left(\frac{p}{|m-1|}\right)^p$ sabiti de en iyi sabittir.

Daha sonra, bu eşitsizlikler genelleştirilerek, B. G. Pachpatte, L. Y. Chan, J. Kadlec ve A. Kufner gibi bir çok yazar tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmalar gözönüne alınarak Hardy eşitsizliği için yeni bir genelleşme ele alınacaktır.

Üçüncü bölümde,

$$1-\left(\frac{p_i}{q_i-m_i}\right)x\frac{f_i'(x)}{f_i(x)} \geq \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

şartı altında

$$\mu_i(x) = \frac{1}{f_i(x)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{f_i(t)g_i(t)}{t}dt \ , \ x \in (0,\infty)$$

fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\mu_i^{p_i}(x)\right]dx \quad &\leq \quad \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}\left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \\ &\times \quad \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\frac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx\end{aligned} \tag{1.4}$$

eşitsizliğini gösterdik.

Dördüncü bölümde ise

$$0 < \ \frac{1}{\alpha_k} \ \leq \underset{X<x<\infty}{ess\ \inf}\left\{1+\frac{1}{1-m+(n-k)p}\frac{z(x)}{z^{\shortmid}(x)}\left(\frac{w^{\shortmid}(x)}{w(x)}-p\frac{s_k^{\shortmid}(x)}{s_k(x)}\right)\right\},$$

şartı altında

$$\bar{J}_k\phi(x) \quad = \quad \frac{1}{s_k(x)}\int_x^\infty s_k(t)z^{\shortmid}(t)\phi(t)dt, \quad \text{tüm } x \geq X \quad \text{için}$$

fonksiyonu için,

$$\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \prod_{k=1}^n\left(\frac{p\alpha_k}{1-m+(n-k)p}\right)^p\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-np}(x)}w(x)f^p(x)dx$$

eşitsizliğini gösterdik. Burada

$$\bar{F}_k(x) = \bar{J}_k \bar{J}_{k-1} ... \bar{J}_1 f(x) \quad \bar{F}_0(x) = f(x),$$

dir.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ele alınan fonksiyonlar, sadece tanımlı olduğu aralıktaki değerler için verilmişti.

Beşinci bölümde ise, yukarıda bahsedilen fonksiyonları içinde bulunduran daha genel bir fonksiyon tanımlayarak bir genelleştirme yapmak amaçlandı ve bu yapılarak sonuçlandırıldı. Bunun için ele alınan genelleştirilmiş yapı şu şekildedir. 1951 yılında B. M. Levitan, 1988 de A. D. Gadjiev ve I. A. Aliev, !987 de I. A. Aliev ve 1995 de H. Yıldırım tarafından ele alınan

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} f\left[\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\varphi}\right] \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

operatörünü gözönüne alarak, burada, burada $y = 1$ seçilmesiyle

$$T^1 f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} f\left[\sqrt{1+x^2-2x\cos\varphi}\right] \sin^{2p}\varphi d\varphi$$

operatörü yazılmıştır. Buradaki son operatör için beşinci bölümde, daha önce ele alınan (1.2) ve (1.3) tipli Hardy eşitsizlikleri ispatlanmıştır..

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1 (L^p Uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$ olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzayı,

$$L^p = \left\{ f(x) : \|f(x)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

dır.

Tanım 2.2 (Hardy Eşitsizliği): $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\int_0^\infty f(x)dx < \infty$$

olsun.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p < p^q \int_0^\infty f^p(t)dt$$

eşitsizliğine Hardy Eşitsizliği denir.

Tanım 2.3 (Ölçülebilir Fonksiyon): $f : X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve E ölçülebilir bir uzay olsun. Bu durumda her $\alpha > 0$ için,

$$\varpi(\alpha) = \varpi_{f,E}(\alpha) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

oluyorsa, f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.4 (Esas Supremum, Esas Sınırlılık): Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$ess \sup_E f = \begin{cases} \inf \{\alpha \mid w(\alpha) = 0\} \\ +\infty, \quad ,w(\alpha) > 0 \end{cases}$$

ise f ye E üzerinde esas supremuma sahiptir denir. Eğer $ess \sup_E |f| < \infty$ oluyor ise f ye esas sınırlıdır denir.

Tanım 2.5 (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği): $1 \leq p < \infty$ ve $f(x, y)$, Ω_1 ve Ω_2 üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\left\{ \int_{\Omega_1} dx \left| \int_{\Omega_2} f(x,y)dy \right|^p \right\}^{1/p} \leq \int_{\Omega_2} dy \left\{ \int_{\Omega_1} |f(x,y)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

eşitsizliğine Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği denir.

Tanım 2.6 (Operatör): Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.7 (Hölder Eşitsizliği): $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\int_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \quad \leq \quad \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_\Omega |g(x)|^q\, dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Burada q, p nin konjigesi olarak adlandırılır.

Tanım 2.8 (Aritmetik-Geometrik Eşitsizlik): $A = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ ve $G = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$ eşitliklerine sırasıyla Aritmetik ve Geometrik Ortalama denir. $G \leq A$ eşitsizliğine Aritmetik-Geometrik Eşitsizlik denir.

Tanım 2.9 (Mutlak Süreklilik): $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıdaki her $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, x_n]$ ayrık alt aralıkları için,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda, f fonksiyonuna, $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.10 (İntegrallenebilirlik): Verilen her hangi bir f fonksiyonu ölçülebilir E bölgesi üzerinde

$$\int_E |f(x)|\, dx < \infty$$

ise f fonksiyonuna E üzerinde integrallenebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.11 (Sınırlı Fonksiyon): $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır denir.

Tanım 2.12 (Monoton Yakınsaklık Teoremi): $f(x, h)$ toplanabilir majoranta sahip olsun. $F(x)$, h parametresinden bağımsız ve $F(x) \in L_1(\Omega)$ olacak şekilde $|f(x,h)| \leq F(x)$ dir. Eğer, $h \to 0$ iken $f(x,h)$ fonksiyonunun hemen hemen her x için limiti varsa, o zaman

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega} f(x,h)dx \quad = \quad \int_{\Omega} \lim_{h\to 0} f(x,h)dx$$

dir.

Tanım 2.13.(Genelleştirilmiş Öteleme): $T^s f(t) = F(s,t)$ şeklinde tanımlanan öteleme operatörü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir.

1. T^s operatörü lineerdir.
2. $T^0 f(t) = f(t), \qquad f \in C(\mathbb{R})$
3. $T_s^r T^s f(t) = T_t^s T^r f(t)\ , \qquad T_t^s f(t) = F(s,t)$
4. Herhangi $f \in C(\mathbb{R})$ için, $F(s,t) = T^s f(t)$ fonksiyonu (s,t) noktasında süreklidir(Levitan 1964).

3. HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER I

$p>1$ ve $(0,\infty)$ aralığında $g(x)\geq 0$ fonksiyonu integrallenebilir olmak üzere

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda Klasik Hardy Eşitsizliği

$$\int_0^\infty \left[\tfrac{1}{x}G(x)\right]^p dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty g^p(x)dx \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitsizlikte, $g\equiv 0$ olmadığı durumda (3.1) eşitsizliğindeki $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğu Hardy tarafından elde edilmiştir (Hardy 1920). Daha sonra, Hardy (3.1) eşitisizliğinin bir genelleşmesini aşağıdaki şekilde vermiştir. $m\neq 1$, $p\geq 1$ ve $g(x)\geq 0$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$G(x)=\begin{cases}\int_0^x g(t)dt & , \quad m>1 \text{ için}\\ \int_x^\infty g(t)dt & , \quad m<1 \text{ için}\end{cases}$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

$$\int_0^\infty x^{-m}G^p(x)dx \quad < \quad \left(\tfrac{p}{|m-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{-m}\left[xg(x)\right]^p dx \tag{3.2}$$

dır. g$\equiv 0$ olmadığı durumda, $\left(\frac{p}{|m-1|}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Hardy 1928). (3.1) ve (3.2) de verilen Hardy eşitsizliğinin genelleştirilmesi günümüze kadar bir çok yazar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bazılarını kaynaklar kısmında verdik. Bu çalışmalar göz önüne alınarak, bu bölümde Hardy tipli bazı eşitsizliklerin genelleşmesini ele alacağız. Buradan elde edeceğimiz sonuçlar (İzumi 1968, Levinson 1964, Pachpactte 1987) çalışmalarındaki bazı sonuçların genelleştirilmesidir. Bu çalışma boyunca $n\geq 1$ bir tamsayı, i ve j indisleri de, $1\leq i,j\leq n$ olmak üzere toplam ve çarpım sembolleri $\sum_i$, $\sum_j$, Π_i ve Π_j olarak alınacaktır. Ayrıca bu bölümde $i=1,2,...,n$ için $f_i:(0,\infty)\to(0,\infty)$ mutlak sürekli ve $g_i:(0,\infty)\to[0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olarak alınacaktır.

Lemma 3.1: $p>q>0$ ve $r>1$ reel sayılar ve $\gamma>0$ için

$$1+\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\frac{xf'(x)}{f(x)}\geq\frac{1}{\gamma}>0$$

olsun. Bu durumda $a \in (0,\infty)$ için

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \int_a^x \frac{f(t)g(t)}{t} dt, \; x \in (0,\infty)$$

olmak üzere her $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} \varphi^{\frac{p}{q}}(x) dx \quad \leq \quad \left[\frac{p}{q}\frac{\gamma}{r-1}\right]^{\frac{p}{q}} \int_a^b x^{-r} g^{\frac{p}{q}}(x) dx$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: $\int_a^b x^{-r} \varphi^{\frac{p}{q}}(x) dx$ integralinde

$$u = \varphi^{\frac{p}{q}}(x) \Longrightarrow du = \frac{p}{q}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)\varphi'(x)dx = \frac{p}{q}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\int_a^x \frac{f(t)g(t)}{t}dt + \frac{g(x)}{x}\right]dx$$

$$dv = x^{-r}dx \Longrightarrow v = \frac{x^{-r+1}}{-r+1}$$

dönüşümleri altında kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b x^{-r} \varphi^{\frac{p}{q}}(x) dx \\
= \;& \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}}(x) \Big|_a^b - \left(\frac{p}{q}\frac{1}{-r+1}\right) \int_a^b x^{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)\varphi'(x)dx \\
= \;& \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}}(b) - \left(\frac{p}{q}\frac{1}{-r+1}\right) \int_a^b x^{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\int_a^x \frac{f(t)g(t)}{t}dt + \frac{g(x)}{x}\right]dx \\
= \;& \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}}(b) - \left(\frac{p}{q}\frac{1}{-r+1}\right)\left[\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)\left(-x\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx + \int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx\right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)\left[1 + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1}x\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx \quad = \quad \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\varphi^{\frac{p}{q}}(b) + \left(\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\right)\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx$$

yazılır. $r > 1$ ve $\varphi(b) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)\left[1 + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1}x\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx \quad &\leq \quad \left(\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\right)\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx \\
&= \quad \left(\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\right)\int_a^b \left[(x^r)^{\frac{p-q}{p}} x^{-r}g(x)\right]\left[(x^r)^{-\frac{p-q}{p}}\varphi^{\frac{p-q}{q}}(x)\right]dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı için $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p}{p-q}$ kuvvetlerine göre Hölder Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)\left[1 + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1}x\frac{f'(x)}{f(x)}\right]dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\right)\left[\int_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{q}{p}}\left[\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{p-q}{p}}$$

yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)\tfrac{1}{\gamma}dx &\leq \left(\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{r-1}\right)\left[\int_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{q}{p}}\left[\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{p-q}{p}} \\
\left[\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{q}{p}} &\leq \left(\tfrac{p}{q}\tfrac{\gamma}{r-1}\right)\left[\int_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)dx\right]^{\frac{q}{p}} \\
\int_a^b x^{-r}\varphi^{\frac{p}{q}}(x)dx &\leq \left(\tfrac{p}{q}\tfrac{\gamma}{r-1}\right)^{\frac{p}{q}}\int_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1: $\sum q_i = 1$ ve hemen hemen her yerde $\gamma_i > 0$ için

$$1+\left(\frac{p_i}{m_i-q_i}\right)\frac{xf_i(x)}{f_i(x)} \geq \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

olacak şekilde $p_i > q_i > 0, m_i > q_i$ reel sayılar olsun. Eğer $p = \sum p_i$, $m = \sum m_i$ ve

$$\Phi_i(x) \;:=\; \tfrac{1}{f_i(x)}\int_0^x \tfrac{f_i(t)g_i(t)}{t}dt \ , \ x \in (0,\infty)$$

alınırsa, her hangi bir $C_i > 0$ sabiti için

$$\int_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\Phi_i^{p_i}(x)\right]dx \;\leq\; \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}\left[\tfrac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}}\int_0^\infty x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \tag{3.3}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Lemma 3.1 den her $a \in (0,\infty)$ için

$$\varphi_i(x) \;=\; \tfrac{1}{f_i(x)}\int_a^x \tfrac{f_i(t)g_i(t)}{t}dt \quad , \quad x \in (0,\infty)$$

yazılabilir. Buradan da $b \geq a$ için,

$$\int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \;\leq\; \left[\tfrac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}}\int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

yazılır.

Şimdi her $C_i > 0$ için, aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\prod_i\left[x^{-m_i}\varphi_i^{p_i}(x)\right] &= \prod_i\left\{\left[\left(x^{-\left(\frac{m_i}{p_i}\right)}C_i\varphi_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i}C_i^{-p_i}\right\} \\
&= \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\prod_i\left[\left(x^{-\left(\frac{m_i}{p_i}\right)}C_i\varphi_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i} \\
&\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}\int_a^b \prod_i \left[x^{-m_i}\varphi_i^{p_i}(x)\right] dx &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-(\frac{m_i}{q_i})}\varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\ &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\ &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx\end{aligned}$$

yazılır. Böylece her $c \in (a,b)$ için,

$$\int_a^b \prod_i \left[x^{-m_i}\varphi_i^{p_i}(x)\right] dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

eşitsizliğinde $a \to 0^+$ için limit alınırsa,

$$\int_c^b \prod_i \left[x^{-m_i}\Phi_i^{p_i}(x)\right] dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

elde edilir.

Gerçekten de tüm $0 < c < b < \infty$ için

$$\int_0^\infty \prod_i \left[x^{-m_i}\Phi_i^{p_i}(x)\right] dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

dir. Bu da teoremin ispatıdır.

Sonuç 3.1: Teorem 3.1 deki şartlar altında

$$\int_0^\infty x^{-m}\prod_i \left[\Phi_i^{p_i}(x)\right] dx \leq C\sum_i \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

dir. Burada,

$$C = \prod_j \left[q_j^{q_j}\left[\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right]^{p_j}\right]$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.1 de $i = 1, ..., n$ için

$$C_i = q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)}\left(\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{-1}$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-m}\prod_i \left[\Phi_i^{p_i}(x)\right] dx &\leq \prod_j \left[\left(q_j^{-\left(\frac{q_j}{p_j}\right)}\left(\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right)^{-1}\right)^{-p_j}\right]\sum_i q_i \left(q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)}\left(\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{-1}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \\ &\times \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\ &= \prod_j \left[q_j^{q_j}\left[\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right]^{p_j}\right]\sum_i \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\ &= C\sum_i \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da istenen sonuçtur.

Sonuç 3.2: $m > 1$, $i = 1, 2, ..., n$ için $p_i > \frac{1}{n}$ ve bazı $\gamma_i > 0$ için

$$1 + \left(\frac{np_i}{m-1} \right) \frac{xf_i'(x)}{f_i(x)} \geq \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

olsun. Bu durumda,

$$\Phi_i(x) \quad := \quad \tfrac{1}{f_i(x)} \int\limits_0^x \tfrac{f_i(t)g_i(t)}{t} dt \quad , x \in (0, \infty)$$

ise,

$$\int\limits_0^\infty x^{-m} \prod_i \left[\Phi_i^{p_i}(x) \right] dx \quad \leq \quad \tfrac{1}{n} \sum_i \left(\tfrac{\gamma_i np_i}{m-1} \right)^{np_i} \int\limits_0^\infty x^{-m} g_i^{np_i}(x) dx \tag{3.4}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.1 de her $i = 1, ..., n$ için

$$m_i = \frac{m}{n}, \; q_i = \frac{1}{n}, \; C_i = 1$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty x^{-m} \prod_i \left[\Phi_i^{p_i}(x) \right] dx \quad &\leq \quad \left(\prod_j 1^{-p_j} \right) \sum_i \tfrac{1}{n} 1^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\tfrac{p_i \gamma_i}{\frac{m}{n} - \frac{1}{n}} \right]^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}} \int\limits_0^\infty x^{-\left(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{n}}\right)} g_i^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}}(x) dx \\ &= \quad \tfrac{1}{n} \sum_i \left[\tfrac{p_i n \gamma_i}{m-1} \right]^{np_i} \int\limits_0^\infty x^{-m} g_i^{np_i}(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2: $p > q > 0$, $r < 1$, $\gamma > 0$ sabiti için

$$1 - \left(\frac{p}{q} \right) \frac{xf'(x)}{f(x)} \geq \frac{1}{\gamma} > 0$$

ve $b \in (0, \infty)$ olmak üzere,

$$\psi(x) = \frac{1}{f(x)} \int\limits_x^b \frac{f(t)g(t)}{t} dt \;\; , \;\; x \in (0, \infty)$$

olsun. Bu durumda $0 \leq a \leq b$ ise

$$\int\limits_a^b x^{-r} \psi^{\frac{p}{q}}(x) dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{p}{q} \tfrac{\gamma}{1-r} \right)^{\frac{p}{q}} \int\limits_a^b x^{-r} g^{\frac{p}{q}}(x) dx$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: $\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)dx$ ifadesinde

$$u=\psi^{\frac{p}{q}}(x)\Longrightarrow du=\frac{p}{q}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)\psi'(x)dx=\frac{p}{q}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)\left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\int\limits_x^b\frac{f(t)g(t)}{t}dt-\frac{g(x)}{x}\right]dx$$

$$dv=x^{-r}dx\Longrightarrow v=\frac{x^{-r+1}}{-r+1}$$

dönüşümleri altında kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)dx &= \tfrac{x^{-r+1}}{-r+1}\psi^{\frac{p}{q}}(x)\Big|_a^b-\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r+1}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)\left[-\tfrac{f'(x)}{f^2(x)}\int\limits_x^b\tfrac{f(t)g(t)}{t}dt-\tfrac{g(x)}{x}\right]dx\\ &= \tfrac{a^{-r+1}}{r-1}\psi^{\frac{p}{q}}(a)+\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)x\tfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx+\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx\end{aligned}$$

olur. Burada $r<1$ ve $\psi^{\frac{p}{q}}(a)\geq 0$ olduğundan $\frac{a^{-r+1}}{r-1}\psi^{\frac{p}{q}}(a)$ negatif olur. Dolayısıyla,

$$\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)dx \leq \tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)x\tfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx+\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx$$

yazılır. Buradan da

$$\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)\left[1-\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}x\tfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right]dx \leq \tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)g(x)dx$$

dir. Burada hipotezdeki γ nın kabulu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)\tfrac{1}{\gamma}dx &\leq \tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\int\limits_a^b\left[(x^r)^{\frac{p-q}{q}}x^{-r}g(x)\right]\left[(x^r)^{-\frac{p-q}{q}}\psi^{\frac{p}{q}-1}(x)\right]dx\\ &\leq \tfrac{p}{q}\tfrac{1}{1-r}\left[\int\limits_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)\right]^{\frac{q}{p}}\left[\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)\right]^{\frac{p-q}{p}}dx\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak

$$\int\limits_a^b x^{-r}\psi^{\frac{p}{q}}(x)dx \leq \left(\tfrac{p}{q}\tfrac{\gamma}{1-r}\right)^{\frac{p}{q}}\int\limits_a^b x^{-r}g^{\frac{p}{q}}(x)dx$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 3.2: Her $i=1,...,n$ için $\sum q_i=1$ ve hemen hemen her yerde $\gamma_i>0$ sabiti için

$$1-\left(\frac{p_i}{q_i-m_i}\right)x\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}\geq\frac{1}{\gamma_i}>0$$

olacak şekilde $p_i > q_i > 0$, $q_i > m_i$ reel sayılar olsun. Eğer $p = \sum p_i$, $m = \sum m_i$ ve

$$\psi_i(x) = \frac{1}{f_i(x)} \int_x^{\infty} \frac{f_i(t) g_i(t)}{t} dt \ , \ x \in (0, \infty)$$

alınırsa, herhangi $C_i > 0$ sabiti için

$$\int_0^{\infty} x^{-m} \prod_i \left[\psi_i^{p_i}(x)\right] dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right) \sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\tfrac{p_i \gamma_i}{q_i - m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^{\infty} x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x) dx \tag{3.5}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Lemma 3.2 den, $b \in (0, \infty)$ için

$$\psi_i(x) = \frac{1}{f_i(x)} \int_x^{b} \frac{f_i(t) g_i(t)}{t} dt \ , \ x \in (0, \infty)$$

yazabiliriz. Ayrıca $b \geq a$ için

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} \varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x) dx &\leq \left(\tfrac{p_i}{q_i} \tfrac{\gamma_i}{1 - \frac{m_i}{q_i}}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x) dx \\ &= \left(\tfrac{p_i \gamma_i}{q_i - m_i}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x) dx \end{aligned}$$

dir.

Diğer yandan her $C_i > 0$ için

$$\begin{aligned} \prod_i \left[x^{-m_i} \varphi_i^{p_i}(x)\right] &= \prod_i \left\{ \left[\left(x^{-\left(\frac{m_i}{p_i}\right)} C_i \varphi_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i} C_i^{-p_i} \right\} \\ &= \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right) \prod_i \left[\left(x^{-\left(\frac{m_i}{p_i}\right)} C_i \varphi_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i} \\ &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right) \sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} \varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \prod_i \left[x^{-m_i}\varphi_i^{p_i}(x)\right]dx &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-(\frac{m_i}{q_i})}\varphi_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\
&\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_a^b x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\
&\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx
\end{aligned}$$

dir. $c \in (a,b)$ için,

$$\int_a^b \prod_i \left[x^{-m_i}\varphi_i^{p_i}(x)\right]dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

dır. Bu son eşitsizlikte $a \to 0^+$ için limit alınırsa

$$\int_c^b \prod_i \left[x^{-m_i}\psi_i^{p_i}(x)\right]dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

elde edilir. Gerçekten de tüm $0 < c < b < \infty$ için

$$\int_0^\infty \prod_i \left[x_i^{-m_i}\psi_i^{p_i}(x)\right]dx \leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

dir.

Sonuç 3.3: Teorem 3.2 deki şartlar altında,

$$\int_0^\infty x^{-m}\prod_i \left[\psi_i^{p_i}(x)\right]dx \leq C\sum_i \int_0^\infty x^{-(\frac{m_i}{q_i})}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx$$

yazılır. Burada,

$$C_j = \prod_j \left[q_j^{q_j}\left[\frac{p_j\gamma_j}{q_j-m_j}\right]^{p_j}\right]$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.2 de $i = 1,...,n$ için

$$C_i = q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)}\left(\frac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right)^{-1}$$

şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\psi_i^{p_i}(x)\right]dx &\leq \prod_j\left[\left(q_j^{-\left(\frac{q_j}{p_j}\right)}\left(\tfrac{p_j\gamma_j}{q_j-m_j}\right)^{-1}\right)^{-p_j}\right]\sum_i q_i\left(q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)}\left(\tfrac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right)^{-1}\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\left[\tfrac{p_i\gamma_i}{q_i-m_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \\
&\times \int\limits_0^\infty x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\
&= \prod_j\left[q_j^{q_j}\left[\tfrac{p_j\gamma_j}{q_j-m_j}\right]^{p_j}\right]\sum_i\int\limits_0^\infty x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\
&= C\sum_i\int\limits_0^\infty x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}g_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx
\end{aligned}$$

olduğu hemen görülür.

Sonuç 3.4: $m<1$, $i=1,...,n$ için $p_i>\frac{1}{n}$ ve $\gamma_i>0$ sabiti için

$$1+\left(\frac{np_i}{1-m}\right)\frac{xf_i'(x)}{f_i(x)}\geq\frac{1}{\gamma_i}>0$$

olsun. Bu durumda,

$$\psi_i(x) \;:=\; \frac{1}{f_i(x)}\int\limits_x^\infty\frac{f_i(t)g_i(t)}{t}dt\;,\; x\in(0,\infty)$$

ise

$$\int\limits_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\psi_i^{p_i}(x)\right]dx \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_i\left(\frac{\gamma_i np_i}{m-1}\right)^{np_i}\int\limits_0^\infty x^{-m}g_i^{np_i}(x)dx \tag{3.6}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.2 de $i=1,...,n$ için

$$m_i=\frac{m}{n}\;,q_i=\frac{1}{n}\;,\;C_i=1$$

şeklinde alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\psi_i^{p_i}(x)\right]dx &\leq \left(\prod_j 1^{-p_j}\right)\sum_i\frac{1}{n}1^{\frac{p_i}{q_i}}\left[\frac{p_i\gamma_i}{\frac{1}{n}-\frac{m}{n}}\right]^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}}\int\limits_0^\infty x^{-\left(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{n}}\right)}g_i^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}}(x)dx \\
&= \sum_i\frac{1}{n}\left[\frac{p_in\gamma_i}{1-m}\right]^{np_i}\int\limits_0^\infty x^{-m}g_i^{np_i}(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.3: $b>0$, $p>q>0$, $r>1$ ve $\gamma>0$ sabiti için

$$1+\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\frac{xf'(x)}{f(x)}\geq\frac{1}{\gamma}>0$$

olsun. Bu durumda

$$\mu(x) = \frac{1}{f(x)} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{f(t)g(t)}{t} dt \ , \ x \in (0,b)$$

ise

$$\int\limits_0^b x^{-r} \mu^{\frac{p}{q}}(x)dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{q}\frac{1}{r-1}\right)^{\frac{p}{q}} \int\limits_0^b x^{-r} \left[\frac{1}{f(x)} \left|f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p}{q}} dx$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: $\int\limits_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)dx$ integralinde kısmi integrasyon yöntemi uygulandığında

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)dx \\
= \ & \frac{x^{-r+1}}{-r+1}\mu^{\frac{p}{q}}(x) \Big|_0^b + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \int\limits_0^b x^{-r+1} \mu^{\frac{p}{q}-1}(x) \left[-\frac{f'(x)}{f^2(x)} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{f(t)g(t)}{t} dt + \frac{1}{f(x)} \left(\frac{f(x)g(x)-f(\frac{x}{2})g(\frac{x}{2})}{x}\right)\right] dx \\
= \ & \frac{b^{-r+1}}{-r+1}\mu^{\frac{p}{q}}(b) + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \int\limits_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x) \left(-x\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx \\
+ \ & \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \int\limits_0^b x^{-r} \frac{1}{f(x)} \left(f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right) \mu^{\frac{p}{q}-1}(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^b \left[1 + \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} x \frac{f'(x)}{f(x)}\right] x^{-r} \mu^{\frac{p}{q}}(x)dx \\
\leq \ & \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \int\limits_0^b x^{-r} \frac{1}{f(x)} \left|f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right| \mu^{\frac{p}{q}-1}(x)dx \\
= \ & \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \int\limits_0^b \left[(x^r)^{\frac{p-q}{p}} x^{-r} \frac{1}{f(x)} \left|f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right] \left[(x^r)^{-\frac{p-q}{p}} \mu^{\frac{p}{q}-1}(x)\right] dx \\
\leq \ & \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \left\{\int\limits_0^b (x^r)^{\frac{p-q}{q}} \left[x^{-r} \frac{1}{f(x)} \left|f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{q}{p}} \left\{\int\limits_0^b (x^r)^{-1} \mu^{\frac{p}{q}}(x)\right\}^{\frac{p-q}{q}} dx \\
= \ & \frac{p}{q}\frac{1}{r-1} \left\{\int\limits_0^b x^{-r} \left[\frac{1}{f(x)} \left|f(x)g(x) - f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{q}{p}} \left\{\int\limits_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)\right\}^{\frac{p-q}{q}} dx
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki son eşitsizlik için $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p}{p-q}$ kuvvetlerine göre Hölder Eşitsizliği uygulanır ve hipotezdeki γ nın kabulunden

$$\int_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)\tfrac{1}{\gamma}dx$$

$$\leq \int_0^b \left[1+\tfrac{p}{q}\tfrac{1}{r-1}x\tfrac{f'(x)}{f(x)}\right]x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)dx$$

$$\leq \tfrac{p}{q}\tfrac{1}{r-1}\left\{\int_0^b x^{-r}\left[\tfrac{1}{f(x)}\left|f(x)g(x)-f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{q}{p}}\left\{\int_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)\right\}^{\frac{p-q}{q}}dx$$

olur. Buradan da

$$\int_0^b x^{-r}\mu^{\frac{p}{q}}(x)dx \leq \left(\tfrac{p}{q}\tfrac{\gamma}{r-1}\right)^{\frac{p}{q}}\int_0^b x^{-r}\left[\tfrac{1}{f(x)}\left|f(x)g(x)-f(\tfrac{x}{2})g(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p}{q}}dx$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 3.3: $b>0$, $i=1,...,n$ için $\sum q_i = 1$ ve hemen hemen her yerde $\gamma_i > 0$ sabiti için

$$1-\left(\frac{p_i}{q_i-m_i}\right)x\frac{f_i'(x)}{f_i(x)} \geq \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

olacak şekilde $p_i > q_i > 0$, $q_i > m_i$ reel sayılar olsun. Eğer $p=\sum p_i$, $m = \sum m_i$ ve

$$\mu_i(x) = \frac{1}{f_i(x)}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\frac{f_i(t)g_i(t)}{t}dt \ , \ x\in(0,\infty)$$

alınırsa, herhangi bir $C_i > 0$ sabiti için

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{-m}\prod_i\left[\mu_i^{p_i}(x)\right]dx &\leq \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}\left[\tfrac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}} \\ &\quad\times \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\tfrac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx\end{aligned} \tag{3.7}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Lemma 3.3 ten

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\mu_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx &\leq \left(\tfrac{p_i}{q_i}\tfrac{\gamma_i}{\frac{m_i}{q_i}-1}\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\tfrac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx \\ &= \left(\tfrac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\tfrac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi her $C_i > 0$ için aritmetik-geometrik eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\prod_i \left[x_i^{-m_i}\mu_i^{p_i}(x)\right] &= \prod_i \left\{\left[\left(x^{-(\frac{m_i}{p_i})}C_i\mu_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i} C_i^{-p_i}\right\} \\
&= \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\prod_i\left[\left(x^{-(\frac{m_i}{p_i})}C_i\mu_i(x)\right)^{\frac{p_i}{q_i}}\right]^{q_i} \\
&\le \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}} x^{-(\frac{m_i}{q_i})}\mu_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
\int_0^b \prod_i \left[x^{-m_i}\mu_i^{p_i}(x)\right]dx &\le \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}\int_0^b x^{-(\frac{m_i}{q_i})}\mu_i^{\frac{p_i}{q_i}}(x)dx \\
&\le \left(\prod_j C_j^{-p_j}\right)\sum_i q_i C_i^{\frac{p_i}{q_i}}\left(\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} \\
&\times \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\frac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Sonuç 3.5: Teorem 3.3 deki şartlar altında

$$\int_0^b x^{-m}\prod_i\left[\mu_i^{p_i}(x)\right]dx \le C\sum_i\int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)}\left[\frac{1}{f_i(x)}\left|f_i(x)g_i(x)-f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}}dx$$

yazılır. Burada

$$C_j = \prod_j\left[q_j^{q_j}\left[\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right]^{p_j}\right]$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.3 deki şartlar altında $i = 1, ..., n$ için

$$C_i = q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)}\left(\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{-1}$$

şeklinde alınırsa,

$$\int_0^b x^{-m} \prod_i \left[\mu_i^{p_i}(x)\right] dx$$

$$\leq \prod_j \left[\left(q_j^{-\left(\frac{q_j}{p_j}\right)} \left(\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right)^{-1} \right)^{-p_j} \right] \sum_i q_i \left(q_i^{-\left(\frac{q_i}{p_i}\right)} \left(\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right)^{-1} \right)^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i\gamma_i}{m_i-q_i}\right]^{\frac{p_i}{q_i}}$$

$$\times \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left| f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}} dx$$

$$= \prod_j \left[q_j^{q_j} \left[\frac{p_j\gamma_j}{m_j-q_j}\right]^{p_j} \right] \sum_i \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left| f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}} dx$$

$$= C \sum_i \int_0^b x^{-\left(\frac{m_i}{q_i}\right)} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left| f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{q_i}} dx$$

elde edilir. Bu da istenen sonucu verir.

Sonuç 3.6: $b > 0$, $m > 1$, $i = 1, ..., n$ için $p_i > \frac{1}{n}$ ve $\gamma_i > 0$ sabiti için

$$1 + \left(\frac{np_i}{m-1}\right) \frac{xf_i'(x)}{f_i(x)} \geq \frac{1}{\gamma_i} > 0$$

olsun. Bu durumda

$$\mu_i(x) \quad := \quad \frac{1}{f_i(x)} \int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{f_i(t)g_i(t)}{t} dt \ \ , \ x \in (0, b)$$

ise

$$\int_0^b x^{-m} \prod_i \left[\mu_i^{p_i}(x)\right] dx \quad \leq \quad \frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{\gamma_i np_i}{m-1}\right)^{np_i} \int_0^b x^{-m} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left| f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{np_i} dx \tag{3.8}$$

dir (Cheung, Hanjš, Pečarić 2000).

İspat: Teorem 3.3 deki şartlar altında $i = 1, ..., n$ için

$$m_i = \frac{m}{n} \ , q_i = \frac{1}{n} \ , \ \ C_i = 1$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^{-m} \prod_i \left[\mu_i^{p_i}(x)\right] dx &\leq \left(\prod_j 1^{-p_j}\right) \sum_i \frac{1}{n} 1^{\frac{p_i}{q_i}} \left[\frac{p_i \gamma_i}{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\right]^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}} \\
&\times \int_0^b x^{-(\frac{\frac{m}{n}}{\frac{1}{n}})} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left|f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{\frac{p_i}{\frac{1}{n}}} \\
&= \sum_i \frac{1}{n} \left[\frac{p_i n \gamma_i}{m-1}\right]^{np_i} \int_0^b x^{-m} \left[\frac{1}{f_i(x)} \left|f_i(x)g_i(x) - f_i(\tfrac{x}{2})g_i(\tfrac{x}{2})\right|\right]^{np_i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenen sonucu verir.

4. HARDY TİPLİ EŞİTSİZLİKLER II

G. H. Hardy tarafından ifade edilen (3.1) ve (3.2) eşitsizlikleri integral eşitsizlikleri içinde oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Hardy eşitsizliği ile ilgili çeşitli genelleştirmeler ve farklı ispat metotları kullanılarak günümüze kadar bu eşitsizlikler üzerine bir çok yazar farklı çalışmalar yapmıştır. Bu yazarlardan bazıları (Copson 1975, Levinson 1964, Love 1985, Pachpatte 1987, Shum 1971) şeklinde verebiliriz.

B. G. Pachpatte ve E. R. Love tarafından ele alınan tipik bir Hardy eşitsizliği için ifade edilen teorem şu şekildedir:

$m > 1$, $p \geq 1$, $r(x)$, $w(x) > 0$, $(0, \infty)$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olsun. $z(x)$, $z(+0) > 0$ ve $z^{\prime}(x) > 0$ ile $(0, \infty)$ aralığında diferensiyellenebilir olsun. Ayrıca

$$I_k f(x) = \int_0^{\infty} \frac{r_k(t) z^{\prime}(t)}{r_k(x) z(x)} f(t) dt$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha_k} \leq \underset{0<x<\infty}{ess \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{m-1} \frac{z(x)}{z^{\prime}(x)} \left(p \frac{r_k^{\prime}(x)}{r_k(x)} - \frac{w^{\prime}(x)}{w(x)} \right) \right\}$$

olsun. Eğer $f(x)$, $(0, \infty)$ aralığında negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon, $F_0(x) = z(x) f(x)$, pozitif x ler için

$$F_k(x) = z(x) I_k I_{k-1} \ldots I_1 f(x)$$

ve $x \longrightarrow 0+$ iken

$$\frac{w(x)}{z(x)^{m-1}} F_k^p(x) \longrightarrow 0$$

var ise

$$\left(\int_0^{\infty} \frac{z^{\prime}(x)}{z^m(x)} w(x) F_n^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \left(\int_0^{\infty} \frac{z^{\prime}(x)}{z^m(x)} w(x) F_0^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$A = \left(\frac{p}{|m-1|} \right)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

dir.

Bu bölümde yukarıda B. G. Pachpatte ve E. R. Love'nin elde etmiş olduğu bu tipteki teoremlerin genelleşmesini vereceğiz.

Teorem 4.1: $m > 1$, $p \geq 1$, $q \geq 0$ ve $X > 0$ olsun. $s(x)$, $w(x)$ ve $z(x)$ $[0, X]$ de mutlak sürekli ve pozitif ve $z^{\prime}(x)$ de esas sınırlı ve pozitif olsun. Eğer $f(x) \in L^{p}((0, X))$ negatif olmayan fonksiyon ise

$$F(x) = \frac{1}{s(x)} \int_{0}^{x} \frac{s(t) z^{\prime}(t)}{z(t)} f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq X$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha} \leq \underset{0<x<X}{ess \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{m-1} \frac{z(x)}{z^{\prime}(x)} \left((p+q) \frac{s^{\prime}(x)}{s(x)} - \frac{w^{\prime}(x)}{w(x)} \right) \right\},$$

olmak üzere,

$$\int_{0}^{X} \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m}(x)} w(x) F^{p+q}(x) dx \leq \left(\frac{\alpha(p+q)}{m-1} \right)^{p} \int_{0}^{X} \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m}(x)} w(x) F^{q}(x) f^{p}(x) dx \qquad (4.1)$$

dir.

Hipotezde ifade edilen s, w, z ve $z^{\prime}$ fonksiyonları lokal bir $[0, X]$ bölgesinde verilmiş olmasına rağmen, X yerine $+\infty$ alındığında $[0, \infty)$ aralığında da lokal olarak sağlanır. Fakat hipotezde ifade edilen integraller yakınsak olmayabilir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: **(i)** s, w ve z $[0, X]$ aralığında pozitif ve sürekli olduğundan alttan ve üstten pozitif sınırlıdır. Bunun sonucu olarak $\frac{s(t)}{z(t)}$ de sınırlıdır. $z^{\prime}(t)$ üstten sınırlı olduğundan, $\frac{s(t) z^{\prime}(t)}{z(t)}$ de sınırlıdır. Üstelik f integrallenebilir olduğundan, $F(x)$ nin integrali var ve $[0, X]$ aralığında mutlak süreklidir. $s(x)$ pozitif alttan sınırlı olduğundan $\frac{1}{s(x)}$, $[0, X]$ aralığında mutlak süreklidir. Bunun sonucu olarak $F(x)$ mutlak süreklidir. Buradan $F(x)$ sınırlıdır. $\frac{1}{z(t)}$ nin sınırlılığından $\frac{1}{z^{m}(x)}$ in de sınırlılığını söyleriz. Aynı zamanda $z^{\prime}(x)$ ve $w(x)$ sınırlı olacaktır. Böylece (4.1) in sol tarafındaki integral sınırlı ve yakınsaktır.

(ii) $z(x)$ pozitif üstten sınırlı ve mutlak sürekli olduğundan $\frac{1}{z(x)}$ de mutlak süreklidir. Yukarıda olduğu gibi aynı zamanda $\left(\frac{1}{z(x)} \right)^{m-1} = z(x)^{1-m}$ de mutlak süreklidir.

Şimdi $w(x) F^{p+q}(x)$, $[0, X]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan (4.1) eşitsizliğinin sol tarafına kısmi integrasyon metodunu uygularsak

$$\int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x) F^{p+q}(x)dx$$

$$= \frac{z(x)^{1-m}}{1-m} w(x) F^{p+q}(x) \Big|_0^X - \frac{1}{1-m}\int_0^X z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)F'(x)\right\}dx$$

$$= \frac{z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)}{1-m} - \frac{1}{1-m}\int_0^X z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)F'(x)\right\}dx$$

$$= \frac{z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)}{1-m} - \frac{1}{1-m}\int_0^X z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{-s'(x)}{s^2(x)}\int_0^x \frac{s(t)z'(t)}{z(x)} f(t)dt + \frac{1}{s(x)}\frac{s(x)z'(x)}{z(x)} f(x)\right)\right\}dx$$

$$\int_0^X (1-m)\frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)F^{p+q}(x)dx$$

$$= z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X) - \int_0^X z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) - (p+q)\,w(x)\frac{s'(x)}{s(x)}F^{p+q}(x)\right.$$

$$\left. + (p+q)w(x)\frac{z'(x)}{z(x)} f(x)F^{p+q-1}(x)\right\}dx$$

$$= z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X) - \int_0^X z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{z'(x)}{z(x)} f(x) - \frac{s'(x)}{s(x)}F(x)\right)\right\}dx$$

olduğu görülür. Buradan da

$$(m-1)\int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)F^{p+q}(x)dx + z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)$$

$$= \int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)\left\{\frac{z(x)}{z'(x)}\frac{w'(x)}{w(x)}F^{p+q}(x) + (p+q)\,f(x)F^{p+q-1}(x) - (p+q)\,\frac{s'(x)}{s(x)}\frac{z(x)}{z'(x)}F^{p+q}(x)\right\}dx$$

$$(m-1)\int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)F^{p+q}(x)dx + z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)$$

$$= \int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)\left\{\frac{z(x)}{z'(x)}\left(\frac{w'(x)}{w(x)} - (p+q)\,\frac{s'(x)}{s(x)}\right)F^{p+q}(x) + (p+q)\,f(x)F^{p+q-1}(x)\right\}dx \tag{4.2}$$

$$(m-1)\int_0^X \frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx + z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)$$

$$= \int_0^X \frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x)\left\{(m-1)-(m-1)\left\{1+\frac{1}{m-1}\frac{z(x)}{z^{|}(x)}\left((p+q)\frac{s^{|}(x)}{s(x)}-\frac{w^{|}(x)}{w(x)}\right)\right\}F^{p+q}(x)\right.$$

$$+ \quad (p+q)\,f(x)F^{p+q-1}(x)\}\,dx \tag{4.3}$$

yazılır. Şimdi burada (i) kısmında ifade edildiği gibi (4.2) eşitsizliği sonludur ve dolayısıyla (4.3) eşitsizliği de sonludur.

Burada $f(x)$ integrallenebilir, $z^{|}(x)$ sınırlı ve bu ifadedeki diğer çarpanlar mutlak sürekli olduğundan

$$\frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x)\,(p+q)\,f(x)F^{p+q-1}(x)$$

ifadesi de integrallenebilirdir. Burada

$$W(x)=\frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x) \quad \text{ve } S(x)=1+\frac{1}{m-1}\frac{z(x)}{z^{|}(x)}\left((p+q)\frac{s^{|}(x)}{s(x)}-\frac{w^{|}(x)}{w(x)}\right)$$

yazılırsa, (4.3) ifadesi

$$\int_0^X W(x)\left\{(m-1)-(m-1)S(x)\right\}F^{p+q}(x)dx+(p+q)\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx \tag{4.4}$$

şeklinde yazılır.

(iii) (4.2), (4.3) ve (4.4) deki tüm ifadeler birbirine eşittir.

Şayet yukarıda elde edilen

$$(m-1)\int_0^X \frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx + z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X)$$

$$= \int_0^X W(x)\left\{(m-1)-(m-1)S(x)\right\}F^{p+q}(x)dx+(p+q)\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx$$

eşitliğin her iki yanını pozitif $m-1$ reel sayısına bölersek,

$$\int_0^X \frac{z^{|}(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx$$

$$\leq \quad \int_0^X W(x)\left\{1-S(x)\right\}F^{p+q}(x)dx+(p+q)\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_0^X W(x)S(x)F^{p+q}(x)dx \leq \tfrac{(p+q)}{m-1}\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx$$

yazılır. Ayrıca hemen hemen her yerde $S(x) \geq \frac{1}{\alpha}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^X W(x)\tfrac{1}{\alpha}F^{p+q}(x)dx &\leq \tfrac{(p+q)}{m-1}\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx \\
\int_0^X W(x)F^{p+q}(x)dx &\leq \tfrac{\alpha(p+q)}{m-1}\int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx
\end{aligned}$$

olur. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\tfrac{m-1}{\alpha(p+q)}\int_0^X W(x)F^{p+q}(x)dx &\leq \int_0^X W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx \\
&= \int_0^X W(x)F^{p+q-1-\frac{q}{p}}(x)F^{\frac{q}{p}}(x)f(x)dx \\
&= \int_0^X W^{\frac{1}{q}}(x)F^{p+q-1-\frac{q}{p}}(x)W^{\frac{1}{p}}(x)F^{\frac{q}{p}}(x)f(x)dx \\
&\leq \left(\int_0^X W(x)F^{p+q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^X W(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\tfrac{m-1}{\alpha(p+q)}\int_0^X W(x)F^{p+q}(x)dx &\leq \left(\int_0^X W(x)F^{p+q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^X W(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\int_0^X \tfrac{z^{\prime}(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx \leq \left(\tfrac{\alpha(p+q)}{m-1}\right)^p \int_0^X \tfrac{z^{\prime}(x)}{z^m(x)}w(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx$$

elde edilir.

Teorem 4.2: $m > 1,\ p+r \geq 1, p \geq 0,\ q \geq 0$ ve $r \geq 0$ olsun. $s,\ w,\ z,\ z^{\prime},\ X$ ve F, Teorem 4.1 deki gibi tanımlansın. $f(x) \in L^{p+r}((0,X))$ için

$$F(x) = \tfrac{1}{s(x)}\int_0^x \tfrac{s(t)z^{\prime}(t)}{z(t)}f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq X$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha} \leq \underset{0<x<X}{ess\ \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{m-1} \frac{z(x)}{z'(x)} \left((p+q+r) \frac{s'(x)}{s(x)} - \frac{w'(x)}{w(x)} \right) \right\},$$

ise

$$\int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x) F^{p+q}(x) f^r(x) dx \leq \left(\frac{\alpha(p+q+r)}{m-1} \right)^p \int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx$$

dir.

Hipotezde ifade edilen s, w, z ve z' fonksiyonları lokal bir $[0, X]$ bölgesinde verilmiş olmasına rağmen, X yerine $+\infty$ alındığında $[0, \infty)$ aralığında da lokal olarak sağlanır. Fakat hipotezde ifade edilen integraller yakınsak olmayabilir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $W(x) = \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x)$ olarak alalım. Böylece Teorem 4.1 de p yerine $p+r$ yazılır ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^X W(x) F^{p+q}(x) f^r(x) dx \\
= & \int_0^X W(x) \left(F^{\frac{qr}{p+r}}(x) f^r(x) \right) \left(F^{p+q-\frac{qr}{p+r}}(x) \right) dx \\
\leq & \left(\int_0^X W(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx \right)^{\frac{r}{p+r}} \left(\int_0^X W(x) F^{p+q+r}(x) dx \right)^{\frac{p}{p+r}} \\
\leq & \left(\int_0^X W(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx \right)^{\frac{r}{p+r}} \left[\left(\frac{\alpha(p+q+r)}{m-1} \right)^{p+r} \int_0^X W(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx \right]^{\frac{p}{p+r}} \\
= & \left(\frac{\alpha(p+q+r)}{m-1} \right)^p \int_0^X W(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3: $m > 1$, $p \geq 1$, $X > 0$, $k = 1, 2, ..., n$ için $s_k(x)$, $w(x)$ ve $z(x)$ $[0, X]$ aralığı üzerinde pozitif ve mutlak sürekli ve $z'(x)$ de sınırlı ve pozitif olsun. ϕ negatif olmayan ve $L^p((0, X))$ üzerinde tanımlı olan herhengi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\widetilde{I}_k \phi(x) = \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x \frac{s_k(t) z'(t)}{z(t)} \phi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq X$$

olsun. Eğer $f(x) \in L^p((0,X))$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\widetilde{F}_k(x) = \widetilde{I}_k \widetilde{I}_{k-1} ... \widetilde{I}_1 f(x) \quad \widetilde{F}_0(x) = f(x),$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha_k} \leq \underset{0<x<X}{ess\ \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{m-1} \frac{z(x)}{z^{\shortmid}(x)} \left(p \frac{s_k^{\shortmid}(x)}{s_k(x)} - \frac{w^{\shortmid}(x)}{w(x)} \right) \right\},$$

olmak üzere,

$$\int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_n(x) \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{m-1} \right)^{np} \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) f^p(x) dx.$$

dir.

Hipotezde ifade edilen s, w, z ve $z^{\shortmid}$ fonksiyonları lokal bir $[0,X]$ bölgesinde verilmiş olmasına rağmen, X yerine $+\infty$ alındığında $[0,\infty)$ aralığında da lokal olarak sağlanır. Fakat hipotezde ifade edilen integraller yakınsak olmayabilir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $z(x)$, $[0,X]$ aralığında sürekli ve pozitif olduğundan üstten ve alttan pozitif sınırlıdır. Benzer şekilde $s_k(x)$ ve $w(x)$ de üstten ve alttan pozitif sınırlıdır. Dolayısıyla, $s_k(x)z^{\shortmid}(x)$ esas sınırlı ve $\phi(t) \in L^p([0,X])$ olduğu için $\widetilde{I}_k\phi(x)$ var ve $[0,X]$ aralığında süreklidir. Özel olarak, $\widetilde{I}_k\phi(x) \in L^p((0,X))$ olup negatif olmadığı açıktır. Böylece $\widetilde{F}_k(x)$ var ve $\widetilde{F}_k(x) \in L^p((0,X))$ olup negatif değildir.

Teorem 4.1 de q ile 0, $s(x)$ ile $s_k(x)$ ve $f(x)$ ile $\widetilde{F}_{k-1}(x)$ yer değiştirir ve daha sonra α ile α_k ve $F(x)$ ile $\widetilde{I}_k\widetilde{F}_{k-1}(x)$ yer değiştirilirse Teorem 4.1 in şartları sağlanacağından teorem şu hali alır:

$$\int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{I}_k \widetilde{F}_{k-1}(x) \right)^p dx \leq \left(\frac{p\alpha_k}{m-1} \right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_{k-1}(x) \right)^p dx. \tag{4.6}$$

Buradan,.

$$\widetilde{I}_k \phi(x) = \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x \frac{s_k(t) z^{\shortmid}(t)}{z(t)} \phi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq X$$

$$\widetilde{F}_k(x) = \widetilde{I}_k \widetilde{I}_{k-1} ... \widetilde{I}_1 f(x) \quad \widetilde{F}_0(x) = f(x),$$

oldukları dikkate alınırsa (4.6) eşitsizliğinden

$$\int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_k(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_{k-1}(x)\right)^p dx$$

yazılır. Bu son eşitsizlikten,

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_k(x)\right)^p dx &\leq \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_{k-1}(x)\right)^p dx \\
&= \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{I}_{k-1}\widetilde{F}_{k-2}(x)\right)^p dx \\
&\leq \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_{k-2}(x)\right)^p dx \\
&= \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{I}_{k-2}\widetilde{F}_{k-3}(x)\right)^p dx \\
&\leq \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-1}\right)^p \left(\frac{p\alpha_{k-2}}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_{k-3}(x)\right)^p dx \\
&\ldots \\
&\leq \left(\frac{p\alpha_k}{m-1}\right)^p \left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-1}\right)^p \ldots \left(\frac{p\alpha_1}{m-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) f^p(x) dx \\
&= \left(\frac{p}{m-1}\right)^{np} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) f^p(x) dx.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\widetilde{F}_n(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{m-1}\right)^{np} \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i\right)^p \int_0^X \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) f^p(x) dx.$$

olduğu görülür.

Teorem 4.4: *p, k, n, $s_k(x)$, $w(x)$ ve $z(x)$, Teorem 4.3 deki gibi tanımlansın. $\phi \in L^p((0,X))$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere,*

$$\bar{I}_k\phi(x) \quad = \quad \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x s_k(t) z^{\shortmid}(t) \phi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq X$$

olsun. Eğer $f(x) \in L^p((0,X))$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\bar{F}_k(x) = \bar{I}_k \bar{I}_{k-1} \ldots \bar{I}_1 f(x) \quad \bar{F}_0(x) = f(x), \quad m > (n-1)\,p + 1$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha_k} \le ess \inf_{0<x<X} \left\{ 1 + \frac{1}{m-(n-k)p-1} \frac{z(x)}{z'(x)} \left(p\frac{s'_k(x)}{s_k(x)} - \frac{w'(x)}{w(x)} \right) \right\}$$

olmak üzere,

$$\int_0^X \frac{z'(x)}{z^m(x)} w(x) \left(\bar{F}_n(x) \right)^p dx \le \left(\prod_{i=1}^n \frac{p\alpha_i}{m-(n-i)p-1} \right)^p \int_0^X \frac{z'(x)}{z^{m-np}(x)} w(x) f^p(x) dx.$$

dir.

Hipotezde ifade edilen $s,\ w,\ z$ ve z' fonksiyonları lokal bir $[0, X]$ bölgesinde verilmiş olmasına rağmen, X yerine $+\infty$ alındığında $[0, \infty)$ aralığında da lokal olarak sağlanır. Fakat hipotezde ifade edilen integraller yakınsak olmayabilir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $g(x) = z(x)^{-1} f(x)$, $L^p([0, X])$ ye ait ve negatif olmadığından

$$\begin{aligned} \bar{I}_k g(x) &= \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x \frac{s_k(t) z'(t)}{z(t)} z(t) g(t) dt \\ &= \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x \frac{s_k(t) z'(t)}{z(t)} z(t) z(t)^{-1} f(t) dt \\ &= \tilde{I}_k f(x) \end{aligned}$$

dir. Böylece Teorem 4.3 den $\bar{I}_k g(x)$ pozitif ve sürekli olup $\bar{I}_k g(x) \in L^p([0, X])$ dır. Benzer şekilde

$$\bar{F}_k(x) = \bar{I}_k \bar{F}_{k-1}(x) = \frac{1}{s_k(x)} \int_0^x \frac{s_k(t) z'(t)}{z(t)} z(t) \bar{F}_{k-1}(t) dt = \tilde{I}_k \left(z(x) \bar{F}_{k-1}(x) \right) \tag{4.7}$$

dir. $\bar{F}_0(x)$ negatif olmayan ve L^1 e ait bir fonksiyon ve $z(x)$ pozitif ve sürekli olduğundan, $\bar{F}_1(x)$ negatif olmayan sürekli ve $L^p([0, X])$ e ait bir fonksiyondur. Böylece tümevarım yöntemiyle her hangi bir k için $\bar{F}_k(x)$ negatif olmayan ve L^p ye ait olan bir fonksiyon olacaktır. Sonuç olarak Teorem 4.1 deki şartlar sağlanmış olacaktır. Bu teoremdeki m, $m-(n-k)p \ge m-(n-1)p > 1$ şartını sağlayan $m-(n-k)p$ ile yerdeğiştirilir, $q=0$ ve (4.7) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k)p}(x)} w(x)\left(\bar{F}_k(x)\right)^p dx \\
=&\int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m}(x)} w(x)\left(\tilde{I}_k z(x)\bar{F}_{k-1}(x)\right)^p dx \\
\leq&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k)p}(x)} w(x)\left(z(x)\bar{F}_{k-1}(x)\right)^p dx \\
=&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k+1)p}(x)} w(x)\left(\bar{F}_{k-1}(x)\right)^p dx \\
=&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k+1)p}(x)} w(x)\left(\tilde{I}_{k-1} z(x)\bar{F}_{k-2}(x)\right)^p dx \\
\leq&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p\left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-(n-k+1)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k+1)p}(x)} w(x)\left(z(x)\bar{F}_{k-2}(x)\right)^p dx \\
=&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p\left(\frac{p\alpha_{k-1}}{m-(n-k+1)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k+2)p}(x)} w(x)\left(\bar{F}_{k-2}(x)\right)^p dx \\
&\ldots \\
\leq&\left(\frac{p\alpha_k}{m-(n-k)p-1}\right)^p \ldots\left(\frac{p\alpha_1}{m-(n-1)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-np}(x)} w(x) f^p(x) dx \\
=&\left(\prod_{i=1}^n \frac{p\alpha_i}{m-(n-i)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-np}(x)} w(x) f^p(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-(n-k)p}(x)} w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx \;\leq\; \left(\prod_{i=1}^n \frac{p\alpha_i}{m-(n-i)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-np}(x)} w(x) f^p(x) dx$$

yazılır. Bu ise

$$\int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m}(x)} w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx \;\leq\; \left(\prod_{i=1}^n \frac{p\alpha_i}{m-(n-i)p-1}\right)^p \int_0^X \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-np}(x)} w(x) f^p(x) dx$$

demektir. Bu da aranan sonuçtur.

Teorem 4.5: $m<1,\ p\geq 1,\ q\geq 0,\ X>0,\ s(x),\ w(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları $[X,\infty)$ aralığında mutlak sürekli ve üstten ve alttan pozitif sınırlı olsun. Ayrıca

$z^{\shortmid}(x)$ de $[X, \infty)$ aralığında pozitif ve esas sınırlı olsun. Eğer $f(x) \in L^1 \cap L^p([X, \infty))$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$F(x) \;=\; \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty \frac{s(t) z^{\shortmid}(t)}{z(t)} f(t) dt$$

ve

$$0 < \;\frac{1}{\alpha}\; \leq \underset{X<x<\infty}{ess \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{1-m} \frac{z(x)}{z^{\shortmid}(x)} \left(\frac{w^{\shortmid}(x)}{w(x)} - (p+q) \frac{s^{\shortmid}(x)}{s(x)} \right) \right\},$$

ise

$$\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) F^{p+q}(x) dx \;\leq\; \left(\frac{(p+q)\alpha}{1-m} \right)^p \int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)} w(x) F^q(x) f^p(x) dx \qquad (4.8)$$

dır. Buradaki integraller yakınsaktır (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: (i) $x \geq X$ için $\frac{1}{s(x)}$ tanımlı olduğundan $F(x)$ de tanımlıdır. Dolayısıyla $\frac{s(t)}{z(t)}$ sınırlı, $z^{\shortmid}(t)$ esas sınırlı ve $f(t)$, (X, ∞) aralığında integrallenebilirdir. Böylece $F(x)$ de pozitif ve süreklidir.

Kabul edelim ki (ξ, ∞) aralığında $f(x) = 0$ olacak şekilde $\xi > X$ vardır.

$$\xi_0 = \inf \{ \xi > X : f(x) = 0, \text{ hhh } x > \xi \} \qquad (4.9)$$

olsun.

(ii) Kabul edelim ki $\xi_0 > X$ olsun. $\sigma = \inf \left\{ \frac{s(t)}{z(t)} : t > X \right\}$ olmak üzere

$$s(X)F(X) = s(X) \frac{1}{s(X)} \int_X^\infty \frac{s(t) z^{\shortmid}(t)}{z(t)} f(t) dt \geq \int_X^\infty \sigma z^{\shortmid}(t) f(t) dt = \sigma \int_X^\infty z^{\shortmid}(t) f(t) dt$$

$$s(X)F(X) \geq \int_X^\infty \sigma z^{\shortmid}(t) f(t) dt \geq \sigma \int_X^\infty z^{\shortmid}(t) f(t) dt$$

dir.

Eğer $\int_X^\infty z^{\shortmid}(t) f(t) dt$ integrali sıfır ise, (X, ∞) aralığında hhh $z^{\shortmid}(t) f(t) = 0$ dır. (X, ∞) aralığında hhh $z^{\shortmid}(t) > 0$ ve $f(t) = 0$ olduğundan (X, ξ_0) aralığında hhh $f(t) = 0$ olur. Bu da ξ_0 ın tanımıyla çelişir. Bu yüzden $\int_X^\infty z^{\shortmid}(t) f(t) dt > 0$ ve $s(X)F(X) > 0$ dır. Buradan da $F(X) > 0$ dır.

(iii) $x \longrightarrow \infty$ için $s(x)F(x) \longrightarrow 0$ ve $s(x)$ pozitif üstten sınırlı olduğundan,

$x \longrightarrow \infty$ için $F(x) \longrightarrow 0$ dır. Ayrıca $z(x)^{1-m}$ ve $w(x)$ üstten sınırlı olduğundan, $x \longrightarrow \infty$ için $z(x)^{1-m}w(x)F^{p+q}(x) \longrightarrow 0$ dır. Ancak (ii) yardımıyla $z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X) > 0$ olur. Dolayısıyla $Y \geq Y_0$ için

$$0 \leq z(Y)^{1-m}w(Y)F^{p+q}(Y) \leq z(X)^{1-m}w(X)F^{p+q}(X), \tag{4.10}$$

olacak şekilde $Y_0 > X$ vardır.

(iv) $Y \geq Y_0$ olsun. $\frac{1}{s(x)}$ ve $s(x)F(x)$, $[X, Y]$ aralığında mutlak sürekli olduğundan $F(x)$ de mutlak süreklidir. Böylece $w(x)F^{p+q}(x)$ ve $z(x)^{1-m}$, $[X, Y]$ aralığında mutlak süreklidir. Böylece kısmi integrasyon metodu ile

$$\begin{aligned}(1-m)\int_X^Y \tfrac{z'(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx &= \int_X^Y w(x)F^{p+q}(x)\tfrac{d}{dx}\left(z(x)^{1-m}\right)dx \\ &= \left[z(x)^{1-m}w(x)F^{p+q}(x)\right]\Big|_X^Y - \int_X^Y z(x)^{1-m}\tfrac{d}{dx}\left\{w(x)F^{p+q}(x)\right\}dx\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F'(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)}F(x) - \frac{z'(x)}{z(x)}f(x)$$

eşitliğini göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}&(1-m)\int_X^Y \tfrac{z'(x)}{z^m(x)}w(x)F^{p+q}(x)dx - \left[z(x)^{1-m}w(x)F^{p+q}(x)\right]\Big|_X^Y \qquad (4.11)\\ &= -\int_X^Y z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)F'(x)\right\}dx \\ &= -\int_X^Y z^{1-m}(x)\left\{w'(x)F^{p+q}(x) + (p+q)\,w(x)F^{p+q-1}(x)\right. \\ &\times \left.\left(\tfrac{-s'(x)}{s^2(x)}\int_0^x \tfrac{s(t)z'(t)}{z(x)}f(t)dt + \tfrac{1}{s(x)}\tfrac{s(x)z'(x)}{z(x)}f(x)\right)\right\}dx \\ &= -\int_X^Y \tfrac{w(x)}{z^{m-1}(x)}\left\{\tfrac{w'(x))}{w(x)}F^{p+q}(x) - (p+q)\,F^{p+q-1}(x)\left(\tfrac{s'(x)}{s(x)}F(x) + \tfrac{z'(x)}{z(x)}f(x)\right)\right\}dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (1-m)\int\limits_X^Y \frac{z^{\prime}(x)}{z^m(x)} w(x)F^{p+q}(x)dx - \left[z(x)^{1-m}w(x)F^{p+q}(x)\right]\Big|_X^Y \\
= & -\int\limits_X^Y \frac{w(x)}{z^{m-1}(x)}\left(\frac{w^{\prime}(x))}{w(x)} - (p+q)\frac{s^{\prime}(x)}{s(x)}\right)F^{p+q}(x)dx \qquad (4.12)\\
+ & \ (p+q)\int\limits_X^Y \frac{z^{\prime}(x)}{z^{m-1}(x)} w(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

F sürekli ve $f \in L^1$ olduğundan, (4.11) ve (4.12) ifadelerinde ki integraller vardır. Burada $W(x) = z^{\prime}(x)z^{-m}(x)w(x)$ dönüşümü yapıldığında

$$
\begin{aligned}
& -(1-m)\int\limits_X^Y W(x)\frac{z(x)}{z^{\prime}(x)}\frac{1}{1-m}\left(\frac{w^{\prime}(x))}{w(x)} - (p+q)\frac{s^{\prime}(x)}{s(x)}\right)F^{p+q}(x)dx \\
= & -(1-m)\int\limits_X^Y W(x)\left\{1 + \frac{1}{1-m}\frac{z(x)}{z^{\prime}(x)}\left(\frac{w^{\prime}(x))}{w(x)} - (p+q)\frac{s^{\prime}(x)}{s(x)}\right) - 1\right\}F^{p+q}(x)dx \\
\leq & -(1-m)\int\limits_X^Y W(x)\left\{\frac{1}{\alpha} - 1\right\}F^{p+q}(x)dx.
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.10) kullanılarak (4.11) ve (4.12) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
& (1-m)\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx \\
\leq & \ (1-m)\left\{1 - \frac{1}{\alpha}\right\}\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx + (p+q)\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx;
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece $p > 1$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$
\frac{(1-m)}{(p+q)\alpha}\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx \leq \int\limits_X^Y W(x)F^{p+q-1}(x)f(x)dx \qquad (4.13)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-m)}{(p+q)\alpha}\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx & = \int\limits_X^Y W(x)F^{p+q-\frac{p+q}{p}}(x)F^{\frac{q}{p}}(x)f(x)dx \\
& \leq \left(\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_X^Y W(x)F^q(x)f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\left(\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \neq 0$ ise

$$\frac{1-m}{(p+q)\alpha}\left(\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_X^Y W(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$\left(\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}dx\right)^{1-\frac{1}{p}} = 0$ ise (4.14) açıktır. Böylece $p > 1$ için (4.14) eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $p = 1$ için de (4.13) eşitsizliği sağlanır. Bunların sonucu olarak $p \geq 1$ ve $Y \geq Y_0$ için

$$\int\limits_X^Y W(x)F^{p+q}(x)dx \leq \left(\frac{(p+q)\alpha}{1-m}\right)^p \int\limits_X^Y W(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx \tag{4.15}$$

elde edilir. $Y \longrightarrow \infty$ için $p \geq 1$ ve $\xi_0 > X$ olduğundan (4.15) eşitsizliğinden (4.8) eşitsizliği yazılır. Hhh $x > \xi_0$ için $f(x) = 0$ olduğundan (4.14) eşitsizliğinin sağ tarafı Y nin sonlu değeri için limit değeri vardır. Böylece (4.8) eşitsizliğinin sağ tarafı yakınsak olup (4.14) eşitsizliğinin sol tarafı da yakınsak olur.

(v) $\xi = X$ ise hhh $x > X$ için $f(x) = 0$ dır. Sonuç olarak, her $x \geq X$ için $F(x) = 0$ olup (4.8) eşitsizliğinin her iki tarafının sıfır olduğu açıktır.

(vi) $\xi_0 = \infty$ olduğu duruma bakalım. Pozitif $n > X$ tamsayıları için

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq n \\ 0, & t > n \end{cases}$$

olsun. Aynı zamanda $x > X$ için

$$F_n(x) = \frac{1}{s(x)}\int\limits_x^\infty \frac{s(t)z^{'}(t)}{z(t)} f_n(t)dt\,,$$

olsun. Böylece $f_n(t)$, (i) den (iv) e kadar olan çözümü sağlar. Böylece (4.14) eşitsizliğinden

$$\int\limits_X^\infty W(x)F^{p+q}(x)dx \leq \left(\frac{(p+q)\alpha}{1-m}\right)^p \int\limits_X^\infty W(x)F^{q}(x)f^{p}(x)dx \tag{4.16}$$

yazılır ve bu integraller yakınsaktır. $n \longrightarrow \infty$ için $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dir. Buradan monoton yakınsaklık teoreminden $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ dir. Böylece $F_n^{p+q}(x) \longrightarrow F^{p+q}(x)$ ve $F_n^q(x) f_n^p(x) \longrightarrow F^q(x) f^p(x)$ dır. Tekrar monoton yakınsaklık teoreminden, (4.16) eşitsizliğinin her iki tarafı sırasıyla (4.8) eşitsizliğinin her iki tarafına dönüşür. $f \in L^p$ ve diğer fonksiyonlarda sınırlı olduğundan (4.8) eşitsizliği yakınsaktır.

Teorem 4.6: $m < 1$, $p + r \geq 1$, $q \geq 0$, $r > 0$, $X > 0$ ve s, w , z, $z^{'}$ ve F, Teorem 4.5 deki gibi tanımlanmış olsun. Eğer $f(x) \in L^1 \cap L^p\left((X, \infty)\right)$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$F(x) \quad = \quad \frac{1}{s(x)} \int_x^\infty \frac{s(t) z^{'}(t)}{z(t)} f(t) dt$$

ve

$$0 < \quad \frac{1}{\alpha} \quad \leq \underset{X<x<\infty}{ess \inf} \left\{ 1 + \frac{1}{1-m} \frac{z(x)}{z^{'}(x)} \left(\frac{w^{'}(x)}{w(x)} - (p+q+r) \frac{s^{'}(x)}{s(x)} \right) \right\},$$

ise

$$\int_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)} w(x) F^{p+q}(x) f^r(x) dx \quad \leq \quad \left(\frac{(p+q+r)\alpha}{1-m} \right)^p \int_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)} w(x) F^q(x) f^{p+r}(x) dx$$

dir ve bu integraller yakınsaktır (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $(0, X)$ ile $(0, \infty)$, $m - 1$ ile $1 - m$ yer değiştirir ve Teorem 4.2 nin ispatınıda kullandığımız Teorem 4.1 in yerine Teorem 4.5 i kullanılırsa bu teoremin ispatı Teoerm 4.2 nin ispatının benzeri olur.

Teorem 4.7: $m < 1$, $p \geq 1, X > 0$, $k = 1, 2, ..., n$ için $s_k(x)$, $w(x)$ ve $z(x)$ $[X, \infty)$ aralığında pozitif ve mutlak sürekli olsun. Ayrıca $\frac{1}{s_k(x)} \in L^1 \cap L^p\left((X, \infty)\right)$, $z^{'}(x)$ (X, ∞) aralığında pozitif ve esas sınırlı ve $\phi \in L^p\left((0, X)\right)$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\widetilde{J}_k \phi(x) \quad = \quad \frac{1}{s_k(x)} \int_x^\infty \frac{s_k(t) z^{'}(t)}{z(t)} \phi(t) dt, \quad x \geq X$$

olsun. Eğer $f(x) \in L^1 \cap L^p\left((X, \infty)\right)$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\widetilde{F}_k(x) = \widetilde{J}_k \widetilde{J}_{k-1} ... \widetilde{J}_1 f(x) \quad \widetilde{F}_0(x) = f(x)$$

ve

$$0< \quad \frac{1}{\alpha_k} \quad \leq \underset{X<x<\infty}{ess\ \inf}\left\{1+\frac{1}{1-m}\frac{z(x)}{z^{'}(x)}\left(\frac{w^{'}(x)}{w(x)}-p\frac{s_k^{'}(x)}{s_k(x)}\right)\right\}$$

ise

$$\int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\widetilde{F}_n(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{1-m}\right)^{np}\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^p \int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)f^p(x)dx.$$

dir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $s_k(x)\frac{z^{'}(x)}{z(x)}$ (X,∞) aralığındaki esa üst sınırı K_k olsun. $\frac{1}{s_k(x)}$ sınırlı ve ϕ integrallenebilir olduğundan, $\tilde{J}_k\phi(x)$ de $[X,\infty)$ aralığının her yerinde tanımlıdır. Ayrıca, $\frac{1}{s_k(x)}$, $[X,\infty)$ aralığında mutlak sürekli olduğundan $\tilde{J}_k\phi(x)$ de mutlak süreklidir. Bundan başka

$$\int\limits_X^\infty \tilde{J}_k\phi(x)\,dx \quad \leq \quad \int\limits_X^\infty \frac{dx}{s_k(x)}\int\limits_x^\infty K_k\phi(t)\,dt \quad = \quad K_k\int\limits_X^\infty \frac{dx}{s_k(x)}\int\limits_X^\infty \phi(t)\,dt \quad < \quad \infty$$

olduğundan $\tilde{J}_k\phi(x)$ (X,∞) aralığında pozitif ve integrallenebilirdir. Aynı zamanda integraller için Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_X^\infty \tilde{J}_k\phi(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad &\leq \quad \left(\int\limits_X^\infty \frac{dx}{s_k(x)^p}\left(\int\limits_x^\infty K_k\phi(t)\,dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \quad K_k\left(\int\limits_X^\infty \frac{dx}{s_k(x)^p}\left(\int\limits_x^\infty \phi(t)\,dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \quad K_k\int\limits_x^\infty \phi(t)\,dt\left(\int\limits_X^\infty \frac{dx}{s_k(x)^p}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad < \quad \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\tilde{J}_k\phi(x)\in L^1\cap L^p((X,\infty))$ dir. Bu sonuçların ard arda uygulanmasıyla, $\widetilde{F}_k(x)\in L^1\cap L^p((X,\infty))$ dir.

$q=0$ için Teorem 4.5 gereğince, $\widetilde{F}_k(x)=\tilde{J}_k\widetilde{F}_{k-1}(x)$ olduğundan

$$\int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\widetilde{F}_n(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \left(\frac{p\alpha_k}{1-m}\right)^p \int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)\widetilde{F}_{k-1}(x)^p dx$$

elde edilir. $k=1,2,...,n$ için tümevarım metodu kullanılarak

$$\int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\widetilde{F}_n(x)\right)^p dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{1-m}\right)^{np}\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^p \int\limits_X^\infty \frac{z^{'}(x)}{z^m(x)}w(x)f^p(x)dx$$

sonucu yazılır. Bu da Teorem 2.7 nin ispatını tamamlar.

Teorem 4.8: m, p, k, $s_k(x)$, $w(x)$, $z(x)$ ve X Theorem 4.7 deki gibi tanımlanmış olsun. $\phi \in L' \cap L^p((X,\infty))$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\bar{J}_k\phi(x) = \frac{1}{s_k(x)}\int_x^\infty s_k(t)z^{\shortmid}(t)\phi(t)dt, \; x \geq X$$

olsun. Eğer $f(x) \in L' \cap L^p((X,\infty))$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$\bar{F}_k(x) = \bar{J}_k\bar{J}_{k-1}...\bar{J}_1 f(x) \quad \bar{F}_0(x) = f(x),$$

ve

$$0 < \frac{1}{\alpha_k} \leq \underset{X<x<\infty}{ess\ \inf}\left\{1 + \frac{1}{1-m+(n-k)p}\frac{z(x)}{z^{\shortmid}(x)}\left(\frac{w^{\shortmid}(x)}{w(x)} - p\frac{s_k^{\shortmid}(x)}{s_k(x)}\right)\right\},$$

ise

$$\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx \leq \prod_{k=1}^n\left(\frac{p\alpha_k}{1-m+(n-k)p}\right)^p\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-np}(x)}w(x)f^p(x)dx.$$

dir (Hanjš, Love, Pečarić 2001).

İspat: $s_k(t)z^{\shortmid}(t)$ nin (X,∞) aralığındaki esas üst sınırı K_k olsun. Teorem 4.7 nin ispatında olduğu gibi $\bar{J}_k\phi(x) \in L' \cap L^p((X,\infty))$ ve pozitif tanımlıdır. Bunun bir uygulaması olarak $\bar{F}_k(x) \in L' \cap L^p((X,\infty))$ ve pozitif tanımlıdır. m ile $m-(n-k)p$, $F(x)$ ile $\bar{F}_k(x)$ ve $f(x)$ ile $z(x)\bar{F}_{k-1}(x)$ yer değiştirir ve $q=0$ için Teorem 4.5 gereğince

$$\bar{F}_k(x) = \bar{J}_k\bar{F}_{k-1}(x) = \frac{1}{s_k(x)}\int_x^\infty \frac{s_k(t)z^{\shortmid}(t)}{z(t)}z(t)\bar{F}_{k-1}(t)dt = \tilde{J}_k\left(z(x)\bar{F}_{k-1}(x)\right),$$

yazılır. Böylece Teorem 4.5 den

$$\begin{aligned}\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-(n-k)p}(x)}w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx &\leq \left(\frac{p\alpha_k}{1-m+(n-k)p}\right)^p\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-(n-k)p}(x)}w(x)\left(z(x)\bar{F}_{k-1}(x)\right)^p dx \\ &= \left(\frac{p\alpha_k}{1-m+(n-k)p}\right)^p\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-(n-k+1)p}(x)}w(x)\left(\bar{F}_{k-1}(x)\right)^p dx\end{aligned}$$

olur. $k = 1,2,...,n$ için tümevarım metodu kullanılarak

$$\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^m(x)}w(x)\left(\bar{F}_n(x)\right)^p dx \leq \prod_{k=1}^n\left(\frac{p\alpha_k}{1-m+(n-k)p}\right)^p\int_X^\infty \frac{z^{\shortmid}(x)}{z^{m-np}(x)}w(x)f^p(x)dx.$$

sonucu elde edilir. Bu da Teorem 4.8 in ispatını verir.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME İLE İLİŞKİLİ HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

1951 yılında B. M. Levitan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2p+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

denkleminin,

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{y=0} &= f(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün,

$$u(x,y) = T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(2p+1)}{2^{2p-1}\Gamma^2\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

şeklinde olduğunu vermiştir. Bu eşitlikte φ yerine $\pi-\varphi$ alınır ve Γ fonksiyonlarına ait,

$$\frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-1}}.\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}$$

özelliği kullanılırsa,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

yazılır. Burada, $y\equiv 1$ ve $p=v-\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$T^1 f(x) = C_v\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}\right)\sin^{2v-1}\theta d\theta$$

olacaktır. Burada $C_v=\dfrac{\Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(v)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ dir. Bu bölümde $T^1 f(x)$ fonksiyonu ile ilişkili (1.2) eşitsizliğine benzer Hardy tipli eşitsizlikleri inceliyeceğiz. Bu eşitsizlikler bilinen bazı sonuçların genelleştirilmesi olacaktır. Bu bölümdeki fonksiyonların ölçülebilir, lokal integrallenebilir ve eğer eşitsizliğin sağ tarafı varsa sol tarafının da var olduğu kabul edilecektir.

Teorem 5.1: $p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ v>0,\ r>2v+1,\ u(x)\geq 0$ ve hhh(hemen hemen her yerde) $\lambda>0$ değeri için

$$1+\frac{p(2v+1)}{r-2v-1}\geq\frac{1}{\lambda}>0$$

olsun. Bu şartlar altında, $a \in (0,\infty)$ için

$$F(x) := \frac{1}{x^{2\upsilon+1}} \int\limits_a^x T^1 u(t) t^{2\upsilon} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

olmak üzere her $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left[T^1 u(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx \tag{5.5}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: (5.5) eşitsizliğinin sol tarafında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx &= \tfrac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^p(b) + \int_a^b \tfrac{p(2\upsilon+1)}{-r+2\upsilon+1} x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &- \int_a^b \tfrac{p}{-r+2\upsilon+1} x^{-r} F^{p-1}(x)\, T^1 u(x)\, x^{2\upsilon} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $r > 2\upsilon + 1$ ve $F(b) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x) \left[1 + \tfrac{p(2\upsilon+1)}{r-2\upsilon-1}\right] x^{2\upsilon} dx &= \tfrac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^p(b) + \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} F^{p-1}(x)\, T^1 u(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &\leq \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} F^{p-1}(x)\, T^1 u(x)\, x^{2\upsilon} dx \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da hipotezde λ nın kabulünden,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x) \tfrac{1}{\lambda} x^{2\upsilon} dx &\leq \int_a^b x^{-r} F^p(x) \left[1 + \tfrac{p(2\upsilon+1)}{r-2\upsilon-1}\right] x^{2\upsilon} dx \\ &\leq \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b \left[x^{(-r+2\upsilon)\frac{1}{p}} T^1 u(x)\right] \left[x^{(-r+2\upsilon)\frac{1}{q}} F^{p-1}(x)\right] dx \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1} \left[\int_a^b x^{-r} \left[T^1 u(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left[T^1 u(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 5.2: $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \upsilon > 0,\ r > 2\upsilon + 1$, $u(x) \geq 0$ ve hhh $\lambda > 0$ değeri için

$$1 + \frac{p(2\upsilon+1)}{r - 2\upsilon - 1} \geq \frac{1}{\lambda} > 0$$

olsun. Bu şartlar altında,

$$F(x) := \frac{1}{x^{2\upsilon+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^x T^1 u(t) t^{2\upsilon} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

olmak üzere, $a \in (0,\infty)$ ve her $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx \quad \leq \quad \left(\frac{\lambda p}{r-2v-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left| T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p x^{2v} dx \tag{5.6}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: (5.6) eşitsizliğinin sol tarafında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx &= \frac{b^{-r+2v+1}}{-r+2v+1} F^p(b) + \frac{p(2v+1)}{r-2v-1} \int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx \\ &- \int_a^b \frac{p}{-r+2v+1} x^{-r} \left[T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right] F^{p-1}(x)\, x^{2v} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $r > 2v+1$ ve $F(b) \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x) \left[1 + \frac{p(2v+1)}{r-2v-1}\right] x^{2v} dx &= \frac{b^{-r+2v+1}}{-r+2v+1} F^p(b) \\ &+ \frac{p}{r-2v-1} \int_a^b x^{-r} \left[T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right] F^{p-1}(x)\, x^{2v} dx \\ &\leq \frac{p}{r-2v-1} \int_a^b x^{-r} \left[T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right] F^{p-1}(x)\, x^{2v} dx \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada hipotezde λ nın kabulünden,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^p(x) \frac{1}{\lambda} x^{2v} dx &\leq \int_a^b x^{-r} F^p(x) \left[1 + \frac{p(2v+1)}{r-2v-1}\right] x^{2v} dx \\ &\leq \frac{p}{r-2v-1} \int_a^b \left[\left(x^{-r+2v}\right)^{\frac{1}{p}} \left[T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right] \left[\left(x^{-r+2v}\right)^{\frac{1}{q}} F^{p-1}(x)\right] dx \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx \quad \leq \quad \frac{\lambda p}{r-2v-1} \left[\int_a^b x^{-r} \left| T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p x^{2v} dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2v} dx \quad \leq \quad \left(\frac{\lambda p}{r-2v-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left| T^1 u(x) - \frac{1}{2^{2v+1}} T^1 u\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p x^{2v} dx.$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 5.3: $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ v > 0,\ r > 2v+1,\ u(x) \geq 0$ ve hhh $\lambda > 0$ değeri için

$$1 + \frac{p(2v+1)}{r-2v-1} + \frac{p}{r-2v-1} x \frac{[T^1 u(x)]'}{[T^1 u(x)]} \geq \frac{1}{\lambda} > 0$$

olsun. Bu şartlar altında,

$$F(x) := \frac{1}{x^{2v+1}[Tu(x)]} \int_{\frac{x}{2}}^{x} T^1 u(t) T^1 v(t) t^{2v} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

olmak üzere $a \in (0,\infty)$ ve $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left[T^1 v(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx \tag{5.7}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: (5.7) eşitsizliğinin sol tarafında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx &= \tfrac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^p(b) - \tfrac{p(2\upsilon+1)}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &+ \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r+1} \tfrac{\left[T^1 u(x)\right]'}{T^1 u(x)} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &+ \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} \left[T^1 v(x)\right] F^{p-1}(x)\, x^{2\upsilon} dx.\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r > 2\upsilon + 1$, $F(b) \geq 0$ oldukları ve hipotezde λ nın kabulünden,

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{-r} F^p(x) \tfrac{1}{\lambda} x^{2\upsilon} dx &\leq \int_a^b x^{-r} F^p(x) \left[1 + \tfrac{p(2\upsilon+1)}{r-2\upsilon-1} - \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} x \tfrac{\left[T^1 u(x)\right]'}{T^1 u(x)}\right] x^{2\upsilon} dx \\ &= \tfrac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^p(b) + \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} F^{p-1}(x) \left[T^1 v(x)\right] x^{2\upsilon} dx \\ &\leq \tfrac{p}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} F^{p-1}(x) \left[T^1 v(x)\right] x^{2\upsilon} dx\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1} \left[\int_a^b x^{-r} \left[T^1 v(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b x^{-r} F^{(p-1)q}(x)\, x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_a^b x^{-r} F^p(x)\, x^{2\upsilon} dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{\lambda p}{r-2\upsilon-1}\right)^p \int_a^b x^{-r} \left[T^1 v(x)\right]^p x^{2\upsilon} dx.$$

dir. Bu da istenen sonuçtur.

Teorem 5.4: $p > q > 0$, $\alpha \geq 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\upsilon > 0$ ve $r > 2\upsilon + 1$ olsun. $T^1 u : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mutlak sürekli, $T^1 v : [0,\infty) \to [0,\infty)$ integrallenebilir ve hhh $\lambda > 0$ değeri için

$$1 + \frac{p}{q}\frac{2\upsilon}{r-2\upsilon-1} + \frac{p}{q}\frac{1}{r-2\upsilon-1}\alpha x \frac{\left[T^1 u(x)\right]'}{\left[T^1 u(x)\right]} \geq \frac{1}{\lambda} > 0$$

olsun. Bu durumda $a \in (0,\infty)$ için

$$F(x) := \frac{1}{x^{2\upsilon}[Tu(x)]^{\alpha}} \int_a^x \frac{T^1 u(t) T^1 v(t)}{t} t^{2\upsilon} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

olmak üzere, her $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2\upsilon} dx \leq \left(\frac{p}{q}\frac{\lambda}{r-2\upsilon-1}\right)^{\frac{p}{q}} \int_a^b x^{-r} \frac{\left[T^1 v(x)\right]^{\frac{p}{q}}}{\left[T^1 u(x)\right]^{(\alpha-1)\frac{p}{q}}} x^{2\upsilon} dx \tag{5.8}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: (5.8) eşitsizliğinin sol tarafında kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^{p}(x)\, x^{2\upsilon} dx &= \frac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^{\frac{p}{q}}(b) + \int_a^b \frac{p}{q}\frac{2\upsilon}{-r+2\upsilon+1} x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &+ \int_a^b \alpha \frac{p}{q}\frac{x^{-r+1}}{-r+2\upsilon+1} F^{\frac{p}{q}}(x) \frac{\left[T^1 u(x)\right]'}{T^1 u(x)} x^{2\upsilon} dx \\ &+ \int_a^b \frac{p}{q}\frac{x^{-r}}{-r+2\upsilon+1} \frac{T^1 v(x)}{\left[T^1 u(x)\right]^{\alpha-1}} F^{\frac{p}{q}-1}(x)\, x^{2\upsilon} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r > 2\upsilon + 1$, $F(b) \geq 0$ oldukları ve hipotezde λ nın kabulünden,

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x) \frac{1}{\lambda} x^{2\upsilon} dx &\leq \int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x) \left[1 + \frac{p}{q}\frac{2\upsilon}{r-2\upsilon-1} + \alpha\frac{p}{q}\frac{1}{r-2\upsilon-1} x \frac{\left[T^1 u(x)\right]'}{T^1 u(x)}\right] x^{2\upsilon} dx \\ &= \frac{b^{-r+2\upsilon+1}}{-r+2\upsilon+1} F^{\frac{p}{q}}(b) + \frac{p}{q}\frac{1}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} \frac{T^1 v(x)}{\left[T^1 u(x)\right]^{\alpha-1}} F^{\frac{p}{q}-1}(x)\, x^{2\upsilon} dx \\ &\leq \frac{p}{q}\frac{1}{r-2\upsilon-1} \int_a^b x^{-r} \frac{T^1 v(x)}{\left[T^1 u(x)\right]^{\alpha-1}} F^{\frac{p}{q}-1}(x)\, x^{2\upsilon} dx. \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizliğin sağ tarafına $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p}{p-q}$ kuvvetleri için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2\upsilon} dx \leq \frac{p}{q}\frac{\lambda}{r-2\upsilon-1} \left[\int_a^b x^{-r} \frac{\left[T^1 v(x)\right]^{\frac{p}{q}}}{\left[T^1 u(x)\right]^{(\alpha-1)\frac{p}{q}}} x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{q}{p}} \left[\int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2\upsilon} dx\right]^{\frac{p-q}{p}}$$

elde edilir.Böylece,

$$\int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2\upsilon} dx \leq \left(\frac{p}{q}\frac{\lambda}{r-2\upsilon-1}\right)^{\frac{p}{q}} \int_a^b x^{-r} \frac{\left[T v(x)\right]^{\frac{p}{q}}}{\left[T u(x)\right]^{(\alpha-1)\frac{p}{q}}} x^{2\upsilon} dx$$

olur.

Teorem 5.5: $p > q > 0$, $\alpha \geq 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\upsilon > 0$ ve $r < 2\upsilon + 1$ olsun. $T^1 u : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mutlak sürekli ve $T^1 v : [0,\infty) \to [0,\infty)$ integrallenbilir ve hhh $\lambda > 0$ değeri için

$$1 - \frac{p}{q}\frac{2\upsilon}{r-2\upsilon-1} - \frac{p}{q}\frac{1}{r-2\upsilon-1}\alpha x \frac{\left[T^1 u(x)\right]'}{\left[T^1 u(x)\right]} \geq \frac{1}{\lambda} > 0$$

olsun. $a \in (0,\infty)$ için

$$F(x) := \frac{1}{x^{2v}[T^1u(x)]^{\alpha}} \int\limits_a^x \frac{T^1u(t)T^1v(t)}{t} t^{2v} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

ve $b \geq a$ ise

$$\int_a^b x^{-r} F^{\frac{p}{q}}(x)\, x^{2v} dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{q}\frac{\lambda}{-r+2v+1}\right)^{\frac{p}{q}} \int_a^b x^{-r} \frac{\left[T^1v(x)\right]^{\frac{p}{q}}}{[T^1u(x)]^{(\alpha-1)\frac{p}{q}}} x^{2v} dx \tag{5.9}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 3.4. ün ispatına benzerdir.

Teorem 5.6: $p > q > 0$, $\alpha \geq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $v > 0$ ve $r > 2v + 1$ olsun. $T^1u : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mutlak sürekli, $T^1v : [0,\infty) \to [0,\infty)$ integrallenbilir ve hhh $\lambda > 0$ değeri için

$$1 + \frac{p}{q}\frac{2v}{r-2v-1} + \frac{p}{q}\frac{1}{r-2v-1}\alpha x \frac{[T^1u(x)]'}{[T^1u(x)]} \geq \frac{1}{\lambda} > 0$$

olsun. Bu durumda $a \in (0,\infty)$ için

$$F(x) := \frac{1}{x^{2v+1}[Tu(x)]^{\alpha}} \int\limits_a^x T^1u(t)T^1v(t)t^{2v} dt, \quad x \in (0,\infty)$$

ise $b \geq a$ için

$$\int_a^b x^{-r} F^{p}(x)\, x^{2v} dx \quad \leq \quad \left(\frac{p}{q}\frac{\lambda}{r-2v-1}\right)^{p} \int_a^b x^{-r} \frac{\left[T^1v(x)\right]^{p}}{[T^1u(x)]^{(\alpha-1)p}} x^{2v} dx \tag{5.10}$$

dir (Sarıkaya, Yıldırım, Sağlam 2006).

İspat: Bu Teoremin İspatı Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ün ispatına benzerdir.

KAYNAKLAR

Aliev, I. A. 1987. Izv. Acad. Sci. Azerbaijan No. 1 pp 7-13 (in Russian).

Askey, R. and Karlin, S. 1970. "Some elementary integrability theorems for special transformations", J. Anal. Math. 23, 27-38.

Askey, R. and Wainger, S. 1996. "Integrability theorem for Fourier Series", Duke Math. J. 33, 223-228.

Boas, B. P. Jr. 1970 "Some integral inequalities related to Hardy's inequality", J. Anal. Math. 23, 53-63.

Boas, B. P. Jr. and Imoru, C. O. 1975. "Elementary convolution inequalities", SIAM J. Math. Anal. 6, 457-471.

Chan, **L. Y. 1979.** "Some extensions of Hardy's inequality", Can. Math. Bull. 22, 165-169.

Chen, **Y. M. 1958. "**On a maximal theorem of Hardy and Littlewood and theorems concerning Fourier constants", Math. Z. 69, 418-422.

Copson, **E. T. 1928.** "Note on a series of positive terms", J. London Math. Soc. 3, 49-51.

Copson, E. T. 1975-1976. "Some integral inequalities", Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A 75, 157-164.

Gadjiev, A. D., Aliev I. A. 1988. "Riesz and Bessel Potentials Generated by The Generalized Shift Operators and Its Inversion. In Theory of Function and Approximation (Proc. Iv. Math. Conferences, Saratova), Priented in Saratov Univ. 1990, pp, 43-53.

Hardy, **G. H. 1920.** "Notes on a theorem of Hilbert", Math. Z. 6 (1920), 314-317.

Hardy, **G. H. 1928. "**Notes on some points in the integral calculus", Messenger Math. 57, 12-16.

Hardy, G.H., Pecariĉ, J.E. and Polya, G. 1934. "Inequalities", Cambridge Univ. Press, London-New York.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E.and Polya, G. 1952. "Inequalities," Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Imoru,C. O. 1977. "On some integral inequalities related to Hardy's", Can.

Math. Bull. 20, 307-312.

Izumi M.and Izumi, S. 1968. "On some inequalities for Fourier series", J. Anal. Math. 21, 277-291.

Kadlec, J. and Kufner, A. 1967. "Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions", II, Casopis Pest. Mat. 92, 16-28.

Levinson, **N. 1964.** "Generalizations of an inequality of Hardy", Duke Math. J. 31, 389- 394.

Levitan, B.M. 1952. "Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions", Uspeki, Mat., Nauka (N.S) 6, No:2(42), pp.102-143 (in Russian).

Levitan, B.M. 1951. Uspeki Math. Nauka (N. S) 6 No 2(42) 102-143 (in Russian); Math. Rev. 14 (1953) No. 1, pp. 163.

Levitan, B.M. **1962**. "Generelized Translation Operators and Some of Their Applications", Moscova (Translation 1964).

Love, **E. R. 1985.** "Generalisations of Hardy's integral inequality", Proc. Roy. Edinburgh Sect. A. 100, 237-262.

Mitrinoviĉ, **D. S. 1970.** "Analytic Inequalities," Springer-Verlag, New York.

Milovanoviĉ, G. V. and Rassias, Th. M. 1974. "Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros" World Scientific, Singapore.

Mitrinoviĉ, D. S. , Pecariĉ, J. E. , and Fink, A. M. 1991. "Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Oguntuase, J. A., Adeleke, E. O. 2002. "On Hardy's Integral Inequality", The Abdus Salam Internatıonal Centre For Theoretical Physics, 134.

Pachpatte, **B. G. 1987. "**On some variants of Hardy's inequality", J. Math. Anal. Appl. 124, 495-501.

Pachpatte, **B. G. 1987.** "On a new class of Hardy type inequalities", Proc. R. Soc. Edin. 105A, 265-274.

Pachpatte, **B. G.,** "On some extensions of Levinsons's generalizations of Hardy's inequality", Soochow J. Math. 13, 203-210.

Pachpatte, B. G. and Love, E. R. 1990. "On some new integral inequalities related to Hardy's integral inequality", J. Math. Analysis and Applications, 149, 17-25.

Pachpatte B.G. 1999. "On Some Generalizations of Hardy's Integral Inequality", Jour. Math. Anal. Appl. 234, no.1, 15-30.

Shum, **D. T. 1971.** "On integral inequalities related to Hardy's", Can. Math. Bull. 14, 225-230.

Yang, B., Zeng, Z. and Debnath, L. 1998. "On New Generalizations of Hardy's Integral Inequality", Jour. Math. Anal. Appl. 217, no.1, 321-327.

Yıldırım, H. 1995. "Riesz Potentials Generated by a Generalized shift operator".Ankara Uni. Graduate school of Natural and Applieds Sciences Department of Math.Ph. D. Thesis.

Yıldırım, H., Sarıkaya, M. Z., Sağlam, A. **2006**. "On Hardy Type Integral Inequality Associated With The Generalized Translation", Int. J. Contemp. Math. Sci., Vol. 1, no. 7, 333-340.

ÖZGEÇMİŞ

Aziz SAĞLAM

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Lise : 1997 Konya Ereğli İmam Hatip Lisesi

İş

Eylül 2005 Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü Araştırma Görevliliği

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Konya-Ereğli 29.06.1980

Cinsiyeti : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce

Yayınlar

1. On Hardy Type Integral Inequality Associated with The Generalized Tranlation, Int. J. Contemp. Math. Sci., Vol. 1, 2006, no. 7, 333-340.

2. On Combination of Generalized Riesz Potentials Associated with The Bessel Differantial Operator, Int. J. Math. and Analysis (Basımda, 2007).

3. Extension of Bilinear Fractional Integrals with Nonisotropic Rough Kernels (Yayına gönderildi).

4. On Sobolev Type Inequality For Riesz Potentials with Nonisotropic Kernels (Yayına gönderildi).