DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sait SÜMÜRKEN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2007

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİN SALINIMLILIK DAVRANIŞLARI

SAİT SÜMÜRKEN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. ÖZKAN ÖCALAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2007

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'ın danışmanlığında Sait SÜMÜRKEN tarafından hazırlanan "Diferensiyel ve Fark Denklemlerinin Salınımlılık Davranışları" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/05/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Yrd. Doç. Dr. Birol TOPÇU	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ	

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

DİFERENSİYEL VE FARK DENKLEMLERİN

SALINIMLILIK DAVRANIŞLARI

Sait SÜMÜRKEN

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN

Diferensiyel denklemler uzun süredir çalışılmaktadır ve birçok bilim dalında uygulaması mevcuttur. Ancak yakın geçmişte diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemler kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir. Bu nedenle diferensiyel ve fark denklemlerin çözümlerinin karakteristiği önemli bir yer tutmaktadır. Birinci bölümde diferensiyel ve fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yapılan çalışmaların tarihçesi ele alınmış, ikinci bölümde temel kavramlar ve gerekli teorem ve lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde

$$x'(t)+px(t-\tau)=0 \quad , \quad x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i)=0 \ , \ x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0$$

diferensiyel denklemlerinin salınımlılığı için şartlar incelenmiş, dördüncü bölümde ise bu denklemlerin ayrık benzerleri olan

$$a_{n+1}-a_n+pa_{n-k}=0 \ , \ a_{n+1}-a_n+\sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i}=0 \ , \ a_{n+1}-a_n+p_n a_{n-k}=0$$

fark denklemlerinin salınımlılığı incelenmiştir.

2007 , 55 sayfa

Anahtar Kelimeler : Diferensiyel denklem, Fark denklem, Salınımlılık

ABSTRACT

M. Sc Thesis

Sait SÜMÜRKEN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Professor Özkan ÖCALAN

Differential equations has been studied for a long time and its application is avaliable in many scientific branches. However discontinuity cases in differential equations are recently coped with using difference equations. So, the charecteristics of differential and difference equations' solutions have a significant importance. In the first chapter the history of those studies, oscillation of differencial and difference equations, have been dealt with and in the second chapter basic concepts, necessary theorems and lemmas have been explained. In the third chapter the conditions for oscillation of

$$x'(t)+px(t-\tau)=0 \quad , \quad x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i)=0 \;,\; x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0$$

differential equations have been examined and in the fourth chapter oscillation of

$$a_{n+1}-a_n+pa_{n-k}=0 \;,\; a_{n+1}-a_n+\sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i}=0 \;,\; a_{n+1}-a_n+p_n a_{n-k}=0$$

difference equations, which are the discrete analog of differencial equations, have been examined.

2007 , 55 sayfa

Key Words : Differential equation, Difference equation, Oscillation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Özkan ÖCALAN'a , Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili eşime teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Sait SÜMÜRKEN

AFYONKARAHİSAR , 2007

SİMGELER DİZİNİ

Δ	İleri fark operatörü
E	Öteleme (Kaydırma) operatörü
$\sum$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
$x'(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun türev fonksiyonu
$x''(t)$	$x(t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$\forall$	Her, tüm
$C[A,B]$	A kümesinden B kümesine tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi
e	Euler sayısı (2,71828182845…)
$\binom{n}{r}$	n nin r li kombinasyonu
$\cup$	Birleşim
ln	Doğal logaritma fonksiyonu
∞	Sonsuz
$\int$	Belirsiz integral
$\int_a^b$	Belirli İntegral
$\rightarrow$	Yaklaşır

1. GİRİŞ

Fark denklemleri ile zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinin doğal bir ifadesi olarak karşılaşılmaktadır, zamana bağlı değişkenlerin kullanıldığı olayların pek çoğu ayrık (kesikli) olduğundan bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluşturur. Daha da önemlisi, fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metotlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinde elde edilen pek çok sonuç hemen hemen bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Bununla birlikte, fark denklemler teorisi, karşılık gelen diferensiyel denklemler teorisinden daha zengindir. Örneğin, birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin benzeri olan bir fark denklemi "ghost" çözümlere veya kaotik yörüngelere sahip olabilmesine rağmen bu durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için söz konusudur. Sonuç olarak, fark denklemleri teorisinin ilginç olduğunu ve yakın gelecekte daha fazla öneme sahip olacağını gözlemleyebiliriz. Böylece, fark denklemleri teorisinin uygulamaları, kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, ekonomide borsa hareketlerinin izlenmesinde, tıp biliminde hücre hareketlerinin incelenmesinde ve bir çok bilim dalında kullanılmaktadır.

Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle, salınımlılığı ile ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır.

Diferensiyel denklemler iki yüz yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemler yüz yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde “doğada kopukluklar yoktur” yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıydı. Günümüzde diferensiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemler kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir.

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré'e kadar uzanmış, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklem üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemler ele alınmamıştı. 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferensiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887' de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerine çalışmış, Birkhoff ve Carmichael bu çalışmaları genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden selfadjoint doğrusal diferensiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denklemlerinin çözümünü ifade etmişlerdir. March Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denklemin asimptotik üstel çözümlerinin özeliklerini geliştirmiş; Hooker, Riccati denklemini geliştirmiş; Popenda, ikinci mertebeden fark denkleminin osilasyonlu ve osilasyonsuz durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur. Kaczorek, n'inci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denkleminin implicit formdaki çözümlerini vermiştir. Abromov, polinom katsayılı keyfi dereceli fark denklemlerin rasyonel çözümlerini vermiştir. Tuzik, değişken katsayılı konvolüsyon tipteki fark denklemlerin çözülebilirliğine değinmiştir. Ladas 1990 yılındaki çalışmasında

$$x_{n+1} - x_n + p x_{n-k} = 0,\ n = 0,1,2,... \tag{1.1}$$

$p \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$ lineer, otonom, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. Erbe ve Zhang 1989 yılındaki çalışmalarında

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0\ ,\ n = 0,1,2,... \tag{1.2}$$

$\{p_n\}$ negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere lineer, otonom olmayan, gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Yine 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. Diferensiyel denklemler ile bu denklemlerin ayrık benzerleri olan fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılıkları arasında ilgi çekici benzerlikler vardır. Ancak, bu her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin;

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \tag{1.3}$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi;

$$x(t) = x(t_0)\,exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Fakat (1.2) fark denklemi $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1}\left(1 - p_j\right)\right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm $\forall j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı çözüme sahiptir. Daha sonraki yıllarda, (1.2) denklemiyle ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bunlardan önemli olanları örneğin 1994 yılında Yu, Zhang ve Wang, 2001 yılında Tang ve Zhang çalışmalarında (1.2) fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriterler elde etmişlerdir. Ayrıca, 1993 yılında Yu, Zhang ve Qian, 2000 yılında Yu ve Tang (1.2) fark denkleminde p_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir.

Fark denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili çalışmalardan birisinde Ladas, Philos ve Sficas 1989 yılında,

$$A_{n+1} - A_n + p_n A_{n-k} = 0 \;,\; n = 0,1,2,\ldots \tag{1.4}$$

$\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizisi ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere, lineer gecikmeli fark denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılık durumunu incelemişlerdir. Bunun sonucunda (1.4) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

yeter şartını elde etmişlerdir.

Fark denklemlerindeki bu gelişmelere karşılık 1972 yılında Myslus, $p,\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{1.5}$$

diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için

$$p\tau > \frac{1}{e}$$

yeter şartını elde etmiş, 1983 yılında ise Ladas

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denkleminin gerçel köke sahip olmaması durumunda (1.5) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağını ispatlamıştır.

$p_i \in (0,\infty)$ $\tau_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0 \tag{1.6}$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau_i} = 0$$

karakteristik denkleminin gerçel köke sahip olmaması teoremi ifadesiyle 1975 yılında Tramov saygınlık kazanmıştır. Aynı sonuç 1983 yılında Ladas ve daha sonra Hunt ve Yorke tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremin ispatı 1989 yılında Györi tarafından açılmıştır.

1984 yılında Ladas ve Sficas ile Hunt ve Yorke $p_i \in \mathbb{R}$, τ_i negatif olmayan reel sayı, $i = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0 \tag{1.7}$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

koşulunu ispatlamışlardır.

1979 yılında Ladas ile Kaplatadze ve Chanturia 1982 yılındaki çalışmalarında

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \qquad t \geq t_0 \tag{1.8}$$

denkleminin salınımlılığı için

$$p \in C\left[\left[t_0, \infty\right), \mathbb{R}^+\right],\ \tau > 0$$

ve

$$\liminf_{t \to +\infty} \int_{t-\tau}^{\tau} p\left(s\right) ds > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, yüksek lisans tezimizde ihtiyaç duyacağımız, bilinen bazı tanım, teorem ve lemmaları vereceğiz. İlk önce fark analizi ve fark denklemleri tanıtılacak ve daha sonra fark denklemlerinin çözümleri hakkında bilgiler verilecektir. Son olarak fark denklemlerinin salınımlılığı hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi ve Genel Tanımlar

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, x_n fonksiyonu için öteleme (kaydırma) operatörü

$$Ex_n = x_{n+1}$$

ve ileri fark operatörü

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

şeklinde tanımlanır (Goldberg 1958, Elaydi 1999, Agarwal 2000).

$$E^k x_n = x_{n+k}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\Delta^k x_n$ i hesaplamak için I özdeşlik operatörü olmak üzere $\Delta = E - I$ ve $E = \Delta + I$ ifadelerini kullanabiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned}\Delta^k x_n &= (E-I)^k x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde ,

$$E^k x_n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x_n$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \tag{2.1}$$

ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) k̦'ıncı mertebeden bir fark denklemi denir. (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.2. Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.3. Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = b_n \tag{2.2}$$

formunda verilirse k̦'ıncı mertebeden olan (2.1) fark denklemine lineerdir denir.Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise, bu durumda (2.2) fark denklemine homogen olmayan, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Eğer (2.1) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^{k} a_{in} x_{n+i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde verilirse (2.3) fark denklemine homogen, lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 Lineer Fark Denklemleri Teorisi

Bu kısımda k̦'ıncı mertebeden lineer fark denklemleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremler verilecektir. k̦'ıncı mertebeden, homogen olmayan, lineer fark denklemini

$$x_{n+k} + p_{1n} x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn} x_n = g_n \tag{2.4}$$

formunda yazabiliriz. Burada p_{in} ve g_n , $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır.

Teorem 2.2.1. Aşağıdaki başlangıç değer problemi bir tek $\{x_n\}$ çözümüne sahiptir.

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n$$
$$x_{n_0} = a_0 \,, x_{n_0+1} = a_1 \,, \ldots, x_{n_o+k-1} = a_{k-1}$$

(Elaydi 1999).

Şimdi (2.4) fark denkleminin

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = 0 \tag{2.5}$$

şeklindeki lineer, homogen şeklini yazalım ve aşağıdaki tanımları hatırlatalım.

Tanım 2.2.1. Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sabitleri var ise $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir.

Eğer $\forall n \geq n_0$ için

$$a_1 f_{1n} + a_2 f_{2n} + \ldots + a_r f_{rn} = 0$$

eşitliği sadece $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $n \geq n_0$ için $f_{1n}, f_{2n}, \ldots, f_{rn}$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir. (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.2. (2.5) fark denkleminin k tane lineer bağımsız çözümlerinin kümesine, temel çözümler kümesi denir (Elaydi 1999, Lakshmikantham ve Trigiante 1988).

Tanım 2.2.3. $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$ (2.5) fark denkleminin temel çözümler kümesi olsun. Bu durumda a_i ler keyfi sabitler olmak üzere (2.5) fark denkleminin genel çözümü $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$ ile verilir (Elaydi 1999).

2.3 Lineer Homogen Sabit Katsayılı Fark Denklemlerinin Çözümleri

Bu kısımda ilk önce k ıncı mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen fark denkleminin çözümleri hakkında, daha sonrada k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan fark denkleminin çözümleri hakkında bilinen bazı tanım ve teoremleri hatırlatacağız. Şimdi aşağıdaki k ıncı mertebeden fark denklemini ele alalım.

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \ldots + p_k x_n = 0 \tag{2.6}$$

Burada p_i ler sabit ve $p_k \neq 0$ dır. (2.6) denkleminde λ^n i çözüm kabul edip denklemde yerine yazarsak

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0 \tag{2.7}$$

denklemi bulunur. Buna (2.7) fark denkleminin **karakteristik denklemi** ve λ lara ise (2.7) denkleminin **karakteristik kökleri** denir (Elaydi 1999) . (2.6) fark denkleminin çözümü için, karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak üç durum söz konusudur;

1.Durum: (2.7) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökleri reel ve birbirinden farklı ise, bu durumda $\left\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\right\}$ ifadesi (2.6) fark denkleminin temel çözümler kümesi olur ve (2.6) nın genel çözümü, a_i ler keyfi sabitler olmak üzere

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i^n \tag{2.8}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

2.Durum: (2.7) karakteristik denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ kökleri reel ve sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ katlı ise (2.6) denklemini

$$\left(E-\lambda_1\right)^{m_1} \left(E-\lambda_2\right)^{m_2} \ldots \left(E-\lambda_r\right)^{m_r} x_n = 0 \tag{2.9}$$

şeklinde yazabiliriz $\left(E-\lambda_i\right)^{m_i} x_n = 0$, $1 \leq i \leq r$ denkleminin temel çözümler kümesi $G_i = \left\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\right\}$ olduğundan (2.9) in temel çözümler kümesi $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$ olur ve (2.9) in genel çözümü

$$x_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \left(a_{i0} + a_{i1} n + a_{i2} n^2 + \ldots + a_{im_i-1} n^{m_i-1}\right) \tag{2.10}$$

şeklinde verilir (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

3.Durum: (2.7) karakteristik denklemi $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ kompleks köklerine ve $\lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \ldots \neq \lambda_k$ şeklindeki reel köklere sahip olsun. Bu durumda genel çözüm

$$x_n = c_1\left(\alpha + i\beta\right)^n + c_2\left(\alpha - i\beta\right)^n + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + \ldots + c_k\left(\lambda_k\right)^n$$

şeklinde olur.

Burada $\alpha = r\cos\theta$, $\beta = r\sin\theta$, $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = arctan\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ olmak üzere

$$x_n = r^n\left[c_1\cos\left(n\theta\right) + c_2\sin\left(n\theta\right)\right] + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + \ldots + c_k\left(\lambda_k\right)^n \tag{2.11}$$

olur ve (2.11) de

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\ , a_1 = c_1 + c_2\ , a_2 = i\left(c_1 - c_2\right)\ , \omega = arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

alarak genel çözümü

$$x_n = Ar^n\cos\left(n\theta - \omega\right) + c_3\left(\lambda_3\right)^n + c_4\left(\lambda_4\right)^n + \ldots + c_k\left(\lambda_k\right)^n \tag{2.12}$$

şeklinde yazalır. (Goldberg 1958, Elaydi 1999).

Şimdi k ıncı mertebeden lineer, homogen olmayan

$$x_{n+k} + p_{1n}x_{n+k-1} + \ldots + p_{kn}x_n = g_n \tag{2.13}$$

fark denklemini ele alalım. Burada $\forall n \geq n_0$ için $p_{kn} \neq 0$ dır. (2.13) fark denkleminin çözümü, homogen kısmın genel çözümü x_{cn} ve homogen olmayan kısmın bir özel çözümü x_{pn} olmak üzere $x_n = x_{cn} + x_{pn}$ ile verilir.

Teorem 2.3.1. (2.13) fark denkleminin genel çözümü

$$x_n = x_{pn} + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{in}$$

şeklinde verilir. Burada $\{x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn}\}$, (2.13) fark denkleminin homogen kısmının temel çözümler kümesidir (Elaydi 1999).

(2.13) fark denklemini belirsiz katsayılar metodu ile çözerken g_n in farklı durumlarında özel çözümler genel olarak aşağıdaki şekilde aranır;

a) $g_n = a^n$ ise $x_{pn} = c_1 a^n$

b) $g_n = n^k$ ise $x_{pn} = c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k$

c) $g_n = n^k a^n$ ise $x_{pn} = c_0 a^n + c_1 n a^n + \ldots + c_k n^k a^n$

d) $g_n = sin\, bn, cos\, bn$ ise $x_{pn} = c_1\, sin(bn) + c_2\, cos(bn)$

e) $g_n = a^n\, sin\, bn, a^n\, cos\, bn$ ise $x_{pn} = \left(c_1\, sin(bn) + c_2\, cos(bn)\right) a^n$

f) $g_n = a^n n^k\, sin\, bn, a^n n^k\, cos\, bn$ ise

$$x_{pn} = \left(c_0 + c_1 n + \ldots + c_k n^k\right) a^n\, sin(bn) + \left(d_0 + d_1 n + \ldots + d_k n^k\right) a^n\, cos(bn)$$

.

3. ANALİZ VE HESAPLAMALAR

3.1 DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI İÇİN ŞARTLAR

Bu bölümde birinci mertebeden lineer homogen diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için yeter şartları incelenecektir.

$p,\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{3.1}$$

birinci mertebeden sabit katsayılı homogen diferensiyel denklemini

$p_i \in \mathbb{R}$ ve τ_i negatif olmayan reel sayı olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0 \tag{3.2}$$

lineer otonom diferensiyel denklemini ve $t \geq t_0$ olmak üzere,

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0 \tag{3.3}$$

lineer otonom olmayan diferensiyel denklemi ele alınacaktır.

3.1.1 (3.1) DENKLEMİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞART

LEMMA 3.1.1 *:* $p,\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere (3.1) denklemini ele alalım. (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denklemi hiçbir reel köke sahip değildir (Ladas ,Sficas, Stavroulakis 1983).

TEOREM 3.1.1 : $p,\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere ,

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0$$

(3.1) lineer sabit katsayılı diferensiyel denklemini ele alalım. (3.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$p\tau > \frac{1}{e} \tag{3.4}$$

dir (Ladas, Sficas 1984).

İSPAT : (3.4) koşulundan p ve τ aynı işaretli olmalıdır.

Eğer $p > 0$ ve $\tau > 0$ ise $\lambda \to -\infty$ iken $e^{-\lambda\tau}$, λ dan daha hızlı büyüyeceğinden

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = \infty$$

ve $\lambda \to \infty$ iken $e^{-\lambda\tau} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = \infty$$

olur. $\lambda > 0$ için $F(\lambda) > 0$ olur. $F(\lambda)$ fonksiyonunun eksteremum değerini inceleyelim;

$$F'(\lambda) = 1 - p\tau e^{-\lambda\tau}$$

$$1 - p\tau e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{p\tau}$$

$$-\lambda\tau = ln(p\tau)^{-1}$$

$$\lambda = \frac{ln(p\tau)}{\tau}$$

elde edilir. $\lambda_o = \dfrac{ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada $F(\lambda)$ eksteremuma sahiptir.

$$F''(\lambda) = p\tau^2 e^{-\lambda\tau}$$

$p > 0$, $\tau^2 > 0$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $e^{-\lambda\tau} > 0$ olduğundan $F''(\lambda) > 0$ olur. O halde $\lambda_o = \dfrac{ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada F fonksiyonu minimuma sahiptir.

$$F(\lambda_o) = \frac{ln(p\tau)}{\tau} + pe^{\frac{-ln(p\tau)}{\tau}\tau} = \frac{ln(p\tau)}{\tau} + p\frac{1}{p\tau}$$

$$= \frac{ln(p\tau)}{\tau} + \frac{1}{\tau}$$

$$= \frac{ln\left(p\tau e\right)}{\tau}$$

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} F\left(\lambda\right) = \frac{ln\left(p\tau e\right)}{\tau}$$

dir.

$$p\tau > \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$p\tau e > 1$$

ve

$$ln\left(p\tau e\right) > 0$$

olur. $\tau > 0$ olduğundan

$$\frac{ln\left(p\tau e\right)}{\tau} > 0$$

elde edilir.

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F\left(\lambda\right) = \lim_{\lambda\to\infty} F\left(\lambda\right) = \infty$$

ve minimum noktasında fonksiyon sıfırdan büyük olduğundan $F\left(\lambda\right)$ reel köke sahip değildir.

$p < 0$ ve $\tau < 0$ ise, $\lambda \to -\infty$ iken $pe^{-\lambda\tau} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{\lambda\to-\infty} F\left(\lambda\right) = \lim_{\lambda\to-\infty}\left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = -\infty$$

ve $\lambda \to \infty$ iken $e^{-\lambda\tau}$, λ dan daha hızlı büyüyeceğinden

$$\lim_{\lambda\to\infty} F\left(\lambda\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = -\infty$$

olur.

$$F'\left(\lambda\right) = 1 - p\tau e^{-\lambda\tau}$$

ve $\lambda_o = \dfrac{ln\left(p\tau\right)}{\tau}$ apsisli noktada $F\left(\lambda\right)$ ekstremuma sahip idi. $p < 0$ olduğundan

$$F''\left(\lambda\right) = p\tau^2 e^{-\lambda\tau} < 0$$

dır.

O halde $\lambda_o = \dfrac{ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada F fonksiyonu maksimuma sahiptir.

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} F(\lambda) = \frac{ln(p\tau e)}{\tau}$$

dir. $p\tau > \dfrac{1}{e}$ ve $\tau < 0$ olduğundan

$$\frac{ln(p\tau e)}{\tau} < 0$$

dır. Maksimum noktasında fonksiyon sıfırdan küçük olduğundan $F(\lambda)$ reel köke sahip değildir.

Lemma (3.1.1) gereği (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

3.1.2 OTONOM DURUMDA SALINIMLILIK İÇİN YETER ŞART

$p_i \in \mathbb{R}$ ve τ_i negatif olmayan reel sayı olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0$$

(3.2) denklemini ele alalım. Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau_i} = 0$$

biçimindedir.

TEOREM 3.1.2 : Kabul edelim ki $i = 1,2,...,n$ için $p_i, \tau_i \geq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki şart (3.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şarttır.

(a) $$\sum_{i=1}^{n} p_i\tau_i > \frac{1}{e} \tag{3.5}$$

(b) $$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right) > \frac{1}{e} \tag{3.6}$$

(Ladas, Sficas 1984)

İSPAT : (a) (3.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i}$$

biçimindedir. $\lambda > 0$ için $p_i \geq 0$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $e^{-\lambda \tau_i} > 0$ olduğundan $F(\lambda) > 0$ dır.

Yani karakteristik denklemin reel kökü yoktur.

$\lambda < 0$ için;

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i}$$

$e^a \geq ae$ olduğundan

$$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i} \geq \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i (-\lambda \tau_i) e$$

$$\geq \lambda - \lambda e \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right] \qquad = -\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right)$$

$\lambda < 0$ olduğundan $-\lambda e > 0$ ve (3.5) koşulunda

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > 0$$

olur. O halde

$$-\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right) > 0$$

olur. Böylece $F(\lambda) > 0$ bulunur.

O halde (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) Aritmetik ortalama , geometrik ortalama eşitsizliğini ele alalım.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} p_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

$\lambda < 0$ için

$$F(\lambda)=\lambda+\sum_{i=1}^{n}p_ie^{-\lambda\tau_i}\geq\lambda+n.\left(\prod_{i=1}^{n}p_ie^{-\lambda\tau_i}\right)^{\frac{1}{n}}=\lambda+n.\left(\prod_{i=1}^{n}p_i\right)^{\frac{1}{n}}e^{-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i}$$

$$\geq\lambda+n.\left(\prod_{i=1}^{n}p_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(-e\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)$$

$$=-\lambda e\left[-\frac{1}{e}+\left(\prod_{i=1}^{n}p_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\right]$$

(3.6) şartından $F(\lambda)>0$ olur. O halde (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

3.1.3 OTONOM OLMAYAN DURUMDA SALINIMLILIK İÇİN YETER ŞART

$t\geq t_0$ olmak üzere,

$$x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0$$

(3.3) lineer otonom olmayan gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlılığı için yeter şartı inceleyelim.

TEOREM 3.1.3 : Kabul edelim ki

$$p\in C\left[[t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right],\ \ \tau>0$$

ve

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)\,ds>\frac{1}{e} \tag{3.7}$$

olsun. O halde (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas 1979).

İSPAT: Kabul edelim ki (3.3) denklemi pozitif bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. O halde $t\geq t^*$ için $t^*\geq t_0+\tau$ olacak şekilde bir t^* sayısı vardır,

öyle ki

$$x(t)>0,\ \ x(t-\tau)>0$$

dır. (3.3) denkleminden

$$x'(t) = -p(t)x(t-\tau)$$

yazılabilir.

$$p(t) > 0$$

ve

$$x(t-\tau) > 0$$

olduğundan

$$x'(t) \leq 0$$

olur. Yani fonksiyon o aralıkta azalandır ve

$$x(t-\tau) \geq x(t)$$

dir. Ayrıca (3.7) koşulundan öyle bir $c > 0$ sabiti ve $t_1 \geq t^*$ vardır. $t \geq t_1$ için

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)\,ds \geq c > \frac{1}{e}$$

dir.

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

denkleminden $t \geq t_1$ için

$$x(t-\tau) \geq x(t)$$

olduğundan

$$x'(t) + p(t)x(t) \leq 0$$

elde edilir. Buradan, $t \geq t_1$ için

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t) \leq 0$$

olur. Her iki tarafın $t-\tau$ dan t ye integralini alırsak,

$$\int_{t-\tau}^{t} \left[\frac{x'(s)}{x(s)} + p(s) \right] ds \leq \int_{t-\tau}^{t} 0\,ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)}\,ds + \int_{t-\tau}^{t} p(s)\,ds \leq 0$$

$$ln(x(s))\Big|_{t-\tau}^{t} + c \leq 0$$

$t \geq t_1 + \tau$ için

$$ln \frac{x(t)}{x(t-\tau)} + ln\, e^c \leq 0$$

$$ln\left(\frac{x(t)e^c}{x(t-\tau)}\right) \leq ln1$$

ve

$$\frac{x(t)e^c}{x(t-\tau)} \leq 1$$

olur. Buradan $t \geq t_1 + \tau$ için

$$e^c x(t) \leq x(t-\tau)$$

dir. $\forall c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq ec$ olduğundan $t \geq t_1 + \tau$ için

$$(ec)x(t) \leq x(t-\tau)$$

olur. Bu elde ettiğimizi (3.3) denkleminde yerine yazarsak

$$x'(t) + p(t)(ec)x(t) \leq 0$$

olur. Eşitsizliğin her bir terimini $x(t)$'ye bölersek

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t)(ec) \leq 0$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $t-\tau$ dan t ye integre edersek

$$\int_{t-\tau}^{t} \left(\frac{x'(s)}{x(s)} + p(s)(ec)\right) ds \leq \int_{t-\tau}^{t} 0ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds + (ec) \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \leq 0$$

$$ln(x(s))\Big|_{t-\tau}^{t} + (ec)c \leq 0$$

$$ln(x(t)) - ln(x(t-\tau)) + (ec^2) \leq 0$$

$$ln\left(\frac{x(t)e^{ec^2}}{x(t-\tau)}\right) \leq ln1$$

$$x(t)e^{ec^2} \leq x(t-\tau)$$

elde edilir.

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq e.c$ olduğundan $t \geq t_1 + 2\tau$ için

$$ec^2 x(t) e \leq x(t-\tau)$$

$$(ec)^2 x(t) \leq x(t-\tau)$$

bulunur. Şimdi bu ifadeyi tümevarım metoduyla genelleştirelim.

$t \geq t_1 + m\tau$ için

$$(ec)^m x(t) \leq x(t-\tau)$$

olsun. $t \geq t_1 + (m+1)\tau$ için

$$(ec)^m x(t) \leq x(t-\tau)$$

ifadesini (3.3) denkleminde yazalım.

$$x'(t) + p(t)(ec)^m x(t) \leq 0$$

eşitsizliğin her bir terimini $x(t)$'ye bölersek

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t)(ec)^m \leq 0$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafını $t-\tau$ dan t ye integre edersek

$$\int_{t-\tau}^{t} \left(\frac{x'(s)}{x(s)} + p(s)(ec)^m \right) ds \leq \int_{t-\tau}^{t} 0 ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds + (ec)^m \int_{t-\tau}^{t} p(s) ds \leq 0$$

$$ln(x(s))\Big|_{t-\tau}^{t} + (ec)^m c \leq 0$$

$$ln(x(t)) - ln(x(t-\tau)) + \left(e^m c^{m+1}\right) \leq 0$$

$$ln\left(\frac{x(t) e^{e^m c^{m+1}}}{x(t-\tau)} \right) \leq ln 1$$

$$x(t) e^{e^m c^{m+1}} \leq x(t-\tau)$$

elde edilir.

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $e^c \geq e.c$ olduğundan $t \geq t_1 + (m+1)\tau$ için

$$e^m c^{m+1} x(t) e \leq x(t-\tau)$$

$$(ec)^{m+1} x(t) \leq x(t-\tau)$$

elde edilir. O halde $c > \frac{1}{e}$ olduğundan $t \geq t_1 + k\tau$ için

$$(ec)^k x(t) \leq x(t-\tau) \tag{3.8}$$

olur. Öyle bir k seçelim ki

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 < (ec)^k \tag{3.9}$$

olsun. Şimdi bir $\tilde{t} \geq t_1 + k\tau$ belirleyelim. O halde öyle bir $\xi \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\tau)$ vardır ki

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)\,ds \geq \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,ds \geq \frac{c}{2} \tag{3.10}$$

dir.

(3.3) denklemini $[\tilde{t}, \xi]$ ve $[\xi, \tilde{t}+\tau]$ aralıklarında integre edersek;

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} \left(x'(s) + p(s)x(s-\tau)\right) ds = 0$$

$$x(s)\Big|_{\tilde{t}}^{\xi} + \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)\,ds = 0$$

$$x(\xi) - x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)\,ds = 0 \tag{3.11}$$

ve

$$x(\tilde{t}+\tau) - x(\xi) + \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)x(s-\tau)\,ds = 0 \tag{3.12}$$

bulunur.

(3.11) de $\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)\,ds$ integralinde $\tilde{t} \leq s \leq \xi$ ve $x(t)$ azalan olduğundan

$$x(\xi-\tau) \leq x(s-\tau)$$

olur ve

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)\,x(s-\tau)ds \ge \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)\,x(\xi-\tau)ds = x(\xi-\tau)\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)ds$$

elde edilir. Böylece (3.9) dan

$$-x(\tilde{t}) + x(\xi-\tau)\frac{c}{2} < 0 \qquad (3.13)$$

bulunur. Aynı şekilde (3.12) ifadesinde

$$\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,x(s-\tau)\,ds$$

integrali için $\xi \le s \le \tilde{t}+\tau$ olduğundan ve $x(t)$ azalan olduğundan

$$x((\tilde{t}+\tau)-\tau) \le x(s-\tau)$$

$$x(\tilde{t}) \le x(s-\tau)$$

olur. Buradan

$$\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,x(s-\tau)\,ds \ge \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,x(\tilde{t})\,ds = x(\tilde{t})\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,ds$$

elde edilir. Böylece (3.10) dan

$$-x(\xi) + x(\tilde{t})\frac{c}{2} < 0 \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$x(\xi) > x(\tilde{t})\frac{c}{2} > \left(\frac{c}{2}\right)^2 x(\xi-\tau)$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{x(\xi-\tau)}{x(\xi)} > \left(\frac{2}{c}\right)^2$$

elde edilir. (3.8) de

$$\frac{x(t-\tau)}{x(t)} \ge (ec)^k$$

idi. Böylece

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 > \frac{x(\xi-\tau)}{x(\xi)} \ge (ec)^k$$

bulunur. Bu da (3.9) ile çelişir.

O halde başlangıçtaki kabulümüz yanlıştır. Yani (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3.2 FARK DENKLEMLERİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN ŞARTLAR

Çalışmanın bu bölümde $p,\tau \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0$$

(3.1) birinci mertebeden sabit katsayılı homogen diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olan $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,... \tag{3.15}$$

fark denklemini, $p_i \in \mathbb{R}$ ve τ_i negatif olmayan reel sayı olmak üzere (3.2)

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0$$

lineer otonom diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olan $i = 1,2,...m$ için $p_i \in (0,\infty)$ ve $k_i \in \{0,1,2,...\}$ iken veya $i = 1,2,...m$ için $p_i \in (-\infty,0)$ ve $k_i \in \{...,-3,-2,-1\}$ iken

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0 \quad n = 0,1,2,... \tag{3.16}$$

fark denklemini ve $t \geq t_0$ olmak üzere, (3.3)

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

lineer otonom olmayan diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olan $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0 \tag{3.17}$$

fark denklemini ele alacağız

3.2.1 SABİT KATSAYILI FARK DENKLEMİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞART

TEOREM 3.2.1 : $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,...$$

(3.15) denklemini ele alalım. (3.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, ancak ve ancak aşağıdaki şartlardan biri sağlanır.

(a) $k = -1$ ve $p \leq -1$;

(b) $k = 0$ ve $p \geq 1$;

(c) $k \in \{..., -3, -2\} \cup \{1, 2, ...\}$ ve $p\dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$

(Ladas 1990)

İSPAT : (3.15) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda - 1 + p\lambda^{-k} = 0 \tag{3.18}$$

dir.

(a) $k = -1$ ve $p \leq -1$ ise (3.15) denklemi

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n+1} = 0$$

haline gelir. Buradan

$$a_{n+1}(1+p) = a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1+p}$$

ve $p \leq -1$ olduğundan $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ olur. Salınımlılık tanımı gereği (3.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) $k = 0$ ve $p \geq 1$ ise (3.15) denklemi

$$a_{n+1} - a_n + pa_n = 0$$

biçimine gelir. Buradan

$$a_{n+1} = a_n(1-p)$$

ve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1-p) \text{ elde edilir.}$$

$p \geq 1$ olduğundan $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ bulunur.

Salınımlılık tanımı gereği (3.15) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(c) $k \neq \{-1,0\}$ olduğunda

$$F'(\lambda) = 1 - kp\lambda^{-(k+1)} = 0$$

$$kp\lambda^{-(k+1)} = 1$$

$$\lambda^{k+1} = kp$$

$$\lambda_o = (kp)^{\frac{1}{k+1}}$$

olur.

$$F''(\lambda) = k(k+1)p\lambda^{-(k+2)}$$

$$F''(\lambda_o) = k(k+1)p(kp)^{-\left(\frac{k+2}{k+1}\right)} > 0$$

olur. O halde $\lambda_o = (kp)^{\frac{1}{k+1}}$ noktasında $F(\lambda)$ minimuma sahiptir.

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F(\lambda) = \infty \qquad \lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \infty \text{ dur.}$$

(3.15) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için $F(\lambda_0) > 0$ olmalıdır.

$$F(\lambda_0) = \lambda_0 - 1 + p\lambda_0^{-k} = \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{\lambda_0} + p\lambda_0^{-(k+1)}\right]$$

$$= \lambda_0 \left[1 - \frac{1}{\lambda_0} + p\frac{1}{kp}\right]$$

$$= \lambda_0 \left[1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{\lambda_0}\right]$$

$F(\lambda_0) > 0$ dır ancak ve ancak

$$1 + \frac{1}{k} > \frac{1}{\lambda_0}$$

Buradan $\lambda_0 > \frac{k}{k+1}$ ve $\lambda_0^{k+1} = kp$ olduğundan

$$kp = \lambda_0^{k+1} > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$kp > \frac{k^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

$$p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

fark denkleminin salınımlılığı için

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denkleminin ayrık benzeri olarak bakılabilir.

Burada $p > 0$, $\tau > 0$ ve $p\tau > \frac{1}{e}$ idi.

$$a_{n+1} - a_n + pa_{n-k} = 0$$

denkleminin salınımlılığı için de

$$p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$$

şartı vardır. Buradan

$$pk > \frac{k^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}$$

$$pk > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$pk > \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

elde edilir.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$pk > \frac{1}{e}$$

elde edilir.

3.2.2 (3.16) DENKLEMİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞART

Bu bölümde

$$i = 1,2,...m \text{ için } p_i \in (0,\infty) \text{ ve } k_i \in \{0,1,2,...\} \tag{3.19}$$

veya

$$i = 1,2,...m \text{ için } p_i \in (-\infty,0) \text{ ve } k_i \in \{...,-3,-2,-1\} \tag{3.20}$$

iken

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0 \qquad n = 0,1,2,...$$

(3.16) fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeterli şartlar elde edeceğiz.

TEOREM 3.2.2 : Kabul edelim ki (3.19) veya (3.20) şartlarından biri sağlansın ve varsayalım ki

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1 \tag{3.21}$$

olsun. O halde (3.16) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe, Zhang 1989).

İSPAT: (3.16) fark denklemine ait

$$F(\lambda) = \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda^{-k_i} = 0 \tag{3.22}$$

karakteristik denkleminin hiçbir pozitif köke sahip olmadığını göstermek bu denkleminin her çözümünün salınımlılığı için yeterlidir.

İlk olarak (3.19) sağlansın. O halde (3.22) denklemi $[1,\infty)$ aralığında köke sahip değildir. $i = 1,2,...,m$ için

$$\inf_{0<\lambda<1}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)=1$$

iken

$$\min_{0<\lambda<1}\left(\frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda}\right)=\frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{\,k_i}}$$

dır. Gerçekten;

$$f(\lambda)=\frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda}$$

ise

$$f'(\lambda)=\frac{-k_i.\lambda^{-(k_i+1)}.(1-\lambda)+\lambda^{-k_i}}{(1-\lambda)^2}$$
$$=\frac{-k_i\lambda^{-(k_i-1)}+\lambda^{-k_i}(k_i+1)}{(1-\lambda)^2}$$

$f'(\lambda)=0$ için

$$\frac{\lambda^{-k_i}\left(-(1-\lambda)k_i.\lambda^{-1}+1\right)}{(1-\lambda)^2}=0$$

$$\lambda^{-k_i}\neq 0 \text{ ve } (1-\lambda)^2\neq 0$$

olduğundan

$$-k_i\lambda^{-1}+k_i+1=0$$
$$\lambda=\frac{k_i}{k_i+1}$$

bulunur.

$$f''(\lambda)=\frac{\left(k_i(k_i+1)\lambda^{-(k_i+2)}-k_i(k_i+1)\lambda^{-(k_i+1)}\right)(1-\lambda)^2+2(1-\lambda)\left(-k_i\lambda^{-(k_i+1)}+\lambda^{-k_i}(k_i+1)\right)}{(1-\lambda)^4}$$

$$f''(\lambda_0)=\frac{k_i(k_i+1)\left[\lambda_0^{-(k_i+2)}-\lambda_0^{-(k_i+1)}\right](1-\lambda_0)^2+0}{(1-\lambda_0)^4}$$

$$k_i(k_i+1)>0 \quad , \; (1-\lambda_0)^2>0$$

olduğundan

$$\lambda_0^{-(k_i+2)} - \lambda_0^{-(k_i+1)} = \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+2} - \left(\frac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i+1} > 0$$

elde edilir. O halde $f''(\lambda_0) > 0$ olduğundan $\lambda_0 = \dfrac{k_i}{k_i+1}$ apsisli noktada $f(\lambda)$ minimuma sahiptir.

$$f(\lambda_0) = \frac{\left(\dfrac{k_i}{k_i+1}\right)^{-k_i}}{\left(1-\dfrac{k_i}{k_i+1}\right)} = \frac{\left(\dfrac{k_i+1}{k_i}\right)^{k_i}}{\dfrac{1}{k_i+1}} = \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{(k_i)^{k_i}}$$

dir. Buradan $0 < \lambda < 1$ için

$$F(\lambda) = (1-\lambda)\left(-1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\lambda^{-k_i}}{1-\lambda}\right) \geq (1-\lambda)\left(-1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{\,k_i}}\right)$$

ve (3.21) ten $F(\lambda) > 0$ elde edilir. Yani karakteristik denklemin pozitif kökü yoktur. O halde (3.16) fark denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Şimdi kabul edelim ki

$i = 1,2,...m$ için $p_i \in (-\infty, 0)$ ve $k_i \in \{..., -3, -2, -1\}$

sağlansın. O halde (3.16) denklemi $(0,1]$ aralığında köke sahip değildir.

$i = 1,2,...m$ için

$$\inf_{\lambda>1}\left(\frac{\lambda^{-k_i}}{\lambda-1}\right) = -\frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{\,k_i}}$$

Buradan $\lambda > 1$ için

$$F(\lambda) = (\lambda-1)\left(1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\lambda^{-k_i}}{\lambda-1}\right) \leq (\lambda-1)\left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{\,k_i}}\right)$$

dir. Böylece $F(\lambda) < 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t-\tau_i) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemin salınımlılığı için

$$a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{m} p_i a_{n-k_i} = 0$$

denkleminin ayrık benzeri olarak bakılabilir.

Diferensiyel denklemimizde $p_i \in \mathbb{R}$ ve τ_i negatif olmayan reel sayı ve

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

idi. Fark denklemimizin salınımlılığı için yeter şartımız ise

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1$$

biçiminde idi. Buradan

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i+1}} > 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(\frac{k_i + 1}{k_i} \right)^{k_i+1} > 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(1 + \frac{1}{k_i} \right)^{k_i+1} > 1$$

elde edilir.

$$\lim_{k_i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k_i} \right)^{k_i+1} = e$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i e > \sum_{i=1}^{m} p_i k_i \left(\frac{k_i + 1}{k_i} \right)^{k_i+1} > 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i > \frac{1}{e}$$

bulunur.

TEOREM 3.2.3 : p_i ler pozitif reel sayı ve $i=1,2,...,m$ olmak üzere k_i ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$x_{n+1}-x_n+\sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i}=0 \quad n=0,1,2,... \tag{3.23}$$

fark denklemini ele alalım. (3.23) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart

$0\le A_i \le 1$, $i=1,...,m$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = 1 \tag{3.24}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{k_i} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{1/(k_i+1)} > 1 \tag{3.25}$$

şartlarını sağlayan A_i sabitlerinin varlığıdır. (Jaros, Stavroulakis 1994).

İSPAT: Kabul edelim ki (3.24) ve (3.25) şartlarını sağlayan A_i $i=1,2,...,m$ sabitleri olsun. (3.23) denkleminin karakteristik denkleminin pozitif köke sahip olmadığını ispatlamak yeterlidir. Bunun için $i=1,2,...,m$ ve $\lambda>0$ olmak üzere $f_i(\lambda)=A_i\lambda+p_i\lambda^{-k_i}$ alalım.

$$f_i{}'(\lambda)=A_i-k_i p_i \lambda^{-k_i-1}$$

$f_i{}'(\lambda)=0$ için

$$\lambda^{-k_i-1}=\frac{A_i}{k_i p_i}$$

$$\lambda=\left(\frac{p_i k_i}{A_i}\right)^{1/(k_i+1)}$$

Eğer $A_i \ne 0$ ise

$$\lambda_i=\left(\frac{p_i k_i}{A_i}\right)^{1/(k_i+1)}$$

yazılarak her bir $f_i(\lambda)$ minimize edilebilir.

$A_j = 0$ iken eğer $k_j \neq 0$ ise p_i ler pozitif reel sayı ve $\lambda > 0$ olduğundan

$$f_j(\lambda) > 0$$

ve eğer $k_j = 0$ ise

$$f_j(\lambda) \equiv p_j$$

olur.

$$p_i \lambda^{-k_i} = f_i(\lambda) - A_i \lambda$$

$$\lambda = \left(\frac{p_i k_i}{A_i} \right)^{1/(k_i+1)}$$

için $f(\lambda)$ nın minimum değeri

$$f_i(\lambda) = A_i \left(\frac{p_i k_i}{A_i} \right)^{1/(k_i+1)} + p_i \left(\frac{p_i k_i}{A_i} \right)^{-\frac{k_i}{k_i+1}}$$

$$= A_i \left(\frac{p_i k_i}{A_i} \right)^{1/(k_i+1)} + p_i \left(\frac{A_i}{p_i k_i} \right)^{\frac{k_i}{k_i+1}}$$

$$= A_i \frac{p_i^{1/(k_i+1)} k_i^{1/(k_i+1)}}{A_i^{1/(k_i+1)}} + p_i \frac{A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}}}{p_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} k_i^{\frac{k_i}{k_i+1}}}$$

$$= A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} p_i^{1/(k_i+1)} k_i^{1/(k_i+1)} + A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} p_i^{1/(k_i+1)} k_i^{-\frac{k_i}{k_i+1}}$$

$$= A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} p_i^{1/(k_i+1)} k_i^{1/(k_i+1)} \left(1 + k_i^{-1}\right)$$

$$= A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} p_i^{1/(k_i+1)} k_i^{1/(k_i+1)} \left(\frac{k_i + 1}{k_i} \right)$$

$$= A_i^{\frac{k_i}{k_i+1}} p_i^{1/(k_i+1)} \frac{(k_i + 1)}{k_i^{\frac{k_i}{k_i+1}}}$$

$$= \left[A_i p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} \right]^{1/(k_i+1)}$$

olur. Böylece (3.24) de $\sum_{i=1}^{m} A_i = 1$ olduğundan ve (3.25) den

$$\begin{aligned}
\lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda^{-k_i} &= \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\lambda) - A_i \lambda \right) \\
&= \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda) - \sum_{i=1}^{m} A_i \lambda \\
&= \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda) - \lambda \sum_{i=1}^{m} A_i \\
&= \lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda) - \lambda \\
&= -1 + \sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda) \\
&\geq -1 + \sum_{i=1}^{m} \left[A_i p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} \right]^{1/(k_i+1)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

olur. Tüm $\lambda > 0$ için karakteristik denklemin pozitif kökü yoktur. O halde (3.23) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

LEMMA 3.2.1 : (3.23) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{m} p_i k_i \lambda^{-k_i-1} = 1 \qquad (3.26)$$

denkleminin bir tek pozitif kökü olan λ_0 ın

$$\lambda_0 - 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_0^{-k_i} > 0 \qquad (3.27)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır (Jaros, Stavroulakis 1984).

Şimdi (3.23) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu düşünelim. Lemma (3.2.1) gereği (3.26) denkleminin bir tek pozitif kökü olan λ_0 (3.27) eşitsizliğini sağlamalıdır.

$$A_i = p_i k_i \lambda_0^{-k_i-1} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

yazarsak (3.26) dan (3.24) şartı sağlanır. (3.25) de

$$\sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{k_i} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{1/(k_i+1)} = \sum_{i=1}^{m}\left[\left(p_i k_i \lambda_0^{-k_i-1}\right)^{k_i} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{1/(k_i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[p_i^{k_i}.k_i^{k_i}.\lambda_0^{-(k_i+1)k_i} p_i \frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{1/(k_i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[p_i^{k_i+1}\lambda_0^{-(k_i+1)k_i}(k_i+1)^{k_i+1}\right]^{1/(k_i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i (k_i+1)\lambda_0^{-k_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i k_i \lambda_0^{-k_i} + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_0^{-k_i}$$

$$= \lambda_0 \sum_{i=1}^{m} p_i k_i \lambda_0^{-k_i-1} + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_0^{-k_i}$$

$$= \lambda_0 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda_0^{-k_i}$$

(3.27) den

$$> \lambda_0 + 1 - \lambda_0 = 1$$

olur. Böylece (3.25) şartı da sağlanmış ve ispat tamamlanmış olur.

3.2.3 (3.17) DENKLEMİNİN SALINIMLILIĞI İÇİN YETER ŞART

Bu kısımda $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0$$

(3.17) fark denkleminin çözümünün salınımlılığı için yeter şartı inceleyeceğiz.

TEOREM 3.2.4 : Kabul edelim ki

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > 0 \text{ ve } \limsup_{n\to\infty} p_n > 1 - c \qquad (3.28)$$

olsun. O halde

(a) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \le 0$ (3.29)

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip değildir.

(b) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \ge 0$ (3.30)

eşitsizliği hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (3.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe, Zhang 1989).

İSPAT : (a) Kabul edelim ki $n \ge N_1$ için $y = \{y_n\}, \{y_n\} > 0$ (3.29) denkleminin bir pozitif çözümü olsun.

$\varepsilon > 0,\ 0 < \varepsilon < c \quad ve\ n \ge N_2\ \ için\ p_n \ge c - \varepsilon > 0$ olacak şekilde N_2 seçelim.

$$N = \max\{N_1 + k, N_2\}$$

olsun. (3.29) dan

$$y_{n+1} - y_n \le -p_n y_{n-k}$$

ve

$$p_n > 0 \ \ ve \ \ y_{n-k} > 0$$

olduğundan

$$-p_n y_{n-k} < 0$$

bulunur. O halde

$$y_{n+1} - y_n \le 0$$

olur, yani $\{y_n\}$ artmayan bir dizidir. $n \ge N$ için $\{y_n\}$ artmayan olduğundan (3.17) den

$$y_{n+1} - y_n \le -p_n y_{n-k}$$

$$y_n - y_{n+1} \ge p_n y_{n-k}$$

$$y_n \ge p_n y_{n-k}$$

$$p_n \ge c - \varepsilon$$

olduğundan

$$y_n \ge (c - \varepsilon) y_{n-k}$$

ve

$$y_{n-k} \ge y_{n-1}$$

olduğundan

$$y_n \geq (c-\varepsilon) y_{n-1}$$

olur. Diğer taraftan $n \geq N$ için

$$0 \geq y_{n+1} - y_n + p_{n-k} \geq y_{n+1} - y_n + p_n y_n$$

$$0 \geq y_{n+1} + y_n \left(p_n - 1 \right) \text{ dir.}$$

$$y_n \geq \left(c - \varepsilon \right) y_{n-1}$$

olduğundan

$$y_{n+1} \geq \left(c - \varepsilon \right) y_n$$

bulunur. Buradan $n \geq N$ için

$$0 \geq \left(c - \varepsilon \right) y_n + y_n \left(p_n - 1 \right)$$

$$0 \geq y_n \left(p_n - 1 + c - \varepsilon \right)$$

elde edilir. $\{ y_n \} > 0$ olduğundan

$$p_n - 1 + c - \varepsilon \leq 0 \quad \text{ ve } \quad p_n \leq 1 - c + \varepsilon$$

dur. Böylece

$$\limsup_{n \to \infty} p_n \leq 1 - c + \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan

$$\limsup_{n \to \infty} p_n \leq 1 - c$$

elde edilir. Bu (3.28) ile çelişir. O halde (3.29) eşitsizliğinin hiçbir pozitif çözümü yoktur.

(b) $\{ z_n \} = \{ -y_n \}$ alınarak

$$-z_{n+1} + z_n - p_n z_{n-k} \geq 0$$

yazılır. Eşitsizlik düzenlenirse

$$z_{n+1} - z_n + p_n z_{n-k} \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin hiçbir pozitif çözüme sahip olmadığını biliyoruz. O halde (3.30) eşitsizliği hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (a) ve (b) den (3.17) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

TEOREM 3.2.5 : $p_n > 0$ ve k negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} = 0$$

(3.17) denklemini ele alalım. Kabul edelim ki

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \equiv c > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.31}$$

olsun. O halde

(a) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \leq 0$ eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip değildir.

(b) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \geq 0$ eşitsizliği hiçbir negatif çözüme sahip değildir.

(c) (3.17) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe, Zhang 1989).

İSPAT : (a) şıkkını ispat etmek için çelişki olsun diye

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-k} \leq 0$$

eşitsizliğinin $n \geq N_1$ için $y = \{y_n\}$,$\{y_n\} > 0$ pozitif çözümü olduğunu kabul edelim.

$$r_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

olsun. (3.29) eşitsizliğini y_n'e bölelim.

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} - 1 + p_n \frac{y_{n-k}}{y_n} \leq 0$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{r_n}$$

olduğundan

$$\frac{1}{r_n} \leq 1 - p_n \frac{y_{n-k}}{y_n}$$

bulunur ve

$$\frac{y_{n-k}}{y_n} = \frac{y_{n-k}}{y_{n-k+1}} \cdot \frac{y_{n-k+1}}{y_{n-k+2}} \cdots \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{y_n}$$

yazılabilir. O halde

$$\frac{1}{r_n} \leq 1 - p_n . \frac{y_{n-k}}{y_{n-k+1}} . \frac{y_{n-k+1}}{y_{n-k+2}} ... \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} . \frac{y_{n-1}}{y_n}$$

$$r_n^{-1} \leq 1 - p_n . r_{n-k} . r_{n-k+1} ... r_{n-2} . r_{n-1} \tag{3.32}$$

olur. (3.31) den $n \geq N_2$ için $p_n > 0$ dır. $N = \max\{N_1 + k, N_2\}$ alalım. $n \geq N$ için $\{y_n\}$ artmayandır.

$$r_n = \frac{y_n}{y_{n+1}}$$

olduğundan $r_n \geq 1$ dir.

$$\liminf_{n\to\infty} r_n = l$$

alalım.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{r_n} = \frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty} r_n} = \frac{1}{l}$$

olur.

$$r_n^{-1} \leq 1 - p_n . r_{n-k} . r_{n-k+1} ... r_{n-2} . r_{n-1}$$

ifadesinde her iki tarafın limit supremumu alınırsa

$$\limsup_{n\to\infty} r_n^{-1} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(1 - p_n . r_{n-k} . r_{n-k+1} ... r_{n-2} . r_{n-1}\right)$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(-p_n\right) = -\liminf_{n\to\infty} p_n$$

olduğundan

$$\frac{1}{l} \leq 1 + \limsup_{n\to\infty} \left(-p_n . r_{n-k} . r_{n-k+1} ... r_{n-2} . r_{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{l} \leq 1 - \liminf_{n\to\infty} \left(p_n . r_{n-k} . r_{n-k+1} ... r_{n-2} . r_{n-1}\right)$$

$$\frac{1}{l} \leq 1 - \left[\liminf_{n\to\infty} p_n \liminf_{n\to\infty} r_{n-k} \liminf_{n\to\infty} r_{n-k+1} ... \liminf_{n\to\infty} r_{n-1}\right]$$

$$\frac{1}{l} \leq 1 - \left[c . \underbrace{l . l ... l}_{k \tan e}\right]$$

olduğundan

$$\frac{1}{l} \leq 1 - cl^k$$

$$cl^k \leq 1 - \frac{1}{l}$$

$$c \leq \frac{l-1}{l^{k+1}} \equiv h(l) \qquad (3.33)$$

elde edilir.

$$h'(l) = \frac{l^{k+1} - (k+1).l^k (l-1)}{\left(l^{k+1}\right)^2} = 0$$

$$l^k \left(l - (k+1)(l-1)\right) = 0$$

$$l - (k+1)(l-1) = 0$$

$$l - kl + k - l + 1 = 0$$

$$kl = k+1$$

$$l = \frac{k+1}{k}$$

$l_0 = \dfrac{k+1}{k}$ için fonksiyonun ekstremum noktası vardır.

$$h''(l) = \frac{\left[(k+1)l^k - (k+1)\left(k.l^{k-1}(l-1) + l^k\right)\right]\left(l^{k+1}\right)^2 - 2(k+1)l^{2k+1}.\left[l^{k+1} - (k+1).l^k(l-1)\right]}{\left(l^{k+1}\right)^4}$$

$$h''(l_0) = \frac{(k+1)l_0^{\,k} - (k+1)\left(k.l_0^{\,k-1}(l_0-1) + l_0^{\,k}\right)}{\left(l_0^{\,k+1}\right)^2} = \frac{(k+1)l_0^{\,k}\left[1 - k + kl_0^{-2} - 1\right]}{\left(l_0^{\,k+1}\right)^2}$$

$$(k+1)l_0^{\,k} \geq 0$$

$$\left(l_0^{\,k+1}\right)^2 \geq 0$$

olduğundan

$$k\left(l_0^{-2} - 1\right) = k\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - 1\right]$$

bulunur.

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 < 1$$

olduğundan

$$k\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - 1\right] < 0$$

dır. Yani

$$h"(l_0) < 0$$

O halde l_0 noktasında *h* fonksiyonunun maksimumu vardır.

$$h(l_0) = \frac{\frac{k+1}{k} - 1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

dır.

$$\max_{l \geq 1} h(l) = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

ise (3.33) den

$$c \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

elde edilir. Bu da (3.31) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmıştır. O halde (3.29) eşitsizliğinin pozitif çözümü yoktur.

(3.31) de $k = 0$ ise (3.17) denklemi

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_n = 0 \tag{3.34}$$

şeklini alır. Bu

$$y'(t) + p(t)\,y(t) = 0 \tag{3.35}$$

denkleminin ayrık benzeridir. (3.35) den

$$\frac{y'(t)}{y(t)} + p(t) = 0$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -p(t)$$

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \int -p(t)\,dt$$

$$\ln\left|y(t)\right| = -\int p(t)\,dt$$

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} > 0$$

Açıktır ki (3.35) denkleminin tüm çözümleri pozitif olduğundan salınımlı değildir. Ancak (3.31) den eğer

$$\liminf_{n\to\infty} p_n > 1$$

ise (3.34) ifadesi salınımlıdır.

Bir sonraki sonuç (3.31) koşulunun açık olduğunu gösterir. Aslında $n \geq 0$ için eğer

$$p_n = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

ise (3.17) denklemi

$$y_{n+1} - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} y_{n-k} = 0 \tag{3.36}$$

şeklini alır ve

$$y_N = d > 0$$

ile ve $k = N, N+1, \ldots$ için

$$y_{m+1} = \frac{k}{(k+1)} y_m$$

çözümdür. Bu çözüm pozitiftir. O halde $\{y_n\}$ (3.36) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür. (3.36) denkleminde

$$y_{m+1} = \frac{k}{k+1} y_m$$

ve

$$y_{n-k} = \frac{y_{n-k}}{y_{n-k-1}} \cdot \frac{y_{n-k-1}}{y_{n-k-2}} \cdots \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{y_n} \cdot y_n$$

yazılırsa

$$\frac{k}{k+1}y_n - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}.\frac{y_{n-k}}{y_{n-k-1}}.\frac{y_{n-k-1}}{y_{n-k-2}}...\frac{y_{n-2}}{y_{n-1}}.\frac{y_{n-1}}{y_n}.y_n = 0$$

olur.

$$\frac{y_m}{y_{m+1}} = \frac{k+1}{k}$$

olduğundan

$$\frac{k}{k+1}y_n - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}.\frac{k+1}{k}.\frac{k+1}{k}...\frac{k+1}{k}.\frac{k+1}{k}y_n = 0$$

$$\frac{k}{k+1}y_n - y_n + \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k y_n = 0$$

$$y_n\left[\frac{k}{k+1} - 1 + \frac{1}{k+1}\right] = 0$$

$$0 = 0$$

bulunur. Yani

$$y_{m+1} = \frac{k}{(k+1)}y_m$$

(3.36) denklemini sağlar, o halde bir çözümdür ve bu çözüm pozitiftir. O halde (3.36) denkleminin çözümleri salınımlı değildir.

TEOREM 3.2.6 : Kabul edelim ki $p_n \geq 0$ ve

$$\sup p_n < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.37}$$

olsun. O halde (3.17) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Erbe, Zhang 1989) .

İSPAT :

$$r_n^{-1} = 1 - p_n r_{n-k} ... r_{n-1} \tag{3.38}$$

denkleminin pozitif çözüme sahip olduğunu gösterelim. Bunun için

$$s_{N-k} = ... = s_{N-1} = q = \frac{k+1}{k} > 1 \tag{3.39}$$

ve

$$s_N = \left(1 - p_N s_{N-k} \ldots s_{N-1}\right)^{-1} > 1 \tag{3.40}$$

tanımlayalım.

$$\sup p_N < \frac{k^k}{\left(k+1\right)^{k+1}}$$

ve $p_N \geq 0$ olduğundan

$$0 \leq p_N < 1$$

dir. O halde

$$s_N = \frac{1}{1 - p_N q^k} > \frac{1}{1 - p_N} > 1$$

$$s_N = \frac{1}{1 - p_N . q^k} < \frac{1}{1 - \sup p_N q^k} = \frac{1}{1 - \dfrac{k^k}{\left(k+1\right)^{k+1}} . \dfrac{\left(k+1\right)^k}{k^k}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} = q$$

$$s_N < q$$

bulunur. Şimdi

$$s_{N+1} = \left(1 - p_{N+1} s_{N+1-k} \ldots s_N\right)^{-1} \tag{3.41}$$

tanımlayalım.

$$s_{N+1} = \frac{1}{1 - p_{N+1} q^{k-1} s_N} < \frac{1}{1 - p_{N+1} q^{k-1} q} < \frac{1}{1 - \sup p_{N+1} q^k} = q$$

O halde

$$1 < s_{N+1} < q$$

bulunur. $k = 1, 2, \ldots$ için $1 < s_{N+k} < q$ olduğunu gösterelim.

$k = 1$ için $1 < s_{N+1} < q$ dur.

$k = m$ için $1 < s_{N+m} < q$ olduğunu kabul edelim.

$k = m + 1$ için

$$s_{N+m+1} = \frac{1}{1 - p_{N+m+1} s_{N+m+1-k} \ldots s_{N+m}} < \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} q^{k-1} s_{N+m}}$$

ve $s_{N+m} < q$ olduğundan

$$s_{N+m+1} < \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} q^{k-1} q} = \frac{1}{1 - \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} q^k} = q$$

O halde tüm $k = 1, 2, \ldots$ için

$$1 < s_{N+k} < q$$

olur. $n \geq N$ için $\{s_n\}$ dizisi (3.38) denkleminin bir çözümüdür.

Sonra ,

$$y_N = 1, \quad y_{N+1} = \frac{y_N}{s_N}$$

tanımlanırsa ve böyle devam edilirse $\{y_n\}$ dizisi (3.17) denklemini sağlayan pozitif bir çözüm olur.

Şimdi $\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayılar dizisi ve k pozitif tamsayı olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı için Erbe ve Zang'ın sonucundan daha iyi olan 1989 yılında incelenmiş Ladas'ın sonucunu verelim.

TEOREM 3.2.7 : $\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayılar dizisi ve k pozitif tamsayı olmak üzere

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{3.42}$$

denklemini ele alalım.

Kabul edelim ki $\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayılar dizisi ve k pozitif tamsayı olsun. O halde

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.43}$$

(3.42) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için yeter koşuldur. (Ladas, Philos ve Sficas 1989).

İSPAT : Çelişki için kabul edelim ki (3.42) denklemi salınımlı olmayan bir $\{a_n\}$ çözümüne sahip olsun. $\{a_n\}$ i pozitif terimli alabiliriz. O halde

$$a_{n+1} - a_n = -p_n a_{n-k} \leq 0$$

olur.

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

olduğundan $\{a_n\}$ pozitif sayıların azalan dizisi olur.

$$a_n \leq a_{n-k}$$

olduğundan (3.42) denkleminden

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_n \leq 0$$

veya

$$p_n \leq 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \tag{3.44}$$

olur.

$$\alpha = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \tag{3.45}$$

alalım. Böylece (3.43) den açıktır öyle bir β sabiti seçebiliriz ki yeterince büyük n ler için

$$\alpha < \beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \tag{3.46}$$

olur. Buradan ve (3.44) den yeterince büyük n ler için

$$\beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) \tag{3.47}$$

yazılabilir. (3.47) eşitsizliği ve aritmetik orta - geometrik orta eşitsizliği kullanılarak yeterince büyük n ler için

$$\beta \leq \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)=1-\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)\leq 1-\left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{\frac{1}{k}}=1-\left(\frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}}.\frac{a_{n-k+2}}{a_{n-k+1}}...\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$=1-\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)$$

bulunur. Buradan

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}}\leq 1-\beta \tag{3.48}$$

yeterince büyük n ler için elde edilir. $\{a_n\}$ pozitif terimli dizi olduğundan

$$0<\beta<1$$

olur. Şimdi α (3.45) de tanımlanmış pozitif sabit olmak üzere

$$\max_{0\leq\lambda\leq 1}\left[(1-\lambda)\lambda^{\frac{1}{k}}\right]=\frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}}=\alpha^{\frac{1}{k}}$$

dır. Gerçekten

$$f(\lambda)=(1-\lambda)\lambda^{1/k}$$

olsun.

$$f'(\lambda)=-\lambda^{1/k}+\frac{1}{k}\lambda^{\frac{1}{k}-1}(1-\lambda)$$

$$=\lambda^{1/k}\left(-1+\frac{1}{k\lambda}(1-\lambda)\right)=0$$

$$\frac{1}{k\lambda}(1-\lambda)=1$$

$$\frac{1}{k\lambda}=\frac{1}{k}+1$$

$$\lambda=\frac{1}{k+1}$$

$$f''(\lambda)=-\frac{1}{k}\lambda^{\frac{1}{k}-1}+\frac{1-k}{k^2}\lambda^{\frac{1}{k}-2}(1-\lambda)-\frac{1}{k}\lambda^{\frac{1}{k}-1}$$

$$f''\left(\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}-1}\left[-k+(1-k)(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)-k\right]$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}-1}\left[-2k+(1-k).k\right]$$

$$=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}-1}\left[-k-k^2\right]<0$$

$f''(\lambda)<0$ olduğundan $\lambda=\dfrac{1}{k+1}$ apsisli noktada $f(\lambda)$ maksimuma sahiptir.

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1/k}$$

$$=\left(\frac{k}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k+1}\right)^{1/k}=\frac{k}{(k+1)^{1+\frac{1}{k}}}$$

olur. Bu nedenle $0<\lambda\leq 1$ için

$$1-\lambda\leq\alpha^{1/k}\lambda^{-1/k}$$

olur ve

$$0<\beta<1$$

olduğundan

$$1-\beta\leq\alpha^{1/k}\beta^{-1/k}$$

yazılabilir. Ayrıca (3.48) den yeterince büyük n ler için

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{1/k}\leq 1-\beta\leq\alpha^{1/k}\beta^{-1/k}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{1/k}\leq\alpha^{1/k}\beta^{-1/k}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)\leq\alpha\beta^{-1}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}a_n\leq a_{n-k} \qquad (3.49)$$

elde edilir. (3.49) eşitsizliğini (3.42) denkleminde kullanarak yeterince büyük argümanlar için

$$a_{n+1} - a_n + p_n \frac{\beta}{\alpha} a_n \leq 0$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her terimi a_n'e bölünürse

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 + p_n \frac{\beta}{\alpha} \leq 0$$

elde edilir. Buradan

$$p_n \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

olur. Her iki tarafın $n-k$'dan $n-1$'e kadar toplamını alır ve $\frac{1}{k}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} . \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \leq \frac{1}{k} \left(k - \sum_{i=n-k}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i}\right)$$

(3.46) dan

$$\frac{\beta}{\alpha} \beta \leq 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

olur. Aritmetik orta – geometrik orta eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \left(\prod_{i=n-k}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{\frac{1}{k}}$$

yazılabilir.

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \left(\frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k}} . \frac{a_{n-k+2}}{a_{n-k+1}} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha} \leq 1 - \left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1 - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

$$1-\beta \leq \alpha^{1/k}\beta^{-1/k}$$

olduğundan yeterince büyük n ler için

$$1-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right) \leq \alpha^{1/k}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{-1/k}$$

olur. Buradan

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \alpha^{1/k}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{-1/k}$$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-k}}\right) \leq \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)$$

ve böylece

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 a_n \leq a_{n-k} \tag{3.50}$$

elde edilir. Tümevarımla her $m = 1,2,...$ için öyle bir n_m tamsayısı vardır ki $n \geq n_m$ için

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m a_n \leq a_{n-k} \tag{3.51}$$

olur. Daha sonra (3.46) dan yeterince büyük n ler için

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \geq k.\beta$$

elde edilir. Böylece yeterince büyük n ler için

$$\sum_{i=n-k}^{n} p_i \geq M \tag{3.52}$$

öyle ki

$$M = k\beta > 0$$

dır. Öyle bir m seçelim ki

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m > \left(\frac{2}{M}\right)^2 \tag{3.53}$$

olsun. Böylece yeterince büyük n ler için $n \geq n_0$ olmak üzere (3.51), (3.53) de seçilen özel m için sağlanır ve (3.46) ve (3.51) de sağlanır. Ayrıca $\{a_n\}$ $n \geq n_0$ için artandır.

(3.51) den $n \geq n_0 + k$ için $n - k \leq n^* \leq n$ olacak şekilde bir n^* tamsayısı vardır öyle ki

$$\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i \geq \frac{M}{2}$$

ve

$$\sum_{i=n^*}^{n} p_i \geq \frac{M}{2}$$

dir. (3.42) denkleminden ve $\{a_n\}$ dizisinin azalanlık özeliğinden

$$a_{n^*+1} - a_{n-k} = \sum_{i=n-k}^{n^*} (a_{i+1} - a_i)$$

$$= -\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i a_{i-k} \leq -\left(\sum_{i=n-k}^{n^*} p_i \right) a_{n^*-k}$$

$$\leq -\frac{M}{2} a_{n^*-k}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{M}{2} a_{n^*-k} \leq a_{n-k} \tag{3.54}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$a_{n+1} - a_{n^*} = \sum_{i=n^*}^{n} (a_{i+1} - a_i)$$

$$= -\sum_{i=n^*}^{n} p_i a_{i-k} \le -\left(\sum_{i=n^*}^{n} p_i\right) a_{n-k}$$

$$\le -\frac{M}{2} a_{n-k}$$

ve buradan

$$\frac{M}{2} a_{n-k} \le a_{n^*} \tag{3.55}$$

bulunur. (3.51) de

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \le \frac{a_{n^*-k}}{a_{n^*}} \le \left(\frac{2}{M}\right)^2$$

olur. Bu da (3.53) ile çelişir. Bu çelişki başlangıçtaki kabulümüzden kaynaklanmaktadır. O halde (3.42) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

$p \in C\left[\left[t_0, \infty\right), \mathbb{R}^+\right]$, $\tau > 0$ olmak üzere

$$x'(t) + p(t)\, x(t-\tau) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemin salınımlılığı için

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0$$

fark denkleminin ayrık benzeri olarak bakabiliriz.

$$x'(t) + p(t)\, x(t-\tau) = 0$$

denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek şart

$$\liminf_{t \to +\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)\, ds > \frac{1}{e}$$

idi.

$$a_{n+1} - a_n + p_n a_{n-k} = 0$$

fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek şart

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

Burada

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{1}{e}$$

olduğundan

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right] > \frac{1}{e}$$

biçiminde yazabiliriz.

p_n in limitinin olması durumunda bu sonuç (3.31) şartı ile (3.43) şartları denktir.

4. KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., 2000, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York

Arino, O., Györi, I., and Jawhari, A. 1984. Oscillation criteria in delay equations. Journal of Differential Equations 53, 115-23.

Elaydi, S. 1999. An introduction to difference equations. Springer-Verlag,Newyork. 52

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations. Differential and Integral Equations, 2; 300-309.

Goldberg, S. 1958. Introduction to difference equations. Newyork.

Györi, I. and Ladas, G. 1989. Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments. Differential and Integral Equations 2, 123-31

Györi, I. and Ladas, G. 1991. Oscillation theory of delay differential equations. Clarendon press. ,Oxford.

Hooker, J. W., Man Kam Kwong, and Patula, W. T. 1987. Oscilltory second order linear difference equations and Riccati equations. SIAM Journal on Applied Mathematics 19, 54-63.

Jaros, J. and Stavroulakis, I. P. ,1994. Necessary and sufficient conditions for oscillations of difference equations with several delays. Utilitas Mathematica 45 ; 187-195.

Koplatadze, R. G. And Chanturia, T. A. 1982. On the oscillatory and monotone solutions of the first order differential equations with deviating arguments. Journal of Differential Equations 18, 1463-5.

Ladas, G. , Philos, Ch. G. and Sficas, Y. G. 1989. Sharp condition for the oscillation of delay difference equations. Journal of Applied Mathematics and Simulation, 2; 101-112.

Ladas, G. 1979. Sharp conditions for oscillations caused by delays. Applicable Analysis 9. 93-8.

Ladas, G. 1990. Explicit conditions for the oscillation of difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 153;276-287

Ladas, G. And Sficas, Y. G. 1984. Oscillations of delay differential equations with positive and negative coefficients. Proccedings of the International Conference on Qualitative Theory of Differential Equations. University of Alberta, June 18-20, 1984, pp. 232-40.

Ladas, G. Sficas, Y.G. and Stavroulakis, I. P. 1983. Necessary and sufficient conditions for oscillations. American Mathematical Monthly 90, 247-53.

Lakshmikantham, V. and Trigiante, D. 1988. Theory of difference equations; Numerical methods and applications. Academic Press. , San Diego.

Tang, X. H. and Zhang, R. Y. 2001. New oscillation criteria for delay difference equations. Computers and Mathematics With Applications, 42;1319-1330

Tramov, M. I. 1975. Conditions for oscillatory solutions of first order differential equations with a delayed argument. Izvestiya Vysshikh Uchebnyk Zavedenii, Seriya Matematika 19, 92-6.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Qian, X. Z. 1993. Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients. Journal of MathematicalAnalysis and Applications, 177; 432-444.

Yu, J. S. , Zhang, B. G. and Wang, Z. C. 1994. Oscillation of delay difference equations. Applicable Analysis, 53; 117-124.

Yu, J. S. and Tang, X. H. 2000. Sufficient conditions for the oscillation oflinear delay difference equations with oscillating coefficients. Journal ofMathematical Analysis and Applications, 250; 735-742.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sait SÜMÜRKEN

Doğum Yeri : Cumalı

Doğum Tarihi : 08.01.1978

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Afyonkarahisar Kocatepe Anadolu Lisesi 1992-1995

Lisans : 9 Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi 1995-1999

Yüksek Lisans: Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi 2004-

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Şuhut Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi 1999-2004
2. Afyonkarahisar Gazi Anadolu Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi 2004-2005
3. Bolvadin Mustafa Hüsnü Gemici Anadolu Öğretmen Lisesi 2005-2006
4. Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesi 2006-

Yayınları (SCI ve diğer)

Diğer konular