YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim KIR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Matematik Anabilim Dalı

MAYIS / 2007

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

İbrahim KIR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

MAYIS 2007

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT danışmanlığında,

İbrahim KIR tarafından hazırlanan

Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine başlıklı bu çalışma,

lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

25/05/2007

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans Bitirme tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Ömer AKIN	
Üye	Doç. Dr. Kemal AYDIN	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

……   sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR v

SİMGELER DİZİNİ vi

1- GİRİŞ 1

2- GENEL BİLGİLER 2

2.1 Fark Denklemleri 2

2.2 Salınımlılık 8

3- YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOGEN FARK DENKLEMERİNİN ÇÖZÜMÜ 10

3.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homogen Fark Denklemleri 10

3.1.1 Wandermonde Determinantı 10

3.1.2 Karakteristik Denklemin Köklerinin Birbirine Eşit Olma Durumu 11

3.1.3 Karakteristik Denklemin Köklerinin Birbirinden Farklı Olma Durumu 11

3.1.4 Karakteristik Denklemin Köklerinin Kompleks Olma Durumu 12

3.2 Lineer Olmayan Bazı Tip Fark Denklemleri 13

3.2.1 Tip I 13

3.2.2 Tip II 14

3.2.3 Tip III 15

3.2.4 Tip IV 16

3.3 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Davranışı 17

4- YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE 19

4.1 Son Yıllarda Yapılmış Bazı Önemli Çalışmalar 19
4.2 Yardımcı Teoremler 22

5- TARTIŞMA VE SONUÇLAR 24

Teorem 5.1 24
Teorem 5.2 26
Örnek 5.1 28
Örnek 5.2 29

KAYNAKLAR 30

ÖZGEÇMİŞ 32

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

İbrahim KIR
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Bu tezde, lineer ve lineer olmayan fakat basit dönüşümlerle lineerleştirilebilen fark denklemlerinin çözümlerinin, çok yaygın olarak kullanılan bazı metotlarla nasıl elde edildiği ve bu çözümlerin davranışı hakkında kısaca bilgi verilmektedir. Daha sonra tezin orijinal bölümünü oluşturan son bölümde, ele alınan yüksek mertebeden bir fark denkleminin çözümünü yapmadan direkt olarak çözümün davranışı hakkında elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

2007, 32 + vi sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, nötral fark denklemi, salınımlılık, salınımlı katsayı.

ABSTRACT

Thesis

ON THE SOLUTIONS OF HIGH ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

İbrahim KIR
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yaşar BOLAT

In this thesis, an idea is given about how to find solutions of linear and nonlinear difference equations which are easy transformable to linear equations, with some widely used methods and the behaviour of their solutions. After that in the last section of the thesis which is the original part, without finding the solution of a high-order difference equation newly obtained results about the behaviour of the solution is given.

2007, 32 +vi pages

Key Words: Difference equation, neutral difference equations, oscillation, oscillating coefficient.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımda sabırla ve itina ile bana danışmanlık yapan saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT Bey'e saygılarımı sunar ve teşekkür ederim.

İbrahim KIR

Afyonkarahisar, Mayıs 2007

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$ biçiminde tanımlı doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$ biçiminde tanımlı reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ biçiminde tanımlı tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{+}$	$\mathbb{Z}^{+}=\{1,2,3,4,...\}$ biçiminde tanımlı pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^{-}$	$\mathbb{Z}^{-}=\{...,-3,-2,-1\}$ biçiminde tanımlı negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}(a)$	$\mathbb{N}(a)=\{a,a+1,\cdots\},\ a\in\mathbb{N}$
$\mathbb{N}(a,b)$	$\mathbb{N}(a,b)=\{a,a+1,\cdots,b\},\ \ a,b\in\mathbb{N}$
$\mathbb{N}/a$	$\mathbb{N}-\{a\},\ a\in\mathbb{N}$
$f(x)$	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ biçiminde tanımlı fonksiyon
$y(k)$	$y:A\to\mathbb{R},\ A\subset\mathbb{N}$ ve A sınırsız
Δ	$\Delta y(k)=y(k+1)-y(k)$ biçiminde tanımlı ileri fark operatörü
Δ^{n}	$\Delta^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}y(n+k)$
Δ^{-1}	$\Delta^{-1}[\Delta y(k)]=y(k)+C$ (sabit) şeklinde tanımlanan ve ileri fark operatörünün tersi olarak adlandırılan operatör.
Δy_n	$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n$
$\Delta_a y_n$	$\Delta_a y_n=y_{n+1}-ay_n,\ n\in\mathbb{N}$
$\Delta^{k}y_n$	$\Delta^{k}y_n=\Delta^{k-1}y_{n+1}-\Delta^{k-1}y_n,\ k>1,\ \Delta^{1}=\Delta$
$x^{(k)}$	$k\in N$ olmak üzere $x^{(k)}=x(x-1)(x-2)\ldots[x-(k-1)]$ biçiminde tanımlı faktöriyel fonksiyonu
$n!$	$n!=1.2.\cdots.n,\ n\in N,\ 0!=1$
$n^{(k)}$	$k,n\in Z^{+}$ ve $n\geq k$ olmak üzere $n^{(k)}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin ayrık benzeri (discrete analojisi) olan, ayrık zamanlarda meydana gelen doğa olaylarını formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkan fark denklemleri, son otuz yıldır uygulamalı matematiğin çok büyük ilgi gören bir dalı olarak, uygulamalı matematikçilerin ve uygulamalı bilimcilerin ilgi sahası olmuştur. Uygulamalı matematiğin bu dalı mühendislik, fen bilimleri, ekonomi, tıp, sosyal bilimler ve teknik bilimlerde sıkça karşılaşılan denklemlerdendir. Uygulamada karşılaşılan bu problemlerin çözümünü elde etmeye çalışmak çok uzun uğraşlar ve zaman kaybına neden olacağından, uygulamalı matematikçiler bu problemlerin çözümlerinin kalitatif davranışı hakkında bilgi veren çalışmalar yapmaya yönelmişlerdir. Bu amaçla bu tezde özellikle, diferensiyel denklemlerde olduğu gibi fark denklemlerinde de önemli bir yere sahip, salınım teorisinde, literatür bilgisi olarak müracaat edilebilecek olan yeni sonuçlar elde etmek hedeflenmiş ve bu amaca ulaşılmıştır. Elde edilen bu sonuçlar makale haline getirilerek yurtdışında hakemli bir dergide yayınlanmıştır (Kır ve Bolat, 2006).

Bu çalışmanın birinci bölümünde, fark denklemlerinin çözümlerini teşkil eden diziler, fark denklemleri ve salınımlılıkla ilgili tanım ve teorem bilgilerini içeren temel kavramlar verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, lineer ve lineer olmayan fakat lineerleştirilebilen homogen fark denklemleri ve bunların çözümlerinin elde edilişi ile ilgili yaygın olarak kullanılan bazı metotlar verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ise, bu bölümün birinci kesiminde, bu tezde ele alınan denklemin bazı özel durumlarının daha önceden ele alınarak, önemli sonuçların verildiği çalışmalardan kısaca örnekler verilmiştir. Daha fazla ayrıntı için Agarwal (1997), Agarwal (2000), Agarwal ve diğerleri (vd.) (2000), Bolat (2003), Györi and Ladas (1991), Goldberg (1958), Hildebrand (1968), Elaydi (1999), Kelley and Peterson (1991), Mickens (1990) ve Lakshmikantham and Trigiante (1988)'e bakılabilir. İkinci kesimde, elde edilen orijinal sonuçların ispatında kullanılan yardımcı teoremler lemma olarak verilmiştir. Tezin orijinal kısmı olan son bölümde ise, salınımlı katsayılı yüksek mertebeden gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığının kalitatif incelemesini veren ve bazı yeter şartlar içeren orijinal sonuçlar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Fark Denklemleri

Tanım 2.1.1.: y fonksiyonu verilsin ve h bir sabit olsun. O zaman,

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$$

şeklinde verilen Δ operatörüne ileri fark operatörü ve h sayısına fark aralığı denir.
Eğer $y(x) = x$ fonksiyonu alınırsa $\Delta y(x) = \Delta x = x + h - x = h$ veya $\Delta x = h$ bulunur. Bu halde fark aralığı Δx ile gösterilir (Goldberg 1958).

Tanım 2.1.2 : y bir fonksiyon ve birinci farkı Δy verilmiş olsun. O zaman y nin ikinci farkı $\Delta^2 y$ ile gösterilir ve

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) \tag{2.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Diğer bir deyişle (2.1.1), y nin birinci ileri farkının ileri farkıdır.
$\Delta^2 y$ fonksiyonunun x deki değeri, $\Delta^2 y(x)$ şeklinde belirtilir.

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x+h) - \Delta y(x) \tag{2.1.2}$$

biçiminde yazılır.
Benzer biçimde y nin üçüncü ileri farkı $\Delta^3 y$ şeklinde belirtilir ve y nin ikinci farkının ileri farkıdır. $\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y)$ biçiminde yazılır. Genellersek, y nin *n.* farkı $\Delta^n y$ ile gösterilir ve y nin $(n-1)$. farkının ileri farkıdır. Yani,

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), n = 2, 3, 4, \ldots \tag{2.1.3}$$

dir. O zaman $n = 2$ için $\Delta^2 y = \Delta(\Delta^1 y)$ ile özdeşleştirilebilir. (2.1.1) ile tutarlı olması için, üssü ihmal edilirse, fonksiyonun birinci farkı $\Delta^1 y$ yerine Δy yazılır. $n = 1$ için (2.1.1) den, $\Delta y = \Delta(\Delta^0 y)$ olur. Bundan dolayı $\Delta^0 y = y$ kabul edilmelidir. Bu operatöre özdeşlik (birim) operatörü denir (Goldberg 1958).

Tanım 2.1.3.: I ile belirtilen özdeşlik (birim) operatörü herhangi bir y fonksiyonuna uygulanırsa, yeni bir y ile özdeş I_y fonksiyonu üretilir. y nin tanım kümesindeki bir x için $I_y(x) = y(x)$ ve $\Delta^0 y = I_y$ dir. Böylece tanımdaki amaca ulaşılmış olup, $I_y(x) = y(x)$, $n = 1$ için doğru olur (Goldberg 1958).

Tanım 2.1.4: Bir y fonksiyonu verilsin ve h keyfi pozitif bir sabit olsun. Ey, x değerinde $Ey(x)$ veya Ey_x ile gösterilen ve $Ey(x) = y(x+h)$ şeklinde tanımlanan E operatörüne genişletme (kaydırma) operatörü denir.

$x+h$ sayısı y nin tanım bölgesinde olmak üzere

$$\Delta y(x) = Ey(x) - y(x)$$

biçiminde yazılabilir. E operatörü Δ operatörü gibi fonksiyona birden fazla uygulanabilir. Böylece,

$$E^2 y(x) = E\left[Ey(x)\right] = Ey(x+h) = y(x+2h),$$

$$E^3 y(x) = E\left[E^2 y(x)\right] = Ey(x+2h) = y(x+3h) \ ,$$

$E^0 y(x) = Iy(x) = y(x)$ şeklinde tanımlanır ve genellenirse, $n = 1, 2, ...$ olmak üzere

$$E^n y(x) = E\left[E^{n-1} y(x)\right]$$

yazılır. Bu ise E nin tanımı kullanılarak

$$E^n y(x) = y(x+nh)$$

biçiminde yazılır (Akın 1988).

Tanım 2.1.5: $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere $n.$ dereceden bir faktöriyel fonksiyonu

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\ldots\left[x-(n-1)h\right]$$

ile verilen bir fonksiyondur (Akın 1988).

Δ ve E nin Bazı Özellikleri

Δ ve E nin temel özellikleri, Δy ve Ey nin değerlerini hesaplamak için önemlidir. c_1 ve c_2 keyfi sabitler, y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon ise

a) $\Delta\left[y_1(k)+y_2(k)\right]=\Delta y_1(k)+\Delta y_2(k)$,

b) $\Delta\left[cy(k)\right]=c\Delta y(k)$,

c) $\Delta\left[c_1y_1(k)+c_2y_2(k)\right]=c_1\Delta y_1(k)+c_2\Delta y_2(k)$,

d) $y_1,y_2,\ldots,y_n$; n tane fonksiyon ve $c_1,c_2,\ldots,c_n$ keyfi sabitler olsun. O zaman

$$\Delta\left[c_1y_1(k)+c_2y_2(k)+\ldots+c_ny_n(k)\right]=c_1\Delta y_1(k)+c_2\Delta y_2(k)+\ldots+c_n\Delta y_n(k),$$

e) k bir tamsayı olmak üzere $y(k)$, y fonksiyonunun k daki değerini gösterirse ve a, b $(b\geq a)$ herhangi iki tamsayı ise $y(a)+y(a+1)+\ldots+y(b)$ toplamı yerine $\sum_{k=a}^{b}y(k)$ yazılır,

f) Toplam operatörü ile ilgili aşağıdaki kuralları bilmek gerekir. y ve z keyfi iki fonksiyon ve c keyfi bir sabit olmak üzere

i) $\sum_{k=1}^{n}c=nc$,

ii) $\sum_{k=1}^{n}cy(k)=c\sum_{k=1}^{n}y(k)$,

iii) $\sum_{k=1}^{n}(y(k)\mp z(k))=\sum_{k=1}^{n}y(k)\mp\sum_{k=1}^{n}z(k)$,

g) $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3....k}A^kB^{n-k}$ veya $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$,

h) $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ keyfi sabitler ve $a_n\neq 0$ olsun. O zaman y nin n. ileri farkı bir sabit fonksiyondur ve $\Delta^n y=n!h^na_n$ dir. Eğer $p>n$ ise $\Delta^p y(k)=0$ olur,

ı) $\Delta\left[u(x)\cdot v(x)\right]=Eu(x)\cdot\Delta v(x)+v(x)\cdot\Delta u(x)$,

j) $\Delta\equiv E-I$ ve $E\equiv\Delta+I$,

k) $\Delta^0\equiv I$ ve $E^0\equiv I$,

l) $\Delta^2 \equiv E^2 - 2E + I$ ve $\Delta^3 \equiv E^3 - 3E^2 + 3E - I$,

m) $\Delta E \equiv E\Delta$

n) Δ ve E dizin kuralına uysun. m ve n negatif olmayan tamsayıları için,

$\Delta^m\Delta^n \equiv \Delta^n\Delta^m \equiv \Delta^{m+n}$ ve $E^mE^n \equiv E^nE^m \equiv E^{m+n}$,

o) $\Delta^n \equiv (E - I)^n$,

p) $\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$,

r) n pozitif tamsayı olmak üzere $\Delta^n y(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k y(x)$. (Goldberg 1958)

Tanım 2.1.6 : Bir S kümesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunun değeri ve bu y fonksiyonunun her x değeri için bir veya daha yüksek mertebeden farkları $\Delta y, \Delta^2 y, \ldots$ olan terimleri içeren bir bağıntıya, S kümesi üzerinde fark denklemi denir (Akın 1988).

Tanım 2.1.7 : $n.$ mertebeden bir fark denklemi genel olarak; $k, n \in \mathbb{N}$, $y(k)(= y_k) \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ve $y(k) \neq 0$ olmak üzere,

$$f(n, y(k), y(k+1), \ldots, y(k+n)) = 0$$

biçiminde tanımlanır (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.8 : Bir fark denkleminde bulunan en yüksek mertebeli farkın mertebesine fark denkleminin mertebesi denir (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.9 : n. mertebeden bir lineer fark denklemi,

$$\Delta^n y(k) + a_1 \Delta^{n-1} y(k) + \cdots + a_{n-1} \Delta y(k) + a_n y(k) = r(k)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $a_1, a_2, \cdots a_n$ ler birer sabit ve $a_n \neq 0$ olup, $r(k)$, k ya bağlı bir fonksiyondur (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.10 : $m=\max\{0,m_1,\ldots,m_s\}\geq 0$, $l=\max\{1,-m_1,\ldots,-m_s\}=1$ biçiminde tanımlanan m, l ve r pozitif tamsayılar, $k=0,1,2\ldots$ için $y(k)$ bir dizi, $i=1,2,...,s$ ve için $\{p_i(k)\}_{k=1}^{\infty}$ bir reel dizi olmak üzere, $m_i\in\mathbb{Z}$ için

$$y(k+1)-y(k)+\sum_{i=1}^{s}p_i(k)y(k-m_i)=0$$

biçimindeki fark denklemi, $(m+1)$. mertebeden gecikmeli fark denklemidir (Györi and Ladas 1991).

Tanım 2.1.11 : Fark denklemlerinde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin en yüksek mertebeden farkını içeren denklemlere nötral (neutral) tipten fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.12 : $p_n\neq 0$ olacak şekilde $i=1,2,\ldots,n$ için p_i verilsin.

$$y(k+n)+p_1y(k+n-1)+p_2y(k+n-2)+\ldots+p_ny(k)=0 \qquad (2.1.4)$$

biçimindeki fark denklemine $n.$ mertebeden sabit katsayılı lineer homogen fark denklemi denir (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.13 : $R(k)$, k nın bir fonksiyonu olmak üzere,

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+a_2y(k+n-2)+\ldots+a_ny(k)=R(k) \qquad (2.1.5)$$

fark denklemine sabit katsayılı $n.$ mertebeden homogen olmayan lineer fark denklemi denir (Mickens 1990).

Tanım 2.1.14 : Sabit katsayılı, yüksek mertebeden, lineer homogen olmayan bir fark denkleminin genel çözümü, homogen kısmın genel çözümü ile homogen olmayan denklemi sağlayan bir özel çözümün toplamından oluşur. Yani $y^{(H)}(k)$ homogen kısmın genel çözümü, $y^{(P)}(k)$ homogen olmayan denklemin özel çözümü olmak üzere,

$$y(k)=y^{(H)}(k)+y^{(P)}(k)$$

dir (Mickens 1990).

Tanım 2.1.15 : (Üst Üste Ekleme İlkesi, Superposition Prensibi) c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve $y^{(1)}(k)$ ve $y^{(2)}(k)$

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + a_n(k)y(k) = 0 \tag{2.1.6}$$

denkleminin çözümleri olmak üzere,

$$y(k) = c_1 y^{(1)}(k) + c_2 y^{(2)}(k)$$

de (2.2.6) denkleminin bir çözümüdür (Mickens 1990).

Tanım 2.1.16 : $n.$ basamaktan sabit katsayılı bir homogen denklemin karakteristik denklemi,

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0$$

biçiminde tanımlanır. Karakteristik denklem $n.$ mertebeden bir polinom olduğu için n tane kökü vardır ($r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$).

O halde karakteristik denklem fonksiyonel formda

$$f(r) = \prod_{i=1}^{n}(r - r_i) = (r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_n) = 0$$

biçiminde yazılır (Mickens 1990).

Tanım 2.1.17 : Bir f operatörü $f(E) = E^n + a_1 E^{n-1} + \ldots + a_{n-1}E + a_n$ şeklinde tanımlanarak $n.$ mertebeden bir homogen fark denklemi kısaca

$$f(E)y(k) = 0$$

olarak yazılabilir (Mickens 1990).

Tanım 2.1.18 : Bir fark denkleminin çözümleri $y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)$ olsun.

$$C(k) = \det\begin{pmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \cdots & y_n(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ \vdots & & \ddots & \\ y_1(k+n-1) & y_2(k+n-1) & \cdots & y_n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan $C(k)$ determinantına bu çözümlere ait Casoratian denir (Elaydi 1999).

Teorem 2.1.1 (De Moivre Teoremi): r pozitif bir sayı olmak üzere;

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

bağıntısı vardır (Goldberg 1958).

Tanım 2.1.19 : Eğer bir fark denklemi için $C(k) \neq 0$ ise $y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)$ çözümlerine lineer bağımsızdır denir (Mickens 1990).

Teorem 2.1.2 : r_i, (2.2.4) homogen denkleminin karakteristik denkleminin herhangi bir kökü olsun. O zaman

$$y(k) = r_i^k,$$

denklem (2.1.4) ün bir çözümüdür (Mickens 1990).

Tanım 2.1.20: $[k_0, k_1]$ aralığında $k_0 \leq m \leq k_1$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ve $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reel sayılar olmak üzere n. mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen

$$y(k+n) + p_1 y(k+n-1) + \cdots + p_{n-1} y(k+1) + p_n y(k) = 0$$

fark denklemine

$$y(m) = \alpha_1,\ y(m+1) = \alpha_2, \ldots, y(m+n-1) = \alpha_n$$

ile birlikte fark Cauchy problemi denir (Akın ve Bulgak 1998).

2.2 Salınımlılık

Tanım 2.2.1 : Her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\big(y(k_m) - a\big)\big(y(k_m + 1) - a\big) \leq 0 \qquad (2.2.1)$$

olacak şekilde artan bir tamsayı dizisi $\{k(m)\}_{m=1}^{\infty}$ varsa y dizisi a $(a \in \mathbb{R})$ etrafında salınımlıdır denir.

(2.2.1) deki eşitsizlik kesin olarak sağlanırsa y, a etrafında kesin salınımlıdır denir. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için $\big(y(k+1) - a\big)\big(y(k) - a\big) < 0$ ise y, a etrafında hızlı salınımlıdır denir (Agarwal ve diğerleri (vd.) 2000).

Tanım 2.2.2 : Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $y(k)y(k+m) < 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ varsa y dizisi, 0 etrafında kesin salınımlı, kesin salınımlı veya kısaca salınımlıdır denir. Ayrıca eğer y daima sabit işaretli ise salınımlı değildir denir (Agarwal vd. 2000).

Tanım 2.2.3 : Her $m \in \mathbb{N}$ için $\left(y(k_m) - x(k_m)\right)\left[y(k_m+1) - x(k_m+1)\right] \le 0$ olacak şekilde artan bir pozitif tamsayı dizisi $x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ varsa $y = \{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi x etrafında salınımlıdır denir. Yukarıdaki tanımdan, eğer $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlı ise $\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin de $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlı olduğu açıktır. Bununla beraber her $\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi kendi etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd. 2000).

Tanım 2.2.4 : Bütün çözümleri salınımlı olan bir fark denklemine salınımlıdır denir. Aksi halde fark denklemi salınımlı değildir denir (Thandapani vd. 2001).

3. YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOGEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer ve lineer olmayan homogen fark denklemleri ve bu denklemlerin çözümlerinin elde edilişi hakkında bilgi verilmektedir.

3.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homogen Fark Denklemleri

$\left[k_0, k_1\right]$ aralığında n. mertebeden sabit katsayılı lineer homogen

$$y\left(k+n\right)+p_1 y\left(k+n-1\right)+\cdots+p_n y\left(k\right)=0 \qquad (3.1.1)$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Burada $p_n \neq 0$ ve $p_1, p_2, \cdots p_n$ birer sabittir. $q_{11}(k), q_{12}(k), \ldots, q_{1n}(k)$ dizileri lineer bağımsız ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ler reel sayılar olmak üzere

$$y(k)=c_1 q_{11}(k)+c_2 q_{12}(k)+\ldots+c_n q_{1n} \qquad (3.1.2)$$

ifadesi, (3.1.1) denkleminin genel çözümüdür (Akın ve Bulgak 1998).

3.1.1 Wandermonde Determinantı

(3.1.1) denklemi göz önüne alınsın. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel sayılar olmak üzere

$$W=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{\text{n-1}} & \lambda_{\text{n}} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{\text{n-2}} & \lambda_2^{\text{n-2}} & \ldots & \lambda_{\text{n-1}}^{\text{n-2}} & \lambda_{\text{n}}^{\text{n-2}} \\ \lambda_1^{\text{n-1}} & \lambda_2^{\text{n-1}} & \ldots & \lambda_{\text{n-1}}^{\text{n-1}} & \lambda_{\text{n}}^{\text{n-1}} \end{pmatrix}$$

determinantına Wandermonde determinantı denir ve değeri $W_n = \prod_{1\le i\le j\le n}\left(\lambda_j - \lambda_i\right)$

dir. (3.1.1) denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^n + p_1\lambda^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ dır (Akın ve Bulgak 1998).

Teorem 3.1.1: Keyfi seçilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ reel sayıları ve $[k_0, k_1]$ aralığında seçilen herhangi bir m için

$$y(k+n) + p_1 y(k+n-1) + \cdots + p_{n-1} y(k+1) + p_n y(k) = 0;$$
$$y(m) = \alpha_1,\ y(m+1) = \alpha_2, \ldots, y(m+n-1) = \alpha_n$$

fark Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir (Akın ve Bulgak 1998).

3.1.2 Karakteristik Denklemin Köklerinin Birbirine Eşit Olma Durumu

Karakteristik denklemin m katlı sıfır olmayan kökü μ olsun. Yani ilk m tane kökün birbirine eşit $\mu = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$q_1(k) = \mu^k, q_2(k) = k\mu^k, \ldots, q_m(k) = k^{m-1}\mu^k$$

ifadesi ele alınsın. Bunların her biri (3.1.1) denkleminin bir çözümüdür (Akın ve Bulgak 1998).

Örnek 3.1.1:

$$y(k+3) - 6y(k+2) + 12y(k+1) - 8y(k) = 0$$

denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

şeklindedir.

$(\lambda - 2)^3 = 0$ olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ dir. Dolayısıyla verilen denklemin genel çözümü $y(k) = (c_1 + c_2 k + c_3 k^2) 2^k$ şeklindedir.

3.1.3 Karakteristik Denklemin Köklerinin Birbirinden Farklı Olma Durumu

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reel sayılar olmak üzere (3.1.1) denkleminin genel çözümü

$$y(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + \ldots + c_n\lambda_n^k$$

dir (Akın ve Bulgak 1998).

Örnek 3.1.2:

$$y(k+2)-4y(k)=0$$
$$y(0)=5,\ y(1)=2$$

şeklinde verilen Cauchy probleminin karakteristik denklemi $\lambda^2-4=0$ ve $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$ olduğundan genel çözümü $y(k)=c_1(-2)^k+c_2(2)^k$ olur.

Başlangıç şartları yerine yazılırsa, $c_1+c_2=5,\ -2c_1+2c_2=2$ ve $c_1=2,\ c_2=3$ bulunur.

Yani $y(k)=2\cdot(-2)^k+3\cdot 2^k$ istenen çözümdür.

3.1.4 Karakteristik Denklemin Köklerinin Kompleks Olma Durumu

Karakteristik denklemin $\mu=v+i\omega\ (\omega\neq 0)$ kompleks kökü varsa $\mu=v-i\omega$ da karakteristik denklemin köküdür ve $\omega\neq 0$ olduğundan kökler birbirinden farklıdır. Yani $(v+i\omega)$ ve $(v-i\omega)$ verilen problemin lineer bağımsız iki çözümüdür. Böylece

$$q_1(k)=\frac{1}{2}\left[(v+i\omega)^k+(v-i\omega)^k\right],\ q_2(k)=\frac{1}{2i}\left[(v+i\omega)^k-(v-i\omega)^k\right]$$

ise kompleks köklere karşılık gelen lineer bağımsız iki reel çözümdür.

Örnek 3.1.3:

$$y(k+2)+4y(k)=0$$

denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2+4=0$ ve denklemin iki kökü $\lambda_1=-2i,\ \lambda_2=2i$ birbirine eşit olmadığından genel çözümü $y(k)=c_1(-2i)^k+c_2(2i)^k$ şeklindedir. $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan

$$q_1(k)=2^k\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\ \text{ ve }\ q_2(k)=2^k\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

seçilebilir. Yani genel çözüm $y(k)=c_1 2^k\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+c_2 2^k\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ olur.

3.2 Lineer Olmayan Bazı Tip Fark Denklemleri

Bu kesimde lineer olmadığı halde basit dönüşümlerle lineer hale dönüştürülebilen bazı tipten denklemler ele alınmıştır.

3.2.1 Tip I

p ve q keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k+1)y(k)+py(k+1)+qy(k)=0 \tag{3.2.1}$$

biçimindeki homogen fark denklemi için $z(k)=\dfrac{1}{y(k)}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{z(k+1)z(k)}+p\frac{1}{z(k+1)}+q\frac{1}{z(k)}=0$$

olur. Buradan

$$qz(k+1)+pz(k)+1=0 \tag{3.2.2}$$

biçiminde sabit katsayılı, homogen, lineer fark denklemi elde edilir. (3.2.2) denkleminin homojen kısmının karakteristik denklemi $q\lambda+p=0$ olduğundan (3.2.2) nin genel çözümü $z^{(c)}(k)=c_1\left(-\dfrac{p}{q}\right)^k$ olur. Homogen olmayan kısmın özel çözümü ise $z^{(p)}(k)=-\dfrac{1}{p+q}$ olup, (3.2.2) denkleminin genel çözümü;

$$z(k)=c_1\left(-\frac{p}{q}\right)^k-\frac{1}{p+q}$$

biçiminde elde edilir. Buradan da (3.2.1) denkleminin genel çözümü;

$$y(k)=\frac{1}{z(k)}=\frac{1}{c_1\left(-\dfrac{p}{q}\right)^k-\dfrac{1}{p+q}}$$

şeklinde elde edilir (Elaydi 1999).

Örnek 3.2.1 : Lineer olmayan,

$$y(k+1)y(k)+4y(k+1)+4y(k)=0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemde $p=4$, $q=4$ olup,

$y(k)=\dfrac{1}{z(k)}$ dönüşümü yapılarak, ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen

$$4z(k+1)+4z(k)+1=0 \qquad (3.2.3)$$

lineer fark denklemi elde edilir. (3.2.3) denkleminin homogen kısmının genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$$z^{(c)}(k)=c_1\left(-\frac{p}{q}\right)^k=c_1(-1)^k$$

olur. Homogen olmayan kısmın özel çözümü ise

$z^{(p)}(k)=-\dfrac{1}{p+q}=-\dfrac{1}{8}$ bulunur. Buradan

$$z(k)=c_1(-1)^k-\frac{1}{8}$$

Böylece ele alınan denklemin genel çözümü;

$$y(k)=\frac{1}{z(k)}=\frac{1}{c_1(-1)^k-\frac{1}{8}}$$

biçiminde elde edilir.

3.2.2. Tip II

(3.2.1) denkleminin homogen olmayan hali için, yani p ve q keyfi sabitler ve $r(k)$, k ya bağlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$y(k+1)y(k)+py(k+1)+qy(k)=r(k) \qquad (3.2.3)$$

denklemi için $y(k)=\dfrac{z(k+1)}{z(k)}-p$ dönüşümü yapılarak

$$z(k+2)+(q-p)z(k+1)-(r(k)+pq)z(k)=0 \qquad (3.2.4)$$

lineer fark denklemi elde edilir (Elaydi 1999).

Örnek 3.2.2 : Lineer olmayan,

$$y(k+1)y(k)+3y(k+1)+5y(k)=-16$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemde $p=3$, $q=5$ ve $r(k)=-16$ olup, $y(k)=\dfrac{z(k+1)}{z(k)}-3$ dönüşümü yapılarak, ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen

$$z(k+2)+2z(k+1)+z(k)=0 \qquad (3.2.5)$$

lineer fark denklemi elde edilir. (3.2.5) denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$$z(k)=(c_1+kc_2)(-1)^k$$

olur. Böylece ele alınan denklemin genel çözümü;

$$y(k)=\frac{z(k+1)}{z(k)}-3=\frac{\left(c_1+(k+1)c_2\right)(-1)^{k+1}}{(c_1+kc_2)(-1)^k}-3$$

biçiminde elde edilir

3.2.3 Tip III

$f\left(\dfrac{y(k+1)}{y(k)},k\right)=0$ tipindeki denklemlerin lineerleştirilebilmesi için $z(k)=\dfrac{y(k+1)}{y(k)}$ dönüşümü yapılır (Elaydi 1999).

Örnek 3.2.3 : Lineer olmayan

$$y^2(k+1)-4y(k+1)y(k)+3y^2(k)=0 \qquad (3.2.6)$$

Denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin bütün terimleri $y^2(k)$ ile bölünürse;

$$\left[\frac{y(k+1)}{y(k)}\right]^2-4\left[\frac{y(k+1)}{y(k)}\right]+3=0 \qquad (3.2.7)$$

olur. (3.2.7) de $z(k)=\dfrac{y(k+1)}{y(k)}$ dönüşümü yapılarak;

$$z^2(k)-4z(k)+3=0 \qquad (3.2.8)$$

elde edilir. (3.2.8) denklemi

$$[z(k)-3][z(k)-1]=0$$

biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$z(k)=3 \text{ ve } z(k)=1$$

elde edilir. $z(k)=\dfrac{y(k+1)}{y(k)}=3$ ifadesinden $y(k+1)-3y(k)=0$ ve $z(k)=\dfrac{y(k+1)}{y(k)}=1$ ifadesinden $y(k+1)-y(k)=0$ denklemleri elde edilir. Bu iki denklemin çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere sırasıyla $y(k)=c_1 3^k$ ve $y(k)=c_2$ dir. Böylece (3.2.6) denkleminin genel çözümü,

$$y_1(k)=c_1 3^k \text{ ve } y_2(k)=c_2$$

biçiminde bulunur.

3.2.4 Tip IV

$$\left(y(k+n)\right)^{m_1}\left(y(k+n-1)\right)^{m_2}\ldots\left(y(k)\right)^{m_{n+1}}=r(k) \tag{3.2.9}$$

tipindeki lineer olmayan denklemler için $z(k)=\ln y(k)$ dönüşümü kullanılarak lineer olmayan (3.2.9) denklemi

$$m_1 z(k+n)+m_2 z(k+n-1)+\cdots+m_{n+1}z(k)=\ln r(k) \tag{3.2.10}$$

biçiminde sabit katsayılı lineer denkleme indirgenir ve daha önceki metotlarla çözülür. Böylece $y(k)=e^{z(k)}$ ters dönüşümü ile (3.2.9) denkleminin genel çözümü elde edilmiş olur (Elaydi 1999).

Örnek 3.2.4 : Lineer olmayan

$$y(k+2)=\frac{y(k+1)}{y(k)} \tag{3.2.11}$$

denklemine $z(k)=\log y(k)$ dönüşümü uygulanırsa

$$z(k+2)-z(k+1)+z(k)=0 \tag{3.2.12}$$

lineer denklemi elde edilir. (3.2.12) denkleminin karakteristik kökleri $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ve $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ olduğundan, (3.2.12) denkleminin genel çözümü, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$$z(k) = c_1 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

biçimindedir. Böylece (3.3.11) denkleminin genel çözümü;

$$y(k) = 10^{\left[c_1 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right]}$$

olarak elde edilir.

3.3 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Davranışı

n ve r pozitif tamsayılar ve bütün $i = 1,2,\ldots,n$ ler için P_i, reel değerli bir $r \times r$ kare matrisi olsun.

$$y(k+n) + P_1 y(k+n-1) + \ldots + P_n y(k) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{3.3.1}$$

fark denklemi ve I, $r \times r$ boyutlu birim matris olmak üzere (3.3.1) in

$$\det(\lambda^n I + \lambda^{n-1} P_1 + \ldots + \lambda P_{n-1} + P_n) = 0 \tag{3.3.2}$$

karakteristik denklemi göz önüne alınsın. Bu bölümde (3.3.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılık davranışları için gerekli ve yeterli durumlar ele alınacaktır.

Teorem 3.3.1 : n ve r pozitif tamsayılar ve bütün $i = 1,2,\ldots,n$ ler için P_i, reel değerli bir $r \times r$ kare matrisi olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

a) Denklem (3.3.1) in her $\{y(k)\}_{k=0}^{\infty}$ çözümü salınımlıdır.

b) (3.3.2) karakteristik denkleminin hiçbir pozitif kökü yoktur (Györi and Ladas 1991).

Sonuç 3.3.1 : Eğer (3.3.1) denklemi belirli bir değerden sonraki değerler için daima negatif değil ve yine belirli bir değerden sonra daima sıfır olmuyorsa, o zaman (3.3.2) denklemi reel köke sahip değildir (Györi and Ladas 1991).

Sonuç 3.3.2 : n negatif bir tamsayı iken teorem (3.3.1) in doğru olduğu ve $\det P_n \neq 0$ olduğu yukarıdaki sonuçtan rahatça görülebilir (Györi and Ladas 1991).

Teorem 3.3.2 : Aşağıdaki

$$n, m \in \mathbb{N},\ j = -n, \ldots, m \text{ için } Q_j \in \mathbb{R}^{r \times r} \tag{3.3.3}$$

ve

$$|m-1| + |\det(Q_m + I)| \neq 0,\ n = 0 \text{ ve } m \geq 2 \text{ ise } \det Q_m \neq 0 \tag{3.3.4}$$

şartları sağlansın. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $$y(k+1) - y(k) + \sum_{j=-n}^{m} Q_j y(k+j) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3.5}$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

b) $$\det\left(\lambda I - I + \sum_{j=-n}^{m} Q_j \lambda^j \right) = 0 \tag{3.3.6}$$

karakteristik denklemi hiçbir pozitif köke sahip değildir (Györi and Ladas 1991).

Teorem 3.3.3 :

$$n, m \in \mathbb{N},\ j = -n, \ldots, m \text{ için } q_j \in \mathbb{R} \tag{3.3.7}$$

şartı sağlansın. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $$y(k+1) - y(k) + \sum_{j=-n}^{m} q_j y(k+j) = 0 \tag{3.3.8}$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

b) $$\lambda - 1 + \sum_{j=-n}^{m} q_j \lambda^j = 0 \tag{3.3.9}$$

karakteristik denklemi hiçbir pozitif köke sahip değildir (Györi and Ladas 1991).

4- YÜKSEK MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Bu kesimde; $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, α sayısı $0 < \alpha < 1$ özellikli pozitif tek tamsayıların oranı, p fonksiyonu $\lim\limits_{k\to\infty} p(k) = 0$ özelliğinde salınımlı bir fonksiyon, her $k \in \mathbb{N}(k_0)$ için $q(k) \geq 0$, $k \to \infty$ iken $\tau(k) \to \infty$ ve $\sigma(k) \to \infty$ olacak şekilde $\tau(k) < k$ ve $\sigma(k) < k$ olmak üzere yüksek mertebeden salınımlı katsayılı nötral tipten alt-lineer

$$\Delta^n \left[y(k) + p(k) y(\tau(k)) \right] + q(k) y^{\alpha} (\sigma(k)) = 0, \tag{4.1}$$

denkleminin birkaç özel durumunun daha önceden ele alınarak bu denklemlerin çözümlerinin davranışı üzerine elde edilmiş önemli sonuçlar kısaca verilmiş ve elde edilen sonuçlar için kullanılacak yardımcı teoremler eklenmiştir.

4.1 Son Zamanlarda Yapılmış Bazı Önemli Çalışmalar

1- Li (1997) tarafından ele alınan $i = 1, 2, \ldots, m$ için α_i pozitif tamsayı; $\sigma_i \geq 0$, $\tau > 0$ tamsayılar, $\{p(k)\}$ ve $\{q(k)\}$ negatif olmayan diziler olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan

$$\Delta(y(k) - p(k)y(k-\tau)) + q(k)\prod_{i=1}^{n} \left| y(k-\sigma_i) \right|^{\alpha_i} \operatorname{sgn} y(k-\sigma_i) = 0, \; k = 0,1,\ldots \tag{4.1.1}$$

nötral fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 : (4.1.1) denkleminde $p(k) \geq 1,\; q(k) \geq 0$ olsun ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} q(k) \prod_{j=0}^{k-1} (1 + \frac{jq(j)}{\tau}) = \infty \tag{4.1.2}$$

sağlansın. O zaman denklem (4.1.1) in bir yerden sonra daima pozitif değerler alan bir $\{y(k)\}$ çözümü için $z(k) = y(k) - p(k)y(k-\tau)$ şeklinde tanımlanmak üzere, yeteri kadar büyük tüm k lar için $z(k) < 0$ ve $\Delta z(k) \le 0$ olur.

Teorem 4.1.2 : Her $k \ge 0$ için $p(k),\ q(k) \ge 0$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için $p(N + m\tau) \le 1$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}(1)$ olduğunu ve (4.1.2) nin sağlandığı kabul edilsin. Ayrıca yeteri kadar büyük bütün k lar için

$$q(k)\prod_{i=1}^{n} p^{\alpha_i}(k-\sigma_i) \ge q(k-\tau)$$

olsun. O zaman Denklem (4.1.1) in her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.3 Her $k \ge 0$ için $p(k),\ q(k) \ge 0$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için $p(N + m\tau) \le 1$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}(1)$ olduğunu ve (4.1.2) nin sağlandığı kabul edilsin. Ayrıca yeteri kadar büyük bütün k lar ve bir $r \in (0,1)$ sayısı için

$$q(k)\prod_{i=1}^{n} p^{\alpha_i}(k-\sigma_i) \ge rq(k-\tau)$$

olsun. Eğer $\sigma = \min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ olmak üzere $k \ge 0$ için

$$\Delta w(k) + \frac{r}{1-r} q(k) w(k-\tau-\sigma) \le 0,$$

fark eşitsizliği sağlanırsa denklem (4.1.1) salınımlıdır.

Teorem 4.1.4: $n = 1$ ve (4.1.2) sağlanacak şekilde $k \ge 0$ için $p(k) \ge 1, q(k) \ge 0$ olsun. Ayrıca bütün büyük k lar için $p(k-\sigma_1)q(k) \le \alpha q(k-\tau)$ olacak şekilde bir $\alpha \ge 1$ sayısı olsun. O zaman denklem (4.1.1) salınımlıdır.

2- Lin (2005), tek sayıların oranı olan $\alpha > 1$ sayısı için $n \ge 2$ olmak üzere yüksek mertebeden nötral tipten

$$\Delta^n (y(k) - p(k)x(k-\tau)) = q(k)x^{\alpha}(k-\sigma),\ k \ge k_0 \qquad (4.1.3)$$

fark denklemini ele alarak, bu denklemin çözümlerinin salınımlılığını veren aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

Teorem 4.1.5 : Denklem (4.1.3), $k \to \infty$ iken sonsuza giden $\{y(k)\}$ çözümüne sahiptir.

Teorem 4.1.6 : Yeterince büyük bütün k lar için $p \le p(k) \le 1$ olacak biçimde $p \in (0,1)$ olsun. Eğer

$$\liminf_{k\to\infty}\left[q(k)\exp(-e^{\lambda k})\right] > 0$$

olacak şekilde bir $\lambda \ge 0$ varsa, o zaman denklem (4.1.3) ün her sınırlı çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.7 : Yeterince büyük bütün k lar için $1 \le p(k) \le p^*$ olacak biçimde $p^* \in (1,\infty)$ varsa ve $\sum_{k=k_0}^{\infty} k^{n-1}q(k) = \infty$ sağlanırsa, o zaman denklem (4.1.3) ün her sınırlı çözümü salınımlıdır.

3- Li and Saker (2003), γ, $0<\gamma<1$ özellikteki tek pozitif tamsayıların oranı, bütün $k \ge 0$ için $a_k > 0$, $q(k) \ge 0$ ve $0 \le p(k) < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty \tag{4.1.4}$$

sağlanmak üzere ikinci mertebeden nötral gecikmeli

$$\Delta\left(a_k\Delta\left(y(k)+p(k)y(k-\tau)\right)\right)+q(k)y^{\gamma}(k-\sigma)=0 \tag{4.1.5}$$

sublineer fark denkleminin çözümlerinin salınım davranışını veren aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 4.1.8 : (4.1.4) sağlansın. Bununla beraber öyle pozitif bir $\{\rho(k)\}$ dizisi tanımlansın ki $Q(k) = q(k)\left(1-p(k-\sigma)\right)^{\gamma}$ olmak üzere her $\alpha \ge 1$ için

$$\limsup_{k\to\infty}\sum_{l=0}^{k}\left[\rho(l)Q(l)-\frac{a_{l-\sigma}\left(\alpha\cdot(l+1-\sigma)\right)^{1-\gamma}\left(\Delta\rho(1)\right)^{2}}{4\gamma\rho(1)}\right]=\infty$$

oluyorsa, o zaman denklem (4.1.5) in her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.9 : (4.1.4) sağlansın ve $\{\rho(k)\}_{k=0}^{\infty}$ pozitif bir dizi olsun. Ayrıca,

$m \geq 0$ için $H(m,m)=0, m>k>0$ için ikili dizisi $H(m,k)>0, \Delta_2 H(m,k)=H(m,k+1)-H(m,k)$ şeklinde tanımlanmak ve $h(m,k)=\frac{-\Delta^2 H(m,k)}{\sqrt{H(m,k)}}, \overline{\rho}(k)=\gamma\rho(k) \Big/ \left(\left(\alpha\cdot(k+1-\sigma)\right)^{1-\gamma} a_{k-\sigma}\right)$

olmak üzere

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{H(m,0)}\sum_{k=k_0}^{m-1}\left[H(m,k)\rho(k)Q(k)-\frac{\rho^2(k+1)}{4\overline{\rho}(k)}\left(h(m,k)\sqrt{H(m,k)}-\frac{\Delta\rho(k)}{\rho(k+1)}H(m,k)\right)^2\right]=\infty$$

sağlansın. O zaman denklem (4.1.5) nın her çözümü salınımlıdır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda ele alınan denklemler, denklem (4.1) ile karşılaştırıldığında; (4.1.1) denkleminin, (4.1) denkleminin $n=1$ ve $p(k)>0$ olması; (4.1.3) denkleminin, (4.1) de $p(k)>0$ olması ve (4.1.5) denkleminin ise (4.1) de $n=2$ ve $p(k)>0$ olması durumlarında (4.1) denkleminin özel durumları olduğu açıkça görülmektedir.

4.2 Yardımcı Teoremler

Elde edilen yeni sonuçların ispatında yardımcı teorem olarak kullanılacak olan lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.2.1 (Ayrık Knasser Teoremi) : $y(k)$, $\mathbb{N}(k_0)$ üzerinde tanımlı ve $n\in\mathbb{N}$ için $\Delta^n y(k)$ özdeş olarak sıfır olmamak üzere $y(k)>0$ olsun. O zaman $\Delta^n y(k)\leq 0$ için $n+m$ tek doğal sayı veya $\Delta^n y(k)\geq 0$ için $n+m$ çift doğal sayı olacak biçimde, $0\leq m\leq n$ özelliğinde bir m tamsayısı vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $m\leq n-1$ olmak üzere her $k\geq k_0$ ve $m\leq i\leq n-1$ için

$(-1)^{m+i}\Delta^i y(k)>0,$

ii. $m\geq 1$ olmak üzere her $k\geq k_0$ ve $1\leq i\leq m-1$ için $\Delta^i y(k)>0$

(Agarwal vd. 2000).

Lemma 4.2.2 : $y(k)$ Lemma 4.2.2 deki gibi tanımlı olmak üzere $y(k)>0$ ve $\Delta^n y(k)\leq 0$ özdeş olarak sıfır olmasın. O zaman m, Lemma 4.2.1 deki gibi olmak üzere her $k\geq k_1\geq k_0$ için

$$y(k)\geq \frac{1}{(n-1)!}\left(k-k_1\right)^{n-1}\Delta^{n-1}y(2^{n-m-1}k).$$

Ayrıca eğer $y(k)$ artan ise,

$$y(k)\geq \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\Delta^{n-1}y(k),\ k\geq 2^{n-1}k_1.$$

dir (Agarwal vd. 2000).

Lemma 4.2.3 : $\alpha\in(0,1)$ ve $l\in\mathbb{N}$ olsun. Eğer $\sum_{s=0}^{\infty}q(s)=\infty$ sağlanırsa, o zaman

$$\Delta u(k)+q(k)u^{\alpha}\left(k-l\right)\leq 0$$

fark eşitsizliği belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözüme sahip değildir (Tang 2001).

5- TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu bölüm tezin orijinal bölümüdür. 4.1 deki çalışmalarda $\{p(k)\}$ nın salınımlı bir dizi olmadığı görülmektedir. Bu kesimde; $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, α sayısı $0 < \alpha < 1$ özellikli pozitif tek tamsayıların oranı, p fonksiyonu $\lim_{k\to\infty} p(k) = 0$ özelliğinde salınımlı bir fonksiyon, her $k \in \mathbb{N}(k_0)$ için $q(k) \geq 0$, $k \to \infty$ iken $\tau(k) \to \infty$ ve $\sigma(k) \to \infty$ olacak şekilde $\tau(k) < k$ ve $\sigma(k) < k$ olmak üzere yüksek mertebeden salınımlı katsayılı nötral tipten alt-lineer

$$\Delta^n \left[y(k) + p(k) y(\tau(k)) \right] + q(k) y^\alpha (\sigma(k)) = 0, \tag{5.1}$$

fark denklemi ele alınarak bütün $k \geq \min_{i\geq 0} \tau \{(i), \sigma(i)\}$ lar için bu denklemi sağlayan ve $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan bütün çözümlerin salınımlılığını veren yeter şartlar içeren yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar için $z(k)$, $z(k) = y(k) + p(k)y(\tau(k))$ biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 5.1 : n çift sayı ve $u(k) = \Delta^{n-1} z(k)$ olsun. Yeterince büyük bütün k lar için

$$\Delta u(k) + \frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1} (n-1)! \right]^\alpha} q(k) \sigma^{\alpha(n-1)}(k) u^\alpha (\sigma(k)) \leq 0 \tag{5.2}$$

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman denklem (5.1) in her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $k \to \infty$ iken sıfıra gider.

İspat : İspat aksini kabul metodu ile yapılacaktır. Denklem (5.1) salınımlı olmayan sınırlı bir $y(k)$ çözümüne sahip olsun. Yani $y(k)$ bir yerden sonra daima ya pozitif veya negatif değerler alsın. Ayrıca $y(k)$, $k \to \infty$ iken sıfıra yakınsamasın. Önce $y(k) > 0$ kabulü göz önüne alınırsa her $k \geq k_1 \geq k_0$ için $y(\tau(k)) > 0$ ve $y(\sigma(k)) > 0$ olacak biçimde bir $k_1 \in \mathbb{N}(k_0)$ vardır. $z(k) = y(k) + p(k)y(\tau(k))$ için denklem 5.1 den

$$\Delta^n z(k) = -q(k) y^\alpha (\sigma(k)) \leq 0 \tag{5.3}$$

olur. Bu ise $\Delta^{n-1}z(k)$ nın azalan olduğunu ve $s=0,1,2,\ldots,n-1$ olmak üzere $\Delta^{s}z(k)$ nın kesin monoton ve daima sabit işaretli olduğunu gösterir. $y(k)$ sınırlı ve $\lim_{k\to\infty} p(k)=0$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} p(k)y(\tau(k))=0$ olur. O halde bütün $k\geq k_2$ için $z(k)>0$ olacak biçimde bir $k_2\geq k_1$ vardır. n çift olduğundan, lemma 4.2.1 den dolayı $m=1$ olur. Aksi takdirde, $z(k)$ sınırlı olmaz. Bu durumda $i=0,1,2,\cdots,n-1$ ve bütün $k\geq k_2$ için lemma 4.2.1 gereği

$$(-1)^{i+1}\Delta^{i}z(k)>0 \tag{5.4}$$

olur. Buradan $\Delta z(k)>0$ olduğu ve dolayısı ile $z(k)$ nın artan olduğu görülür. $y(k)$ sınırlı olduğundan ve $k\to\infty$ iken sıfıra gitmediğinden $z(k)$ da sınırlı olur. O halde bütün $k\geq k_3$ için

$$y(k)=z(k)-p(k)y(\tau(k))\geq\frac{1}{2}z(k)>0$$

olacak şekilde bir $k_3\geq k_2$ bulunabilir. O zaman bütün $k\geq k_4$ için

$$y(\sigma(k))\geq\frac{1}{2}z(\sigma(k))>0$$

olacak biçimde bir $k_4\geq k_3$ vardır. Böylece $0<\alpha<1$ olmak üzere $k\geq k_4$ için

$$y^{\alpha}(\sigma(k))\geq\left[\frac{1}{2}z(\sigma(k))\right]^{\alpha}>0 \tag{5.5}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bunun (5.3) de yazılması ile bütün $k\geq k_4$ için

$$\Delta^{n}z(k)+q(k)\left[\frac{1}{2}z(\sigma(k))\right]^{\alpha}\leq 0 \tag{5.6}$$

elde edilir. $z(k)>0$, $s=0,1,2,\cdots,n-1$ için $\Delta^{s}z(k)$ monoton ve sabit işaretli, $\Delta^{n}z(k)$ özdeş olarak sıfır değil ve özellikle $z(k)$ artan olduğundan lemma 4.2.2 gereği (5.6) eşitsizliği bütün $k\geq k_4$ için

$$\Delta^{n}z(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)\left(\Delta^{n-1}z(\sigma(k))\right)^{\alpha}\leq 0 \tag{5.7}$$

biçiminde yazılır. (5.7) de $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)$ alınırsa bütün $k\geq k_4$ için (5.7) fark eşitsizliği

$$\Delta u(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)u^{\alpha}(\sigma(k))\leq 0 \tag{5.8}$$

biçimini alır. Lemma 4.2.3 ve teoremin (5.2) hipotezi gereği, (5.8) eşitsizliği belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözüme sahip değildir. Bu ise (5.4) e göre $\Delta^{n-1}z(k)>0$ olması ile çelişir.

Şimdi denklem (5.1) in bir yerden sonra daima negatif değerler alan çözüme sahip olduğu kabul edilirse, o zaman bütün $k\in\mathbb{N}(k_0)$ için $x(k)>0$ olmak üzere $y(k)=-x(k)$ alınarak (5.1) den

$$\Delta^{n}\left[-x(k)-p(k)x(\tau(k))\right]-q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=0$$

veya

$$\Delta^{n}\left[x(k)+p(k)x(\tau(k))\right]+q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=0 \tag{5.9}$$

yazılır. (5.9) denklemi için yukarıdaki işlemler tamamen benzer biçimde sürdürülerek çelişkiye varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2 : n tek doğal sayı ve $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)$ olsun. Yeterince büyük bütün k lar

için $$\Delta u(k)+\frac{(k-k_3)^{\alpha(n-1)}}{\left[2(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)u^{\alpha}(\sigma(k))\leq 0 \tag{5.10}$$

fark eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman denklem (5.1) in her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $k\to\infty$ için sıfıra yakınsar.

İspat : İspat aksini kabul metodu ile yapılacaktır. Denklem (5.1) salınımlı olmayan sınırlı bir $y(k)$ çözümüne sahip olsun. Yani $y(k)$ bir yerden sonra daima ya pozitif veya negatif değerler alsın. Ayrıca $y(k)$, $k\to\infty$ iken sıfıra yakınsamasın. Önce $y(k)>0$ kabulü göz önüne alınırsa her $k\geq k_1\geq k_0$ için $y(\tau(k))>0$ ve $y(\sigma(k))>0$ olacak biçimde bir $k_1\in\mathbb{N}(k_0)$ vardır. Teorem 4.3.1 in ispatında olduğu gibi, $z(k)$ nın sınırlı olduğu bulunabilir. n tek olduğundan, lemma 4.2.1 den dolayı, $m=0$ olur. Aksi halde $z(k)$ sınırlı olmaz. Bu durumda $i=0,1,2,\cdots,n-1$ ve bütün $k\geq k_2$ için

$$(-1)^{i}\Delta^{i}z(k)>0 \tag{5.11}$$

olur. Buradan $\Delta z(k)<0$ olduğu ve dolayısı ile $z(k)$ nın azalan olduğu görülür. O halde bütün $k \geq k_3$ için

$$y(k)=z(k)-p(k)y(\tau(k)) \geq \frac{1}{2}z(k)>0$$

olacak şekilde bir $k_3 \geq k_2$ bulunabilir. O zaman bütün $k \geq k_4$ için

$$y(\sigma(k)) \geq \frac{1}{2}z(\sigma(k))>0$$

olacak biçimde bir $k_4 \geq k_3$ vardır. Böylece $0<\alpha<1$ olmak üzere $k \geq k_4$ için

$$y^{\alpha}(\sigma(k)) \geq \left[\frac{1}{2}z(\sigma(k))\right]^{\alpha}>0 \ , \tag{5.12}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bunun (5.1) de yazılması ile bütün $k \geq k_4$ için

$$\Delta^n z(k)+\frac{1}{2^{\alpha}}q(k)z^{\alpha}(\sigma(k)) \leq 0 \tag{5.13}$$

elde edilir. $z(k)>0$, $s=0,1,2,\cdots,n-1$ için $\Delta^s z(k)$ monoton ve sabit işaretli, $\Delta^n z(k)$ özdeş olarak sıfır değil ve özellikle $z(k)$ artan olduğundan lemma 4.2.2 gereği (5.13) eşitsizliği bütün $k \geq k_4$ için

$$\Delta^n z(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{[2(n-1)!]^{\alpha}}q(k)\Delta^{n-1}z^{\alpha}(\sigma(k)) \leq 0 \tag{5.14}$$

biçiminde yazılır. (5.14) de $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)$ alınırsa bütün $k \geq k_4$ için (5.14) fark eşitsizliği

$$u(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{[2(n-1)!]^{\alpha}}q(k)u^{\alpha}(\sigma(k)) \leq 0 \tag{5.15}$$

biçimini alır. Lemma 4.2.3 ve teoremin (5.10) hipotezi gereği, (5.15) eşitsizliği belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözüme sahip değildir. Bu ise (5.11) e göre $\Delta^{n-1}z(k)>0$ olması ile çelişir.

Şimdi denklem (5.1) in bir yerden sonra daima negatif değerler alan çözüme sahip olduğu kabul edilirse, o zaman bütün $k \in \mathbb{N}(k_0)$ için $x(k)>0$ olmak üzere $y(k)=-x(k)$ alınarak (5.1) den

$$\Delta^n\left[-x(k)-p(k)x(\tau(k))\right]-q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=0$$

veya

$$\Delta^n\left[x(k)+p(k)x(\tau(k))\right]+q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=0 \tag{5.16}$$

yazılır. (5.16) denklemi için yukarıdaki işlemler tamamen benzer biçimde sürdürülerek aynı çelişkiye varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.1 : $n=2$ ve $\alpha=\dfrac{1}{3}$ alınmak üzere

$$\Delta^2\left[y(k)+\left(-\frac{1}{2}\right)^k y(k-1)\right]+\left[4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+2}\right]y^{\frac{1}{3}}(k-3)=0 \tag{5.17}$$

denklemi göz önünde bulundurulursa;

i. $p(k)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$ olup $\lim\limits_{k\to\infty}p(k)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k=0$,

ii. bütün $k\geq k_0\in\mathbb{N}$ için $q(k)=\left[4-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+2}\right]\geq 0$,

iii. $\tau(k)=k-1<k$ olup $k\to\infty$ iken $\tau(k)\to\infty$ ve $\sigma(k)=k-3<k$ olup $k\to\infty$ iken $\sigma(k)\to\infty$ dir.

Teorem 5.1 in hipotezi gereği ve $k\geq 6$ için

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{s=k-3}^{k-1}4^{-1/3}\left[4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{s+2}\right](s-3)^{1/3}=4^{2/3}\lim_{k\to\infty}\left[(k-6)^{1/3}+(k-5)^{1/3}+(k-4)^{1/3}\right]$$
$$+4^{-1/3}\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[-(k-6)^{1/3}+\frac{1}{2}(k-5)^{1/3}-\frac{1}{4}(k-4)^{1/3}\right]$$

olup,

$$4^{-1/3}\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[-(k-6)^{1/3}+\frac{1}{2}(k-5)^{1/3}-\frac{1}{4}(k-4)^{1/3}\right]=0 \text{ olduğundan,}$$

$$4^{2/3}\lim_{k\to\infty}\left[(k-6)^{1/3}+(k-5)^{1/3}+(k-4)^{1/3}\right]=\infty \text{ elde edilir.}$$

Böylece lemma 4.2.3 ve teorem 5.1 gereği, (5.17) nin her çözümü salınımlıdır. Böyle çözümlerden biri $\{y(k)\}=\{(-1)^k\}$ dır.

Örnek 5.2 : $n=3$ ve $\alpha=\frac{1}{3}$ alınmak üzere

$$\Delta^3\left[y(k)+\left(-\frac{1}{3}\right)^k y(k-1)\right]+\left[8+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+3}\right]y^{\frac{1}{3}}(k-2)=0 \qquad (5.18)$$

denklemi göz önünde bulundurulursa;

i. $\quad p(k)=\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ olup $\lim_{k\to\infty} p(k)=\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k=0$,

ii. $\quad$ bütün $k\geq k_0\in\mathbb{N}$ için $q(k)=\left[8+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+3}\right]\geq 0$,

iii. $\quad \tau(k)=k-1<k$ olup $k\to\infty$ iken $\tau(k)\to\infty$ ve $\sigma(k)=k-2<k$ olup $k\to\infty$ iken $\sigma(k)\to\infty$ dir.

Teorem 5.2 nin hipotezi gereği ve $k\geq 5$ için

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{s=k-2}^{k-1}4^{-1/3}(k-3)^{2/3}\left[8+\left(-\frac{1}{3}\right)^{s+3}\right](s-3)^{1/3}=2^{7/3}\lim_{k\to\infty}\left[(k-5)^{2/3}+(k-4)^{2/3}\right]$$
$$+4^{-1/3}\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left[(k-5)^{2/3}-\frac{1}{3}(k-4)^{2/3}\right]$$

olup,

$4^{-1/3}\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left[(k-5)^{2/3}-\frac{1}{3}(k-4)^{2/3}\right]=0$ olduğundan,

$2^{7/3}\lim_{k\to\infty}\left[(k-5)^{2/3}+(k-4)^{2/3}\right]=\infty$ elde edilir. Böylece lemma 4.2.3 ve teorem 5.2 gereği (5.18) in her çözümü salınımlıdır. Bu çözümlerden biri $\{y(k)\}=\{(-1)^k\}$ dır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., 1997. “Advanced Topics in Difference Equation”, Kluwer Academic Publishers, London, England.

Agarwal, R.P., 2000. “Difference Equations and Inequalities”, Chapter 1, Marcel Dekker, New York, USA.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D., 2000. “Oscillation Theory for Difference and Differential Equations”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Akın Ö, 1988. “Nümerik Analiz”, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Akın Ö. ve Bulgak H., 1998. “Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi”, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya.

Bolat, Y., 2003. “Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Salınımlılığı”, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ankara.

Györi, I. And Ladas, G., 1991. “Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications”, Clarendon Press, Oxford, England.

Goldberg S., 1958. “Introduction to Difference Equations”, Chapter 1, Chapter 3, Yohn Wiley and Sons, New York, USA.

Hildebrand F.B., 1968. “Finite-Difference Equations and Simulations”, Chapter 1, Chapter 2, Prentice Hall Inc., New Jersey, USA.

Elaydi S.N., 1999. “An Introduction to Difference Equations”, Chapter 1, Chapter 2, Springer, San Antonio, USA.

Kelley, W.G. And Peterson, A.C., 1991. “Difference Equations an Introduction with Applications”, Chapter 2, Chapter 3, Academic Press, Boston, USA.

Kır, İ. and Bolat, Y., 2006. “Oscillation criteria for higher-order sublinear neutral delay difference equations with oscillating coefficients”, International Journal of Difference Equations (IJDE) Vol.1, No.2, pp. 219-223.

Mickens, R.E., 1990. “Difference Equations”, Chapter 4, Van Nostrand Reinhold, Newyork.

Lakshmikantham, V. And Trigiante, D., 1988. “Theory of Difference Equations”, Chapter 1, Chapter 2, Chapter 3, Academic Pres, London, England.

Li, W.T., 1997. “Oscillation criteria for first-order neutral nonlinear difference equations with variable coefficients”, Pergamon Applied Mathematics Letters, Vol. 10, No. 6, pp. 101-106.

Li, W.T. and Saker, S.H., 2003. “Oscillation of second-order sublinear neutral delay difference equations”, N-H Elsevier Applied Mathematics and Computation, Vol. 146, pp. 543-551.

Lin, X., 2005. “Oscillation for higher-order neutral superlinear delay difference Equations with unstable type”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 50, pp. 683-691.

Tang, X.H. and Liu, Y.J., 2001, “Oscillation for nonlinear delay difference equations”, Tamkang J. Math. Vol.32, pp. 275-280.

Thandapani, E., Ravi, K. and Graef, J.R. 2001. “Oscillation and comparison theorems for half-linear second-order difference equations”, Pergamon Applied Mathematics Letters, Vol. 42, pp. 953-960.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	İbrahim KIR
Doğum Yeri	:	Afyonkarahisar
Doğum Tarihi	:	30.03.1977
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi 1991-1995
Lisans	:	Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği 1995-2002
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi 2004-

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl aralığı

1- MEB Ağrı İli Diyadin İlçesi Diyadin Lisesi 2003-2005

2- MEB Afyonkarahisar İli Çay İlçesi Çay İmam Hatip Lisesi ve Anadolu İmam Hatip Lisesi 2005-

Yayınları (SCI ve diğer)

1- İbrahim Kır and Yaşar Bolat , Oscillation criteria for higher-order sublinear neutral delay difference equations with oscillating coefficients, International Journal of Difference Equations (IJDE Vol:1, No:2, 2006)

Diğer konular