FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Asım ÖZCAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Matematik Anabilim Dalı

MAYIS / 2007

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Mustafa Asım ÖZCAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Matematik Anabilim Dalı

MAYIS 2007

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT danışmanlığında,
Mustafa Asım ÖZCAN tarafından hazırlanan
"Fark Denklemlerinin Bir Sınıfının Çözümlerinin Davranışı Üzerine"
başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca
25/05/2007
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Matematik Anabilim Dalında
tezi olarak oybirliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Ömer AKIN	
Üye	Doç. Dr. Kemal AYDIN	
Üye	Yrd.Doç. Dr. Yaşar BOLAT	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ
ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Mustafa Asım ÖZCAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Bu tezde, lineer ve birkaç özel tipten lineer olmadığı halde lineerleştirilebilen fark denklemlerinin çözümlerinin çok yaygın olarak kullanılan metotlarla nasıl elde edildiği ve bu çözümlerin davranışı hakkında kısaca bilgi verilmektedir. Daha sonra tezin orijinal bölümünü oluşturan son bölümde, fark denklemlerinin bir sınıfı olarak ele alınan yüksek mertebeden bir fark denkleminin çözümünü yapmadan direkt olarak çözümün davranışı hakkında bilgi verecek biçimde elde edilen yeni sonuçlar verilmiştir.

2007, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler : Fark denklemi, nötral fark denklemi, salınımlılık, salınımlı katsayı.

ABSTRACT

Thesis

ON THE BEHAVIOURS OF A CLASS OF DEFFERENCE EQUATIONS

Mustafa Asım ÖZCAN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Yaşar BOLAT

In this thesis, how to find solutions of linear and linearable difference equations which are nonlinear, with some widely used methods, are given briefly. After that in the last section of the thesis which is the original part, without finding the solution of a class of difference equations, newly obtained results, that will directly give the information about the behaviour of the solution, is given.

2007, 34 pages

Key Words : Difference equation, neutral difference equations, oscillation, oscillating coefficient.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımda sabırla bana danışmanlık yapan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Yaşar BOLAT beye saygılarımı sunar ve teşekkür ederim.

Mustafa Asım ÖZCAN

Afyonkarahisar, Mayıs 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
N	$N=\{1,2,\cdots\}$ şeklinde tanımlı doğal sayılar kümesi
R	$(-\infty,+\infty)$ biçiminde tanımlı reel sayılar kümesi
Z	$Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ biçiminde tanımlı tamsayılar kümesi
Z^+	$Z^+=\{1,2,\cdots\}$ biçiminde tanımlı pozitif tam sayılar kümesi
Z^-	$Z^-=\{\cdots,-2,-1\}$ biçiminde tanımlı negatif tam sayılar kümesi
E	$Ey(k)=y(k+1)$ biçiminde tanımlı kaydırma (genişletme, shift) operatörü
I	$Iy(k)=y(k)$ biçiminde tanımlı birim operatörü
Δ	$\Delta y(k)=y(k+h)-y(k)$ biçiminde tanımlı ileri fark operatörüdür. Özel olarak $h=1$ alınırsa $\Delta y(k)=y(k+1)-y(k)$ olur.
Δ^n	$\Delta^n y(k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\,y(n+k)$ biçiminde tanımlı n mertebeden ileri fark operatörü $h=1$
$N(a)$	$N(a)=\{a,a+1,\cdots\},\ a\in N$
$N(a,b)$	$N(a,b)=\{a,a+1,\cdots,b\},\ a,b\in N$
$x^{(k)}$	$k\in N$ olmak üzere $x^{(k)}=x(x-1)(x-2)\ldots(x-(k-1))$ biçiminde tanımlı faktöriyel fonksiyonu
$n!$	$n!=1.2.\cdots.n$, $n\in N$, $0!=1$
$n^{(k)}$	$k,n\in Z^+$ ve $n\geq k$ olmak üzere $n^{(k)}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Ayrık zamanlarda meydana gelen doğa olaylarını formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkan fark denklemleri, diferensiyel denklemlerin ayrık benzeri (discrete analojisi) biçimindedir. Fark denklemleri son yıllarda mühendislik, fen bilimleri, ekonomi, tıp, sosyal bilimler ve teknik bilimlerde sıkça karşılaşılmış olup, uygulamalı bilimcilerin çalıştıkları bir dal olarak ortaya çıkmış ve bu tezin konusu olmuştur. Fark denklemlerinin çözümünü elde etmeye çalışmak zaman kaybına neden olacağından ve uzun uğraşlar gerektirdiğinden çözümlerin kalitatif davranışı hakkında bilgiler veren çalışmalar yapılmıştır. Bu nedenle bu tezde, diferensiyel denklemlerde de önemli bir yeri olan salınım teorisinde yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar makale haline getirilerek yurtdışında hakemli bir dergiye yayınlatmak isteğiyle gönderilmiş ve yayına kabul edilmiştir. (Özcan M.A. ve Bolat Y. 2007).

Dört bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde fark denklemleri ve salınımlılıkla ilgili tanım ve teorem bilgilerini içeren temel kavramlar verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, lineer ve lineer olmayan fakat lineerleştirilebilen homogen ve homogen olmayan tip fark denklemleri ve bunların çözümlerinin elde edilişi ile ilgili yaygın olarak kullanılan bazı metotlar ve bu denklemlerin çözümlerinin limit davranışları hakkında bilgiler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünün birinci kesiminde bu tezde ele alınan denklemin bazı özel durumlarının daha önceden ele alınarak, önemli sonuçların verildiği çalışmalardan kısaca örnekler verilmiş ve ikinci kesiminde de elde edilen ve orijinal sonuçların ispatında kullanılan yardımcı teoremler lemma olarak verilmiştir. Daha fazla ayrıntı için Agarwal (1997), Agarwal (2000), Agarwal ve diğerleri (2000), Akın ve Bulgak (1998), Bolat (2003), Györi ve Ladas (1991), Goldberg (1958), Hildebrand (1968), Elaydi (1999), Kelley and Peterson (1991), Mickens (1990) ve Lakshmikantham ve Trigiante (1988)'e bakılabilir. Tezin orijinal bölümü olan dördüncü ve son bölümde ise, fark denklemlerinin bir sınıfı olan salınımlı katsayılı yüksek mertebeden ve ikinci taraflı gecikmeli bir fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığının kalitatif incelemesini veren ve bazı yeter şartlar içeren orijinal sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmektedir. Birinci kesimde önce operatörlerin özellikleri hakkında bilgiler ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler, ikinci kesimde de salınımlılık ile ilgili temel tanımlar verilmektedir.

2.1 Fark Denklemleri

Tanım 2.1.1 : Δ operatörü $\Delta y(k) = y(k+h) - y(k)$ biçiminde tanımlı ileri fark operatörüdür. Eğer $y(k) = k$ alınırsa $\Delta y(k) = \Delta k = k + h - k = h$ veya $\Delta k = h$ bulunur. Bu halde fark aralığı Δk ile gösterilir. Özel olarak fark aralığı $h = 1$ alınırsa $\Delta y(k) = y(k+1) - y(k)$ olur. Uygulamada da $h = 1$ alınmaktadır. E operatörü ise $Ey(k) = y(k+1)$ biçiminde tanımlı kaydırma (genişletme, shift) operatörüdür. I operatörü de $Iy(k) = y(k)$ biçiminde tanımlı birim operatördür (Akın 1988).

Teorem 2.1.1 : İleri fark operatörü lineerdir. Yani c_1 ve c_2 keyfi sabitler, $y_1(k)$ ve $y_2(k)$ farklı iki fonksiyon olmak üzere,

$$\Delta\left[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)\right] = c_1 \Delta y_1(k) + c_2 \Delta y_2(k)$$

eşitliği vardır (Goldberg 1958).

Teorem 2.1.2 : Δ, E ve I operatörleri arasında;

$$\Delta y(k) = Ey(k) - Iy(k)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca E operatörü için de,

$$E^n y(k) = y(k+nh)$$

bağıntısı vardır (Akın 1988).

Tanım 2.1.2 : k değişkenine bağlı bir y değişkeninin $\Delta y, \Delta^2 y, \cdots$ farklarının bir kümesi S olmak üzere S üzerinde tanımlanan denkleme fark denklemi denir (Akın 1988).

Tanım 2.1.3 : $k \in N$ olmak üzere $y(k)$, Z^+ üzerinde tanımlı reel ya da kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $y(k), y(k+1), \cdots, y(k+n)$ ifadelerini kapsayan bir bağıntıya (denkleme) $n.$ mertebeden bir fark denklemi denir (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.4 : Bir fark denkleminde bulunan en yüksek mertebeli farkın derecesine fark denkleminin mertebesi denir (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.5 : n. mertebeden bir lineer fark denklemi;

$$\Delta^n y(k) + a_1 \Delta^{n-1} y(k) + \cdots + a_{n-1} \Delta y(k) + a_n y(k) = r(k)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $a_1, a_2, \cdots a_n$ birer sabit ve $a_n \neq 0$ olup, $r(k)$, k ya bağlı bir fonksiyondur (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.6 : m pozitif tamsayı, $i = 1, 2, \cdots, m$ için $\{p_i(k)\}_{k=0}^{\infty}$ reel değerli bir dizi ve $n_i \in Z = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ olmak üzere,

$$y(k+1) - y(k) + \sum_{i=1}^{m} p_i(k) y(k - n_i) = 0 \qquad (2.1.1)$$

biçimindeki fark denklemi göz önüne alınsın.

$$n = \max\{0, n_1, \cdots, n_m\}, \; l = \max\{1, -n_1, \cdots, -n_m\}$$

olsun. (2.1.1) denklemi $(n+l)$. mertebeden bir denklemdir. Eğer $l = 1$ ve $n \geq 0$ ise (2.1.1) denklemine gecikmeli fark denklemi denir (Györi ve Ladas 1991).

Tanım 2.1.7 : Bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin en yüksek mertebeden farkını içeren fark denklemlerine, nötral fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.8 : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ keyfi sabitler ve $p_n \neq 0$ olmak üzere,

$$y(k+n) + p_1 y(k+n-1) + \cdots + p_n y(k) = 0$$

biçimindeki fark denklemine n. mertebeden homogen fark denklemi denir (Akın ve Bulgak 1998).

Tanım 2.1.9 : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ keyfi sabitler, $p_n \neq 0$ ve $g(k)$, k nın bir fonksiyonu olmak üzere,

$$y(k+n)+p_1 y(k+n-1)+\cdots+p_n y(k)=g(k)$$

biçimindeki fark denklemine n. mertebeden homogen olmayan fark denklemi denir (Elaydi 1999).

Tanım 2.1.10 : n. mertebeden homogen bir fark denkleminin aşikar olmayan bir çözümü $y(k)=\lambda^k(\lambda \in R)$ biçiminde bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun denklemde yazılmasıyla $\lambda^k \neq 0$ olduğundan,

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

denklemi elde edilir. Elde edilen bu denkleme homogen fark denkleminin karakteristik denklemi denir (Elaydi 1999).

Tanım 2.1.11 : $\{y(k)\}$ bir dizi ve $k<0$ için $y(k)=0$ olsun. Z dönüşümü;

$$Z(y(k))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y(k)}{z^k}$$

biçiminde tanımlanır. Burada z, dönüşüm değişkenidir (Mickens 1990).

Tanım 2.1.12 : n. mertebeden bir fark denkleminin çözümleri $y_1(k), y_2(k), \cdots, y_n(k)$ olsun.

$$C(k)=\det\begin{pmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \cdots & y_n(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ \vdots & & \ddots & \\ y_1(k+n-1) & y_2(k+n-1) & \cdots & y_n(k+n-1) \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan $C(k)$ determinantına bu çözümleri ait Casoratian denir (Elaydi 1999).

Teorem 2.1.3 (De Moivre Teoremi) : r pozitif bir sayı olmak üzere;

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

bağıntısı vardır (Goldberg 1958).

Teorem 2.1.4 (Süperpozisyon Kuralı, Üst Üste Ekleme İlkesi) : $p_1, p_2, \ldots, p_n$ keyfi sabitler ve $p_n \neq 0$ için,

$$y(k+n) + p_1 y(k+n-1) + \cdots + p_n y(k) = 0$$

biçimindeki n. mertebeden homogen fark denkleminin n tane çözümü

$$y^{(1)}(k), y^{(2)}(k), \cdots, y^{(n)}(k)$$

olsun. $c_1, c_2, \cdots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k) = c_1 y^{(1)}(k) + c_2 y^{(2)}(k) + \cdots + c_n y^{(n)}(k)$$

ifadesi de bu denklemin bir çözümüdür (Elaydi 1999).

2.2 Salınımlılık

Tanım 2.2.1 : Her $n \in N$ için,

$$(y(k_n) - a)(y(k_n + 1) - a) \leq 0 \qquad (2.2.1)$$

olacak şekilde artan bir $\{k_n\}_{k=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi varsa $\{y(k)\}$ dizisi a $(a \in R)$ etrafında salınımlıdır denir. (2.2.1) deki eşitsizlik kesin sağlanırsa o zaman $\{y(k)\}$, a etrafında kesin salınımlıdır denir. Ayrıca her $k \in N$ için $(y(k+1) - a)(y(k) - a) < 0$ ise $\{y(k)\}$ dizisi a etrafında hızlı salınımlıdır denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.2.2 : Eğer her $k \in N$ için $y(k)y(k+n) < 0$ olacak şekilde bir $n \in N$ varsa, $\{y(k)\}$ dizisi, 0 etrafında kesin salınımlı veya kısaca salınımlıdır denir. Eğer $\{y(k)\}$ daima sabit işaretli ise (pozitif ya da negatif) salınımlı değildir denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.2.3 : Her $n \in N$ için,

$$(y(k_n) - x(k_n))(y(k_{n+1}) - x(k_{n+1})) \leq 0$$

olacak şekilde artan bir $x=\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ pozitif tamsayı dizisi varsa $y=\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi x etrafında salınımlıdır denir. Eğer $y=\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $x=\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlı ise $x=\{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin de $y=\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlıdır. Buna göre her $y=\{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi kendi etrafında salınımlıdır (Agarwal 2000).

Tanım : 2.2.4 : Eğer bir fark denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, fark denklemine salınımlıdır denir. Aksi takdirde fark denklemine salınımlı değildir denir (Agarwal 2000).

3. YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan fark denklemleri ve bu denklemlerin çözümlerinin elde edilişi hakkında bilgi verilmektedir.

3.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homogen Fark Denklemleri

$$y(k+n)+a_1 y(k+n-1)+\cdots a_n y(k)=0 \tag{3.1.1}$$

biçiminde verilen n. mertebeden sabit katsayılı lineer homogen fark denklemi göz önüne alınsın. (3.1.1) denkleminin genel çözümü, bu denklemin karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak üç durumda elde edilir.

3.1.1 I. Durum : Farklı Reel Köklerin Olması

Teorem 3.1.1 : n. mertebeden lineer homogen fark denkleminin $y_1(k), y_2(k),\ldots,y_n(k)$ çözümleri ancak ve ancak bir $k_0 \in Z^+$ için

$$C(k_0)=\det\begin{pmatrix} y_1(k_0) & y_2(k_0) & \cdots & y_n(k_0) \\ y_1(k_0+1) & y_2(k_0+1) & \cdots & y_n(k_0+1) \\ \vdots & & \ddots & \\ y_1(k_0+n-1) & y_2(k_0+n-1) & \cdots & y_n(k_0+n-1) \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğunda, bir temel (fundamental) çözüm kümesidir (Elaydi 1999).

Teorem 3.1.2 : n. mertebeden (3.1.1) lineer, homogen, fark denkleminin karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ olmak üzere, (3.1.1) denkleminin $y_1(k)=\lambda_1^k$, $y_2(k)=\lambda_2^k,\ldots,y_n(k)=\lambda_n^k$ çözümleri göz önüne alınsın. Bir $k_0 \in Z^+$ için,

i) $C(k_0)\neq 0$ ise $y_1(k), y_2(k),\ldots,y_n(k)$ çözümleri lineer bağımsız olacağından, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ keyfi sabitler olmak üzere, (3.1.1) denkleminin genel çözümü;

$$y(k)=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k+\cdots+c_n\lambda_n^k$$

biçimindedir.

ii) $C(k_0)=0$ ise $y_1(k), y_2(k),\ldots,y_n(k)$ çözümleri lineer bağımlı olacağından, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ keyfi sabitler olmak üzere, (3.1.1) denkleminin genel çözümü,;

$$y(k)=\left(c_1+c_2k+\cdots+c_nk^{n-1}\right)\lambda^k$$

biçimindedir.

(3.1.1) denklemine ait karakteristik denklemin n tane kökünün hepsinin birbirinden farklı reel sayılar olması durumunda, Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 gereği (3.1.1) denkleminin genel çözümü, $c_1,c_2,\cdots,c_n$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k)=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k+\cdots+c_n\lambda_n^k$$

dır. Sabit katsayılı lineer homogen bir fark denkleminin kurulması ve çözümünün elde edilmesi aşağıdaki örnekte verilmektedir (Elaydi 1999).

Örnek 3.1.1 : Her yeni çift tavşan iki aylık olduğunda bir çift tavşan yavrulamaktadır. Buna göre bir çift tavşandan bir yılda kaç çift tavşan üretilir? Ayrık zamanlarda meydana gelen bu olay tablo ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Aylar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tavşan Çifti	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Bu tablo

$$y(k+2)=y(k+1)+y(k);$$

bağıntısı ile ifade edilebilir. Bu bağıntı ise

$$y(k+2)-y(k+1)-y(k)=0 \tag{3.1.2}$$

biçiminde sabit katsayılı, lineer homogen bir fark denklemidir. Bu denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

(3.1.2) denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2-\lambda-1=0$ olup, bu karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak elde edilir. (3.1.2) denkleminin iki çözümü $y_1(k)=\lambda_1^k=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$ ve $y_2(k)=\lambda_2^k=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ biçimindedir. Bir $k_0 \in Z^+$ için,

$$C(k_0)=\begin{vmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0+1} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0+1} \end{vmatrix} = -\sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0} \neq 0$$

olduğundan bu çözümler lineer bağımsızdır. O halde Teorem 3.1.2 gereğince (3.1.2) denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(k)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

olur. (3.1.2) denklemi $y(0)=1$ ve $y(1)=2$ başlangıç değerleri ile ele alınırsa (3.1.2) denkleminin çözümü,

$$y(k)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

olur. Bu dizi kullanılarak;

$$\lim_{k\to\infty}\frac{y(k+1)}{y(k)}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

elde edilir. Bu değer "altın oran" olarak bilinen ve bir dikdörtgenin göze en hoş görünmesini sağlayan iki dik kenar arasındaki orandır (Elaydi 1999).

3.1.2 II. Durum : Eşit Reel Kökler

(3.1.1) denklemine ait karakteristik denklemin n tane kökünün birbirine eşit reel sayılar olması durumunda n. mertebeden lineer homogen fark denkleminin $y_1(k),\ y_2(k),\ldots,y_n(k)$ çözümleri için,

$$C(k)=\det\begin{pmatrix} y_1(k) & y_2(k) & \cdots & y_n(k) \\ y_1(k+1) & y_2(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ \vdots & & \ddots & \\ y_1(k+n-1) & y_2(k+n-1) & \cdots & y_n(k+n-1) \end{pmatrix}=0$$

olacağından $y_1(k), y_2(k),\ldots,y_n(k)$ lar lineer bağımlı olur. Bunları birbirinden lineer bağımsız yapmak için sırasıyla $1, k, k^2,\ldots,k^{n-1}$ ile çarpılır. Buna göre (3.1.1) denkleminin genel çözümü Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 gereğince $c_1,c_2,\cdots,c_n$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k)=\left(c_1+c_2k+\cdots+c_nk^{n-1}\right)\lambda^k$$

biçiminde yazılır (Elaydi 1999).

Örnek 3.1.2 : İkinci mertebeden sabit katsayılı homogen,

$$y(k+2)-4y(k+1)+4y(k)=0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin karakteristik denklemi, $\lambda^2-4\lambda+4=0$ olup, karakteristik denkleminin kökleri, $\lambda_1=\lambda_2=2$ dir. Buna göre denklemin iki çözümü $y_1(k)=2^k$ ve $y_2(k)=2^k$ olup,

$$C(k)=\begin{vmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^{k+1} & 2^{k+1} \end{vmatrix}=0$$

olduğundan bu çözümler lineer bağımlıdır. Bu çözümleri birbirinden lineer bağımsız yapmak için ikinci çözüm k ile çarpılarak $y_2(k)=k2^k$ çözümü elde edilir. Böylece ele alınan denklemin genel çözüm, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k)=(c_1+c_2k)2^k$$

biçiminde elde edilir.

3.1.3 III. Durum : Kompleks Eşlenik Kökler

(3.1.2) karakteristik denklemin n (n çift) tane kökünün $\alpha\pm i\beta$ biçiminde kompleks olması durumunda kökler ikişerli eşleniktir. Bu kompleks eşlenikler iki durumda olabilir.

a) Eğer ikişerli eşlenik kökler birbirinden farklı ise, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ve $a_1, a_2, \cdots, a_{\frac{n}{2}}$ keyfi sabitler, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\frac{n}{2}}$ ve $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{\frac{n}{2}}$ reel sabitler ve $r_1, r_2, \cdots, r_{\frac{n}{2}}$ pozitif reel sabitler olmak üzere genel çözüm;

$$y(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + \cdots + c_n\lambda_n^k$$

biçiminde yazılır. Buradan

$$y(k) = c_1(\alpha_1 + i\beta_1)^k + c_2(\alpha_1 - i\beta_1)^k + \cdots + c_{n-1}(\alpha_{\frac{n}{2}} + i\beta_{\frac{n}{2}})^k + c_n(\alpha_{\frac{n}{2}} - i\beta_{\frac{n}{2}})^k$$

olup, Teorem 2.2.1, Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 gereği

$$y(k) = a_1 r_1^k\left[\cos(k\alpha_1 + \beta_1) + i\sin(k\alpha_1 + \beta_1)\right] + a_1 r_1^k\left[\cos(k\alpha_1 + \beta_1) - i\sin(k\alpha_1 + \beta_1)\right] +$$

$$+ a_2 r_2^k\left[\cos(k\alpha_2 + \beta_2) + i\sin(k\alpha_2 + \beta_2)\right] + a_2 r_2^k\left[\cos(k\alpha_2 + \beta_2) - i\sin(k\alpha_2 + \beta_2)\right] + \cdots$$

$$= 2a_1 r_1^k\cos(k\alpha_1 + \beta_1) + 2a_2 r_2^k\cos(k\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + 2a_{\frac{n}{2}} r_{\frac{n}{2}}^k\cos\left(k\alpha_{\frac{n}{2}} + \beta_{\frac{n}{2}}\right)$$

olarak bulunur.

b) Eğer ikişerli eşlenik kökler eşit ise o zaman genel çözüm, Teorem 2.2.1, Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 gereği, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} y(k) &= c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + \cdots + c_n\lambda_n^k \\ &= \left(c_1 + c_2 k + \cdots + c_n k^{n-1}\right) r^k\cos(k\alpha + \beta) \end{aligned}$$

olarak bulunur (Elaydi 1999).

Örnek 3.1.3 : İkinci mertebeden,

$$y(k+2) + y(k) = 0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu fark denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^2 + 1 = 0$ olup karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_1 = -i$ olarak bulunur. $\lambda_1 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ ve $\lambda_2 = -i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}$ biçiminde yazılabilir. Buna göre genel çözüm c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k = c_1(i)^k + c_2(-i)^k$$

olur. Bu ise Teorem 2.2.1 gereği, a_1 ve a_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(k) = a_1 \cos\left(\frac{k\pi}{2} + a_2\right)$$

biçiminde yazılır (Goldberg 1958).

3.2 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homogen Olmayan Fark Denklemleri

Sabit katsayılı, lineer homogen olmayan fark denklemlerinin genel çözümü, homogen kısmın genel çözümü ile homogen olmayan denklemin bir özel çözümünün toplamıdır. Homogen kısmın genel çözümünün nasıl elde edildiği bir önceki kesimde verildi. Bu kesimde homogen olmayan denklemin özel çözümünün elde edilmesinde en yaygın kullanıma sahip üç metot göz önünde bulundurularak, bu metotlarla özel çözümün nasıl elde edileceği verilmiştir.

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots a_n y(k) = r(k) \tag{3.2.1}$$

biçiminde verilen n. mertebeden sabit katsayılı lineer homogen olmayan fark denklemi göz önüne alınsın. Burada $a_n \neq 0$ ve $a_1, a_2, \cdots a_n$ birer sabit olup, $r(k)$, k ya bağlı bir fonksiyondur. Bu denklemin homogen kısmının genel çözümü Kesim 3.1 de incelendiği gibi

$$y^{(c)}(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \cdots + c_n \lambda_n^k$$

şeklindedir. Homogen olmayan (3.2.1) denklemini sağlayan özel çözüm $y^{(p)}(k)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.1 : Homogen olmayan (3.2.1) denkleminin genel çözümü, bu denklemin homogen kısmının genel çözümü ile homogen olmayan denklemi sağlayan özel çözümün toplamıdır. Yani (3.2.1) denkleminin genel çözümü;

$$y(k) = y^{(c)}(k) + y^{(p)}(k)$$

biçimindedir (Mickens 1990).

$y^{(p)}(k)$ özel çözümü aşağıdaki metotlarla elde edilir.

3.2.1 Belirsiz Katsayılar Metodu ile Özel Çözüm Bulma

$a,b \in R$ bilinen sabitler ve $c_1, c_2, \cdots, c_n, d_1, d_2, \cdots, d_n$ belirlenmesi gereken sabitler olmak üzere, $y^{(p)}(k)$ özel çözümü, (3.2.1) denklemindeki $r(k)$ fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki Çizelge 3.1 de verildiği gibi aranır (Elaydi 1999).

Çizelge 3.1 : Özel Çözüm Tablosu

$r(k)$	$y^{(p)}(k)$
a^k	$c_1 a^k$
k^n	$c_0 + c_1 k + \cdots + c_n k^n$
$k^n a^k$	$c_0 a^k + c_1 k a^k + \cdots + c_n k^n a^k$
$\sin bk$, $\cos bk$	$c_1 \sin bk + c_2 \cos bk$
$a^k \sin bk$, $a^k \cos bk$	$(c_1 \sin bk + c_2 \cos bk)a^k$
$a^k k^n \sin bk$, $a^k k^n \cos bk$	$(c_0 + c_1 k + \cdots + c_n k^n)a^k \sin bk + (d_0 + d_1 k + \cdots + d_n k^n)a^k \cos bk$

Örnek 3.2.1 : İkinci mertebeden sabit katsayılı, lineer, homogen olmayan,

$$y(k+2) + y(k+1) - 12y(k) = k2^k$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu denkleme ait karakteristik denklem,

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

dır. Bu karakteristik denkleminin kökleri, $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 4$ olduğundan homogen kısmın genel çözümü;

$$y^{(c)}(k) = c_1 3^k + c_2 4^k$$

olur. $r(k) = k2^k$ olduğundan Çizelge 3.1 gereği özel çözüm;

$$y^{(p)} = a_1 2^k + a_2 k 2^k$$

biçiminde aranır. O halde bu bir özel çözüm olduğundan denklemi sağlamalıdır. $y^{(p)}(k)$ denklemde yerine yazılırsa;

$$a_1 2^{k+2} + a_2 (k+2)2^{k+2} + a_1 2^{k+1} + a_2 (k+1)2^{k+1} - 12(a_1 2^k + a_2 k 2^k) = k2^k$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(10a_2 - 6a_1)2^k - 6a_2 k 2^k = k2^k$$

$$10a_2 - 6a_1 = 0 \text{ ve } -6a_2 = 1$$

$$a_1 = -\frac{5}{18} \text{ ve } a_2 = -\frac{1}{6}$$

elde edilir. Böylece özel çözüm;

$$y^{(p)} = -\frac{5}{18}2^k - \frac{1}{6}k2^k$$

olur. Denklemin genel çözüm ise;

$$y(k) = c_1 3^k + c_2 4^k - \frac{5}{18}2^k - \frac{1}{6}k2^k$$

dir (Elaydi 1999).

3.2.2 Operatör Metodu ile Özel Çözüm Bulma

E operatörünün bir polinomunu $f(E)$;

$$f(E) = E^n + a_1 E^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.2.2}$$

biçiminde tanımlansın. O zaman (3.2.1) denklemi;

$$f(E)y(k) = r(k) \tag{3.2.3}$$

biçiminde yazılabilir. O halde (3.2.3) eşitliğinden; özel çözüm

$$y^{(p)}(k) = f^{-1}(E)r(k) \tag{3.2.4}$$

biçiminde aranır. Buradan özel çözüm, $r(k)$ nın durumuna bağlı olarak aşağıdaki özellikler kullanılarak elde edilir (Mickens 1990).

Teorem 3.2.2 : $f(E)$, E operatörünün bir polinomu olmak üzere;

$$f(E)a^k = f(a)a^k \tag{3.2.5}$$

eşitliği vardır (Mickens 1990).

Teorem 3.2.3 : $f(a) \neq 0$ olmak üzere;

$$f^{-1}(E)a^k = \frac{a^k}{f(a)} \tag{3.2.6}$$

eşitliği vardır (Mickens 1990).

Örnek 3.2.2 : İkinci mertebeden lineer homogen olmayan;

$$y(k+2)-y(k+1)-2y(k)=6$$

denklemi E operatörü kullanılarak;

$$(E+1)(E-2)y(k)=6$$

biçiminde de yazılabilir. Bu denklemin homogen kısmının genel çözümü;

$$y^{(c)}(k)=c_1(-1)^k+c_2 2^k$$

dir. Özel çözüm ise yukarıdaki Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.2 kullanılarak

$$y^{(p)}(k)=f^{-1}(E)r(k)=[(E+1)(E-2)]^{-1}6=\frac{6}{(2)(-1)}=-3$$

biçiminde elde edilir. Böylece göz önüne alınan denklemin genel çözümü

$$y(k)=c_1(-1)^k+c_2 2^k-3$$

olur.

Teorem 3.2.4 : $f(E)$, E operatörünün bir polinomu ve $F(k)$, k ya bağlı bir polinom olmak üzere;

$$f(E)a^k F(k)=a^k f(aE)F(k)$$

bağıntısı sağlanır (Mickens 1990).

Teorem 3.2.5 : $m=1,2,3,\cdots$ için;

$$(E-a)^{-m}a^k=\frac{k^{(m)}a^{k-m}}{m!} \qquad (3.2.7)$$

bağıntısı sağlanır (Mickens 1990).

Teorem 3.2.6 : $f(a)=0$ olsun. $f(E)=(E-a)^{-m}g(E)$ ve $g(a)\neq 0$ için;

$$f^{-1}(E)a^k=\frac{a^{k-m}k^m}{g(a)m!}$$

bağıntısı sağlanır (Mickens 1990).

Örnek 3.2.3 : İkinci mertebeden,

$$y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=3^k$$

fark denklemi,

$$f(E) = E^2 - 5E + 6$$

olmak üzere

$$f(E)y(k) = (E-2)(E-3)y(k) = 3^k$$

biçiminde yazılabilir. Buradan Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 kullanılarak özel çözüm;

$$y^{(p)}(k) = (E-2)^{-1}(E-3)^{-1}3^k$$

biçiminde aranır. $f(3) = 0$ olduğundan Teorem 3.2.5 gereği özel çözüm

$$y^{(p)}(k) = \frac{k3^{k-1}}{(3-2)(1!)} = k3^{k-1}$$

olur. Böylece ele alınan denklemin genel çözümü

$$y(k) = c_1 2^k + c_2 3^k + k3^{k-1}$$

olarak elde edilir.

UYARI : Operatör metodu, homogen olmayan denklemlerde ikinci taraf $r(k) = a^k k^m$ biçiminde bir fonksiyon ise kullanılabilir (Mickens 1990).

3.2.3 Z - Dönüşümü (Transformasyonu) Metodu

Bu kesimde Z dönüşümü hakkında bilgiler verilecek ve daha sonra Z dönüşümü kullanılarak fark denklemlerinin çözümü incelenecektir.

Teorem 3.2.7 : Z dönüşümü lineerdir (Mickens 1990).

Teorem 3.2.8 : Eğer $n > 0$ ise;

$$Z(y(k+n)) = z^n Z(y(k)) - \sum_{m=0}^{n-1} y(m) z^{n-m} \tag{3.2.9}$$

eşitliği vardır (Mickens 1990).

$Z-$ dönüşümünün özellikleri aşağıda verilmiştir.

a) $Z(Ay_k + Bw_k) = AZ(y_k) + BZ(w_k)$,

b) $n>0$ olmak üzere $Z(y_{k+n})=z^n Z(y_k)-\sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$,

c) $k>0$ olmak üzere $Z(y_{k-n})=z^{-n}Z(y_k)$,

d) $Z(\sum_{i=0}^{k} y_i)=\dfrac{z}{z-1}Z(y_k)$,

e) $Z(ky_k)=-z\dfrac{d}{dz}\left[Z(y_k)\right]$,

f) $F(z)=Z(y_k)$,

g) $\lim_{k\to\infty} y_k=\lim_{z\to\infty} F(z)$,

h) $z\geq 1$ olmak üzere $\lim_{k\to\infty} y_k=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$ (Mickens 1990).

(3.1.1) homogen denklemine Z dönüşümü uygulanarak, $F(z)$ fonksiyonu z nin iki polinomunun oranı biçiminde de yazılabilir. Yani, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ ve $b_0,b_1,\cdots,b_m$ sabitler ve $b_0\neq 0$ olmak üzere;

$$F(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

biçiminde de yazılabilir. Benzer şekilde (3.2.1) homogen olmayan denklemine de Z dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+n-i)=r(k)\ ,\ a_0=1$$

olur. Teorem 3.2.7 den ;

$$Z(y(k+n-i))=z^{n-i}F(z)-\sum_{p=0}^{n-i-1} y(p)z^{n-i-p}$$

yazılabilir. Burada $F(z)=Z(y(k))$ dır. $r(k)$ için bir Z dönüşümü

$$G(z)=Z(r(k))$$

biçiminde tanımlansın. O halde (3.2.1) homogen olmayan fark denklemine Z dönüşümü uygulanarak,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left(z^{n-i}F(z)-\sum_{p=0}^{n-i-1} y(p)z^{n-i-p}\right)=G(z)$$

olur. Buradan da $F(z)$

$$F(z)=\frac{G(z)+\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{p=0}^{n-i-1}y(p)z^{n-i-p}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}\ ,\ a_0=1$$

biçiminde elde edilir. Bu Z dönüşümünün hangi diziye ait olduğu bulunarak fark denkleminin çözümü elde edilir (Mickens 1990).

Örnek 3.2.5 : İkinci mertebeden lineer homogen,

$$y(k+2)-4y(k)=0$$

fark denklemine Z dönüşümünü uygulanırsa;

$$\left[z^2F(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]-4F(z)=0$$

olur. Buradan $F(z)$

$$F(z)=\frac{z^2y(0)-zy(1)}{z^2-4}$$

biçiminde elde edilir. Buna göre,

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{zy(0)-y(1)}{(z+2)(z-2)}=\frac{2y(0)-y(1)}{4}\frac{1}{z+2}+\frac{2y(0)+y(1)}{4}\frac{1}{z-2}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan çözüm;

$$y(k)=\frac{1}{4}(2y(0)-y(1))(-2)^k+\frac{1}{4}(2y(0)+y(1))2^k$$

olarak bulunur. Burada $y(0)$ ve $y(1)$ keyfi başlangıç değerleridir.

Örnek 3.2.6 : İkinci mertebeden, lineer, homogen olmayan,

$$y(k+2)+4y(k+1)+3y(k)=2^k$$

denklemine Z dönüşümü uygulanırsa;

$$G(z)=Z\left(2^k\right)=\frac{z}{z-2}$$

olmak üzere,

$$\left[z^2F(z)-z^2y(0)-zy(1)\right]+4\left[zF(z)-zy(0)\right]+3F(z)=G(z)$$

olur. Buradan,

$$F(z)=\frac{\frac{z}{z-2}+y(0)z^2+(4y(0)+y(1))z}{z^2+4z+3}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{y(0)(z+4)}{(z+1)(z+3)}+\frac{y(1)}{(z+1)(z+3)}+\frac{1}{(z-2)(z+1)(z+3)}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki toplamlar,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+3}$$

$$\frac{z+4}{(z+1)(z+3)}=\frac{3}{2}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+3}$$

$$\frac{1}{(z-2)(z+1)(z+3)}=\frac{1}{15}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{6}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{10}\frac{1}{z+3}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılarak yazılabilir. O halde,

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{6}\frac{3y(3)-9y(0)-1}{z+1}+\frac{1}{10}\frac{1-5y(0)-5y(1)}{z+3}+\frac{1}{15}\frac{1}{z-2}$$

biçiminde yazılır. Böylece çözüm;

$$y(k)=\frac{1}{6}(3y(1)+9y(0)-1)(-1)^k+\frac{1}{10}(1-5y(0)-5y(1))(-3)^k+\frac{1}{15}2^k$$

olarak elde edilir.

3.3 Lineer Olmayan Fark Denklemleri

Bu kesimde lineer olmadığı halde basit dönüşümlerle lineer hale dönüştürülebilen ve Kesim 3.1 ve 3.2 deki gibi çözümü elde edilen bazı tipten denklemler ele alınmıştır.

p ve q keyfi sabitler olmak üzere;

$$y(k+1)y(k)+py(k+1)+qy(k)=0 \tag{3.3.1}$$

biçimindeki lineer olmayan fark denklemi için $z(k)=\dfrac{1}{y(k)}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{z(k+1)z(k)}+p\frac{1}{z(k+1)}+q\frac{1}{z(k)}=0$$

olur. Buradan

$$qz(k+1)+pz(k)+1=0 \tag{3.3.2}$$

biçiminde sabit katsayılı, lineer, homogen fark denklemi elde edilir. (3.3.2) denkleminin homogen kısmının karakteristik denklemi $q\lambda + p = 0$ olduğundan (3.3.2) nin genel çözümü $z^{(c)}(k) = c_1\left(-\frac{p}{q}\right)^k$ olur. Homogen olmayan kısmın özel çözümü ise,

$$z^{(p)}(k) = -\frac{1}{p+q}$$

olup, (3.3.2) denkleminin genel çözümü;

$$z(k) = c_1\left(-\frac{p}{q}\right)^k - \frac{1}{p+q}$$

biçiminde elde edilir. Buradan da (3.3.1) denkleminin genel çözümü;

$$y(k) = \frac{1}{z(k)} = \frac{1}{c_1\left(-\frac{p}{q}\right)^k - \frac{1}{p+q}}$$

şeklinde elde edilir (Elaydi 1999).

(3.3.1) denkleminin homogen olmayan hali için, yani p ve q keyfi sabitler ve $r(k)$, k ya bağlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$y(k+1)y(k) + py(k+1) + qy(k) = r(k) \tag{3.3.3}$$

denklemi için,

$$y(k) = \frac{z(k+1)}{z(k)} - p$$

dönüşümü yapılarak

$$z(k+2) + (q-p)z(k+1) - (r(k) + pq)z(k) = 0 \tag{3.3.4}$$

lineer fark denklemi elde edilir (Elaydi 1999).

$f\left(\frac{y(k+1)}{y(k)}, k\right) = 0$ tipindeki denklemlerin lineerleştirilebilmesi için $z(k) = \frac{y(k+1)}{y(k)}$ dönüşümü yapılır (Elaydi 1999).

$$(y(k+n))^{m_1}(y(k+n-1))^{m_2}\ldots(y(k))^{m_{n+1}} = r(k) \tag{3.3.9}$$

tipindeki lineer olmayan denklemler için $z(k)=\ln y(k)$ dönüşümü kullanılarak lineer olmayan (3.3.9) denklemi

$$m_1 z(k+n)+m_2 z(k+n-1)+\cdots+m_{n+1}z(k)=\ln r(k) \tag{3.3.10}$$

biçiminde sabit katsayılı lineer denkleme indirgenir. Bu denklemin Kesim 3.1 ve 3.2 deki metotlarla çözümü elde edilir. Böylece $y(k)=e^{z(k)}$ ters dönüşümü ile (3.3.9) denkleminin genel çözümü elde edilmiş olur (Elaydi 1999).

3.4 Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Davranışı

n pozitif tamsayı ve $i=1,2,\ldots,n$ için P_i reel değerli olsun.

$$y(k+n)+P_1 y(k+n-1)+\ldots+P_n y(k)=0, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{3.4.1}$$

fark denklemi,

$$\det(\lambda^n I+\lambda^{n-1}P_1+\ldots+\lambda P_{n-1}+P_n)=0 \tag{3.4.2}$$

karakteristik denklemi göz önüne alınsın. Bu kesimde (3.4.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenmiştir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 3.4.1 : Eğer (3.4.1) denklemi belirli bir değerden sonraki değerler için daima negatif değilse ve yine belirli bir değerden sonra daima sıfır olmuyorsa, o zaman (3.4.2) denklemi reel köke sahip değildir (Györi ve Ladas 1991).

Teorem 3.4.2 : (3.4.1) denklemi göz önüne alınsın. $n,m\in N$ ve $j=-n,\ldots,m$ için $q_j\in R$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $a(k+1)-a(k)+\sum_{j=-n}^{m} q_j a(k+j)=0$

denkleminin her çözümü salınımlıdır.

b) $\lambda-1+\sum_{j=-n}^{m} q_j \lambda^j=0$

karakteristik denklemi hiçbir pozitif köke sahip değildir (Györi ve Ladas 1991).

4. FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Bu bölümde son bölümde incelenecek fark denklemine benzer denklemler üzerinde son zamanlarda yapılan çalışmalar hakkında bilgiler ve son bölümde kullanılacak bazı yardımcı teoremler verilmektedir.

4.1 Son Zamanlarda Yapılmış Bazı Önemli Çalışmalar

Bu kesimde incelenecek fark denklemine benzer denklemler üzerinde son zamanlarda yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir. Bu tezin son bölümde özellikle Kır ve Bolat (2006) tarafından yapılan çalışmanın daha genel bir durumu verildiğinden önem taşımaktadır.

1. X. Lin (2005) tarafından, $\{p(k)\}$ ve $\{q(k)\}$ negatif olmayan diziler, τ ve n_0 pozitif tamsayı ve σ negatif olmayan tamsayı olmak üzere, yüksek mertebeden;

$$\Delta^n\left[y(k)-p(k)y(k-\tau)\right]=q(k)y^{\alpha}(k-\sigma)\ , \quad n\geq n_0 \qquad (4.1.1)$$

fark denklemi ele alınarak bu denklemin çözümlerinin salınımlılığını veren aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 : $\{p(k)\}$ ve $\{q(k)\}$ negatif olmayan diziler, τ ve n_0 birer pozitif tamsayı ve σ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, (4.1.1) fark denklemi $k\to\infty$ için sonsuza giden bir $\{y(k)\}$ çözümüne sahiptir.

Teorem 4.1.2 : $\{p(k)\}$ ve $\{q(k)\}$ negatif olmayan diziler, τ ve n_0 birer pozitif tamsayı, σ negatif olmayan bir tamsayı, $p\in(0,1)$ ve $p\leq p(k)\leq 1$ olmak üzere, (4.1.1) fark denkleminde,

$$\liminf_{k\to\infty}\left[q(k)\exp\left(-e^{\lambda k}\right)\right]>0$$

olacak biçimde bir $\lambda\geq 0$ varsa (4.1.1) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.3 : $\{p(k)\}$ ve $\{q(k)\}$ negatif olmayan diziler, τ ve n_0 birer pozitif tamsayı ve σ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, (4.1.1) fark denkleminde $p \le p(k) \le p^*$ ve $\sum_{k=k_0}^{\infty} k^{n-1} q(k) = \infty$ olacak şekilde $p^* \in (1,\infty)$ varsa (4.1.1) denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır.

2. Li ve Saker (2003) tarafından, γ, $0 < \gamma < 1$ özellikteki tek pozitif tamsayıların oranı, bütün $k \ge 0$ için $a(k) > 0$, $q(k) \ge 0$, $0 \le p(k) < 1$ ve $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{a(k)} = \infty$ olmak üzere, ikinci mertebeden nötral gecikmeli;

$$\Delta[a(k)\Delta(y(k) + p(k)y(k-\tau))] + q(k)y^{\gamma}(k-\sigma) = 0 \tag{4.1.2}$$

altlineer fark denklemelerinin çözümlerinin salınımlılığını veren aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.4 : γ, $0 < \gamma < 1$ özellikteki tek pozitif tamsayıların oranı, bütün $k \ge 0$ için $a(k) > 0$, $q(k) \ge 0$, $0 \le p(k) < 1$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{a(k)} = \infty$, $Q(k) = q(k)(1 - p(k-\sigma))^{\gamma}$, $\{\rho(k)\}$ pozitif tanımlı bir dizi ve $\alpha \ge 1$ olmak üzere,

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \left[\rho(i)Q(i) - \frac{a(i-\sigma)(\alpha(i+1-\sigma))^{1-\gamma}(\Delta\rho(i))^2}{4\gamma\rho(i)} \right] = \infty$$

sağlanırsa (4.1.2) denkleminin her bir çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.5 : (4.1.2) fark denklemi için Teorem 4.1.4 de verilen koşullar sağlansın. $m \ge 0$ için $H(m,m) = 0$, $m > k > 0$ için $H(m,k) > 0$, $\Delta H(m,k) = H(m,k+1) - H(m,k)$ olacak şekilde bir $\{H(m,k); m \ge k \ge 0\}$ dizisi tanımlansın ve $h(m,k) = \frac{-\Delta^2 H(m,k)}{\sqrt{H(m,k)}}$,

$\overline{\rho(k)} = \frac{\gamma\rho(k)}{((\alpha(k+1-\alpha))^{1-\gamma}(a(k-\sigma)))}$ olmak üzere, eğer,

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{H(m,0)} \sum_{k=k_0}^{m-1} \left[H(m,k)\rho(k)Q(k) - \frac{\rho_{k+1}^2}{4\overline{\rho(k)}} \left(h(m,k)\sqrt{H(m,k)} - \frac{\Delta\rho(k)}{\rho(k+1)} \right)^2 \right] = \infty$$

sağlanırsa (4.1.2) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3. Agarwal (2000) tarafından, $k \in N$ olmak üzere, birinci mertebeden nötral gecikmeli ve ikinci taraflı;

$$\Delta\left(y(k)+py(k-\tau)\right)+q(k)y(k-\sigma)=F(k) \tag{4.1.3}$$

fark denklemelerinin çözümlerinin salınımlılığını veren aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.6 : (4.1.3) denkleminde $p \geq 0$, yeterince büyük bütün k lar için $q(k) \leq 0$ ve $\Delta h(k)=F(k)$ biçiminde tanımlı $h(k)$ fonksiyonu için $\limsup_{k\to\infty} h(k)=\infty$ ve $\liminf_{k\to\infty} h(k)=-\infty$ özellikleri sağlanıyorsa (4.1.3) denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.7 : (4.1.3) denkleminde $p \geq 0$, yeterince büyük bütün k lar için $q(k) \geq 0$ ve $\Delta h(k)=F(k)$ biçiminde tanımlı $h(k)$ fonksiyonu için $\limsup_{k\to\infty} h(k)=\infty$ ve $\liminf_{k\to\infty} h(k)=-\infty$ özellikleri sağlanıyorsa (4.1.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 4.1.8 : p pozitif sayısı için $p \geq p(k) \geq 0$, $q(k) \geq 0$ ve $L>0$ olmak üzere $q(k) \leq Lq(k-\tau)$ olsun. Birinci mertebeden ikinci taraflı;

$$\Delta\left(y(k)+p(k)y(k-\tau)\right)+q(k)y(k-\sigma)=F(k) \tag{4.1.4}$$

fark denklemi göz önüne alınsın. $\Delta h(k)=F(k)$ biçiminde tanımlı $h(k)$ fonksiyonu için $h_+(k)=\max\{h(k),0\}$ ve $h_-(k)=\max\{-h(k),0\}$ olarak tanımlansın. O zaman eğer;

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} q(k+\sigma)h_+(k)=\infty$$

sağlanırsa (4.1.4) denklemi salınımlıdır.

4. Kır ve Bolat (2006) tarafından, $k,n \in N$, $n \geq 2$, α sayısı $0<\alpha<1$ özellikli pozitif tek tamsayıların oranı, p fonksiyonu $\lim_{k\to\infty} p(k)=0$ özelliğinde salınımlı bir fonksiyon, her $k \in N(k_0)$ için $q(k) \geq 0$, $k \to \infty$ iken $\tau(k) \to \infty$ ve $\sigma(k) \to \infty$ olacak şekilde $\tau(k) < k$ ve $\sigma(k) < k$ olmak üzere,

$$\Delta^n\left[y(k)+p(k)y(\tau(k))\right]+q(k)y^{\alpha}(\sigma(k))=0, \qquad (4.1.5)$$

biçimindeki bir fark denkleminin salınımlılığı ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.9 : (4.1.5) denklemi göz önüne alınsın. n çift sayı, $z(k) = y(k) + p(k)y(\tau(k))$ ve yeterince büyük bütün k değerleri için,

$$\Delta z(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)z^{\alpha}(\sigma(k)) \leq 0$$

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman (4.1.5) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $k \to \infty$ iken sıfıra gider.

Teorem 4.1.10 : (4.1.5) denklemi göz önüne alınsın. n tek sayı, $z(k) = y(k) + p(k)y(\tau(k))$ ve yeterince büyük bütün k değerleri için,

$$\Delta z(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{\left[2(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)z^{\alpha}(\sigma(k)) \leq 0 \qquad (4.1.6)$$

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman (4.1.5) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $k \to \infty$ iken sıfıra gider.

4.2 Yardımcı Teoremler

Bu kesimde son bölümde kullanılacak olan bazı yardımcı teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 4.2.1 (Ayrık Knasser Teoremi) : $k \geq k_0 \in N$ için, $y(k)$ tanımlı olsun ve $\Delta^n y(k)$ ifadesi $k \geq k_0$ ve $n \in N$ için özdeş olarak sıfır olmamak üzere $y(k) > 0$ olsun. O zaman $\Delta^n y(k) \leq 0$ için $n+m$ tek doğal sayı veya $\Delta^n y(k) \geq 0$ için $n+m$ çift doğal sayı olacak biçimde, $0 \leq m \leq n$ özelliğinde bir m tamsayısı vardır ki;

i. $m \leq n-1$ olduğunda her $k \geq k_0$ ve $m \leq i \leq n-1$ için

$(-1)^{m+i}\Delta^i y(k) > 0,$

ii. $m \geq 1$ ise her büyük $k \geq k_0$ ve $1 \leq i \leq m-1$ için

$\Delta^i y(k) > 0$

olur (Agarwal 2000).

Lemma 4.2.2 : $k \geq k_0$ için $y(k)$ tanımlı olsun ve $k \geq k_0$ için $y(k) > 0$; $\Delta^{n-1}y\left(k\right) \leq 0$ ve özdeş olarak sıfırdan farklı olsun. O zaman öyle büyük bir $k_1 \geq k_0$ vardır ki, m Lemma 4.2.1 deki gibi tanımlanmak üzere,

$$y(k) \geq \frac{1}{(n-1)!}\left(k-k_1\right)^{n-1}\Delta^{n-1}y(2^{n-m-1}k),\ k \geq k_1.$$

dir. Ayrıca eğer $y(k)$ artan ise,

$$y(k) \geq \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^{n-1}\Delta^{n-1}y(k),\ k \geq 2^{n-1}k_1.$$

olur (Agarwal 2000).

Lemma 4.2.3 : $\alpha \in \left(0,1\right)$ ve l pozitif tamsayı olsun. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q\left(k\right) = \infty$ ise o zaman

$$\Delta u\left(k\right) + q\left(k\right)u^{\alpha}\left(k-l\right) \leq 0$$

fark eşitsizliği belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözümlere sahip değildir (Tang 2001).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölüm tezin orijinal bölümüdür. Bu bölümde ele alınacak denklem bundan önceki bölümün birinci kesiminde de yer verilen Kır ve Bolat (2006) tarafından ele alınan,

$$\Delta^n\left[y(k)+p(k)y(\tau(k))\right]+q(k)y^{\alpha}(\sigma(k))=0$$

biçimindeki bir fark denkleminin ikinci taraflı bir genişlemesidir. Yani, $k,n\in N$, $n\geq 2$, α, $0<\alpha<1$ özellikli pozitif tek tamsayıların oranı, p fonksiyonu $\lim_{k\to\infty} p(k)=0$ özelliğinde salınımlı bir fonksiyon, her $k\in N(k_0)$ için $q(k)\geq 0$, $k\to\infty$ iken $\tau(k)\to\infty$ ve $\sigma(k)\to\infty$ olacak şekilde $\tau(k)<k$ ve $\sigma(k)\leq k$, $r(k)$ salınımlı bir fonksiyon ve $\lim_{k\to\infty} s(k)=0$ özelliğinde bir fonksiyon $\Delta^n s(k)=r(k)$ olmak üzere, fark denklemlerinin bir sınıfı olan yüksek mertebeden salınımlı katsayılı nötral tipten altlineer ikinci taraflı,

$$\Delta^n[y(k)+p(k)y(\tau(k))]+q(k)y^{\alpha}(\sigma(k))=r(k), \tag{5.1.1}$$

fark denklemi ele alınarak, bütün $k\geq \min_{i\geq 0}\tau\{(i),\sigma(i)\}$ lar için bu denklemi sağlayan ve $y(k): Z\to R$ biçiminde tanımlanan bütün çözümlerin salınımlılığını veren yeter şartlar içeren yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Kır ve Bolat (2006) tarafından $z(k)=y(k)+p(k)y(\tau(k))$ olarak tanımlanmıştır. Bu tezde de,

$$z(k)=y(k)+p(k)y(\tau(k))-s(k) \tag{5.1.2}$$

olarak tanımlanacaktır. Eğer $r(k)=0$ olarak alınırsa $s(k)=0$ olacağından Kır ve Bolat (2006) tarafından ele alınan fark denklemi elde edilir. Dolayısıyla bu tezde daha genel bir fark denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı hakkında yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 5.1.1 : $n\in N$ çift sayı olsun. Ayrıca yeterince büyük bütün k değerleri için,

$$\Delta z(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)z^{\alpha}(\sigma(k))\leq 0 \tag{5.1.3}$$

eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman (5.1.1) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $k \to \infty$ için sıfıra gider.

İspat : İspat aksini ispat metoduyla yapılacaktır. (5.1.1) denklemi salınımlı olmayan sınırlı bir $y(k)$ çözümü olsun. Yani $y(k)$ daima pozitif ya da negatif değerler alsın. Ayrıca $y(k)$, $k \to \infty$ için sıfıra gitmesin. Önce $y(k) > 0$ kabulü göz önüne alınsın. $y(k) > 0$ olduğundan her $k \ge k_1 \ge k_0$ için $y(\tau(k)) > 0$ ve $y(\sigma(k)) > 0$ olacak biçimde $k_1 \in N(k_0)$ vardır. (5.1.1) ve (5.1.2) eşitliklerinden,

$$\Delta^n z(k) = -q(k) y^{\alpha}(\sigma(k)) \ , \quad (0 < \alpha < 1 \ , \quad k \ge k_1 \ ) \tag{5.1.4}$$

olur. (5.1.4) eşitliği $\Delta^{n-1} z(k)$ in azalan olduğunu ve $a = 0,1,2,\cdots,n-1$ için $\Delta^a z(k)$ nın, kesin monoton ve daima sabit işaretli olduğunu gösterir. $y(k)$ sınırlı ve $\lim_{k\to\infty} p(k) = 0$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} p(k) y(\tau(k)) = 0$ ve $\lim_{k\to\infty} s(k) = 0$ olarak alındığından $k \ge k_2$ için $z(k) > 0$ olacak biçimde bir $k_2 \ge k_1$ vardır. n çift olduğundan lemma 4.2.1 gereği $m = 1$ olur. Aksi halde $z(k)$ sınırlı olmaz. Yani öyle bir $k \ge k_3$ için;

$$(-1)^{i+1} \Delta^i z(k) > 0 \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n-1) \tag{5.1.5}$$

olur. Buradan $\Delta z(k) > 0$ olduğu ve $z(k)$ nın artan olduğu görülür. $y(k)$ sınırlı olduğundan ve $k \to \infty$ iken sıfıra gitmediğinden $z(k)$ da sınırlı olur. O halde bütün $k \ge k_3$ için;

$$y(k) = z(k) - p(k) y(\tau(k)) + s(k) \ge \frac{1}{2} z(k) > 0$$

olacak şekilde bir $k_3 \ge k_2$ bulunabilir. O zaman bütün $k \ge k_4$ için

$$y(\sigma(k)) \ge \frac{1}{2} z(\sigma(k)) > 0$$

olacak biçimde bir $k_4 \ge k_3$ vardır. Böylece $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $k \ge k_4$ için

$$y^{\alpha}(\sigma(k)) \ge \left[\frac{1}{2} z(\sigma(k))\right]^{\alpha} > 0 \ , \tag{5.1.6}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bunun (5.1.4) de yazılması ile bütün $k \ge k_4$ için

$$\Delta^n z(k) + q(k) \left[\frac{1}{2} z(\sigma(k))\right]^{\alpha} \le 0 \ , \tag{5.1.7}$$

elde edilir. $z(k)>0$ ve ve $a=0,1,2,\cdots,n-1$ için $\Delta^a z(k)$ monoton ve sabit işaretli, $\Delta^n z(k)$ özdeş olarak sıfır değil ve özellikle $z(k)$ artan olduğundan Lemma 4.2.2 gereği (5.1.7) eşitsizliği bütün $k \ge k_4$ için;

$$\Delta^n z(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)\left(\Delta^{n-1}z(\sigma(k))\right)^{\alpha} \le 0 \qquad (5.1.8)$$

biçiminde yazılır ve (5.1.8) eşitsizliğinde $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)$ alınırsa bütün $k \ge k_4$ için (5.1.8) eşitsizliği;

$$u(k)+\frac{1}{\left[2\left(2^{n-1}\right)^{n-1}(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)\sigma^{\alpha(n-1)}(k)u^{\alpha}(\sigma(k)) \le 0$$

biçimine gelir. Lemma 4.2.3 ve hipotez gereği son eşitsizlik belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözüme sahip değildir. Bu ise $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)>0$ olması ile çelişir

Şimdi (5.1.1) denkleminin bir yerden sonra daima negatif değerler alan bir çözüme sahip olduğu kabul edilirse, o zaman bütün $k \in N(k_0)$ değerleri için $x(k)>0$ olmak üzere $y(k)=-x(k)$ alınarak (5.1.1) denkleminden;

$$\Delta^n\left[-x(k)-p(k)x(\tau(k))\right]-q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=r(k), \quad k,n \in N, \quad n \ge 2 \qquad (5.1.9)$$

veya

$$\Delta^n\left[x(k)+p(k)x(\tau(k))\right]+q(k)x^{\alpha}(\sigma(k))=-r(k), \quad k,n \in N, \quad n \ge 2 \qquad (5.1.10)$$

yazılır. (5.1.10) denklemi için yukarıdaki işlemler tamamen benzer biçimde sürdürülerek aynı çelişkiye varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.2 : n tek olsun. Ayrıca yeterince büyük bütün k lar için,

$$\Delta z(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{\left[2(n-1)!\right]^{\alpha}}q(k)z^{\alpha}(\sigma(k)) \le 0 \qquad (5.1.11)$$

fak eşitsizliği hiçbir pozitif çözüme sahip olmasın. O zaman (5.1.1) denkleminin sınırlı her çözümü ya salınımlıdır ya da $k \to \infty$ için sıfıra gider.

İspat : İspat aksini ispat metoduyla yapılacaktır. (5.1.1) denkleminin salınımlı olmayan sınırlı bir $y(k)$ çözümü olsun. Yani $y(k)$ bir yerden sonra daima pozitif ya da negatif değerler alsın. Ayrıca $y(k)$, $k \to \infty$ için sıfıra gitmesin. Önce $y(k)>0$ kabulünü göz önüne alalım. $y(k)>0$ olduğundan her $k\geq k_1\geq k_0$ için $y(\tau(k))>0$ ve $y(\sigma(k))>0$ olacak biçimde $k_1\in N(k_0)$ vardır. O halde Teorem 5.1.1 ispatındaki gibi $z(k)$ fonksiyonu sınırlı olur. n tek olduğundan Lemma 4.3.1 gereği $m=0$ olur. Aksi halde $z(k)$ sınırlı olmaz. $i=0,1,2,\cdots,n-1$ ve bütün $k\geq k_2$ için;

$$(-1)^i\Delta^i z(k)>0 \tag{5.1.12}$$

olur. Buradan $\Delta z(k)<0$ olduğu ve $z(k)$ nın azalan olduğu görülür. O halde bütün $k\geq k_3$ için;

$$y(k)=z(k)-p(k)y(\tau(k))+s(k)\geq\frac{1}{2}z(k)>0$$

olacak şekilde bir $k_3\geq k_2$ bulunabilir. O zaman bütün $k\geq k_4$ için;

$$y(\sigma(k))\geq\frac{1}{2}z(\sigma(k))>0$$

olacak biçimde bir $k_4\geq k_3$ vardır. Böylece $0<\alpha<1$ olmak üzere $k\geq k_4$ için

$$y^\alpha(\sigma(k))\geq\left[\frac{1}{2}z(\sigma(k))\right]^\alpha>0 \tag{5.1.13}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bunun (5.1.4) de yazılması ile bütün $k\geq k_4$ için

$$\Delta^n z(k)+\frac{1}{2^\alpha}q(k)z^\alpha(\sigma(k))\leq 0 \tag{5.1.14}$$

elde edilir. $z(k)>0$ ve $a=0,1,2,\cdots,n-1$ için $\Delta^a z(k)$ monoton ve sabit işaretli, $\Delta^n z(k)$ özdeş olarak sıfır değil ve özellikle $z(k)$ azalan olduğundan Lemma 4.2.2 gereği (5.1.14) eşitsizliği bütün $k\geq k_4$ için;

$$\Delta^n z(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{[2(n-1)!]^\alpha}q(k)\Delta^{n-1}z^\alpha(\sigma(k))\leq 0 \tag{5.1.15}$$

biçiminde yazılır. (5.1.15) eşitsizliğinde $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)$ yazılırsa;

$$u(k)+\frac{(k-k_4)^{\alpha(n-1)}}{[2(n-1)!]^\alpha}q(k)u^\alpha(\sigma(k))\leq 0$$

elde edilir. Lemma 4.2.3 ve hipotez gereği son eşitsizlik belli bir değerden sonra daima pozitif değerler alan çözüme sahip değildir. Bu ise $u(k)=\Delta^{n-1}z(k)>0$ olması ile çelişir.

Şimdi (5.1.1) denkleminin bir yerden sonra daima negatif değerler alan bir çözüme sahip olduğu kabul edilirse, o zaman bütün $k \in N(k_0)$ değerleri için $x(k) > 0$ olmak üzere $y(k) = -x(k)$ alınarak (5.1.1) denkleminden;

$$\Delta^n[-x(k) - p(k)x(\tau(k))] - q(k)x^{\alpha}(\sigma(k)) = r(k), \quad k, n \in N, \quad n \geq 2 \tag{5.1.16}$$

veya

$$\Delta^n[x(k) + p(k)x(\tau(k))] + q(k)x^{\alpha}(\sigma(k)) = -r(k), \quad k, n \in N, \quad n \geq 2 \tag{5.1.17}$$

yazılır. (5.1.17) denklemi için yukarıdaki işlemler tamamen benzer biçimde sürdürülerek aynı çelişkiye varılır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.1.1 : $n = 2$ ve $\alpha = \dfrac{1}{5}$ olmak üzere,

$$\Delta^2\left[y(k) + \frac{1}{(-2)^k}y(k-1)\right] + 2y^{1/5}(k-4) = \frac{1}{(-2)^k} \tag{5.1.18}$$

fark denklemi göz önüne alınsın. $p(k) = \dfrac{1}{(-2)^k}$ fonksiyonu salınımlı olup, $\lim\limits_{k\to\infty} p(k) = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{(-2)^k} = 0$ olur. Yine her k değeri için $q(k) = 2 \geq 0$ ve $r(k) = \dfrac{1}{(-2)^k}$ salınımlı fonksiyon, $s(k) = \dfrac{1}{9(-2)^{k-2}}$ için $\Delta^2 s(k) = r(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} s(k) = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{9(-2)^{k-2}} = 0$ olur. Ayrıca $\tau(k) = k-1 < k$ olup, $k \to \infty$ iken $\tau(k) \to \infty$ ve $\sigma(k) = k-4 < k$ olup $k \to \infty$ iken $\sigma(k) \to \infty$ olduğundan (4.3.1) denkleminin bütün şartları sağlanır.

Teorem 5.1.1 in hipotezi gereği, $k \geq 8$ için;

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=k-4}^{k-1} 4^{-1/5}2(i-4)^{1/5} = 2^{3/5}\lim_{k\to\infty}\left[(k-8)^{1/5} + (k-7)^{1/5} + (k-6)^{1/5} + (k-5)^{1/5}\right] = \infty$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.2.3 ve Teorem 5.1.1 gereği (5.1.18) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Böyle çözümlerden biri $y(k) = (-1)^k$ biçimindedir.

6. KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., 1997. “Advanced Topics in Difference Equation”, Kluwer Academic Publishers, London, England.

Agarwal, R.P., 2000. “Difference Equations and Inequalities”, Marcel Dekker, New York, USA.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. ve O'Regan, D., 2000. “Oscillation Theory for Difference and Differential Equations”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Akın, Ö., 1988. “Nümerik Analiz”, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara.

Akın, Ö., Bulgak, H., 1998. “Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi”, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya.

Bolat, Y., 2003. “Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Salınımlılığı”, Doktora Tezi Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Györi, I. and Ladas, G., 1991. “Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications”, Clarendon Press, Oxford, England.

Goldberg S., 1958. “Introduction to Difference Equations”, Chapter 2 and 3, Yohn Wiley and Sons, New York.

Hildebrand F.B., 1968. “Finite-Difference Equations and Simulations”, Prentice-Hall New Jersey, USA.

Elaydi S.N., 1999. “An Introduction to Difference Equations”, Springer, San Antonio, USA.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C., 1991. “Difference Equations an Introduction with Applications”, Academic Press, Boston, USA.

Kır, İ. and Bolat, Y., 2006. “Oscillation criteria for higher-order sublinear neutral delay difference equations with oscillating coefficients”, International Journal of Difference Equations (IJDE) Vol.1, No.2, pp. 219-223.

Mickens, R.E., 1990. “Difference Equations”, Van Nostrand Reinhold, Newyork, USA.

Lakshmikantham, V. And Trigiante, D., 1988. “Theory of Difference Equations”, Academic Press, London, England.

Li, W.T. and Saker, S.H., 2003. “Oscillation of second-order sublinear neutral delay difference equations”, N-H Elsevier Applied Mathematics and Computation, Vol. 146, pp. 543-551.

Lin, X., 2005. “Oscillation for higher-order neutral superlinear delay difference Equations with unstable type”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 50, pp. 683-691.

Özcan, M.A. and Bolat, Y., 2007. “Oscillation criteria for higher-order sublinear neutral delay forced difference equations with oscillating coeffients”, Demonstratio Mathematice, Vol:40 No:4 (baskıda)

Tang, X.H. and Liu, Y.J., 2001, “Oscillation for nonlinear delay difference equations”, Tamkang J. Math. Vol.32, pp. 275-280.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mustafa Asım ÖZCAN
Doğum Yeri	: Sincanlı
Doğum Tarihi	: 02.03.1981
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	: Gazi Teknik Lisesi Bilgisayar Yazılımı / 1995 – 1999
Lisans	: İnönü Üniversitesi Adıyaman F.E.F / 2000 – 2004
Yüksek Lisans	: AKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü / 2004 - ……

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl aralığı

Rasatçı Yardımcısı	: Adıyaman Meteoroloji İl Müdürlüğü / 2000 – 2003
Rasatçı	: Adıyaman Meteoroloji İl Müdürlüğü / 2003 – 2004
Matematikçi (Personel Birim Sorumlusu)	: Afyonkarahisar Meteoroloji Bölge Müdürlüğü 2004 – ……

Yayınları (SCI ve diğer) :

M. Asım Özcan and Yaşar Bolat, Oscillation criteria for higher-order sublinear neutral delay forced difference equations with oscillating coeffients, Demonstratio Mathematice, Vol:40 No:4 (2007)

Diğer konular :