1. GİRİŞ

Matematikte özellikle fonksiyonel analizde dizilerin büyük bir önemi vardır. Uygulamalarda ise dizilerin sınırlı ve yakınsak olması büyük önem taşımaktadır Bu çalışmada $l_\infty,\ c$ ve c_o sırasıyla sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarını göstermek üzere bu dizilerin genelleştirilmesi, dualleri ve matris dönüşümleri incelenmiştir. $l_\infty,\ c$ ve c_o dizi uzayları öncelikle Kızmaz tarafından $\Delta-$dizi uzaylarına genişletilerek $l_\infty(\Delta),\ c(\Delta)$ ve $c_o(\Delta)$ dizi uzayları elde edilmiştir. Bu uzaylar kendileri sınırlı veya yakınsak olmamasına rağmen $\Delta-$sınırlı veya $\Delta-$yakınsak dizilerden oluşmuştur. Bu uzayların $\alpha-,\ \beta-, \gamma-$ ve sürekli dualleri incelenerek genişletilmiş bu uzaylar arasında tanımlanabilecek matris dönüşümü için gerek ve yeter şartlar anlatılmıştır. Mikail Et tarafından ise bu $\Delta-$dizi uzayları tekrar genişletilerek $l_\infty(\Delta^2),\ c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta^2)$ dizi uzayları elde edilmiştir. Mikail Et ve Rıfat Çolak tarafından bu dizi uzayları tekrar pozitif bir m sayısı için genelleştirilmiş ve $l_\infty(\Delta^m),\ c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ dizi uzayları elde edilmiştir. Elde edilen bu dizi uzaylarının Banach uzayı olduğu gösterilmiş ve birbirleri arasındaki kapsama bağıntıları verilmiştir. Bu uzaylar arasında lineer homeomorfizm ve lineer izometri tanımlanarak topolojik olarak denk uzaylar elde edilmiştir. $l_\infty(\Delta^m),\ c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ uzaylarının Köthe-Toeplitz dualleri incelenmiş ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir. $l_\infty,\ c,\ l_\infty(\Delta^2),\ c(\Delta^2),\ l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ dizi uzayları arasındaki matris dönüşümü için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir. Sıfırdan farklı kompleks sayıları sabit bir $v = (v_k)$ dizisi için bu uzaylar $l_\infty(\Delta_v^m),\ c(\Delta_v^m)$ ve $c_o(\Delta_v^m)$ dizi uzaylarına genelleştirilerek bu uzaylar için sağlanan bazı temel özellikler verilmiş ve $p\alpha-,\ p\beta,\ p\gamma$ ve N dualleri elde edilerek bu dualler için temel teoremler verilmiştir. Genelleştirilmiş bu $l_\infty(\Delta_v^m),\ c(\Delta_v^m)$ ve $c_o(\Delta_v^m)$ uzayları ile $l_\infty,\ c$ ve c_o uzayları arasındaki matris dönüşümleri için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda ileriki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. (Sınırlı Dizi) : (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_n| \leq K$$

olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.2. (Yakınsak Dizi): (x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanımı şu şekilde de vermek mümkündür.

(x_n) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir x reel sayısının ε komşuluğunda bulunuyorsa (x_n) dizisinin limiti x dir denir ve

$$\lim x_n = x \text{ veya } (x_n) \to x$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3. (Sıfıra Yakınsak Dizi) : $x = (x_n)$ bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ise x dizisine sıfıra yakınsayan dizi denir.

Tanım 2.4. (Cauchy Dizisi) : X bir lineer uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d\left(x_m - x_n\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.5. (Mutlak Yakınsak Seri) : $a = (a_n)$ reel veya kompleks terimli bir dizi olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Teorem 2.6. (Abel Kısmi Toplamı) : $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel veya kompleks terimli herhangi iki dizi olsun. $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} s_i \left(y_i - y_{i+1}\right) + s_n y_{n+1}$$

ifadesine Abel Kısmi Toplamı denir.

$n \to \infty$ için bu toplamı aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \left(y_i - y_{i+1}\right)$$

Tanım 2.7 (Homeomorfizm) : (X, τ) ve (Y, δ) iki topolojik uzay ve $f : (X, \tau) \to (Y, \delta)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonun tersi f^{-1} mevcut, f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli ise f ye (X, τ) dan (Y, δ) ya bir homeomorfizm denir. Bu durumda (X, τ) uzayı (Y, δ) uzayına homemorfiktir denir.

Tanım 2.8 (İzomorfizm) : X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Bu T dönüşümü X den Y ye yapıyı koruyan birebir ve üzerine bir dönüşüm ise T ye izomorfizm denir. Mesela (X, d) ve (Y, d') birer meetrik uzay ise X den Y ye bir T izomorfisi birebir, üzerine ve uzaklığı koruyan bir dönüşümdür. Yani

$$d\left(x, y\right) = d'\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right)$$

dir.

Tanım 2.9. (Metrik ve Metrik Uzay) : X boş olmayan bir cümle olsun.

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için,

$M1)$ $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$M2)$ $d(x,y) = d(y,x)$ (Simetri özelliği)

$M3)$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve genellikle (X,d) veya X_d ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Tam Metrik Uzay) : $X = (X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere X deki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay veya kısaca tamdır denir.

Tanım 2.11. (Lineer Uzay) : L boş olmayan bir cümle ve F, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

$A)$ L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

$G1)$ Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

$G2)$ Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

$G3)$ Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

$G4)$ Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$

. vardır.

$G5)$ Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

$B)$ $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$L1)$ $\alpha.x \in L$ dir.

$L2)$ $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

$L3)$ $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

$L4)$ $(\alpha\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

$L5)$ $1.x = x$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır.)

Tanım 2.12.(Alt Uzay) : L, F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $M \subset L$ olsun. Her $\alpha \in F$ ve her $x, y \in M$ için

1) $x + y \in M$

2) $\alpha x \in M$

şartları sağlanıyorsa M ye L nin bir alt uzayı denir. Bu iki şart, $\alpha,\ \beta \in F$ olmak üzere

$$\alpha x + \beta y \in M$$

olmasına denktir.

Tanım 2.13. (Normlu Uzay) : N bir lineer uzay olsun.

$$\|\| : N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$N1)$ $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\alpha \in F)$

$N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N, \|\|)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. (Banach Uzayı) : N normlu lineer uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

Tanım 2.15. (BK Uzayı) : Bir X dizi uzayı verilmiş olsun. Eğer X bir Banach uzayı ve tüm $x \in X$ için

$$\begin{aligned} P_k &: \quad X \to \mathbb{C} \\ P_k(x) &= x_k \quad (k = 0, 1, ...) \end{aligned}$$

sürekli ise X uzayına BK uzayı denir. Burada koordinatların sürekli olması aşağıdaki şekilde tanımlanır.

X ve Y iki Banach uzayı, $T : X \rightarrow Y$, (x_n) X de bir dizi ve $x \in X$ olsun.

$$x_n \rightarrow x \quad \text{iken} \quad T(x_n) \rightarrow T(x)$$

dir. BK uzayındaki B ve K harfleri "Banach" ve Almancadaki "Koordinate" kelimelerinden gelmektedir.

Tanım 2.16. (Operatör) : Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.17. (Lineer Operatör) : L ve L' aynı bir F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : L \rightarrow L'$ operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa T ye lineer operatör denir.

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (\alpha \in F)$

Tanım 2.18. (Sınırlı Lineer Operatör) : N ve N' normlu uzay ve $T : N \rightarrow N'$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|T(x)\|' \leq K \|x\|$$

olacak şekilde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.19. (Operatörün Normu) : N ve N' normlu uzay ve $T : N \rightarrow N'$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in N, \; x \neq \theta \right\}$$

ifadesine T operatörünün normu denir.

Tanım 2.20. : (Topolojik Uzay) : X boş olmayan bir cümle ve τ, X in alt cümlelerinin bir ailesi olsun.

T1) $X, \; \oslash \; \in \tau$ dur.

T2) τ ya ait her sonlu sayıdaki elemanların ara kesiti τ ya aittir.

T3) τ ya ait keyfi saydaki cümlelerin birleşimi yine τ ya aittir.

Yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) çiftine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.21.($\alpha-$Dual Uzay) X bir dizi uzayı olsun.

$$X^{\alpha} = \left\{ a = (a_k) : \sum_k |a_k x_k| < \infty \text{ her } x \in X \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanan X^{α} uzayına X'in $\alpha - dual$ uzayı denir. Aynı zamanda X^{α} uzayına X'in Köthe-Toeplitz dual uzayı da denir. $\phi \subset X^{\alpha}$ dır. $X \subset Y$ ise $Y^{\alpha} \subset X^{\alpha}$ dır. Açıkça görülebilir ki $X \subset X^{\alpha\alpha}$. Eğer $X = X^{\alpha\alpha}$ ise X e $\alpha - uzayı$ denir. Aynı zamanda $\alpha-$uzayına Köthe-Toeplitz uzayı veya perfect dizi uzayı da denir..

Tanım 2.22. (Regüler Matris) : Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer bu A matrisi yakınsak dizileri yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştürüyorsa A ya **regülerdir** denir.

Tanım 2.23. (Matris Dönüşümleri) : $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ kompleks sayıların sonsuz bir matrisi ve $x = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi her n için yakınsak ise $A(x) = (A_n(x))$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin A matris dönüşümü dizisi denir. Eğer $A_n(x) \to y$ ise $x = (x_k)$ dizisi y ye A toplanabilirdir denir.

3. FARK DİZİ UZAYLARI

3.1. Fark Dizi Uzaylarının Tanımı

Bu bölümde l_∞, c ve c_o uzaylarından yararlanılarak $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_o(\Delta)$ uzayları tanımlanacak ve bu uzayların dualleri (sürekli dual, $\alpha-$dual, $\beta-$dual ve $\gamma-$dual) verilecektir. Ayrıca, $l_\infty(\Delta)$ veya $c(\Delta)$ dan l_∞ veya c ye bir A matris dönüşümü için gerek ve yeter şartlar incelenecektir.

Tanım 3.1.1: l_∞, c ve c_o sırasıyla kompleks sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak $x=(x_k)$ dizilerinin lineer uzayını göstersin. Bu uzaylar için norm $k\in\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ pozitif tamsayı olmak üzere

$$\|x\|_\infty=\sup_k |x_k|$$

biçiminde ifade edilir. $\Delta x=(x_k-x_{k+1})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta) &= \{x=(x_k):\Delta x\in l_\infty\} \\ c(\Delta) &= \{x=(x_k):\Delta x\in c\} \\ c_o(\Delta) &= \{x=(x_k):\Delta x\in c_o\} \end{aligned}$$

tanımlanabilir. Bu uzaylar

$$\|x\|_\Delta=|x_1|+\|\Delta x\|_\infty$$

normuna göre Banach Uzaylarıdır. Örnek olarak aşağıdaki teoremde $l_\infty(\Delta)$ nın Banach uzayı olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.1.1 $(l_\infty(\Delta), \|.\|_\Delta)$ yukarıda tanımlanan norma göre Banach uzayıdır.

İspat : Her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = (x_i^n) = (x_1^n, x_2^n, ...) \in l_\infty(\Delta)$ olmak üzere (x^n) dizisi $l_\infty(\Delta)$ da Cauchy dizisi olsun. Buradan,

$$\|x^n - x^m\|_\Delta = |x_1^n - x_1^m| + \|\Delta x^n - \Delta x^m\|_\infty \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

olacaktır. $n, m \to \infty$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k^n - x_k^m| \to 0$ elde edilir.

Buradan $(x_k^n) = (x_k^1, x_k^2, ...)$ dizisi $\mathbb{C}$ de (kompleks sayıların kümesi) bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ nin tamlığından dolayı (x_k^n) dizisinin yakınsadığı bir x_k sayısı vardır. Yani her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n x_k^n = x_k$$

dır.

Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için $k \in \mathbb{N}$ ve her $n, m \geq N$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ vardır öyleki

$$|x_1^n - x_1^m| < \varepsilon, \ \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)\right| < \varepsilon$$

ve her $n \geq N$ için

$$\begin{aligned} \lim_m |x_1^n - x_1^m| &= |x_1^n - x_1| \leq \varepsilon \\ \lim_m \left|x_{k+1}^n - x_{k+1}^m - (x_k^n - x_k^m)\right| &= \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)\right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

dur.

ε, k ya bağlı olmadığından

$$\sup_k \left|x_{k+1}^n - x_{k+1} - (x_k^n - x_k)\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir.

Sonuç olarak her $n \geq N$ için $\|x^n - x\|_\Delta \leq 2\varepsilon$ olur.

Buradan $l_\infty(\Delta)$ da $(n \to \infty)$ için $x^n \to x$ elde edilir.

Şimdi $x \in l_\infty(\Delta)$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+1}| &= \left|x_k^n - x_k^N + x_k^N - x_{k+1}^N + x_{k+1}^N - x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|x_k^N - x_{k+1}^N\right| + \left\|x^N - x\right\|_\Delta \\ &= O(1) \end{aligned}$$

dir. Bu ise $x = (x_k) \in l_\infty(\Delta)$ demektir.

Üstelik $l_\infty(\Delta)$ Banach Uzayı sürekli koordinatlara sahip olduğundan (her $k \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $\|x^n - x\|_\Delta \to 0$ ise $|x_k^n - x_k| \to 0$) aynı zamanda bir BK-Uzayıdır.

Şimdi

$$\begin{aligned} s &: l_\infty(\Delta) \to l_\infty(\Delta) \\ x &\to sx = y = (0, x_2, x_3, ...) \end{aligned}$$

operatörü tanımlansın. Açıkça görülmektedir ki s, $l_\infty(\Delta)$ üzerinde sınırlı lineer operatördür ve $\|s\| = 1$ dir. Ayrıca

$$s[l_\infty(\Delta)] = sl_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : x \in l_\infty(\Delta),\ x_1 = 0\} \subset l_\infty(\Delta)$$

dır. Yani $s[l_\infty(\Delta)]$, $l_\infty(\Delta)$ nın alt uzayıdır ve $sl_\infty(\Delta)$ da

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta x\|_\infty$$

dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \Delta &: sl_\infty(\Delta) \to l_\infty \\ x &= (x_k) \to y = (y_k) = (x_k - x_{k+1}) \end{aligned}$$

nın lineer homeomorfizmi tanımlanabilir.

Böylece $sl_\infty(\Delta)$ ve l_∞ topolojik uzay anlamında denktirler. Δ ve Δ^{-1} normu korurlar ve

$\|\Delta\| = \|\Delta^{-1}\| = 1$ dir.

l_∞^* ve $[sl_\infty(\Delta)]^*$ sırasıyla l_∞ ve $sl_\infty(\Delta)$ nın sürekli duallerini göstersin.

Buna göre

$$\begin{aligned} T &: [sl_\infty(\Delta)]^* \to l_\infty^* \\ f_\Delta &\to f = f_\Delta \circ \Delta^{-1} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan T dönüşümü lineer izometridir.

Böylece $[sl_\infty(\Delta)]^*$ ve l_∞^* denk uzaylardır. Benzer yolla $sc(\Delta)$ ve c, $sc_o(\Delta)$ ve c_o ın da topolojik uzay anlamında denk oldukları gösterilebilir.

Ayrıca buradan

$[sc(\Delta)]^* \simeq [sc_o(\Delta)]^* \simeq l_1$ dir. (l_1 mutlak yakınsak seriler).

3.2. Dual Uzaylar

Bu bölümde $sl_\infty(\Delta)$ nın $\alpha-$, $\beta-$, ve $\gamma-$dualleri incelenerek kesin matris dönüşümlerindeki tanımlamalarda faydalı olacak sonuçları elde edilecektir.

Lemma 3.2.1. $\sup\limits_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup\limits_k k^{-1}|x_k| < \infty$

(ii) $\sup\limits_k \left|x_k - k(k+1)^{-1}x_{k+1}\right| < \infty$

İspat. $\sup\limits_k |x_k - x_{k+1}|$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} |x_k| &= |x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x_1 + x_1| \\ &\leq |x_k - x_{k+1}| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_1| \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

(3.2.1.) eşitsizliğinde

$$|x_1 - x_{k+1}| = \left|\sum_{v=1}^{k}(x_v - x_{v+1})\right| \leq \sum_{v=1}^{k}|x_v - x_{v+1}| = O(k)$$

olduğundan $\sup\limits_k k^{-1}|x_k| < \infty$ dur. Dolayısıyla (i) sağlanır.

$$\left|x_k - k(k+1)^{-1}x_{k+1}\right| = \left|k(k+1)^{-1}(x_k - x_{k+1}) + (k+1)^{-1}x_k\right| = O(1)$$

olduğundan (ii) sağlanır.

Şimdi ise (i) ve (ii) nin sağlandığı kabul edilsin. Buna göre

$\left|x_k - k(k+1)^{-1}x_{k+1}\right| \geq k(k+1)^{-1}|x_k - x_{k+1}| - (k+1)^{-1}|x_k|$

dır. Bu ise $\sup\limits_k |x_k - x_{k+1}| < \infty$ olduğunu gösterir.

(P_n) Pozitif sayıların sonsuza monoton artan bir dizisi olsun.

Lemma 3.2.2

$\sup\limits_n \left|\sum_{k=1}^n c_k\right| < \infty$ ise $\sup\limits_n \left(P_n\left|\sum_{k=1}^\infty \frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}}\right|\right) < \infty$ dur.

İspat. Abel kısmi toplamı kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{k}c_{n+v-1}\right)\left(\frac{1}{P_{n+k}} - \frac{1}{P_{n+k+1}}\right) \tag{3.2.2}$$

ve

$$P_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}}\right| = O(1)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3

$\sum_{k=1}^\infty c_k$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_n \left(P_n\left|\sum_{k=1}^\infty \frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}}\right|\right) = 0$ dır.

İspat. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|\sum_{v=1}^k c_{n+v-1}\right| = \left|\sum_{v=n}^{n+k-1} c_v\right| = o(1)$ olduğundan (3.2.2) kullanılarak

$$P_n\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}}\right| = o(1)$$

elde edilir.

Sonuçlar.3.2.4. (P_n) yukarıda tanımlandığı gibi kabul edilsin.

(a) $\sup\limits_n \left|\sum_{v=1}^{n} p_v a_v\right| < \infty$ ise $\sup\limits_n \left|P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| < \infty$ dır.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k$ yakınsak ise $\lim\limits_n P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ dır.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ yakınsaktır ancak ve ancak $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ olmak üzere $nR_n = o\,(1)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ yakınsaktır.

İspat (a) Lemma 3.2.2 de c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ yazarsak

$$\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} p_{k+1}a_{k+1}\right| < \infty \text{ ise } \sup_n \left(p_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k+n}a_{k+n}}{p_{k+n}}\right|\right) = \sup_n \left(p_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}\right|\right) < \infty$$

buradan da

$$P_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{n+k-1}}{p_{n+k}} = P_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = O\,(1)$$

elde edilir.

(b) Lemma 3.2.3 de c_k yerine $P_{k+1}a_{k+1}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1}a_{k+1} \text{ yakınsak ise } \lim_n \left(p_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k+1+n-1}a_{k+1+n-1}}{p_{k+n}}\right) &= 0 \\
\lim_n \left(p_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}\right) &= 0 \\
\lim_n \left(p_n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(c) Sonuç (b) de $P_n = n$ yazılarak Abel Kısmi Toplamı kullanıldığında

$$\sum_{k=1}^{n} k a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} R_k - nR_{n+1}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.5 X; $l_\infty,$ c veya c_o dizi uzaylarından herhangi birini göstersin.

(i) $X^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^\infty |a_k x_k| < \infty, \text{her } x \in X \text{ için}\}$

(ii) $X^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^\infty a_k x_k \text{ yakınsaktır, her } x \in X \text{ için}\}$

(iii) $X^\gamma = \left\{a = (a_k) : \sup\limits_n |\sum_{k=1}^n a_k x_k| < \infty \text{ , her } x \in X \text{ için}\right\}$

X^α, X^β ve X^γ uzaylarına sırasıyla X uzayının $\alpha-$ (veya Köthe-Toeplitz), $\beta-$ (veya Genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz) ve $\gamma-$ dualleri denir. $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ olduğu kolayca görülebilmektedir. $\dagger = \alpha,$ β, veya γ olmak üzere $X \subset Y$ ise $Y^\dagger \subset X^\dagger$ dır.

Teorem 3.2.6.

$R_k = \sum_{v=k+1}^\infty a_v$ olmak üzere

(1) $(sl_\infty(\Delta))^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^\infty k\, |a_k| < \infty\} = D_1$

(2) $(sl_\infty(\Delta))^\beta = \{a = (a_k) : \sum_{k=1}^\infty k a_k \text{ yakınsaktır, } \sum_{k=1}^\infty |R_k| < \infty\} = D_2$

(3)$(sl_\infty(\Delta))^\gamma = \left\{a = (a_k) : \sup\limits_n |\sum_{k=1}^n k a_k| < \infty,\ \sum_{k=1}^\infty |R_k| < \infty\right\} = D_3$

dir.

İspat. **(1)** Her $x \in sl_\infty(\Delta)$ için $a \in D_1$ ise

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k x_k| = \sum_{k=1}^n k\,|a_k|\,(|x_k|/k) < \infty$$

dur. (Lemma 3.2.1 den). Buna göre $a \in (sl_\infty(\Delta))^\alpha$ dır.

Her $x \in sl_\infty(\Delta)$ için $a \in (sl_\infty(\Delta))^\alpha$ ise $\sum_{k=1}^\infty |a_k x_k| < \infty$ dur. Böylece

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k \geq 2 \end{cases}$$

alınırsa

$$|a_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k| < \infty$$

dur.

(2) $a \in D_2$ olsun. $x \in sl_\infty(\Delta)$ ise bir ve yalnız bir $y = (y_k) \in l_\infty$ vardır (3.2.1 den)

$$x_k = -\sum_{v=1}^{k} y_{v-1}, \quad y_0 = 0$$

Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{v=1}^{k} y_{v-1} \right) = -\sum_{k=1}^{n-1} R_k y_k + R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \qquad (3.2.3)$$

yazılabilir. $\sum_{k=1}^{\infty} R_k y_k$ mutlak yakınsak ve $R_n \sum_{k=1}^{n-1} y_k \to 0$ $(n \to \infty)$ (sonuç (c)) den her $x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır.
Bu ise $a \in (sl_\infty(\Delta))^\beta$ olduğunu gösterir.
$a \in (sl_\infty(\Delta))^\beta$ ise buradan her $x \in sl_\infty(\Delta)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ yakınsaktır.

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ k, & k > 1 \end{cases}$$

alınırsa buradan $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ yakınsaktır. Bu ise $nR_n = o(1)$ olduğunu gösterir. (Sonuç (c)) (3.2.3) kullanırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = -\sum_{k=1}^{n} R_k y_k$$

her $y \in l_\infty$ için yakınsaktır. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \infty$ ve $a \in D_2$ dir.
(3) (3) ün ispatı yukarıdakiyle aynıdır.
$\dagger = \alpha, \beta$, veya γ için $(sl_\infty(\Delta))^\dagger = (sc(\Delta))^\dagger$ olduğunu göstermek kolaydır.

Şimdi kabul edilsin ki E; $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ veya $c_o(\Delta)$ dizi uzaylarından biri olsun.

$$(sE)^\dagger = E^\dagger, \qquad \dagger = \alpha, \beta, \text{ veya } \gamma \text{ için}$$

olduğu gösterilebilir.

3.3. Matris Dönüşümleri

E ve F nin her biri l_∞ ve c dizi uzaylarından birini göstersin ve E$'$ ve F$'$ de $l_\infty(\Delta)$ ve $c(\Delta)$ dizi uzaylarından birini göstersin.(X, Y) de X den Y ye dönüşüm yapan tüm sonsuz A matrislerinin kümesini göstersin.

Teorem 3.3.1 $A \in (E', F)$ olması için gerek ve yeter şart
$A_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_{nk}$ ve $R = (r_{nk}) = \left(\sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}\right)$ olmak üzere
(i) $(a_{n1}) \in F$, ve $(A_n(k)) \in F$
(ii) $R \in (E, F)$

İspat. $A \in (E', F)$ olsun. Buna göre tüm $x \in E'$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} \text{ ve } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ ... \end{bmatrix} \text{ alınırsa}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... \\ .... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x_k \\ .... \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \\ .... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ ...... \\ A_n(x) \\ ..... \end{bmatrix}$$

$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ve $(A_n(x)) \in F$ dir.

x yerine $x = (1, 0, 0, ...)$ ve $x = (k)$ yazıldığında (i) nin sağlandığı açıktır.

Üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için (Teorem 3.2.6 dan).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_{nk}| < \infty$$

olur.

Şimdi $x \in sE' \subset E'$ olsun. $y \in E$ ve $y_o = 0$ için

$$x_k = -\sum_{r=1}^{k} y_{r-1}$$

olmak üzere

$$A_n(m, x) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k = -\sum_{k=1}^{m-1} r_{nk} y_k + r_{nm} \sum_{k=1}^{m-1} y_k \tag{3.3.1}$$

buradan her $n \in \mathbb{N}$ için (sonuç (c) den)

$$\lim_m A_n(m, x) = A_n(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

elde edilir. Böylece her $y \in E$ için $(R_n(y)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k\right)$ elde edilir.

Bu da $R \in (E, F)$ demektir.

Şimdi (i) ve (ii) nin sağlandığı kabul edilsin

$x \in E'$ ise

$$x_k = \begin{cases} x_{1,} & k = 1 \\ x'_k, & k > 1 \end{cases} \qquad x' = (x'_k) \in sE'.$$

(3.3.1) de tekrar yerine yazıldığında

$$A_n(x) = a_{n1} x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} y_k$$

elde edilir. Bu ise her $x \in E'$ ve $A \in (E', F)$ için $A_n(x)$ in varlığını gösterir.

Teorem 3.3.2 $A \in (E, F')$ olması için gerek ve yeter şart

$$B = (b_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$$

olmak üzere

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $B \in (E, F)$

sağlanmasıdır.

İspat

Yeterliliğin sağlandığı açıktır. Gereklilik şartlarının sağlandığını gösterelim.

(i) $A \in (E, F')$ olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $Ax \in F'$ dür. Böylece $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ dur. $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k < \infty$ olduğundan buradan $(a_{nk}) \in E^{\beta}$ elde edilir. $E^{\beta} = l_1$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ dur.

(ii) $A \in (l_\infty, l_\infty(\Delta))$ olsun. Buna göre her $x \in E$ için $Ax \in F'$ dür.
$Ax = (A_n(x)) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \in F'$ ise $(\Delta A_n(x)) \in F$ dir.

$$\begin{aligned}
(\Delta A_n(x)) &= (A_n(x) - A_{n+1}(x)) \in F \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{n+1,k})\, x_k\right) \in F \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}x_k\right) \in F \\
&= Bx \in F
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.3.

(1) $l_\infty \cap c(\Delta) = l_\infty \cap c_o(\Delta) = M_o = \left\{x = (x_k) : x \in l_\infty,\ \lim_k (x_k - x_{k+1}) = 0\right\}$

(2) $(M_o, l_\infty) = (l_\infty, l_\infty)$

(3) $A \in (l_\infty, M_o)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup\limits_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim\limits_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n+1,k}| = 0$

İspat: **(1)** $x \in l_\infty \cap c(\Delta)$ olsun. Buna göre $x \in l_\infty$ ve $x \in c(\Delta)$ için Δx yakınsaktır. $(k \to \infty)$ için $x_k - x_{k+1} \to l$ dir.

Buradan $x_k - x_{k+1} = l + \varepsilon_k$ $(\varepsilon_k \to 0,\ k \to \infty)$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k - x_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} l + \varepsilon_k \\ x_1 - x_{n+1} &= nl + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \\ nl &= x_1 - x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \\ l &= \frac{x_1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \end{aligned}$$

dır. $n \to \infty$ için $l = 0$ dır. Bu da $x \in l_\infty \cap c_o(\Delta)$ demektir.

(2) İspat açıktır.

(3) $A \in (l_\infty, l_\infty)$ için (i) sağlanır. Diğer kısımların sağlandığı açıktır.

$$m_o = \{x = (x_k) : x \in M_o \text{ ve } x_k \in \mathbb{R}\} \ \ (\mathbb{R} \text{ reel sayılar})$$

herhangi bir pozitif p tamsayısı ve $0 \le n_1 < n_2 < ... < n_p$ tamsayısı için m_o da

$$\inf_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \sup_k \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_{k+n_i} = \lim \sup_k x_k$$

elde edilir.

Teorem 3.3.4 $r_{nk} = \sum_{v=k+1}^{\infty} a_{nv}$ olmak üzere eğer

$$A \in (c, c) \ \text{ ve } \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |r_{nk}| < \infty \text{ ise } A \in (M_o, c)$$

dir.

İspat. Her $x \in M_o$ için

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{nk} - \sum_{k=1}^{m-1} r_{nk}\left(x_k - x_{k+1}\right) + \left(x_1 - x_m\right) r_{nm}$$

$$\lim_m \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k = A_n\left(x\right) = x_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}\left(x_k - x_{k+1}\right)$$

dır.

$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |r_{nk}| < \infty$ ve $\lim_n r_{nk}$ mevcut olduğundan bunlar da
$R = (r_{nk}) \in (c_o, c)$ ve $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk}\left(x_k - x_{k+1}\right)$ mevcut olduğunu gösterir.
Bu yüzden $A \in (M_o, c)$ elde edilir.

Şimdi E ve F dizi uzaylarını göstersin. Noktasal çarpımla

$$E\left(F\right) = \left\{x : x_k = y_k z_k,\ y \in E,\ z \in F\right\}$$

tanımlansın.

M_s, $\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| < \infty$ şartını sağlayan tüm x lerin uzayını göstersin.
$M_s = \{y : y_k = x_k - x_{k+1},\ x \in l_\infty,\ x_o = 0\}$ yazılabildiği kolayca görülür.
Eğer bir $A = (a_{nk})$ matrisi regüler ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$$

ise A' ya kuvetli regüler matris denir.

A regüler matris ise tüm $x \in l_\infty$ için $\lim_n A_n\left(y\right) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k = 0$ olması için gerek ve yeter şart A'nın kuvvetli regüler matris olmasıdır.

(Burada $y_k = x_k - x_{k+1}$ dir.)

Teorem 3.3.5. A regüler bir matris olsun. Her $y \in M_s\left(M_o\right)$ için $\lim_n A_n\left(y\right) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul A'nın kuvvetli regüler matris olmasıdır.

İspat. Her $y \in M_s\left(M_o\right)$ için $\lim_n A_n\left(y\right) = 0$ ise $A \in \left(M_s\left(M_o\right), c_o\right)$ dır. Bu ise $A \in \left(M_s, c_o\right)$ olması demektir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right| = 0$$

elde edilir.

Şimdi A'nın kuvvetli regüler matris olduğu kabul edilsin .$y \in M_s\left(M_o\right)$ ise $y_k = a_k x_k$ dır. (Burada $a \in M_s$ ve $x \in M_o$ dır.)

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{m} a_{nk} y_k = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\left(x_k - x_{k+1}\right)\gamma_k + \sum_{k=1}^{m}\left(a_{nk} - a_{n,k+1}\right)\gamma_k x_{k+1} + a_{n,m+1}\gamma_m x_{m+1}$$

buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_m \sum_{k=1}^{m} a_{nk} y_k = A_n\left(y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\left(x_k - x_{k+1}\right)\gamma_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{nk} - a_{n,k+1}\right)\gamma_k x_{k+1}$$

böylece $\lim_n A_n\left(y\right) = 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.6. $A \in \left(M_s\left(M_o\right), c\right)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}\right| < \infty$

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n a_{nk}$ mevcuttur.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk} - a_{n,k+1}\right|$ n'ye düzgün yakınsak olmasıdır.

4. İKİNCİ FARK DİZİ UZAYLARI

4.1. İkinci Fark Dizi Uzayları

Bu bölümde $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_o(\Delta)$ uzayları biraz daha genişletilerek $l_\infty(\Delta^2)$, $c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta^2)$ dizi uzayları elde edilecektir. Ayrıca bu dizi uzaylarının bazı özellikleri incelenerek bu uzayların sürekli dualleri ve Köthe-Toeplitz dualleri incelenecektir.

$$\begin{aligned} l_\infty\left(\Delta^2\right) &= \left\{x=(x_k):\Delta^2 x\in l_\infty\right\} \\ c\left(\Delta^2\right) &= \left\{x=(x_k):\Delta^2 x\in c\right\} \\ c_o\left(\Delta^2\right) &= \left\{x=(x_k):\Delta^2 x\in c_o\right\} \end{aligned}$$

uzayları yukarıdaki şekilde tanımlanmıştır. Burada $\Delta^2 x=(\Delta^2 x_k)=(\Delta x_k-\Delta x_{k+1})$ dir.

Açıkça gözükmektedir ki $l_\infty(\Delta)\subset l_\infty(\Delta^2)$, $c(\Delta)\subset c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta)\subset c_o(\Delta^2)$ dir.

Teorem 4.1.1. $l_\infty(\Delta^2)$, $c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta^2)$ dizi uzayları

$$\|x\|_\Delta=|x_1|+|x_2|+\left\|\Delta^2 x\right\|_\infty \tag{4.1.1}$$

normu ile Banach uzayıdırlar.

İspat. (x^n) dizisi $l_\infty(\Delta^2)$ de Cauchy dizisi olsun.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $x^n=(x_i^n)=(x_1^n,x_2^n,...)\in l_\infty(\Delta^2)$ olsun. Buna göre $m,n\to\infty$ için

$$\|x^n-x^m\|_\Delta=|x_1^n-x_1^m|+|x_2^n-x_2^m|+\left\|\Delta^2 x^n-\Delta^2 x^m\right\|_\infty\to 0$$

dır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ ve $m, n \to \infty$ için

$$|x_k^n - x_k^m| \to 0$$

elde edilir. Buyüzden $(x_k^n) = (x_k^1, x_k^2, ...)$ dizisi kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan her Cauchy dizisi yakınsak olacağından (x_k^n) dizisinin de her $k \in \mathbb{N}$ için yakınsayacağı bir x_k elemanı mevcuttur. Bu yüzden

$$\lim_n x_k^n = x_k$$

yazılabilir. Her $\epsilon > 0$ için (x^n) Cauchy dizisi olduğundan her $n, m \geq N$ için $\|x^n - x^m\|_\Delta < \epsilon$ olacak şekilde $N = N(\epsilon)$ vardır. Bu yüzden

$$|x_1^n - x_1^m| < \epsilon, \qquad |x_2^n - x_2^m| < \epsilon$$

ve her $k \in \mathbb{N}$, her $n, m \geq N$ için

$$\left|\left[(x_k^n - x_k^m) - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right] - \left[\left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right) - \left(x_{k+2}^n - x_{k+2}^m\right)\right]\right| < \epsilon$$

dur. Böylece

$$\lim_m |x_1^n - x_1^m| = |x_1^n - x_1| < \epsilon$$
$$\lim_m |x_2^n - x_2^m| = |x_2^n - x_2| < \epsilon$$
$$\lim_m \left|\left[(x_k^n - x_k^m) - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right)\right] - \left[\left(x_{k+1}^n - x_{k+1}^m\right) - \left(x_{k+2}^n - x_{k+2}^m\right)\right]\right|$$
$$= \left|\left[(x_k^n - x_k) - \left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right)\right] - \left[\left(x_{k+1}^n - x_{k+1}\right) - \left(x_{k+2}^n - x_{k+2}\right)\right]\right| < \epsilon$$

elde edilir. Bu ise her $n, m \geq N$ için $\|x^n - x\|_\Delta < 3\epsilon$ olduğunu gösterir. $x = (x_k)$ dizisinde $n \to \infty$ için $x^n \to x$ dir.

$$\begin{aligned} |\Delta x_k - \Delta x_{k+1}| &= \left|\Delta x_k - \Delta x_k^N + \Delta x_k^N - \Delta x_{k+1}^N + \Delta x_{k+1}^N - \Delta x_{k+1}\right| \\ &\leq \left|\Delta x_k - \Delta x_{k+1}^N\right| + \|x^n - x\|_\Delta = O(1) \end{aligned}$$

olduğundan $x \in l_\infty(\Delta^2)$ elde edilir. Böylece $l_\infty(\Delta^2)$ Banach uzayıdır.
Benzer şekilde $c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta^2)$ nın da (4.1.1) deki norm ile Banach uzayları olduğu gösterilebilir.
Aynı zamanda $l_\infty(\Delta^2)$, $c(\Delta^2)$ ve $c_o(\Delta^2)$ Banach uzayları sürekli koordinatlara sahip olduğundan, yani $\|x^n - x\|_\Delta \to 0$ ise her $k \in \mathbb{N}$ ve $n \to \infty$ için $|x_k^n - x_k| \to 0$ olduğundan bu uzaylar aynı zamanda BK-uzaylarıdır. Şimdi aşağıdaki D operatörü

$$\begin{aligned} D &: l_\infty\left(\Delta^2\right) \to l_\infty\left(\Delta^2\right) \\ x &= (x_1, x_2, x_3, ...) \text{ için } Dx = (0, 0, x_3, x_4, ...) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Açıkça görülmektedir ki D, $l_\infty(\Delta^2)$ de sınırlı lineer operatördür.

$$D\left[l_\infty\left(\Delta^2\right)\right] = Dl_\infty\left(\Delta^2\right) = \left\{x = (x_k) : x \in l_\infty\left(\Delta^2\right), x_1 = x_2 = 0\right\}$$

$Dl_\infty(\Delta^2)$ uzayı $l_\infty(\Delta^2)$ nin bir alt uzayıdır ve $Dl_\infty(\Delta^2)$ de $\|x\|_\Delta = \|\Delta^2 x\|_\infty$ dir.
Şimdi

$$\Delta^2 : Dl_\infty\left(\Delta^2\right) \to l_\infty\left(\Delta^2\right), \qquad \Delta^2 x = y = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1}) \qquad (4.1.2)$$

Δ^2 lineer homeomorfizmi tanımlansın..
Buna göre $Dl_\infty(\Delta^2)$ ve $l_\infty(\Delta^2)$ topolojik anlamda denk uzaylardır.
Δ^2 ve $(\Delta^2)^{-1}$ normu korur ve $\|\Delta^2\| = \left\|(\Delta^2)^{-1}\right\| = 1$ dir.
l_∞^* ve $[Dl_\infty(\Delta^2)]^*$ sırasıyla l_∞ ve $Dl_\infty(\Delta^2)$ nin sürekli duallerini göstersin.

$$\begin{aligned} T &: \left[Dl_\infty\left(\Delta^2\right)\right]^* \to l_\infty^* \\ f_\Delta &\to f_{\Delta^0}\left(\Delta^2\right)^{-1} = f \end{aligned}$$

dönüşümü lineer izometridir. Böylece $[Dl_\infty(\Delta^2)]^*$ uzayı l_∞^* uzayına denktir. Benzer yolla $Dc(\Delta^2)$ ve c, $Dc_o(\Delta^2)$ ve c_o topolojik uzay olarak denk uzaylardır ve $l_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ olmak üzere
$[Dc(\Delta^2)]^* \cong [Dc_o(\Delta^2)]^* \cong l_1$ dir.

4.2. $l_\infty(\Delta^2)$ ve $c(\Delta^2)$ nin Dual Uzayları

Bu bölümde $l_\infty(\Delta^2)$ ve $c(\Delta^2)$ nin Köthe-Toeplitz Dualleri verilecektir.

Lemma 4.2.1. Aşağıdaki (a) ve (b) koşulları denktir.

a) $\sup_k |\Delta x_k - \Delta x_{k+1}| < \infty$

b) $i)$ $\sup_k k^{-1} |\Delta x_k| < \infty$

$ii)$ $\sup_k \left|\Delta x_k - k(k+1)^{-1} \Delta x_{k+1}\right| < \infty$

İspat. Lemma 3.2.1 de x_k yerine Δx_k konulduğunda ispat açıktır.

Lemma 4.2 2. $\sup_k k^{-1} |\Delta x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-2} |x_k| < \infty$ dır.

İspat. $\sup_k k^{-1} |\Delta x_k| < \infty$ olsun. Bu yüzden açıktır ki $\sup_k k^{-2} |\Delta x_k| < \infty$ dur.

$$|x_1 - x_{k+1}| \leq \sum_{v=1}^{k} |\Delta x_v| = O\left(k^2\right)$$

ve

$$|x_k| \leq |x_1| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_k - x_{k+1}| = O\left(k^2\right)$$

olduğundan dolayı $\sup_k k^{-2} |x_k| < \infty$ elde edilir.

Lemma 4.2.3. $[Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_k k^2 |a_k| < \infty\}$ dır.

İspat. $U_1 = \{a = (a_k) : \sum_k k^2 |a_k| < \infty\}$ olsun.

$a \in U_1$ ise her $x \in Dl_\infty(\Delta^2)$ için Lemma 3.2.4 ve Lemma 3.2.5 den

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^2 |a_k| \left(k^{-2} |x_k|\right) < \infty$$

dır. Buradan $a \in [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ elde edilir.

Şimdi $a \in [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ olsun. Böylece her $x \in Dl_\infty(\Delta^2)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 0, & k = 1, 2 \\ k^2, & k > 2 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

olarak alınırsa

$$\sum_k k^2 |a_k| = |a_1| + |4a_2| + \sum_k |a_k x_k| < \infty$$

yazılabilir. Bu ise $a \in U_1$ olduğunu gösterir.

Lemma 4.2.4..$[Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha = [Dc(\Delta^2)]^\alpha$

İspat. $Dc(\Delta^2) \subset Dl_\infty(\Delta^2)$ olduğundan $[Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha \subset [Dc(\Delta^2)]^\alpha$ dır. $a \in [Dc(\Delta^2)]^\alpha$ olsun. Böylece her $x \in Dc(\Delta^2)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. $x = (x_k)$ dizisi (4.1.3) de tanımlandığı şekilde alınırsa o zaman

$$\sum_k k^2 |a_k| = |a_1| + |4a_2| + \sum_k |a_k x_k| < \infty$$

elde edilir. Bu ise $a \in [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ dır.

Lemma 4.2.5.

(i) $[l_\infty(\Delta^2)]^\alpha = [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$

(ii) $[c(\Delta^2)]^\alpha = [Dc(\Delta^2)]^\alpha$

İspat. $i)$ $Dl_\infty(\Delta^2) \subset l_\infty(\Delta^2)$ olduğundan $[l_\infty(\Delta^2)]^\alpha \subset [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ dır. $a \in [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ ve $x \in l_\infty(\Delta^2)$ olsun. Lemma 3.2.4 ve Lemma 3.2.5 den

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^2 |a_k| \left(k^{-2} |x_k|\right) < \infty$$

yazılabilir. Buradan $a \in [Dl_\infty(\Delta^2)]^\alpha$ dır.

$ii)$ $Dc(\Delta^2) \subset c(\Delta^2)$ ise $[c(\Delta^2)]^\alpha \subset [Dc(\Delta^2)]^\alpha$ dır.

$a \in [Dc(\Delta^2)]^\alpha$ ve $x \in c(\Delta^2)$ olsun. Lemma 3.2.4 ve Lemma 3.2.5 den her $x \in c(\Delta^2) \subset l_\infty(\Delta^2)$ için

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^2 |a_k| \left(k^{-2} |x_k|\right) < \infty$$

yazılabilir. Bu yüzden $a \in [c(\Delta^2)]^\alpha$ dır bu da ispatı tamamlamaktadır.

Şimdi temel sonucu verelim.

Teorem 4.2.6. $X = l_\infty$ veya c için

$$\left[X\left(\Delta^2\right)\right]^\alpha = \left\{a = (a_k) : \sum_k k^2 |a_k| < \infty\right\}$$

dır.

Teorem 4.2.7. $X = l_\infty$ veya c için

$$\left[X\left(\Delta^2\right)\right]^{\alpha\alpha} = \left\{a = (a_k) : \sup_k k^{-2} |a_k| < \infty\right\}$$

dur.

İspat. $U_2 = \left\{a = (a_k) : \sup_k k^{-2} |a_k| < \infty\right\}$ olsun. $a \in U_2$ ve $x \in [X(\Delta^2)]^\alpha$ ise

$$\begin{aligned} \sum_k |a_k x_k| &= \sum_k k^2 |a_k| k^{-2} |x_k| \\ &\leq \sum_k k^2 |x_k| \sup_k k^{-2} |a_k| \\ &< \infty \end{aligned}$$

dur. Bu yüzden $a \in [X(\Delta^2)]^{\alpha\alpha}$ dır.

Şimdi $a \in [X(\Delta^2)]^{\alpha\alpha}$ ve $a \notin U_2$ olsun. Böylece

$$\sup_k k^{-2} |a_k| = \infty$$

dur. Bu yüzden burada $k(m)$ pozitif tamsayılarının

$$k^{-2}(m)\left|a_{k(m)}\right| > m^2$$

olacak şekilde kesin artan bir $(k(m))$ dizisi vardır.

x dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$x_k = \begin{cases} \left|a_{k(m)}\right|^{-1}, & k = k(m) \\ 0, & k \neq k(m) \end{cases}$$

buradan

$$\begin{aligned} \sum_k k^2 |x_k| &= \sum_m k^2(m)\left|a_{k(m)}\right|^{-1} \\ &\leq \sum_m m^{-2} \\ &< \infty \end{aligned}$$

yazılılabilir. Böylece $x \in [X(\Delta^2)]^{\alpha}$ ve $\sum_k |a_k x_k| = \infty$ dur.

Bu ise $a \in [X(\Delta^2)]^{\alpha\alpha}$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $a \in U_2$ dir.

Sonuç 4.2.8. $l_\infty(\Delta^2)$ ve $c(\Delta^2)$ perfect değildir.

4.3. Matris Dönüşümleri

Bu bölümde bazı matris sınıfları karakterize edilecektir. G ve H, l_∞ ve c dizi uzaylarından birini göstersin. $G(\Delta^2) = \{x = (x_k) : \Delta^2 x \in G\}$ ve $H(\Delta^2) = \{x = (x_k) : \Delta^2 x \in H\}$ olacak şeilde $G(\Delta^2)$ ve $H(\Delta^2)$ uzayları tanımlansın. X dizi uzayından Y dizi uzayına tanımlanan tüm matrislerin kümesi (X, Y) ile gösterilsin.

Teorem 4.3.1 $A=(a_{nk})\in(G,H(\Delta^2))$ olması için gerek ve yeter şart

(i) Her $n\in\mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}|<\infty$

(ii) $C\in(G,H)$, burada $C=(c_{nk})=(\Delta a_{nk}-\Delta a_{n+1,k})$

İspat. Yeterliliğin sağlandığı açıktır.

Gereklilik: $A=(a_{nk})$ matrisi G den $H(\Delta^2)$ ye tanımlansın. Böylece

$$A_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$$

serisi her n ve her $x\in G$ için yakınsaktır ve $(A_n(x))\in H(\Delta^2)$ dir. $G=l_\infty$ veya c için $G^\beta=l_1$ olduğundan (i) nin sağlandığı görülmektedir. Ayrıca $(A_n(x))\in H(\Delta^2)$ olduğundan her $x\in G$ için

$$\Delta^2 A_n(x)=\sum_k \Delta^2 a_{nk}x_k=\sum_k c_{nk}x_k=C_n(x)$$

dir. Bu yüzden $C_n(x)\in H$ dır. Bu da $C\in(G,H)$ demektir.

5. m. DERECEDEN BAZI FARK DİZİ UZAYLARI

5.1. m. Dereceden Fark Dizi Uzayları:

Bu bölümde $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_o(\Delta)$ dizi uzayları biraz daha genişletilerek $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ dizi uzayları elde edilecek ve bu uzaylar çalışılacaktır. Örnek olarak $m \in \mathbb{N}$ için $l_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in l_\infty\}$ dır. Ayrıca bu bölümde tanımlanan bu uzayların bazı topolojik özellikleri ve kapsama bağıntıları verilerek, sürekli ve Köthe-Toeplitz dualleri bulunacaktır. Bunun yanında bu uzaylar arasında tanımlanan matris dönüşümleri için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

5.1.1. Tanım.

$m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta^0 x &= (x_k) \\ \Delta x &= (x_k - x_{k+1}) \\ \Delta^m x &= (\Delta^m x_k) = \left(\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

için aşağıdaki uzaylar tanımlansın.

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in l_\infty\} \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\} \\ c_o(\Delta^m) &= \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_o\} \end{aligned}$$

$l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ uzaylarının lineer uzay olduğu açıktır.

Bu uzayların aşağıda verilen norma göre normlu uzay olduklarını göstermek kolaydır.

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_{\infty} \tag{5.1.1}$$

Teorem 5.1.1. (5.1.1) de tanımlanan norm ile $l_{\infty}(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ dizi uzayları Banach Uzayıdırlar.

İspat: Her $s \in \mathbb{N}$ için $x^s = (x_i^s) = (x_1^s, x_2^s, ...) \in l_{\infty}(\Delta^m)$ olmak üzere (x^s) dizisi $l_{\infty}(\Delta^m)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $s, t \to \infty$ için

$$\left\|x^s - x^t\right\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} \left|x_i^s - x_i^t\right| + \sup_k \left|\Delta^m \left(x_k^s - x_k^t\right)\right| \to 0$$

dır. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \to \infty$ için

$$\left|x_k^s - x_k^t\right| \to 0$$

elde edilir. Bu nedenle $(x_k^s) = (x_k^1, x_k^2, ...)$ dizisi kompleks sayılar kümesi olan $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan bu Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu yüzden her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_s x_k^s = x_k$$

yazılabilir. Her $\epsilon > 0$ için (x^s) Cauchy dizisi olduğundan her $s, t \geq N$ için $\|x^s - x^t\|_{\Delta} < \epsilon$ olacak şekilde $N = N(\epsilon)$ vardır.

Buradan her $k \in \mathbb{N}$ için ve her $s, t \geq N$ için

$$\sum_{i=1}^{m} \left|x_i^s - x_i^t\right| \leq \epsilon \qquad \text{ve} \qquad \left|\sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} \left(x_{k+v}^s - x_{k+v}^t\right)\right| \leq \epsilon$$

dur. Böylece her $s \geq N$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^{m} \left|x_i^s - x_i^t\right| = \sum_{i=1}^{m} |x_i^s - x_i| \leq \epsilon$$

ve

$$\lim_t \left|\Delta^m \left(x_k^s - x_k^t\right)\right| = \left|\Delta^m \left(x_k^s - x_k\right)\right| \leq \epsilon$$

dur. Bu ise her $s \geq N$ için $\|x^s - x\|_\Delta < 2\epsilon$ demektir. Yani $x = (x_k)$ disinde $s \to \infty$ a $x^s \to x$ dir.

$$\begin{aligned}
|\Delta^m x_k| &= \left|\sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}\right| \\
&= \left|\sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} \left(x_{k+v} - x_{k+v}^N + x_{k+v}^N\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} \left(x_{k+v}^N - x_{k+v}\right)\right| + \left|\sum_{v=0}^{m} (-1)^v \binom{m}{v} \left(x_{k+v}^N\right)\right| \\
&\leq \left\|x^N - x\right\|_\Delta + \left|\Delta^m x_k^N\right| = O(1)
\end{aligned}$$

olduğundan $x \in l_\infty(\Delta^m)$ elde edilir. Bu nedenle $l_\infty(\Delta^m)$ Banach uzayıdır. $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ uzaylarının $l_\infty(\Delta^m)$ nin kapalı alt uzayı oldukları göste rilebilir. Bu yüzden bu uzaylar da (5.1.1) de tanımlanan norm ile Banach uzayıdırlar.

Şimdi bu dizi uzayları arasında kullanılan bazı kuvvetli kapsama bağıntılarını verelim.

Lemma 5.1.2. *i)* $c_o(\Delta^m) \subset c_o(\Delta^{m+1})$,

ii) $c(\Delta^m) \subset c(\Delta^{m+1})$,

iii) $l_\infty(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^{m+1})$

ve bu kapsamalar kesindir.

İspat. $x \in c_o(\Delta^m)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left|\Delta^{m+1} x_k\right| &= |\Delta^m x_k - \Delta^m x_{k+1}| \\
&\leq |\Delta^m x_k| + |\Delta^m x_{k+1}| \to 0, \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

olduğundan $x \in c_o(\Delta^{m+1})$ elde edilir. Böylece $c_o(\Delta^m) \subset c_o(\Delta^{m+1})$ dir. Bu kapsama $x = (k^m)$ dizisi için kuvvetlidir, örnek olarak $x = (k^m)$ dizisi $c_o(\Delta^{m+1})$ ye aittir, fakat $c_o(\Delta^m)$ ye ait değildir.
$ii)$ ve $iii)$ nin ispatı da $i)$ nin ispatına benzerdir.

Lemma 5.1.3. (i) $c_o(\Delta^m) \subset c(\Delta^m)$
(ii) $c(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^m)$
bu kapsamalar kesindir.

Bunun yanında $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ sürekli koordinatlara sahip Banach Uzayı olduklarından (her $k \in \mathbb{N}$ için $s \to \infty$ a $\|x^s - x\|_\Delta \to 0$ ise $|x_k^s - x_k| \to 0$ dır.) aynı zamanda BK-uzayıdırlar.

Açıklama. $l_\infty(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $c_o(\Delta^m)$ uzayları dizi cebiri olmak zorunda değiller. Buna örnek verelim. İyi bilinmektedir ki c_o dizi cebiridir.
$x = (k)$ ve $y = (k^{m-1})$ olsun. $m \geq 2$ için $x, y \in c_o(\Delta^m)$, $x.y \notin c_o(\Delta^m)$.

Şimdi $x = (x_1, x_2, x_3, ...)$ olmak üzere $Dx = (0, 0, ..., x_{m+1}, x_{m+2}, ...)$ olacak şekilde aşağıdaki D operatörü tanımlansın.

$$D : l_\infty(\Delta^m) \to l_\infty(\Delta^m)$$

açıktır ki D, $l_\infty(\Delta^m)$ üzerinde sınırlı lineer operatördür. Bunun yanında

$$D[l_\infty(\Delta^m)] = Dl_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : x \in l_\infty(\Delta^m),\ x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_m = 0\}$$

kümesi $l_\infty(\Delta^m)$ nin bir alt uzayıdır ve $Dl_\infty(\Delta^m)$ de

$$\|x\|_\Delta = \|\Delta^m x\|_\infty$$

dir.

Şimdi

$$\Delta^m : Dl_\infty(\Delta^m) \to l_\infty, \quad \Delta^m x = y = \left(\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}\right) \qquad (5.1.2)$$

Δ^m lineer homeomorfizmdir. Buradan $Dl_\infty(\Delta^m)$ ve l_∞ topolojik uzay olarak dektirler. Δ^m ve $(\Delta^m)^{-1}$ normu korurlar ve $\|\Delta^m\| = \left\|(\Delta^m)^{-1}\right\| = 1$ dir.

l_∞^* ve $[Dl_\infty(\Delta^m)]^*$ sırasıyla l_∞ ve $Dl_\infty(\Delta^m)$ nin sürekli duallerini göstersin.

$$\begin{aligned} T &: [Dl_\infty(\Delta^m)]^* \to l_\infty^* \\ f_\Delta &\to f_\Delta \circ (\Delta^m)^{-1} = f \end{aligned}$$

olarak tanımlanan T dönüşümü lineer izometridir.

Böylece $[Dl_\infty(\Delta^m)]^*$ ve l_∞^* uzayları denktirler.

Benzer şekilde $Dc(\Delta^m)$ ve c, $Dc_o(\Delta^m)$ ve c_o topolojik anlamda denk uzaylardır. $[Dc(\Delta^m)]^* \cong [Dc_o(\Delta^m)]^* \cong l_1$ dir. Burada $l_1 = \{x = (x_k) : \sum_k |x_k| < \infty\}$ dır.

5.2. $l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ nin Dual Uzayları

Bu bölümde $l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ nin Köthe-Toeplitz dualleri verilecektir. Ayrıca bu uzayların perfect uzaylar olmadığı gösterilecektir.

Lemma 5.2.1. Aşağıdaki (a) ve (b) şartları birbirine denktir.

(a) $\sup\limits_k |\Delta^{m-1}x_k - \Delta^{m-1}x_{k+1}| < \infty$

(b) $i)$ $\sup\limits_k k^{-1} |\Delta^{m-1}x_k| < \infty$

$ii)$ $\sup\limits_k \left|\Delta^{m-1}x_k - k(k+1)^{-1}\Delta^{m-1}x_{k+1}\right| < \infty$

İspat. Lemma 3.2.1 de x_k yerine $\Delta^{m-1}x_k$ yazılırsa sonuç aşikardır.

Lemma 5.2.2. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\sup\limits_k k^{-i} |\Delta x_k| < \infty$ ise $\sup\limits_k k^{-(i+1)} |x_k| < \infty$

dur.

İspat. $\sup_k k^{-i} |\Delta x_k| < \infty$ olsun. Böylece

$$|x_1 - x_{k+1}| \leq \sum_{v=1}^{k} |\Delta x_v| = O\left(k^{(i+1)}\right)$$

ve

$$|x_k| \leq |x_1| + |x_1 - x_{k+1}| + |x_k - x_{k+1}| = O\left(k^{(i+1)}\right).$$

Buradan $\sup_k k^{-(i+1)} |x_k| < \infty$ elde edilir.

Lemma 5.2.3. Her $i, m \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i < m$ için $\sup_k k^{-i} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-(i+1)} \left|\Delta^{m-(i+1)} x_k\right| < \infty$ dur.

İspat. Lemma 5.2.2 de Δx_k yerine $\Delta^{m-i} x_k$ konulursa sonuç aşikardır.

Sonuç 5.2.4. $\sup_k k^{-1} |\Delta^{m-1} x_k| < \infty$ ise $\sup_k k^{-m} x_k < \infty$ dur.

Sonuç 5.2.5. $x \in l_\infty(\Delta^m)$ ise $\sup_k k^{-m} |x_k| < \infty$ dur.

Lemma 5.2.6. $[Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha = \{a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty\}$

İspat. $U_1 = \{a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty\}$ olsun.

$a \in U_1$ ise böylece her $x \in Dl_\infty(\Delta^m)$ için sonuç 5.2.5 den

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| \left(k^{-m} |x_k|\right) < \infty$$

dur. Buradan $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ elde edilir.

$a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ olsun. Böylece her $x \in Dl_\infty(\Delta^m)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur.

$x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \\ k^m, & k > m \end{cases} \tag{5.2.1}$$

$$\sum_k k^m |a_k| = \sum_{k=1}^{m} k^m |a_k| + \sum_k |a_k x_k| < \infty$$

yazılabilir. Bu ise $a \in U_1$ olduğunu gösterir.

Lemma 5.2.7. $[Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha = [Dc(\Delta^m)]^\alpha$.

İspat. $Dc(\Delta^m) \subset Dl_\infty(\Delta^m)$ olduğundan $[Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha \subset [Dc(\Delta^m)]^\alpha$ dir. $a \in [Dc(\Delta^m)]^\alpha$ olsun. Böylece her $x \in Dc(\Delta^m)$ için $\sum_k |a_k x_k| < \infty$ dur. Eğer $x = (x_k)$ dizisi (5.2.1) de tanımlandığı şekilde alınırsa böylece

$$\sum_k k^m |a_k| = \sum_{k=1}^{m} k^m |a_k| + \sum_k |a_k x_k| < \infty$$

yazılabilir. Bu da $a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ demektir.

Lemma 5.2.8. (i) $[l_\infty(\Delta^m)]^\alpha = [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$

(ii) $[c(\Delta^m)]^\alpha = [Dc(\Delta^m)]^\alpha$.

İspat. (i) $Dl_\infty(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^m)$ olduğundan $[l_\infty(\Delta^m)]^\alpha \subset [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ dır.

$a \in [Dl_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ ve $x \in l_\infty(\Delta^m)$ olsun. Sonuç 5.2.5. den

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| \left(k^{-m} |x_k|\right) < \infty$$

olduğu biliniyor buradan $a \in [l_\infty(\Delta^m)]^\alpha$ dır.

(ii) $Dc(\Delta^m) \subset c(\Delta^m)$ ise $[c(\Delta^m)]^\alpha \subset [Dc(\Delta^m)]^\alpha$ dır.

$a \in [Dc(\Delta^m)]^\alpha$ ve $x \in c(\Delta^m)$ olsun. Sonuç 5.2.5 den

her $x \in c(\Delta^m) \subset l_\infty(\Delta^m)$ için

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m |a_k| \left(k^{-m} |x_k|\right) < \infty$$

olduğu bilinmektedir. Buradan $a \in [c(\Delta^m)]^\alpha$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlamaktadır.

Şimdi temel sonuç verilsin.

Teorem 5.2.9. $X,$ l_∞ veya c den birini göstersin. Böylece

$$[X(\Delta^m)]^\alpha = \left\{ a = (a_k) : \sum_k k^m |a_k| < \infty \right\}$$

dır.

Sonuç 5.2.10. $X = \ l_\infty$ veya c için

$$[X(\Delta)]^\alpha = \left\{ a = (a_k) : \sum_k k\,|a_k| < \infty \right\}$$

İspat. Teorem 2.10 da $m = 1$ alınırsa ispat aşikardır.

Sonuç 5.2.11. $X = \ l_\infty$ veya c için

$$\left[X\left(\Delta^2\right)\right]^\alpha = \left\{ a = (a_k) : \sum_k k^2\,|a_k| < \infty \right\}$$

İspat. Teorem 2.10 da $m = 2$ alınırsa ispat aşikardır.

Teorem 5.2.12. $X,\ l_\infty$ veya c den birini göstersin. Böylece

$$[X(\Delta^m)]^{\alpha\alpha} = \left\{ a = (a_k) : \sup_k k^{-m}\,|a_k| < \infty \right\}$$

İspat. $U_2 = \left\{ a = (a_k) : \sup_k k^{-m}\,|a_k| < \infty \right\}$ olsun. $a \in U_2$ ve $x \in [X(\Delta)]^\alpha$ ise böylece

$$\sum_k |a_k x_k| = \sum_k k^m\,|x_k|\,k^{-m}\,|a_k| \leq \sum_k k^m\,|x_k| \sup_k k^{-m}\,|a_k| < \infty$$

dur. Buradan $a \in [X(\Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ dır.

Şimdi $a \in [X(\Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ ve $a \notin U_2$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\sup_k k^{-m}\,|a_k| = \infty$$

yazılabilir. Buradan

$$[k(i)]^{-m}\left|a_{k(i)}\right| > i^m$$

olacak şekilde pozitif $k(i)$ tamsayılarının kesin artan $(k(i))$ dizisi vardır.

x dizisi aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$x_k = \begin{cases} \left|a_{k(i)}\right|^{-1}, & k = k(i) \\ 0, & k \neq k(i) \end{cases}$$

böylece

$$\sum_k k^m |x_k| = \sum_i [k(i)]^m \left|a_{k(i)}\right|^{-1} \leq \sum_i i^{-m} < \infty$$

olduğu görülür. Buradan $x \in [X(\Delta)]^{\alpha}$ ve $\sum_k |a_k x_k| = \sum 1 = \infty$ dur.

Bu ise $a \in [X(\Delta^m)]^{\alpha\alpha}$ olmasıyla çelişir. Buradan $a \in U_2$ dir.

Eğer Teorem 5.2.12 de $m = 2$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2.13. $X = l_\infty$ veya c için

$$\left[X\left(\Delta^2\right)\right]^{\alpha\alpha} = \left\{a = (a_k) : \sup_k k^{-2} |a_k| < \infty\right\}$$

Sonuç 5.2.14. $l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ dizi uzayları perfect değildir.

5.3. Matris Dönüşümleri

Bu bölümde bazı matris sınıfları karakterize edilecektir. G ve H, l_∞ ve c dizi uzaylarından birini göstersin. $G(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in G\}$ ve $H(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in H\}$ olmak üzere $G(\Delta^m)$ ve $H(\Delta^m)$ uzayları düşünülsün. X dizi uzayından Y dizi uzayına tanımlanan tüm matrislerin kümesi (X, Y) ile gösterilsin.

Teorem 5.3.1. $A = (a_{nk}) \in (G, H(\Delta^m))$ olması için gerek ve yeter şart

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$

(ii) $C = (c_{nk}) = (\Delta^{m-1} a_{nk} - \Delta^{m-1} a_{n+1,k})$ olmak üzere $C \in (G; H)$ dır.

İspat. Yeterliliğin sağlandığı açıktır.

Gereklilik : $A = (a_{nk})$ matrisi G den $H(\Delta^m)$ ye bir dönüşüm olsun.

Böylece her n ve her $x \in G$, ve $(A_n(x)) \in H(\Delta^m)$ için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serisi yakınsaktır. $G = l_\infty$ veya c için $G^\alpha = l_1$ olduğundan (i) elde edilir. Üstelik $(A_n(x)) \in H(\Delta^m)$ olduğundan her $x \in G$ için

$$\Delta^m A_n(x) = \sum_k \Delta^m a_{nk} x_k = \sum_k c_{nk} x_k = C_n(x)$$

dir. Bu yüzden $(C_n(x)) \in H$ dir. Buradan $C \in (G, H)$ elde edilir.
Bu da ispatı tamamlamaktadır.
Son olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.3.2. $A = (a_{nk}) \in (G, H(\Delta))$ olması için gerek ve yeter şart
(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$
(ii) $C = (c_{nk}) = (a_{nk} - a_{n+1,k})$ olmak üzere $C \in (G; H)$ dır.
İspat. Teorem 5.3.1 de $m = 1$ alınırsa ispat aşikardır.

Sonuç 5.3.3. $A = (a_{nk}) \in (G, H(\Delta^2))$ olması için gerek ve yeter şart
(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k |a_{nk}| < \infty$
(ii) $C = (c_{nk}) = (\Delta a_{nk} - \Delta a_{n+1,k})$ olmak üzere $C \in (G; H)$ dır.
İspat. Teorem 5.3.1 de $m = 2$ alınırsa ispat aşikardır.

6. GENELLEŞMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

6.1 Genelleşmiş Fark Dizi Uzayları

Bir dizi uzayının $p\alpha-$, $p\beta-$ ve $p\gamma-$ duallerinin tanımı M. Et tarafından yapılmıştır. Bu bölümde $X = l_\infty$, c ve c_o için $\Delta_v^m(X)$ dizi uzaylarının $p\alpha-$ ve N duallerini ve $X = l_\infty$, c ve c_0 için $\Delta_v^m(X)$ dizi uzaylarının β ve γ dualleri incelenecektir.

6.1.1. Tanım

Tüm skaler dizilerin uzayı ω ile gösterilsin. ω nın herhangi bir alt uzayı da bir dizi uzayıdır. l_∞, c ve c_o ın sırasıyla sınırlı,yakınsak ve sıfıra yakınsak kompleks terimli $x = (x_k)$ dizilerinin lineer uzayını gösterdiğini önceki bölümlerde belirtilmiş ve bu uzaylar için norm

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

olarak verilmişti. Bu bölümde X, l_∞, c veya c_o uzaylarından birini gösterecektir.

m, negatif olmayan bir tamsayı olsun. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m x_k = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$$

olmak üzere

$$\Delta^m(X) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\},$$

olarak tanımlansın.

$v = (v_k)$ sıfırdan farklı kompleks sayıların sabit bir dizisi olsun. Et ve Esi yukarıdaki dizi uzayını

$$\Delta_v^m(X) = \{x = (x_k) : (\Delta_v^m x_k) \in X\},$$

dizi uzayına genelleştirmişlerdir. Burada her $k \in \mathbb{N}$ için

$\Delta_v^m x_k = \Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1},$

$\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$ dir.

$\Delta_v^m (X)$ dizi uzayı

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |v_i x_i| + \|\Delta_v^m x\|_\infty$$

normu ile Banach uzayıdır.

Şimdi

$$\Delta_v^{(m)} x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k-i} x_{k-i}$$

olarak tanımlansın.

Sonuç 6.1.2 : $(\Delta_v^m x_k) \in X$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\Delta_v^{(m)} x_k\right) \in X$ olmasıdır.

Şimdi $x \in \Delta_v^{(m)} (X)$ için

$$\|x\|_{\Delta'} = \sup_k \left|\Delta_v^{(m)} x_k\right|$$

normu tanımlansın. Yukarıda tanımlanan norma göre $\left(\Delta_v^{(m)} (X), \|\cdot\|_{\Delta'}\right)$ BK-uzayıdır. Ayrıca $\|x\|_\Delta$ and $\|x\|_{\Delta'}$ nomları denktir

$x = (x_1, x_2, ..., x_m, ...)$ için $Dx = (0, 0, ..., x_{m+1}, x_{m+2}, ...)$ olacak şekilde

$$D : \Delta_v^m (X) \longrightarrow \Delta_v^m (X)$$

operatörü tanımlansın.

$\Delta_v^m (X)$ de D nin sınırlı lineer operatör olduğu açıktır. Buna ilaveten

$$D\left[\Delta_v^m (X)\right] = D\Delta_v^m (X) = \{x = (x_k) : x \in \Delta_v^m (X), x_1 = x_2 = ... = x_m = 0\}$$

kümesi $\Delta_v^m(X)$ nin bir alt uzayıdır ve $D\Delta_v^m(X)$ de $\|x\|_\Delta = \|\Delta_v^m x\|_\infty$ dur.

$$\Delta_v^m x = y = (\Delta_v^m x_k) \text{ olmak üzere } \Delta_v^m : D\Delta_v^m(X) \longrightarrow X \qquad (6.1.1)$$

şeklinde tanımlanan Δ_v^m lineer homeomorfizm olduğundan dolayı $D\Delta_v^m(X)$ ve X topolojik anlamda denk uzaylardır. X^* ve $[D\Delta_v^m(X)]^*$ sırasıyla X ve $D\Delta_v^m(X)$ in sürekli duallerini göstersin.

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad [D\Delta_v^m(X)]^* \longrightarrow X^*, \\ f_\Delta \quad &\longrightarrow \quad f_\Delta \circ (\Delta_v^m) = f, \end{aligned}$$

olarak tanımlanan T operatörü lineer izometridir. Böylece $[D\Delta_v^m(X)]^*$ uzayı ile X uzayı denk uzaylardır.

6.2. Dual Uzaylar

Bu bölümde $\Delta_v^m(X)$ nin $p\alpha-$, $N-$, $\beta-$ ve $\gamma-$dualleri verilecektir.
Aşağıdaki sonuçlar bölüm 1 ve bölüm 4 ten elde edilmiştir.

$$M_1 k^m \leq \binom{m+k}{k} \leq M_2 k^m, \quad k = 0, 1, 2, \qquad (6.2.1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} = \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}, \qquad (6.2.2)$$

$$x \in \Delta_v^m(\ell_\infty) \text{ ise } \sup_k k^{-m} |v_k x_k| < \infty, \qquad (6.2.3)$$

Lemma 6.2.1. (p_n) pozitif sayıların sonsuza monoton artan bir dizisi olsun.

(i) $\sup_n \left|\sum_{v=1}^n p_v a_v\right| < \infty$, ise $\sup_n \left|p_n \sum_{k=n+1}^\infty a_k\right| < \infty$.dur.

(ii) $\sum_k p_k a_k$ yakınsak ise $\lim_n p_n \sum_{k=n+1}^\infty a_k = 0$ dır.

Tanım 6.2.2. E bir dizi uzayı ve $p > 0$ olmak üzere aşağıdaki uzaylar tanımlansın.

$$\begin{aligned} E^{p\alpha} &= \left\{ a = (a_k) : \sum_k |a_k x_k|^p < \infty, \forall_x \in E \right\} \\ E^{p\beta} &= \left\{ a = (a_k) : \sum_k (a_k x_k)^p \text{ yakınsaktır}, \forall x \in E \right\} \\ E^{p\gamma} &= \left\{ a = (a_k) : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} (a_k x_k)^p \right| < \infty, \forall x \in E \right\} \\ E^{N} &= \left\{ a = (a_k) : \lim_k a_k x_k = 0, \forall x \in E \right\} \end{aligned}$$

$E^{p\alpha}$, $E^{p\beta}$, $E^{p\gamma}$ and E^N uzaylarına sırasıyla E nin $p\alpha-$, $p\beta-$, $p\gamma-$ ve $N-$ dualleri denir. $E^{p\alpha} \subset E^{p\beta} \subset E^{p\gamma}$ ve $\eta = p\alpha,\ p\beta,\ p\gamma$ için $E \subset F$ ise $F^\eta \subset E^\eta$ dir. $p = 1$ alınırsa buradaki tanımdan E nin $\alpha-$, $\beta-$ and $\gamma-$ dualleri elde edilir.

Teorem 6.2.3. $0 < p < \infty$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ a = (a_k) : \ \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left| v_k^{-1} \right|^p |a_k|^p < \infty \right\}, \\ U_2 &= \left\{ a = (a_k) : \ \sup_n k^{-pm} |v_k|^p |a_k|^p < \infty \right\}, \end{aligned}$$

olmak üzere

(i) $[\Delta_v^m (l_\infty)]^{p\alpha} = [\Delta_v^m (c)]^{p\alpha} = [\Delta_v^m (c_o)]^{p\alpha} = U_1$

(ii) $U_1^{p\alpha} = U_2$

İspat. $a \in U_1$ ve $x \in \Delta_v^m (l_\infty)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left| v_k^{-1} \right|^p |a_k|^p k^{-pm} |v_k|^p |x_k|^p \\ &\leq \sup_n k^{-pm} |v_k x_k|^p \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left| a_k v_k^{-1} \right|^p < \infty. \end{aligned}$$

dur. Buradan $a \in \ [\Delta_v^m (l_\infty)]^{p\alpha}$ dir.

Tersine $a \in \ [\Delta_v^m (l_\infty)]^{p\alpha}$ ve $a \notin U_1$ olduğunu kabul edelim.

Böylece $n_1 < n_2 < ...,$ için

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |v_k|^{-p} k^{pm} |a_k|^p > i^p$$

olacak şekilde n_i pozitif tamsayılarının kesin artan bir (n_i) dizisi vardır.

$x \in \Delta_v^m (c_0)$ olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$x_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq n_1 \\ k^m v_k sgn \frac{a_k}{i}, & n_i \leq k \leq n_{i+1} \end{cases}$$

Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^p &= \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |a_k x_k|^p + ... + \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_k x_k|^p \\ &= \sum_{k=n_1+1}^{n_2} k^{pm} |v_k|^{-p} |a_k|^p + ... + \frac{1}{i^p} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} k^{pm} |v_k|^{-p} |a_k|^p \\ &> 1 + 1 + ... \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $a \in [\Delta_v^m (c_0)]^{p\alpha}$ olması ile çelişir. Bu yüzden $a \in U_1$ dir. Bu da (i) nin ispatını tamamlamaktadır.

(ii) $a \in U_2$ ve $x \in U_1$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left|v_k^{-1}\right|^p |a_k|^p k^{-pm} |x_k|^p |v_k|^p \\ &\leq \sup_k \left(k^{-pm} |a_k|^p |v_k|^p\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left|v_k^{-1}\right|^p |x_k|^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

dur. Buradan $a \in U_1^{p\alpha}$ dır.

Şimdi $a \in U_1^{p\alpha}$ ve $a \notin U_2$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\sup_k k^{-pm} |v_k|^p |a_k|^p = \infty$$

elde edilir. Buradan

$$[k(i)]^{-pm} \left|v_{k(i)}\right|^p \left|a_{k(i)}\right|^p > i^m$$

olacak şekilde $k(i)$ pozitif tamsayılarının kesin artan bir $(k(i))$ dizisi vardır.

x dizisi

$$x_k = \begin{cases} \left|ak(i)\right|^{-p}, & k = k(i) \\ 0, & k \neq k(i) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $m \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} \left|v_k^{-1}\right|^p |x_k|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} [k(i)]^{pm} \left|v_{k(i)}\right|^{-p} \left|a_{k(i)}\right|^{-p} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-m} \\ &< \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x \in U_1$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ dur.

Bu ise $a \in U_1^{p\alpha}$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $a \in U_2$ dir.

Teorem 6.2.3 de her $k \in \mathbb{N}$ için $v_k = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2.4. $0 < p < \infty$ olsun.

$$G_1 = \left\{ a = (a_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{pm} |a_k|^p < \infty \right\}$$

$G_2 = \left\{ a = (a_k) : \sup_k k^{-pm} |a_k|^p < \infty \right\}$
olmak üzere

(i) $[\Delta^m(\ell_\infty)]^{p\alpha} = [\Delta^m(c)]^{p\alpha} = [\Delta^m(c_0)]^{p\alpha} = G_1$

(ii) $G_1^{p\alpha} = G_2$

dir.

Lemma 6.2.5. $x \in \Delta_v^m(c_0)$ ise $\binom{m+k}{k}^{-1} v_k x_k \to 0,\ (k \to \infty)$ dır.

Teorem 6.2.6. m pozitif bir tamsayı olsun.

$M_1(v) = \{a = (a_n) : v_n^{-1} n^m a_n \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty\}$

ve

$M_2(v) = \left\{ a = (a_n) : \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} v_n^{-1} a_n \right| < \infty \right\}$
olmak üzere

$[\Delta_v^m(\ell_\infty)]^N = [\Delta_v^m(c)]^N = M_1(v)$ ve $[\Delta_v^m(c_0)]^N = M_2(v)$

dir.

İspat. $[\Delta_v^m(\ell_\infty)]^N = [\Delta_v^m(c)]^N = M_1(v)$ nin ispatı kolaydır. Bu yüzden sadece $[\Delta_v^m(c_0)]^N = M_2(v)$ olduğu gösterilecektir.

$a \in M_2(v)$ ve $x \in \Delta_v^m(c_0)$ olsun. Böylece Lemma 6.2.5. ve(6.2.2) den

$$\begin{aligned} \lim_n a_n x_n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} \right) v_n^{-1} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} \right)^{-1} v_n x_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a \in [\Delta_v^m(c_0)]^N$ dir.

Şimdi $a \in [\Delta_v^m(c_0)]^N$ olduğu kabul edilsin. Böylece her $x \in \Delta_v^m(c_0)$ için

$$\lim_n a_n x_n = 0$$

dır. Diğer taraftan (6.1.1) ve yukarıda verilen nottan her $x \in \Delta_v^m(c_0)$ için

$$\begin{aligned} x_n &= v_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+m-k-1}{m-1}y_k = v_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+m-k-1}{m-1}y_k = 0, \\ y_0 &= 0, \end{aligned}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $y=(y_k) \in c_o$ vardır. Buradan

$$\lim_n a_n x_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n+m-k-1}{m-1}v_n^{-1}a_n y_k = 0, \quad \forall_y \in c_0$$

dır.

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n+m-k-1}{m-1}v_n^{-1}a_n, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

alınırsa

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}y_k = \lim_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n+m-k-1}{m-1}v_n^{-1}a_n y_k = 0, \quad \forall_y \in c_0$$

elde edilir. Buradan $A \in (c_o, c_o)$ dır. Böylece

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n}|a_{nk}| = \sup_n \sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|\binom{n+m-k-1}{m-1}\left|v_n^{-1}\right||a_n| < \infty$$

dur. Bu da ispatı tamamlar.
Aşağıdaki teoremler boyunca b_k yerine $\sum_{j=k+1}^{\infty} v_j^{-1}a_j$ yazılacaktır.

Teorem 6.2.7. (a)
$$E_1(v) = \left\{a \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1} \text{ yakınsaktır, } \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j-1}{m-2} < \infty\right\}$$

alınırsa

$$\left[D\Delta_v^m(l_\infty)\right]^\beta = E_1(v)$$

dir.

(b)

$$E_2(v)=\left\{a\in\omega:\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_kv_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}\right|<\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j-1}{m-2}<\infty\right\}$$

alınırsa

$$[D\Delta_v^m(\ell_\infty)]^\gamma=E_2(v)$$

dir.

İspat. $x\in D\Delta_v^m(\ell_\infty)$ ise yeterince büyük k örneğin $k>2m$ için

$$x_k=v_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}y_j,\quad y_{1-m}=y_{2-m}=....=y_0=0$$

olacak şekilde(6.1.1) den bir ve yalnız bir $y=(y_k)\in l_\infty$ vardır.
$a\in E_1(v)$, ve $\binom{-1}{-1}=1$ olsun. (Bazı eserlerde $k<0$ için $\binom{r}{k}=0$ kabul edilir.) Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kx_k &= \sum_{k=1}^{n}a_k\left(v_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}(-1)^m\binom{k-j-1}{m-1}y_j\right)\\ &= (-1)^m\sum_{k=1}^{n-m}b_{k+m-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}y_j \qquad (6.2.4)\\ &\quad -b_n\sum_{j=1}^{n-m}(-1)^m\begin{pmatrix}n-j-1\\ m-1\end{pmatrix}y_j\end{aligned}$$

yazılabilir

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{k+m-1}|\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}<\infty$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_{k+m-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}y_j$$

serisi mutlak yakınsaktır. Ayrıca Lemma 6.2.1(ii) den $n \longrightarrow \infty$ için

$$b_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} \to 0$$

dır. Buradan her $x \in D\Delta_v^m (l_\infty)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

serisi yakınsaktır. Böylece $a \in [D\Delta_v^m (l_\infty)]^\beta$ dır.

$a \in [D\Delta_v^m (\ell_\infty)]^\beta$ olsun. Böylece her $x \in D\Delta_v^m (l_\infty)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ serisi yakınsaktır. $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$x_k = \begin{cases} 0, & k \leq m \\ v_k^{-1} \Sigma_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1}, & k > m \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k^{-1} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1}$$

serisi yakınsaktır. Bu ise Lemma 6.2.1(ii) den $n \longrightarrow \infty$ için

$$b_n \sum_{j=1}^{n-m} \binom{n-j-1}{m-1} \to 0$$

olduğunu gösterir.

Şimdi $a \in [D\Delta_v^m (\ell_\infty)]^\beta - E_1 (v)$ olsun. Böylece

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2}$$

ıraksaktır. Yani

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j-1}{m-2}=\infty$$

dur. Her k için $a_k>0$ veya her k için $a_k<0$ olmak üzere

$$x_k=\begin{cases}0, & k\leq m\\ v_k^{-1}\Sigma_{i=1}^{k-1}sgnb_i\Sigma_{j=1}^{i-m+1}\binom{i-j-1}{m-2}, & k>m\end{cases}$$

olmak üzere $x=(x_k)$ dizisi tanımlansın. $k>m$ için $|\Delta_v^m x_k|=1$ olduğundan $x=(x_k)\in D\Delta_v^m(\ell_\infty)$ olduğu açıktır. Böylece $n>m$, için

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx_k=-\sum_{k=1}^{m}b_{k-1}\Delta_v x_{k-1}-\sum_{k=1}^{n-m}b_{k+m-1}\Delta_v x_{k+m-1}-b_nx_nv_n \qquad (6.2.5)$$

yazılabilir. $(b_nx_nv_n)\in c_o$ olduğundan $n\longrightarrow\infty$ için (6.2.5) den

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k &= \sum_{k=1}^{\infty}b_{k+m-1}\Delta_v x_{k+m-1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|b_{k+m-1}|\sum_{j=1}^{k}\binom{k+m-j-2}{m-2}\\ &= \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $a\in[D\Delta_v^m(l_\infty)]^\beta$ olmasıyla çelişir. Buradan $a\in E_1(v)$ dir.

(b) nin ispatı da yukarıdaki ispata benzer şekilde Lemma 6.2.1(i) kullanılarak yapılabilir.

Lemma 6.2.8. $\eta=\beta$ veya γ olmak üzere $[D\Delta_v^m(l_\infty)]^\eta=[D\Delta_v^m(c)]^\eta$ dir.

Teorem 6.2.9. c_o^+ tüm pozitif sıfıra yakınsak dizilerin kümesini göstersin.

(a)

$$E_3(v)=\left\{a\in\omega:\sum_{k=1}^{\infty}a_kv_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}u_j \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j-1}{m-2}u_j<\infty,\ \forall u\in c_o^+\right\}$$

olarak alınırsa

$[D\Delta_v^m(c_o)]^\beta=E_3(v)$ dir.

(b)

$$E_4(v)=\left\{a\in\omega:\sup_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_kv_k^{-1}\sum_{j=1}^{k-m}\binom{k-j-1}{m-1}u_j\right|<\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\sum_{j=1}^{k-m+1}\binom{k-j-1}{m-2}u_j<\infty,\ \forall u\in c_o^+\right\}$$

olarak alınırsa $[D\Delta_v^m(c_o)]^\gamma=E_4(v)$ dir.

Şimdi aşağıdaki sonuçlar verilsin.

Lemma 6.2.10. $\eta=\beta$ veya γ olmak üzere

(i) $[\Delta_v^m(l_\infty)]^\eta=[D\Delta_v^m(l_\infty)]^\eta$

(ii) $[\Delta_v^m(c)]^\eta=[D\Delta_v^m(c)]^\eta$

(iii) $[\Delta_v^m(c_0)]^\eta=[D\Delta_v^m(c_0)]^\eta$

6.3. Matris Dönüşümleri

Bu bölümde yukarıda tanımlanan $\Delta_v^m(l_\infty)$, $\Delta_v^m(c)$ ve $\Delta_v^m(c_o)$dizi uzayları ile l_∞, c ve c_o dizi uzayları arasında matris dönüşümü tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şartlar incelenecektir.

Şimdi aşağıdaki teoremler verilsin.

Teorem 6.3.1. $G=l_\infty$ veya c ve $H=l_\infty$, c veya c_o olsun. Böylece

$$b_{nk}=\sum_{i=k+1}^{\infty}a_{ni}v_i^{-1}$$

olmak üzere

$A=(a_{nk})\in(\Delta_v^m(G),H)$ olması için gerek ve yeter şart

(i) $(a_{nj})_n \in H \ \ (1 \leq j \leq m)$

(ii) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} v_{k-1} \sum_{j=1}^{k-m} \binom{k-j-1}{m-1} j^{-r}\right)_n \in H$

(iii) $\left(b_{nk} \sum_{j=1}^{k-m+1} \binom{k-j-1}{m-2} j^{-r}\right) \in (G, H)$

Teorem 6.3.2. $G = l_\infty$ veya c ve $H = l_\infty$, c veya c_o olsun. Böylece $C = (c_{nk}) = (\Delta^{m-1} v_n a_{nk} - \Delta^{m-1} v_{n+1} a_{n+1,k})$ olmak üzere $A = (a_{nk}) \in (G, \Delta_v^m (H))$ olması için gerek ve yeter şart

(i) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $C \in (G, H)$

KAYNAKLAR

1. Balcı Mustafa, Matematik Analiz,1997, Ertam Basın Yayın Dağıtım LTD. ŞTİ.,II, Ankara

2. Bayraktar, Mustafa 2000, Fonksiyonel Analiz Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Bursa

3. Das, G., 1973, "Banach limits and other limits" J. London Math. Soc. (2) 7 pp.501-507

4..Devi, S. L., 1976, "Banach limits and infinite matrices" J. London Math. Soc.(2) 12 pp.397-401

5. Et, Mikail, 2000, "On some Topological properties difference sequence spaces" Internat. J. Math. Sci. 24 pp. 785-791.

6. Et, M. ve Esi, A., 2000, "On Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Difference Sequence Spaces" Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (2) 23 pp 25-32

7. Et, M. ve Çolak, R., 1995, "On Some Generalized Difference Sequence Spaces" Soochow J. Math. 21 pp 377-386

8. Et, M., 1993, "On some difference sequence spaces" Doğa-Tr. J. of Mathematics 17 pp. 18-24

9. Fast H.,1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241- 244.

10. Garling, D. J. H., 1967, "The $\beta-$ ve $\gamma-$duality of sequence spaces" Proc. Camb. Phil. Soc. 63 pp.963.

11. Kampthan, P. K., 1981, "Sequence Spaces and Series" Marcel Dekker Inc. New York

12. Kızmaz, H.1981, "On Certain Sequence Spaces" Canad. Math. Bull. Vol. 24 (2) pp 169-176

13. Maddox, I. J., 1970, Elements of functional analysis, Cambridge University Press,Cambridge

14. Malkowsky, Parashar, 1997, "Matrix Transformations in spaces of

Bounded and Convergent Difference Sequences of order m" Analiysis 17 pp 87-97

15. Özdamar, E., Görgülü, A. ve Alp, M., 1999, Genel Topoloji, Uludağ Üniversitesi, Bursa