ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bekir SOYTÜRK

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2007

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bekir SOYTÜRK

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2007

ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Fatih NURAY danışmanlığında,

Bekir SOYTÜRK tarafından hazırlanan

Asimptotik İstatistiksel Denk Diziler

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

14.../06/2007...

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

yüksek lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Fatih NURAY	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Murat PEKER	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bekir SOYTÜRK

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, gerekli olan temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık ve λ-istatistiksel yakınsaklık kavramları gözden geçirilmiş ve istatistiksel yakınsaklık ile λ-istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ve ilgili teoremler incelenmiştir. Üçüncü bölümde, asimptotik denk ve istatistiksel limit tanımlarının doğal kombinasyonu olan asimptotik istatistiksel denk dizi tanımı verilmiş ve ilgili teoremler incelenmişti. Dördüncü bölümde, (σ-λ)-asimptotik istatistiksel denk dizi tanımı verilmiş ve λ-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili teoremlerin benzerleri (σ-λ)-asimptotik istatistiksel denklik tanımı kullanılarak verilmiş ve ispatları incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Lacunary dizi tanımı verilerek, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler tanımlanmış ve λ-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili teoremlerin benzerleri ve bazı kapsama teoremleri lacunary istatistiksel yakınsaklık ve asimptotik lacunary istatistiksel denklik tanımları kullanılarak incelenmiştir.

2007, 57 sayfa

Anahtar kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, λ-istatistiksel yakınsaklık, Asimptotik denk diziler, Asimptotik istatistiksel denk diziler, Lacunary istatistiksel yakınsaklık ve Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ASYMPTOTICALLY STATISTICAL EQUIVALENT SEQUENCES

Bekir SOYTÜRK

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Basic Science Subdavision of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consist of five section. First section has been assigned for basic definitions and theorems which are necessary. In second part, it has been looked over the concept of "λ-statistical convergence" and has been examined the relationship between "statistical convergence" and "λ- statistical convergence" with theorems. In third section, has been presented the definition of the asymptotically statistical equivalent which is a natural combination of the definition for Asyptotically equivalnet and statistically limit, and has been studied basic theorems which is interested in asymptotically statistically. The definition of $S_{\sigma,\lambda}$-asymptotically equivalnet has been presented in four section and using this definition has been proved $S_{\sigma,\lambda}$-asymptotically equivalent analogues of λ-statistical convergent theorems. In fifth section have been defined the folloving definations, lacunary sequence, lacunary istatistiksel convergence and σ-asiymptotically lacunary statistical equivalent sequences and using this definition have been also proved some inclusion theorems and lacunary istatistiksel convergence and σ-asiymptotically lacunary statistical equivalent analogues of λ- statistical convergent theorems.

2007, 57 pages

Keywords: Statistical convergence, λ- statistical convergence, Asymptotically equivalent sequences, Asymptotically statistical equivalent sequences, Lacunary statistical convergence and Asymptotically lacunary statistical equivalent sequences

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Fatih NURAY' a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca tez çalışmalarım boyunca benden desteğini esirgemeyen sevgili eşim Nurdan' a, minik kızımız Belinay' a ve aile büyüklerimize çok teşekkür ederim.

Bekir SOYTÜRK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks (Karmaşık) sayılar kümesi
$\|K\|$	Doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesinin eleman sayısı
$\\| \\|$	Lineer uzay üzerinde bir norm
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
S	Bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_0	Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_λ	λ – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
c	Yakınsak dizilerin kümesi
$\hat{c}$	Hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$[\hat{c}]$	Kuvvetli hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
(V,λ)	De la Valée-Pousin yöntemi ile toplanabilen diziler kümesi
$[V,\lambda]$	De la Valée-Pousin yöntemi ile kuvvetli toplanabilen diziler kümesi
$R_n x$	n. dereceden Remeinder dizi
$x \sim y$	Asimptotik denk diziler
$x \overset{S_L}{\sim} y$	L katlı asimptotik istatistiksel denk diziler
$[V_\sigma]$	Kuvvetli invariant yakınsak dizilerin kümesi
$x \overset{S_\sigma}{\sim} y$	S_σ-asimptotik denk diziler
$x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$	$S_{\sigma,\lambda}$-asimptotik denk diziler
$x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$	Kuvvetli (σ,λ)-asimptotik denk diziler
$x \overset{\hat{S}}{\sim} y$	Hemen hemen asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{\hat{S}_\lambda}{\sim} y$	Hemen hemen λ-asimptotik istatistiksel denk diziler

$x \overset{[\hat{V}_\lambda]}{\sim} y$	Kuvvetli hemen hemen λ-asimptotik denk diziler
$\theta = \{k_r\}$	Lacunary dizisi
$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$	Asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$x \overset{N_\theta^L}{\sim} y$	Kuvvetli asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$	σ-asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
$x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$	Kuvvetli σ-asimptotik lacunary denk diziler

1 GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (1951) tarafından çalışıldı. Daha sonra 1959 da Schoenberg tarafından istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özellikleri verilerek istatistiksel yakınsak dizi uzayının bir lineer uzay olduğu gösterildi. 1985 de Fridy tarafından istatistiksel Cauchy dizi tanımı verilerek istatistiksel yakınsaklık bir regüler toplanabilme metodu gibi çalışıldı.

Mursaleen (2000) tarafından (V,λ)-toplanabilirlik kullanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilerek $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık tanımlandı ve L ye kuvvetli $(V,\lambda)-$toplanabilir ve bütün istatistiksel yakınsak dizi kümeleri ile $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiş ve pozitif sayıların sonsuza giden $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ ve $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde bütün $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan diziler kümesi $\wedge$ ile gösterilmek üzere aşağıdaki teoremler verilerek ispatları yapılmıştır.

Teorem : $\lambda \in \wedge$ için

(i) $x_k \to L\,[V,\lambda] \Rightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $[V,\lambda] \subsetneqq S_\lambda$ kapsaması kesindir.

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise $x = (x_k)$ olmak şartıyla $x_k \to L\,[V,\lambda]$ ve buradan $x_k \to L(C,1)$ dir. Burada $x = (x_k)$ sabit değildir.

(iii) $S_\lambda \cap \ell_\infty = [V,\lambda] \cap \ell_\infty$ dur.

Teorem :$S_\lambda \subsetneqq S$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{n} > 0$$

olmasıdır.

Asimptotik denk dizi ve asimptotik regüler matris tanımları Pobyvanets (1980) tarafından verildi. Marouf (1993) tarafından asimptotik denk diziler arasındaki ilişki ve bu denklik ile ilgili diziden diziye matris dönüşümleri incelendi. 2003 te Pobyvanets' in tanımlarına benzer olarak L katlı asimptotik istatistiksel denk dizi ve asimptotik istatistiksel regüler matris tanımları Patterson tarafından verildi ve L katlı asimptotik istatistiksel denkliğin matris dönüşümü ile korunmasının sağlanması için gerek ve yeter koşullar ile toplanabilir bir A matrisinin asimptotik istatistiksel regüler olması için gerek ve yeter şartlar gösterildi.

σ, pozitif tamsayılarda tanımlı $\left(\sigma^m(n) = \sigma\left(\sigma^{m-1}(n)\right), m = 1, 2, ...\right)$ biçiminde birebir eşleme olsun. ℓ_∞ üzerindeki sürekli lineer ϕ fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa invariant ortalama veya $\sigma-$ortalamadır.

(1) $\phi(x) \geq 0$, her n için $x_n \geq 0$ $(x = (x_n))$

(2) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, ...)$

(3) $\phi\left(x_{\sigma(n)}\right) = \phi(x_n)$, her $x \in \ell_\infty$

σ eşlemesinin bir çeşidi olarak, ϕ invariant ortalama yakınsak dizi uzayı c üzerinde limit fonksiyoneline genişletilebilir. Bir anlamda;

$$\forall\ x \in c \text{ için } \phi(x) = \lim x \text{ tir.}$$

Savaş ve Başarır (2006), σ eşlemesi kullanılarak tanımlanan $\sigma-$yakınsaklık ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık tanımlarının doğal bir kombinasyonu olan $(\sigma, \lambda)-$istatistiksel yakınsaklık, L katlı $\sigma-$asimptotik istatistiksel denk, L katlı $(\sigma, \lambda)-$asimptotik istatistiksel denk, kuvvetli $(\sigma, \lambda)-$asimptotik denk, L katlı hemen hemen asimptotik istatistiksel denk, L katlı hemen hemen $\lambda-$asimptotik istatistiksel denk, L katlı kuvvetli hemen hemen $\lambda-$asimptotik denk dizi tanımlarını verdiler ve aşağıdaki teoremi ispatladılar.

Teorem : $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere

(i) $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ise $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$,

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$ ise $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ve buradan $x \overset{[c,1]}{\sim} y$,

(iii) $S_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty = [V_{\sigma,\lambda}] \cap \ell_\infty$ dir.

Lacunary dizi tanımı ve kuvvetli lacunary yakınsaklık kavramı Freedman, Sember ve Raphael (1978) tarafından tanımlandı. Bunları takiben Fridy ve Orhan (1993) lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak aşağıdaki teoremi verdiler.

Teorem : $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere

(i) (a) $x_k \to L(N_\theta)$ ise $x_k \to L(S_\theta)$,

(b) N_θ, S_θ nın özalt kümesidir.

(ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L(S_\theta)$ ise $x_k \to L(N_\theta)$,

(iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$ dir.

Patterson ve Savaş, Savaş ve Başarır'ın tanımlarına benzer olarak Lacunary dizisi ve kuvvetli lacunary yakınsaklık tanımlarından faydalanarak; L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk, L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denk, L katlı $\sigma-$asimptotik lacunary istatistiksel denk, L katlı kuvvetli $\sigma-$asimptotik lacunary istatistiksel denk dizi tanımlarını vererek aşağıdaki teoremi verdiler.

Teorem: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olmak üzere

(i) $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(iii) $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y \cap \ell_\infty = x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y \cap \ell_\infty$ dir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmaya esas olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Dizi): Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye rasyonel terimli dizi adı verilir ve $x = (x_k) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir(Balcı 1999).

Tanım 2.2 (Sınırlı Dizi): (x_k) dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için

$$|x_k| \leq K$$

olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir(Balcı 1999).

Tanım 2.3 (Yakınsak Dizi):(x_k) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $k > k_0$ olduğunda $|x_k - s| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi s ye yakınsaktır denir ve

$$\lim x_k = s \text{ veya } (x_k) \longrightarrow s$$

şeklilnde gösterilir(Balcı 1999).

Teorem 2.1: Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır(Balcı 1999).

Teorem 2.2: Yakınsak her dizi sınırlıdır(Balcı 1999).

Tanım 2.4: (x_k) dizisi verilmiş olsun.

1) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k < x_{k+1}$ ise diziye monoton artan dizi

2) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \leq x_{k+1}$ ise diziye geniş anlamda monoton artan veya azalmayan dizi

3) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k > x_{k+1}$ ise diziye monoton azalan dizi

4) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k \geq x_{k+1}$ ise diziye geniş anlamda monoton azalan veya artmayan dizi denir(Balcı 1999).

Tanım 2.5 (Cauchy Dizisi): (x_k) bir reel sayı dizisi olsun. (x_k) bir Cauchy dizisidir$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $m, k \geq k_0$ için

$$|x_m - x_k| < \varepsilon.$$

(Balcı 1999).

Teorem 2.3: Her Cauchy dizisi sınırlıdır(Balcı 1999).

Tanım 2.5 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme olsun.

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall\ x, y, z \in X$ için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$

M3) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartlarını sağlıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir(Bayraktar 2000).

Tanım 2.6 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F reel veya kompleks terimli bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir.

A) L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

$G1)$ $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

$G2)$ $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

$G3)$ $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

$G4)$ $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır.

$G5)$ $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır..

$L1)$ $\alpha.x \in L$ dir.

$L2)$ $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.

$L3)$ $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ dir.

$L4)$ $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.

$L5)$ $1.x = x$ (Burada 1, F nin birim elemanı) dir(Bayraktar 2000).

Tanım 2.7 (Normlu Uzay): N bir lineer uzay olsun.

$$\|\| : N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x noktasındaki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$N1)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad (\alpha \in F)$

$N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm denir ve genellikle $(N, \|\|)$ ile gösterilir(Bayraktar2000).

Tanım 2.8 (Tam Uzay): X normlu uzayındaki her (x_k) Cauchy dizisi X üzerinde tanımlı norm metriğine göre yakınsak ve yakınsadığı değer X in bir elemanı ise yani $x_k \to x \in X$ ise $(X, \|\|)$ normlu uzayına tamdır denir.

Tanım 2.9 (Banach Uzayı): Tam normlu uzaylara Banach uzayı denir.

Tanım 2.10 (Toplanabilme): l bir kompleks sayı olmak üzere,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri her n için yakınsak ve

$$\lim_{n \to \infty} A_n(x) = l$$

ise x dizisi l sayısına $A-$toplanabilirdir denir ve $x \to l(A)$ ile gösterilir. Bu aynı zamanda adi toplanabilme tanımıdır.

$A = (a_{nk})$ kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $A_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ mevcut ise, $Ax := (A_n(x))$ dizisine, x_k dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir. X ve Y reel ya da kompleks terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X den Y içine tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise, $A \in (X, Y)$ şeklinde yazılır. $(X, Y; p)$ ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Örneğin, $A \in (c, c; p)$ olması $x_n \to L$ olduğunda $A_n(x) \to L$ olması demektir. Bu tip matrislere Regüler matris adı verilir. $A \in (c, c; p)$ olması için gerek ve yeter koşulları Silverman-Toeplitz teoremi vermektedir. Bu teoremi ispatsız vereceğiz.

Teorem 2.4: $A(a_{nk})$ toplanabilme matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

(i) Her $k = 1, 2, ...$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$,

(iii) Pozitif bir M sayısı için $\sup\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M < \infty$,

olmasıdır.

Örnek :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ile verilen C_1 Cesáro matrisi ve I birim matrisi Teorem 2.4 ün koşullarını sağladığı için her ikiside regülerdir.

Tanım 2.11 (Banach Limiti): $D((x_k)) = (x_{k+1})$ olmak üzere, eğer ℓ_∞ üzerinde tanımlı L lineer fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa L ye bir Banach Limiti denir.

(i) $x_k \geq 0$ ise $L(x) \geq 0$

(ii) Tüm $x \in \ell_\infty$ için $L(Dx) = L(x)$

ve

(iii) $e = (1, 1, 1, ...)$ olmak üzere $L(e) = 1$.

Tanım 2.12 (Hemen Hemen Yakınsak Dizi): Tüm Banach limitleri çakışık olan $x \in \ell_\infty$ dizisine hemen hemen yakınsak dizi denir.

Teorem 2.5: Bir $x = (x_k)$ dizisinin L ye hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} x_{n+k} = L$$

olmasıdır(Lorentz 1948).

3. İSTATİSTİKSEL ve $\lambda-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde ilk önce istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak ilgili teoremler verilecek ve daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine genelleştirilen $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak ilgili teoremler incelenecektir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilirlik kavramları tanımlanarak, bu kavramlarla ilgili olarak tanım ve teoremler gözden geçirilecektir.

Fast 1951 de genel dizisel limit kavramını genişleterek inceledi ve istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladı. 1959 da Schoenberg tarafından istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özellikleri verildi ve istatistiksel yakınsaklık bir toplanabilme metodu olarak incelendi. 1985 te Fridy tarafından ise istatistiksel Cauchy dizisi tanımlanarak, istatistiksel yakınsaklık bir regüler toplanabilme metodu gibi çalışıldı.

İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermeden önce adi yakınsak dizilerin tanımını hatırlayarak istatistiksel yakınsaklık fikrinin nereden kaynaklandığını görelim. Bilindiği gibi, adi yakınsaklık ta x reel sayı dizisi L yakınsak ise L nin her bir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi bu kavramı biraz daha genelleştirerek L noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda da elemanının kalabileceğinin kabul edelim. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre çok azdır. Yani dizinin "hemen hemen" tüm elemanları, L nin ε komşuluğu içerisindedir. Bu durumda x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanlarının sayısının "az" olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Aytar 2001).

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesinin eleman sayısı (kardinali) $|K|$ ile gösterilsin, yani $|K| := cardK$ olsun.

Tanım 3.1.1: $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla **alt** ve **üst yoğunluğu;**

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}, \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda bu limite K kümesinin **doğal yoğunluğu** denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani

$$\delta(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dir (Niven and Zuckerman and Montgomery 1991).

Doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılması için Gürdal (2004) de verilen aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.1: $K = \{1,\ 4,5,6,\ \ 13,14,...,24,\ \ 49,50,...,96,\ \ 193,194,...\}$ şeklinde verilsin. K indeks kümesi için $\frac{|K|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

(a) $\frac{|K|}{n}$ ifadesinin üst limitini (lim sup) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, \ldots \rightarrow \frac{2}{3}$$

(b) $\frac{|K|}{n}$ ifadesinin alt limitini (sup inf) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, \ldots \rightarrow \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnek için

$$\begin{aligned}\underline{\delta}(K) &= \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \frac{1}{3} \\ \overline{\delta}(K) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

olduğundan $\underline{\delta}(K) \neq \overline{\delta}(K)$ dir. Bu nedenle K kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi alt ve üst yoğunluğu olmasına rağmen doğal yoğunluğu olmayan kümeler de vardır. $\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N}\backslash K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N}\backslash K)$ dır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$, yani doğal yoğunluğu sıfırdır.

Tanım 3.1.2: $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi **hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor** denir ve "$h.h.k.$" şeklinde gösterilir. (Fridy 1985)

Şimdi istatistiksel yakınsaklık tanımını hatırlayalım.

Tanım 3.1.3: $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L **sayısına istatistiksel yakınsaktır** denir ve $st - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S)$ biçiminde yazılır. Burada S bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini göstermektedir (Fridy 1985).

$L = 0$ olması durumunda S_0, yani sıfıra yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

açıkça görülebilir ki yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsak bir dizidir. Ama tersi doğru değildir. Çünkü x dizisi L yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $K := \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda eleman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır. $(\delta(K) = 0)$ Yakınsak dizi sınırlı olmasına rağmen, istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmayabilir. Aşağıdaki örneklerden görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilirler.

Örnek 3.1.2:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3, (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüme alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt[3]{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

elde edilir. Bu ise $st - \lim x = 0$ demektir. Diğer taraftan ℓ_∞ ile S uzayları arasında bir kapsama bağıntısı yoktur.

Örnek 3.1.3:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2, (n = 1, 2, ...) \\ 2, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 2$ ve x$\notin \ell_\infty$ dur. Ayrıca $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 3.1.1: $st - \lim x = L_1$, $st - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

i) $st - \lim x = L_1$ ise $st - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$

ii) $st - \lim (x + y) = L_1 + L_2$

dir (Schoenberg 1959).

(i)-(ii) den istatistiksel yakınsak diziler uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 3.1.4: $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k.$ için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine **istatistiksel Cauchy** dizisi denir(Fridy 1985).

Teorem 3.1.2: İstatistiksel yakınsak her dizi bir istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy 1985).

İspat: Bu teoremin ispatında "yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol izlenecektir.

$x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise $st - \lim x = L$ dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $h.h.k.$ için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N, $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse ,

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &= |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (h.h.k. \text{ için}) \end{aligned}$$

elde edilir.

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme motodları arasındaki ilişki Schoenberg (1959) ve Fridy (1985) tarafından incelenmiştir.

Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodu içermez. Yani her $x \in S$ için $A - \lim x = st - \lim x = L$ olacak şekilde bir A matrisi yoktur (Fridy 1985).

Tanım 3.1.5: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$\delta_A(K) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} a_{nk} = \lim_{n\to\infty} (A\chi_K)_n$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin $A-$**yoğunluğu** denir(Freedman and Sember 1981).

$\delta_A(K)$ veya $\delta_A(\mathbb{N}\backslash K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise

$$\delta_A(K) = 1 - \delta_A(\mathbb{N}\backslash K) \text{ dir.}$$

Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise her A negatif olmayan regüler matrisi için K kümesinin $A-$yoğunluğu sıfırdır ($\delta_A(K) = 0$). Burada K sonlu bir küme ise onun karakteristik dizisi χ_K sonlu 1 lere sahiptir. Böylece $\lim_{n\to\infty} (\chi_K)_n = 0$ ve A regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty} (A\chi_K)_n = 0$ dır.

Örnek 3.1.4:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2, \quad (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda, $K = \{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi için $\delta_A(K) = 1$ ve $K' = \{k \neq n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi için $\delta_A(K') = 0$ dır.

Tanım 3.1.6: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin $A-$yoğunluğu sıfır yani,

$$\delta_A(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına **$A-$istatistiksel yakınsaktır** denir ve $S_A - \lim x = L$ ile gösterilir(Connor 1989).

Eğer $A = C_1$ alınırsa istatistiksel yakınsaklığın tanımı elde edilir.

Şayet bir x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ sonlu küme olup bu kümenin $A-$yoğunluğu sıfırdır. Böylece her negatif olmayan regüler A matrisi için $A-$istatistiksel yakınsaklık regüler toplanabilme metodudur.

Örnek 3.1.5:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ olsun. Burada x dizisi istatistiksel yakınsak olmamasına rağmen, sıfıra $A-$istatistiksel yakınsaktır. Dikkat edilirse; $\varepsilon > 1$ için

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \phi$$

olup bu kümenin $A-$yoğunluğu sıfırdır. Eğer $0 < \varepsilon \leq 1$ ise

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 3, 5, 7, ...\}$$

dir. Burada $\chi_k = (1, 0, 1, 0, ...)$, $A\chi_{_k} = (0, 0, 0, ...)$ ve $\delta_A(K) = 0$ dır. O halde her $\varepsilon > 0$ sıyısı için $\delta_A(\{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}) = 0$ dır.

Örnek 3.1.6:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & k = n^2, \quad (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan negatif olamyan regüler $A = (a_{nk})$ matrisini ve

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k = n^2, \quad (n = 1, 2, ...) \\ 1, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım.
Her $\varepsilon > 0$ için $K = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - \frac{1}{5}\right| \geq \varepsilon\right\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_n (A\chi_K)_n = 0$$

olduğundan $S_A - \lim x = \frac{1}{5}$ dir.

3.2. $\boldsymbol{\lambda}$−İstatistiksel Yakınsaklık

Mursaleen (2000) (V, λ)-toplanabilirliği kullanarak istatiksel yakınsaklık kavramını genelleştirdi. Bu yeni metoda $\boldsymbol{\lambda}$−istatiksel yakınsaklık denildi ve $\boldsymbol{\lambda}$−istatistiksel yakınsaklık dizilerin kümesi S_λ ile gösterildi. $(C, 1)-$ toplanabilirlik ve $(V, \lambda)-$ toplanabilirliğin istatiksel yakınsaklık ile ilişkisi incelendi. Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı üzerine genelleştirilen $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanıp çalışılacak, ayrıca L ye kuvvetli $(V, \lambda)-$toplanabilir dizilerin uzayı $[V, \lambda]$ ile bütün istatistiksel yakınsak $x = (x_k)$ dizilerinin uzayı S ile ilişkisi verilecektir.

Tanım 3.2.1: $\lambda = (\lambda_n)$, pozitif reel sayıların sonsuza giden azalmayan bir dizisi ve $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ olsun.

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k, \qquad I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

ifadesine **Genelleştirilmiş de la Vallée-Pousin Ortalaması** denir.

Tanım 3.2.2: $x = (x_k)$ dizisi için eğer, $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to L$ olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine $(V, \lambda)-$**toplanabilir** denir (Leindler 1965).
Eğer $\lambda_n = n$ ise o zaman $(V, \lambda)-$toplanabilirlik $(C, 1)-$toplanabilirliğe dönüşür.
De la Vallée Ortalama metodu ile kuvvetli toplanabilen dizi kümeleri için

$$[V, \lambda] := \left\{x = (x_k) : \exists L \in R, \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0\right\}$$

yazabiliriz. Özel olarak $n = 1, 2, 3...$ için $\lambda_n = n$ durumunda $[V, \lambda]$ kümesi $[C, 1]-$toplanabilmeye indirgenebilir ve

$$[C, 1] := \left\{ x = (x_k) : \exists L \in R, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.3: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye **$\boldsymbol{\lambda}-$ istatistiksel yakınsaktır** veya $S_\lambda-$ **yakınsaktır** denir.

Bu durumda $S_\lambda - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır ve

$$S_\lambda := \{x : \exists L \in \mathbb{R}, \ S_\lambda - \lim x = L\}$$

dır(Mursaleen2000).

Uyarı: (i) Eğer $\lambda_n = n$ ise o zaman S_λ, S ile aynıdır.

(ii) $\boldsymbol{\lambda}-$ istatistiksel yakınsaklık, eğer matris $A = (a_{nk})$

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n}, & k \in I_n \\ 0\ , & k \notin I_n \end{cases}$$

alınırsa $A-$ istatistiksel yakınsaklığın özel bir durumudur.

S_λ ile $[V, \lambda]$ ve $(C, 1)$ metodları arasındaki bağıntı Mursaleen (2000) tarafından bulunmuştur.

Sonsuza giden $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n$ ve $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sayıları bütün $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan diziler kümesi Λ ile gösterilsin.

Teorem 3.2.1: $\lambda \in \Lambda$ olsun. O zaman

(i) $x_k \to L\,[V, \lambda] \Rightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] \subsetneqq S_\lambda$ kapsaması kesindir.

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L\,(S_\lambda)$ ise $x = (x_k)$ sabit olmamak şartıyla $x_k \to L\,[V, \lambda]$ ve buradan $x_k \to L(C, 1)$ dir.

(iii) $S_\lambda \cap \ell_\infty = [V, \lambda] \cap \ell_\infty$ dır(Mursaleen 2000).

İspat:

(i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \longrightarrow L\,[V,\lambda]$ olsun.

$$\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k\in In \\ |x_k-L|\geq\varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon\,|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazılır. Böylece $x_k \longrightarrow L\,[V,\lambda] \Rightarrow x_k \longrightarrow L\,(S_\lambda)$ dir.

Aşağıdaki örnekte $S_\lambda \subsetneqq [V,\lambda]$ dir.

$x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} k, & n - \left[\sqrt{\lambda_n}\right] + 1 \leq k \leq n \text{ için} \\ 0, & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda x$\notin \ell_\infty$ olur ve her ε $(0 < \varepsilon \leq 1)$ için

$$\frac{1}{\lambda_n}|\{k \in I_n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\left[\sqrt{\lambda_n}\right]}{\lambda_n} \longrightarrow 0 \quad , \quad n \longrightarrow \infty \text{ iken}$$

yani $x_k \longrightarrow 0(S_\lambda)$ olur. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - 0| \longrightarrow \infty \quad , \quad (n \longrightarrow \infty)$$

yani x$_k \nrightarrow 0\,[V,\lambda]$ dir.

(ii) $x_k \longrightarrow L(S_\lambda)$ ve $x \in \ell_\infty$ olduğunu kabul edelim. Tüm k lar için $|x_k - L| \leq M$ diyelim. $\varepsilon > 0$ verilsin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in In \\ |x_k-L|\geq\varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{\substack{k\in In \\ |x_k-L|<\varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{\lambda_n}|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır, bu $x_k \longrightarrow L\,[V,\lambda]$ olmasını gerektirir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - L) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n} (x_k - L) + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n} (x_k - L) \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n} |x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n} |x_k - L| \end{aligned}$$

yazılır. $x_k \to L\,[V,\lambda]$ olduğundan $x_k \to L(C,1)$ dır.

(iii) Bu kısmın ispatı (i) ve (ii) den hemen çıkar.

Tüm λ lar için $S_\lambda \subseteqq S$ olduğunu göstermek kolaydır, çünkü λ_n/n, 1 ile sınırlıdır.

Teorem 3.2.2: $S \subseteqq S_\lambda$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} > 0 \tag{3.2.1}$$

olmasıdır(Mursaleen 2000).

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$

dır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| &\geq \frac{1}{n}\left|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| \end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ iken limiti alınır ve (3.2.1) kullanılırsa

$$x_k \to L\,(S) \Rightarrow x_k \to L\,(S_\lambda)$$

elde edilir.

Tersine olarak, $\lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{\lambda_n}{n} = 0$ olduğunu kabul edelim. $\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} < \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir $(n(j))_{j=1}^{\infty}$ alt dizisini seçebiliriz. Bir $x = (x_i)$ dizisini

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \text{ ise } j = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x \in [C,1]$ ve buradan, Connor (1988) den $x \in S$ dir. Fakat diğer taraftan $x \notin [V,\lambda]$ ve teorem 3.2.1 (ii) , $x \in S_\lambda$ yı gerektirir. Bu yüzden (3.2.1) gereklidir.

4. ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde asimptotik istatistiksel denk ve istatistiksel limit tanımlarının doğal kombinasyonu olan L katlı asimptotik istatistiksel denk dizilerin tanımı verilecek ve ilgili teoremler ispatlanacaktır.

4.1 Asimptotik Denk Diziler

1980 de Pobyvanets tarafından asimptotik denk dizi ve asimptotik regüler matris tanımları verildi. 1993 te asimptotik denk diziler arasındaki ilişki ve bu denklik ile ilgili $R_nAx := \sum_{k\geq n} |(Ax)_k|$ ve $\mu_n Ax := \sup_{k\geq n} |(Ax)_k|$ biçiminde ifade edilen R_nAx/R_nAy ve μ_nAx/μ_nAy oranları ile verilen diziden diziye A matris dönüşümlerinin iki varyasyonu Marouf tarafından incelendi. Patterson tarafından da 2003 te Pobyvanets'in tanımlarının istatistiksel benzerleri verildi.

ℓ, d_A, P_s, P_0 ve P dizi kümelerini tanımlayalım.

$$\ell = \left\{ x_k : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty. \right\}$$

$$d_A = \left\{ x_k : \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \text{ mevcut.} \right\}$$

$$P_\delta = \{\text{Her } k \text{ için } 0 < \delta \leq x_k \text{ özellikli reel sayı dizilerinin kümesi}\}$$

$$P_0 = \{\text{En fazla sonlu sayıda terimi sıfır olan negatif olmayan dizi}\}$$

$$P = \{x : \ x_k > 0, \text{ her } k \text{ için}\}$$

olsun.

Tanım 4.1.1: ℓ deki her $x = (x_k)$ dizisine

$$R_n x := \sum_{k\geq n} |x_k|$$

oluyor ise **n. dereceden Remeinder Dizi** (Rx) denir(Fridy 1978).

Tanım 4.1.2: Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise **"asimptotik denk diziler"** denir ve $x \sim y$ biçiminde gösterilir(Pobyvanets 1980).

Teorem 4.1.1: Negatif olmayan A matrisine "Asimptotik regüler matris" denmesi için gerek ve yeter şart

$$\text{her } m \text{ tamsayı sabiti için } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nm}}{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}} = 0$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle, $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ negatif olmayan diziler ve A Asimptotik regüler matris ise $x \sim y$ iken $Ax \sim Ay$ dir(Pobyvanets 1980).

Teorem 4.1.2: A, matrisinin $c_0 - c_0$ matrisi olması için gerek ve yeter şart

i) $\lim_n a_{nk} = 0$, her $k = 1, 2, \ldots$ için ve

ii) Her n için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < M$ özelliğinde bir M sayısı vardır.

olmasıdır.

Teorem 4.1.3: A, negatif olamayan $c_0 - c_0$ matrisi, $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, $x \sim y$ ve bazı $\delta > 0$ için $x, y \in P_\delta$ olacak şekilde sınırlı diziler ise bu takdirde

$$\mu Ax \sim \mu Ay$$

dir(Marouf 1993).

İspat: $x \sim y$ olduğundan bazı z sıfır dizileri için $x_n = y_n(1 + z_n)$ yazabiliriz. Her bir n için

$$\frac{(\mu Ax)_n}{(\mu Ay)_n} = \frac{\sup\limits_{k\geq n} (Ax_k)}{\sup\limits_{k\geq n} (Ay_k)} = \frac{\sup\limits_{k\geq n} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ki}x_i}{\sup\limits_{k\geq n} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ki}y_i}$$

$$= \frac{\sup\limits_{k\geq n} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ki}(y_i + y_i z_i)}{\sup\limits_{k\geq n} \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ki}y_i}$$

$$\leq 1+\frac{\sup\limits_{k\geq n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_{ki}y_i\left|z_i\right|}{\sup\limits_{k\geq n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_{ki}y_i}$$

$$\leq 1+\frac{\sup\limits_{k\geq n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_{ki}y_i\left|z_i\right|}{\delta\sup\limits_{k\geq n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_{ki}}$$

y pozitif sınırlı bir dizi, z bir sıfır dizisi ve A, $c_0 - c_0$ matrisi olduğundan

$$\lim_n \sum_{i=0}^{\infty} a_{ki}y_i\left|z_i\right| = 0$$

olur ve bundan dolayı

$$\lim_n \left(\frac{(\mu Ax)_n}{(\mu Ay)_n}\right) \leq 1$$

olur. Benzer şekilde

$$\lim_n \left\{\frac{(\mu Ax)_n}{(\mu Ay)_n}\right\} \geq 1$$

elde edilebilir ve buradan

$$\lim_n \left\{\frac{(\mu Ax)_n}{(\mu Ay)_n}\right\} = 1$$

olur. Yani $\mu Ax \sim \mu Ay$ dir.

Teorem 4.1.4: A, ℓ_∞ sınırlı dizilerini ℓ ye dönüştüren negatif olmayan toplanabilme matrisi ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, $x \sim y$ ve bazı $\delta > 0$ için $y = (y_k) \in P_\delta$ olacak şekilde sınırlı dizileri ise bu takdirde

$$RAx \sim RAy.$$

ii) Her m için

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_{km}}{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right) = 0$$

dir(Marouf 1993).

İspat: [(ii) $\Longrightarrow$ (i)] Hipotezden $x \sim y$ olması için her $\varepsilon > 0$ için bir J sayısı vardır öyleki $k \geq J$ için $\left|\left(\frac{x_k}{y_k}\right) - 1\right| < \varepsilon$ dur. Bundan dolayı her $k \geq J$ için

$$(1-\varepsilon)\, y_k \leq x_k \leq (1+\varepsilon)\, y_k \tag{4.1}$$

dir. İlk olarak

$$R_nAx = \sum_{k=n}^{\infty}(Ax)_k \leq \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{J-1}a_{kj}x_j + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=J}^{\infty}a_{kj}x_j$$

ve (4.1) den

$$R_nAx = \left(\sum_{j=0}^{J-1}x_j\right)\sum_{k=n}^{\infty}(\max_{0\leq j\leq J-1}a_{kj}) + (1+\varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=J}^{\infty}a_{kj}y_j$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{R_nAx}{R_nAy} \leq \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{J-1}x_j\right)\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\max\limits_{0\leq j\leq J-1}a_{kj})}{\delta\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{kj}} + 1 + \varepsilon$$

dır. İddia edelim ki

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\max\limits_{0\leq j\leq J-1}a_{kj})\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{kj}}\right] = 0$$

olsun. (ii) yi kullanarak J sonsuz iken

$$\sum_{j=0}^{J-1}\left(\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_{kj}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{kj}}\right) = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$0 \geq \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\max\limits_{0\leq j\leq J-1}a_{kj})\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_{kj}}\right]$$

olur. A negatif olmayan bir matris olduğundan iddiayı ispatlar ve aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\limsup_n\left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) \leq 1 + \varepsilon. \tag{4.2}$$

İkinci olarak, R_nAx/R_nAy için bir alt sınır araştıralım;

$$R_nAx = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{kj}x_j \geq \sum_{k=n}^{\infty}(\min_{0\leq j\leq J-1}a_{kj})\sum_{j=0}^{J-1}x_j + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{kj}x_j$$

olduğunu göz önüne alalım. (4.1) eşitsizliğini tekrar kullanarak

$$R_nAx = \left(\sum_{j=0}^{J-1} x_j\right) \sum_{k=n}^{\infty} (\min_{0\leq j\leq J-1} a_{kj}) + (1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}y_j - (1-\varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{J-1} a_{kj}y_j$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\frac{R_nAx}{R_nAy} \geq \left(\frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{J-1} x_j\right)}{\sup\limits_j y_j}\right)\left(\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\min\limits_{0\leq j\leq J-1} a_{kj})}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right) + (1-\varepsilon)$$
$$-\left(\frac{\left((1-\varepsilon)\sum\limits_{j=0}^{J-1} y_j\right)}{\delta}\right)\left(\frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty}(\max\limits_{0\leq j\leq J-1} a_{kj})}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right)$$

dir. Önceki iddia kullanılarak,

$$\liminf_n \left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) \geq 1-\varepsilon \qquad (4.3)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) den dolayı $RAx \sim RAy$ olduğunda $\lim\limits_n \left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) = 1$ olduğu sonucuna varırız.

(i) in (ii) yi gerektirdiğini göstermek için, m pozitif tamsayı sabitini seçelim ve $x = (x_k), y = (y_k)$ dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$\begin{aligned} (y_k) &:= 1, \text{ her } k \text{ için} \\ (x_k) &:= \begin{cases} 0, & k \leq m \text{ ise} \\ 1, & k > m \text{ ise} \end{cases}. \end{aligned}$$

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için (i) deki şartın sağlandığı açıktır.

$$R_nAx = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}x_j = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=m+1}^{\infty} a_{kj} = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} - \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x_j$$

olduğunu gözönüne alalım. Burada

$$\left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) = 1 - \left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}y_i}\right]$$

dır. A nın negatif olmayan bir matris olması hipotezinden

$$\left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) \leq 1 - \left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_{km}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right]$$

dir ve bundan dolayı

$$\liminf_{n} \left(\frac{R_nAx}{R_nAy}\right) \leq 1 - \sup_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_{km}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right]$$

olur. (i) den elde ederiz ki;

$$\sup_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_{km}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right] = 0,$$

dir ve A negatif olmayan matris olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(\sum\limits_{k>n} a_{km}\right)}{\sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{kj}}\right] = 0$$

dır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.2. Asimptotik İstatistiksel Denk Diziler

1980 de Pobyvanets asimptotik denk dizi ve asimptotik regüler matris tanımlarını verdi. Ayrıca bu tanımları kullanarak asimptotik denk diziler için Silverman Toeplitz tipi bir karakterizasyon yaptı. Bunlara benzer olarak Patterson (2003) asimptotik istatistiksel denk dizi ve asimptotik istatistiksel regüler matris tanımlarını verdi. Bu tanımlar asimptotik istatistiksel denk dizilerin matris karakterizasyonunda kullanıldı.

Asimptotik denk denk dizi ve istatistiksel yakınsaklık tanımlarının doğal kombinasyonundan aşağıdaki tanım elde edilir.

Tanım 4.2.1: Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa L **katlı asimptotik istatistiksel denk diziler** denir ve $x \overset{S_L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "asimptotik istatistiksel denk diziler" denir(Patterson 2003).

Tanım 4.2.2: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$, $x \overset{S_L}{\sim} y$, $x = (x_k) \in P_0$ ve bazı $\delta > 0$ için $y = (y_k) \in P_\delta$ olacak şekilde diziler iken $Ax \overset{S_L}{\sim} Ay$ oluyorsa A toplanabilme matrisine **asimptotik istatistiksel regüler matris** denir(Patterson 2003).

Teorem 4.2.1: Toplanabilir A matrisinin asimptotik istatistiksel regüler olması için gerek ve yeter koşul her pozitif k_0 sabit katsayısı için

i)

$$\sum_{i=1}^{k_0} a_{n,i} \quad \text{her } n \text{ için sınırlı,}$$

ii)

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{\sum_{i=1}^{k_0} a_{n,i}}{\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}} \right| \geq \varepsilon, \ k_0 \text{ sabiti ve } \varepsilon > 0 \text{ için} \right\} \right| = 0$$

olmasıdır(Patterson 2003).

İspat: Bu teoremin gerek şartı bir önceki teoremin gerek şartına benzer olarak yapılır.

Teoremin yeter şartının gösterilmesi için, $\varepsilon > 0$, $x \overset{S_L}{\sim} y$, $x = (x_k) \in P_0$ ve bazı $\delta > 0$ için $y = (y_k) \in P_\delta$ olsun. Bu durumda

$$(L - \varepsilon)\, y_{i+\alpha} \leq x_{i+\alpha} \leq (L + \varepsilon)\, y_{i+\alpha} \ , \ h.h.i. \text{ ve } \alpha = 1, 2, ... \text{ için} \tag{4.4}$$

elde edilir. Kabul edelim ki,

$$\frac{(Ax)_n}{(Ay)_n} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_{n,i}x_i + \sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}x_i}{\sum_{i=1}^{\alpha} a_{n,i}y_i + \sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i}$$

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_{n,i}x_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i} + \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}x_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i}}{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i}y_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i} + 1}$$

olsun. (4.4) eşitsizliğinden

$$\lim_n \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}x_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i} = L \ , \quad h.h.n. \text{ için}$$

$x = (x_k) \in P_0$, $y = (y_k) \in P_\delta$ ve (ii) den

$$\lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_{n,i}x_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i} = 0 \ , \quad h.h.n. \text{ için}$$

ve

$$\lim_n \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} a_{n,i}y_i}{\sum_{i=\alpha+1}^{\infty} a_{n,i}y_i} = 0 \ , \quad h.h.n. \text{ için}$$

olur. Buradan

$$\lim_n \frac{(Ax)_n}{(Ay)_n} = L \ , \quad h.h.n. \quad \text{için}$$

olur. Bu da gösterir ki, $x \overset{S_L}{\sim} y$, $x = (x_k) \in P_0$ ve bazı $\delta > 0$ için $y = (y_k) \in P_\delta$ iken $Ax \overset{S_L}{\sim} Ay$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem toplanabilme matrisi terimlerinin verilen bir dizi için L katlı asimptotik istatistiksel denkliğin matris dönüşümü ile korunmasını sağlanması için gerekli gerek ve yeter koşulları verir.

Teorem 4.2.2: Eğer A, ℓ_∞ sınırlı dizilerini ℓ ye dönüştüren negatif olmayan toplanabilme matrisi ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $x = (x_k)$ ve $y = (y_k), x \overset{S_L}{\sim} y$, $x = (x_k) \in P_0$ ve bazı $\delta > 0$ için $y = (y_k) \in P_\delta$ olacak şekilde diziler ise bu takdirde

$$R_n(Ax) \overset{S_L}{\sim} R_n(Ay) .$$

ii)

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{\sum_{i=k}^{\infty} a_{im}}{\sum_{i=k}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{ip}} \right| \geq \varepsilon \text{ her bir } m \text{ ve } \varepsilon > 0 \text{ için} \right\} \right| = 0.$$

dir(Patterson 2003).

İspat: L katlı asimptotik istatistiksel denklik tanımı $h.h.i.$ için

$$\left| \frac{x_i}{y_i} - L \right| < \varepsilon$$

olarak yorumlanabilir. Bu da gösterir ki

$$(L-\varepsilon)\, y_i \le x_i \le (L+\varepsilon)\, y_i \ , \ h.h.i. \tag{4.5}$$

dir. Kabul edelim ki,

$$\frac{R_n(Ax)}{R_n(Ay)} \le \frac{\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=n}^{\infty} \max_{0\le j\le J-1}\{a_{ij}\}}{\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}y_j}$$

$$+\frac{\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=J}^{\infty} a_{ij}x_j}{\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}y_j}$$

(4.5) denklemini kullanarak

$$\frac{R_n(Ax)}{R_n(Ay)} \le \frac{\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=n}^{\infty} \max_{0\le j\le J-1}\{a_{ij}\}}{\delta\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}} + (L+\varepsilon)\ , \ h.h.n.$$

elde ederiz.

(ii) den

$$\limsup_{n} \frac{R_n(Ax)}{R_n(Ay)} \le (L+\varepsilon)\ , \ h.h.n.$$

ve (4.5) eşitsizliğinden faydalanarak

$$\liminf_{n} \frac{R_n(Ax)}{R_n(Ay)} \ge (L-\varepsilon)\ , \ h.h.n.$$

elde edilir. Buradan

$$R_n(Ax) \overset{S_L}{\sim} R_n(Ay)$$

olur.

Teoremin 2. bölümü için aşağıdaki iki diziyi göz önüne alalım.

$$x_p = \begin{cases} 0, & \text{eğer } p \le K \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad K \text{ pozitif bir sabit}$$

ve

$$y_p = 1, \text{ her } p \text{ için.}$$

Bu diziler gösterir ki,

$$R_n(Ax) = \sum_{k=n}^{\infty} (Ax)_k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{p=K+1}^{\infty} a_{k,p}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{k,p} - \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{p=K}^{\infty} a_{k,p}$$

dir. Bundan dolayı

$$\liminf_{n} \frac{R_n (Ax)}{R_n (Ay)} \leq 1 - \limsup_{n} \frac{\sum_{i=n}^{\infty} a_{i,K}}{\sum_{i=n}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{i,p}}$$

elde edilir. Sabit olmayan her bir eleman için son eşitsizliğin sıfıra istatistiksel limiti vardır. Buradan

$$\lim_{n} \frac{R_n (Ax)}{R_n (Ay)} = 1 \ , h.h.n$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

5. (σ, λ) ASİMPTOTİK İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık ve $\sigma-$yakınsaklık tanımlarının doğal bir kombinasyonu olan (σ, λ) $-$asimptotik istatistiksel denk dizilerin tanımı, ve bölüm 3 deki $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık ile ilgili teoremlerin benzerleri verilecektir.

1948 de hemen hemen yakınsaklık kavramı ilk olarak Lorentz tarafından verildi. 1967 de ise kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi uzayı $[\hat{c}]$ Maddox tarafından

$$[\hat{c}] = \left\{ x \in \ell_\infty : \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} |x_{n+i} - L| = 0, \text{ } n \text{ ye göre düzgün mevcut} \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

σ, pozitif tamsayılarda tanımlı $\left(\sigma^m(n) = \sigma\left(\sigma^{m-1}(n)\right), m = 1, 2, ..\right)$ biçiminde birebir eşleme olsun. ℓ_∞ üzerindeki sürekli lineer ϕ fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa invariant ortalama veya $\sigma-$ortalamadır.

(1) $\phi(x) \geq 0$, her n için $x_n \geq 0$ $(x = (x_n))$

(2) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, ...)$

(3) $\phi\left(x_{\sigma(n)}\right) = \phi(x_n)$, her $x \in \ell_\infty$

σ eşlemesinin bir çeşidi olarak, ϕ invariant ortalama yakınsak dizi uzayında (c) limit fonksiyoneline genişletilebilir. Bir anlamda;$\forall x \in c$ için $\phi(x) = \lim x$ tir.

Tanım 5.1: $x = (x_k)$ sınırlı dizisi için

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_{\sigma^i(n)} = L, \text{ } n \text{ ye göre düzgün} \tag{5.1}$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L **ye invariant yakınsaktır** denir ve $\sigma - \lim x = L$ biçiminde gösterilir(Schaefer 1972).

İnvariant ortalamaları eşit olan bütün sınırlı dizileri V_σ ile gösterirsek

$$c \subset V_\sigma$$

dir.

Hemen hemen yakınsaklık kavramından kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramına ulaşılabildiği gibi invariant yakınsaklık kavramından kuvvetli invariant yakınsaklık kavramına ulaşılabilir.

Tanım 5.2: $x = (x_k)$ sınırlı dizisi için n ye göre düzgün olarak

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\left|x_{\sigma^i(n)} - L\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L **ye kuvvetli invariant yakınsaktır** denir(Mursaleen 1983). Kuvvetli invariant yakınsak dizilerin kümesini $[V_\sigma]$ ile göstererek kuvvetli hemen hemen yakınsaklık ile benzerliğini inceleyelim.

σ eşlemesinin,

$\sigma^2(n) = \sigma(\sigma(n))$

$\sigma^3(n) = \sigma(\sigma^2(n)) = \sigma(\sigma(\sigma(n)))$ biçiminde olduğunu göz ününde bulundurarak $\sigma(n) = n + 1$ seçilirse;

$\sigma^2(n) = \sigma(\sigma(n)) = \sigma(n+1) = n + 2$

$\sigma^3(n) = \sigma(\sigma^2(n)) = \sigma(\sigma(\sigma(n))) = n + 3$

$\vdots$

$\sigma^i(n) = \sigma(\sigma^{i-1}(n)) = \sigma(\sigma(\sigma ...(n)...)) = n + i$ olur ki buradan $[V_\sigma] = [\hat{c}]$ elde ederiz. Yani kuvvetli invariant yakınsaklık, kuvvetli hemen hemen yakınsaklık kavramına genelleştirilebilir. Burada $[V_\sigma] \subset V_\sigma \subset \ell_\infty$ dır.

Marouf, 1993 te asimptotik denk dziler ve asimptotik regüler mstrisler için tanımlar verdi. Patterson bu kavramları, asimptotik istatistiksel denk tanımı ve begatif olmayan toplanabilir matrisler için doğal regülerlik şartını vererek 2003 te genişletti. Savaş (Baskıda) asimptotik denk ve $\lambda-$istatistiksel yakınsaklık için bu tanımların doğal kombinasyonlarını verdi. Burada L katlı $S_{\lambda,\sigma}-$asimptotik denklik tanımlanacak ve çalışılacaktır. Bu tanımlara ek olarak bazı kapsama bağıntıları da verilecektir.

Tanım 5.3: Her $\varepsilon > 0$ için m ye göre düzgün

$$\lim_{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|x_{\sigma^k(m)} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye $S_{\sigma,\lambda}-$**yakınsak** denir. $S_{\sigma,\lambda} - \lim x = L$ veya $x_k \longrightarrow L(S_{\sigma,\lambda})$ biçiminde gösterilir ve

$$S_{\sigma,\lambda} = \{x : \exists L \in \mathbb{R},\ S_{\sigma,\lambda} - \lim x = L\}$$

yazılır(Savaş and Başarır 2006).

Tanım 5.4: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı** $S_\sigma-$**asimptotik denk diziler** denir ve $x \overset{S_\sigma}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "$S_\sigma-$asimptotik denk diziler" denir(Savaş and Başarır 2006).

Tanım 5.5: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı** $S_{\sigma,\lambda}-$**asimptotik denk diziler** denir ve $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "$S_{\sigma,\lambda}-$asimptotik diziler" denk denir(Savaş and Başarır 2006).

Tanım 5.6: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı kuvvetli** $(\sigma, \lambda)-$**asimptotik denk diziler** denir ve $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "(σ, λ) $-$asimptotik denk diziler" denir(Savaş and Başarır 2006).

$\sigma(n) = n + 1$ olması durumunda yukarıdaki tanımlar aşağıdaki tanımlara indirgenebilir.

Tanım 5.7: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı hemen hemen asimptotik istatistiksel** ($\hat{S}-$**asimptotik**) **denk diziler** denir ve x$\overset{\hat{S}}{\sim}$ y ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "hemen hemen asimptotik istatistiksel ($\hat{S}-$asimptotik) denk diziler" denir(Savaş and Başarır 2006).

Tanım 5.8: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı hemen hemen λ−asimptotik istatistiksel ($\hat{S}_\lambda$−asimptotik) denk diziler** denir ve $x \overset{\hat{S}_\lambda}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "hemen hemen λ−asimptotik istatistiksel ($\hat{S}_\lambda$−asimptotik) denk diziler" denir(Savaş and Başarır 2006).

Tanım 5.9: Her $\varepsilon > 0$ için $m = 1, 2, 3, ...$ ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| = 0$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L **katlı kuvvetli hemen hemen λ−asimptotik($\left[\hat{V}_\lambda\right]$−asimptotik) denk diziler** denir ve $x \overset{[\hat{V}_\lambda]}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "kuvvetli hemen hemen λ−asimptotik ($\left[\hat{V}_\lambda\right]$−asimptotik) denk diziler" denir(Savaş and Başarır 2006).

Bu yeni tanımlar doğroltusunda Teorem 3.2.1 in benzerini inceleyelim. Sonsuza giden $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ ve $\lambda_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sayıları bütün $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan diziler kümesi Λ ile gösterilsin.

Teorem 5.1: $\lambda \in \Lambda$ olsun. Öyleyse

(i) $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ise $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$,

(ii) Eğer $x \in \ell_\infty$ ve $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$ ise $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ve buradan $x \overset{[c,1]}{\sim} y$,

(iii) $S_{\sigma,\lambda} \cap \ell_\infty = [V_{\sigma,\lambda}] \cap \ell_\infty$

dur(Savaş and Başarır 2006).

İspat: (i): Eğer $\varepsilon > 0$ ve $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ ise

$$\begin{aligned}\sum_{k \in I_n} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| &\geq \sum_{k \in I_n \ \& \ \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \geq \varepsilon} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|.\end{aligned}$$

Bundan dolayı $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ dir.

(ii): Kabul edelim ki; $x = (x_k), y = (y_k)$ sınırlı diziler ve $x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y$ olsun. Öyleyse

$$\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \leq M, \text{ her } k \text{ ve } m \text{ için}$$

dir. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n \ \& \ \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L\geq\varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \\
&+\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n \ \& \ \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}}-L<\varepsilon}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \\
&\leq \frac{M}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Böylece $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ dır.

Ayrıca;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right) + \frac{1}{n}\sum_{k\in I_n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n-\lambda_n}\left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right) \\
&\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k\in I_n}\left(\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right).
\end{aligned}$$

Bundan dolayı $x \overset{(c,1)}{\sim} y$ ve böylece $x \overset{[V_{\sigma,\lambda}]}{\sim} y$ dir.

(iii): (1) ve (2) den kolayca gösterilir.

Bir sonraki teoremde takip eden ilişkiyi inceleyeceğiz

Teorem 5.2:

$$\liminf \frac{1}{\lambda_n} > 0 \tag{5.2}$$

ise

$$x \overset{S_\sigma}{\sim} y, \ x \overset{S_{\sigma,\lambda}}{\sim} y \text{ yı gerektirir}$$

(Savaş and Başarır 2006).

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n}\left\{k \leq n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \supset \left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

böylece

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| &\geq \frac{1}{n}\left|\left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n}\frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\end{aligned}$$

$n \to \infty$ iken limit alınırsa (5.1) i kullanarak istenilen sonuç elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

$\sigma(n) = n + 1$ olursa, yukarıdaki sonuç hemen hemen yakınsaklık sonucuna indirgenebilir.

6. LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAK VE σ–ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde; asimptotik denk, istatistiksel limit, lacunary dizileri ve σ-yakınsaklık tanımlarının doğal kombinasyonu olan L katlı σ-asimptotik lacunary istatistiksel denk dizi tanımı verilecek ve bu tanımdan faydalanarak σ-asimptotik lacunary istatistiksel yakınsaklık ile ilgili teoremler ispatları ile birlikte verilecektir.

6.1 Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde; lacunary dizisi, kuvvetli lacunary yakınsak, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli lacunary yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki kapsama teoremleri verilecektir.

Tanım 6.1.1: Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine **lacunary dizisi** denir(Freedman, Sember and Raphael 1978).

$\theta = \{k_r\} = \{2^r\}, (r > 0)$ veya $\{k_r\} = \{r!\}$ dizileri birer lacunary dizileridir. Burada $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile, $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı ise q_r ile gösterilecektir.

Tanım 6.1.2: Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L **sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır** denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi

$$N_\theta := \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile gösterilir(Freedman, Sember and Raphael 1978).

Tanım 6.1.3: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L **sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır** (S_θ**−yakınsak**) denir ve $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ ile gösterilir(Fridy and Orhan 1993).

Lacunary istatistiksel yakınsak dizi uzayları;

$$S_\theta := \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

biçiminde S_θ ile gösterilir.

Teorem 6.1.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda

(i) (a) $x_k \to L(N_\theta)$ ise $x_k \to L(S_\theta)$,

(b) N_θ, S_θ nın özalt kümesidir.

(ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x_k \to L(S_\theta)$ ise $x_k \to L(N_\theta)$,

(iii) $S_\theta \cap \ell_\infty = N_\theta \cap \ell_\infty$

dır.(Fridy and Orhan 1993).

İspat: (i) (a) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \to L(N_\theta)$olsun. Bu durumda

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon \, |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \, ,$$

yazabiliriz ki buradan (a) gerçekleşir.

(b) $N_\theta \subseteq S_\theta$ kapsaması kesindir. $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_k)$ dizisini I_r aralığında ilk $\left[\sqrt{h_r}\right]$ tamsayılarında 1,2,3,..., $\left[\sqrt{h_r}\right]$,diğer durumlarda 0 olarak tanımlayalım. Bu dizi sınırlı değildir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\left[\sqrt{h_r}\right]}{h_r} \to 0, (r \to 0)$$

dır. Yani (x_k) dizisi için $x_k \to 0\,(S_\theta)$ dır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{\left[\sqrt{h_r}\right] \left(\left[\sqrt{h_r}\right] + 1\right)}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan $x_k \nrightarrow 0\,(N_\theta)$ dır.

(ii) $x_k \to L(S_\theta)$ ve x$\in \ell_\infty$ olduğunu kabul edelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq M$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_k - L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\|x_k-L|\geq\varepsilon}}|x_k - L| + \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\|x_k-L|<\varepsilon}}|x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r}\left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon\end{aligned}$$

olduğundan $x_k \to 0\,(N_\theta)$ dır.

(iii) (i) ve (ii) nin sonucudur.

Lemma 6.1.2: Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $S \subseteq S_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır(Fridy and Orhan 1993).

Lemma 6.1.3: Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $S_\theta \subseteq S$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır(Fridy and Orhan 1993).

Lemma 6.1.2 ve Lemma 6.1.3 ün birleştirilmesi ile aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.1.4: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun. $S = S_\theta$ olması için gerek ve yeter şart $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır(Fridy and Orhan 1993).

$\theta = \{k_r\} = \{2^r\}, r > 0$ lacunary dizisi Teorem 6.1.4 ün şartlarını sağlar.

Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $S_\theta-$limitinin tek, farklı $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizileri için $S_\theta-$limitlerinin farklı olduğunu görmek için aşağıdaki diziyi göz önüne alalım.

$$x_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 0, & (2n-1)! < i \leq (2n)!, \quad n = 1, 2, 3, ... \\ 1, & (2n)! < i \leq (2n+1)! \end{cases}$$

$\theta = \{(2r)!\}$ lacunary dizisi için,

$$\frac{1}{h_{r+1}}\left|\{k \in I_{r+1} : |x_i| \geq \varepsilon\}\right| = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1 \quad \text{ise} \\ \frac{(2r+1)!-(2r)!}{(2(r+1))!-(2r)!} & 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

dır. Buradan $x_i \to 0(S_\theta)$ dır.

$\theta' = \{(2r+1)!\}$ lacunary dizisi için,

$$\frac{1}{h_{r+1}} |\{k \in I_{r+1} : |x_i - 1| \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 1 \quad \text{ise} \\ \frac{(2r)!-(2r-1)!}{(2r+1)!-(2r-1)!} & 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

elde edilir. O halde $x_i \to 1\,(S_\theta)$ dır.

Bütün yakınsak, hemen hemen yakınsak ve kuvvetli hemen hemen yakınsak dizi uzaylarını sırasıyla $c, \hat{c}$ ve $[\hat{c}]$ ile göstermek üzere $c \subset [\hat{c}] \subset \hat{c} \subset \ell_\infty$ olduğunu biliyoruz(Maddox 1978). Ayrıca her θ lacunary dizisi için $[\hat{c}] \subset N_\theta$ ve $[\hat{c}] = \cap N_\theta$ dır(Freedman,Sember and Raphael 1978).

Teorem 6.1.5: Bütün lacunary dizilerinin kümesi $\mathcal{L}$ ile gösterilmek üzere

$$[\hat{c}] = \ell_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right)$$

dır(Fridy and Orhan 1993).

İspat: $[\hat{c}] \subset N_\theta$ ve Teorem 6.1.2 (i) de belirtildiği gibi $N_\theta \subset S_\theta$ olduğundan herhangi bir θ lacunary dizisi için $[\hat{c}] \subset S_\theta$ dır. $c \subset [\hat{c}] \subset \hat{c} \subset \ell_\infty$ olduğundan

$$[\hat{c}] \subset \ell_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right) \tag{6.1}$$

ve Teorem 6.1.1 (ii) den $S_\theta \cap \ell_\infty \subset N_\theta$ elde edilir. $[\hat{c}] = \cap N_\theta$ olduğundan

$$\ell_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right) \subset [\hat{c}] \tag{6.2}$$

olur ki (6.1) ve (6.2) den

$$[\hat{c}] = \ell_\infty \cap \left(\bigcap_{\theta \in \mathcal{L}} S_\theta \right)$$

elde edilir.

6.2 $\sigma-$Asimptotik Lacunary İstatistiksel Denk Diziler

Tanım 6.2.1: θ bir lacunary dizisi olsun. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa L **katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler** denir ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler" denir(Patterson and Savaş in press).

Tanım 6.2.2: θ bir lacunary dizisi olsun. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| = 0$$

oluyorsa L **katlı kuvvetli asimptotik lacunary denk diziler** denir ve $x \overset{N_\theta^L}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "kuvvetli asimptotik lacunary denk diziler" denir(Patterson and Savaş in press).

Bu sonuçları takiben, L katlı $S_\sigma-$asimptotik denk,L katlı $S_{\sigma,\theta}-$asimptotik denk ve L katlı kuvvetli $\sigma-$asimptotik denk tanımları verilecek ve bu tanımlar kullanılarak 1. kısımdaki $S_\sigma-$asimptotik denklik ile ilgili teoremlerin benzerleri verilecektir.

Tanım 6.2.3: θ bir lacunary dizisi olsun. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine her $\varepsilon > 0$ için, $m = 1, 2, 3, ...$ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise oluyorsa L **katlı** $S_{\sigma,\theta}-$**asimptotik denk diziler** denir ve $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "$S_{\sigma,\theta}-$asimptotik denk diziler" denir(Savaş and Patterson 2006).

Tanım 6.2.4: θ bir lacunary dizisi olsun. Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

oluyorsa L **katlı kuvvetli** $\sigma-$**asimptotik lacunary denk diziler** denir ve $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ biçiminde gösterilir. $L = 1$ ise basitçe "kuvvetli $\sigma-$asimptotik lacunary denk diziler" denir(Savaş and Patterson 2006).

Teorem 6.2.1: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizisi olsun.

(i) $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(ii) $x \in \ell_\infty$ ve $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(iii) $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y \cap \ell_\infty = x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y \cap \ell_\infty$ dur(Savaş and Patterson 2006).

İspat: **(i)** $\varepsilon > 0$ ve $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise

$$\begin{aligned}\sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| &\geq \sum_{k \in I_r \,\&\, \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|.\end{aligned}$$

Bundan dolayı $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(ii) $x = (x_k)$, $y = (y_k) \varepsilon \ell_\infty$ ve $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ olsun. Farzedelim ki, her k ve m için

$$\left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \leq M$$

olacak şekilde bir M vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r \,\&\, \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\quad + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r \,\&\, \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| < \varepsilon} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\leq \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| + \varepsilon\end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı $x \overset{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dir.

(iii) (i) ve (ii) elde edilir.

Lemma 6.2.2: Her $\varepsilon > 0$ iken,verilen bir $\varepsilon_1 > 0$ sayısı ve her $n \geq n_0, m \geq m_0$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde n_0 ve m_0 var ise $x \overset{S_\sigma}{\sim} y$ dir(Savaş and Patterson 2006).

İspat: ε_1 verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ iken her $n \geq n_0^1$ ve $m \geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{6.3}$$

olacak şekilde n_0^1 ve m_0 seçelim.

Her $n \geq n_0^{1,1}$ ve $0 \leq m \leq m_0$ için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1 \tag{6.4}$$

olacak şekilde bir $n_0^{1,1}$ in var olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

Eğer $n_0 = \max\left\{n_0^1, n_0^{1,1}\right\}$ seçersek her $n \geq n_0$ ve her m için (6.4) doğru olur.

İlk olarak m_0 seçilsin. m_0 sabit olduğundan

$$\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = M$$

dir.

Şimdi $0 \leq m \leq m_0$ ve $n \geq m_0$ alırsak,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
\leq\ & \frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq m_0-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&+\left|\left\{m_0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
\leq\ & \frac{M}{n} + \frac{1}{n}\left|\left\{m_0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
\leq\ & \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon_1}{n} \quad ((6.4) \text{ den})
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Yeterince büyük bir n için

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon_1}{n} < \varepsilon_1$$

olur ki bu da (6.4) ü sağlar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.2.3: Her $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi için $S_{\sigma,\theta} = S_\sigma$ dır(Savaş and Patterson 2006).

İspat: $x \in S_{\sigma,\theta}$ olsun.L katlı $S_{\sigma,\theta}-$asimptotik denk dizi tanımından verilen bir $\varepsilon_1 > 0$ için $r \geq r_0$ ve $m = k_{r-1} + 1 + u, (u \geq 0)$ iken

$$\frac{1}{h_r}\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} < \varepsilon_1$$

olacak şekilde bir L ve $\varepsilon > 0$ vardır.

$n \geq h_r$ olsun. $0 \leq t \leq h_r$ ve $i \in \mathbb{Z}$ için $n = ih_r + t$ yazalım.

Buradan $n \geq h_r$ ve $i \geq 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
\leq & \frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq (i+1)h_r - 1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
= & \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i}\left|\left\{jh_r \leq k \leq (j+1)h_r - 1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
\leq & \frac{(i+1)h_r}{n}\varepsilon_1 \\
\leq & \frac{2ih_r\varepsilon_1}{n}, \ (i \geq 1 \text{ için})
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{h_r}{n} \leq 1 \text{ için } \frac{ih_r}{n} \leq 1 \text{ olur.}$$

Bundan dolayı

$$\frac{1}{n}\left|\left\{0 \leq k \leq n-1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq 2\varepsilon_1$$

olur. Buradan ve Lemma 6.2.2 ye göre $S_{\sigma,\theta} \subset S_\sigma$ olur.

Her $\theta = \{k_r\}$için $S_\sigma \subset S_{\sigma,\theta}$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.2.4: $\theta = \{k_r\}$, $\liminf_r q_r > 1$ özellikli bir lacunary dizisi ve $x \overset{S_\sigma}{\sim} y$ ise $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ dır(Savaş and Patterson 2006).

İspat: Farz edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Öyleyse yeterince büyük bir r için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Eğer

$x \overset{S_\sigma}{\sim} y$ ise her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük bir r için

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_r}\left|\left\{k \le k_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| &\ge \frac{1}{k_r}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ &\ge \frac{\delta}{1+\delta}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \le k_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.2.5: $\theta = \{k_r\}$, $\limsup_r q_r < \infty$ özellikli bir lacunary dizisi ve $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ise $x \overset{S_\sigma}{\sim} y$ dır(Savaş and Patterson 2006).

İspat: Eğer $\limsup q_r < \infty$ ise her $r \ge 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır. $x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y$ ve $\varepsilon_1 > 0$ olsun. Böylece her $j \ge R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_j}\left|\left\{k \in I_j : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| < \varepsilon_1, \text{(her } m \text{ için)}$$

olacak şekilde $R > 0$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Ayrıca her $j = 1, 2, 3, ...$ için $A_j < K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı bulabiliriz. Şimdi n, $r > R$ iken $k_{r-1} < n < k_r$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ \le\ & \frac{1}{k_{r-1}}\left|\left\{k \le k_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ =\ & \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|\right\} \\ & + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|\right\} \\ & + ... + \frac{1}{k_{r-1}}\left\{\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|\right\} \\ =\ & \frac{k_1}{k_{r-1}k_1}\left|\left\{k \in I_1 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ & + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)}\left|\left\{k \in I_2 : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ & + ... + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}(k_R - k_{R-1})}\left|\left\{k \in I_R : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \\ & + ... + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}(k_r - k_{r-1})}\left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k_1}{k_{r-1}}A_1 + \frac{k_2-k_1}{k_{r-1}}A_2 + ... + \frac{k_R-k_{R-1}}{k_{r-1}}A_R \\
&\quad + \frac{k_{R+1}-k_R}{k_{r-1}}A_{R+1} + .. + \frac{k_r-k_{r-1}}{k_{r-1}}A_r \\
&\leq \left\{\sup_{j\geq 1} A_j\right\}\frac{k_R}{k_{r-1}} + \left\{\sup_{j\geq 1} A_j\right\}\frac{k_r-k_R}{k_{r-1}} \\
&\leq K\frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B.
\end{aligned}
$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 6.2.6: $\theta = \{k_r\}$, $1 < \inf_r q_r \leq \sup q_r < \infty$ özellikli bir lacunary dizisi ise

$$x \overset{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y \Longleftrightarrow x \overset{S_\sigma}{\sim} y$$

dir(Savaş and Patterson 2006).

İspat: Sonuç Teorem 6.2.4 ve Teorem 6.2.5 ten kolayca görülür.

7. KAYNAKLAR

Aytar, S., 2001, "Yoğunluk Kavramı ve İstatistiksel Yakınsaklık", Yüksek Lisans Tezi, Isparta.

Balcı, M., 1999, "Analiz-1", Ankara.

Bayraktar, M.,2000, "Fonksiyonel Analiz", Uludağ Üniversitesi

Connor, J. S.,1988, "The Statistical and Strong p-Cesáro Convergence of Sequences", Analysis 8, pp. 47-63.

Connor, J. S.,1989, "On Strong Matrix Summability with Respect to a Modulus and Statistical Convergence", Canad. Math. Bull., 32, pp. 194-198.

Fast, H., 1951, "Sur la Convergence Statistique", Collog. Math.,Vol. 2, pp. 241-244.

Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981, "Densitis and Summability", Pacific J. Math. 95, 293-305.

Freedman, A. R., Sember, J. J. and Raphael, M., 1978, "Some Cesáro Type Summability Spaces", Proc. London Math. Soc. 37, pp. 508-520.

Fridy, J. A.,1985, "On Statistical Convergence", Analysis 5, pp. 301-313.

Fridy, J. A.,1978, ""Minimal Rates of Summability", Can. J. Math., Vol. 30(4), pp. 808-816.

Fridy, J. A. and Orhan, C., 1993, "Lacunary Statistical Convergence", Pacific. J. Math.,Vol. 160(1), pp. 43-51.

Gürdal, M., 2004, "Bazı Yakınsaklık Tipleri", Doktota tezi, Isparta.

Leindler, L.,1965, "Über die de la Vallée Pounsinsche Summierbarkeit Allgemeiner Orthogonalreichen", Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 16, pp. 375-387.

Lorentz, G. G., 1948, "A Contribution to the Theory of Divergent Sequences", Acta Math., 80, pp. 167-190.

Maddox, I. J., 1967, "Spaces of Strongly Summable Sequences", Quoart. J. Math. 18, pp. 345-355.

Marouf, M., 1993, "Asymptotic Equivalence and Summability", Int. J. Math. Sci., Vol. 16(4), pp. 755-762.

Mursaleen, 2000, "$\lambda-$Statistical Convergence", Math. Slovaca, Vol. 50(1), pp. 111-115.

Mursaleen, 1983, "Matrix Transformations Between Some New Sequence Spaces", Houston J. Math.,Vol. 9, pp. 505-509.

Nıven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L.,1991, "An Introduction to the theory of numbers", Fifth Edition of J. Wiley and Jons, Inc., 529.

Patterson, R. F., 2003, "On Asymptotically Statistically Equivalent Sequences", Demonstratio Math., Vol. 36(1), pp. 149-153.

Patterson, R. F. and Savaş, E., (Baskıda), "On Asymptotically Lacunary Statistically Equivalent Sequences".

Pobyvanets, I. P., 1980, "Asyptotic Equivalence of Some Lineer Transformation Defined by a Nonnegative Matrix and Reduced to Generalized Equivalence in the Sense of Cesáro and Abel", Math. Fiz. 28, pp. 83-87, 123.

Savaş, E., (Baskıda), "On Asymptotically $\lambda-$Statistical Equivalent Sequences".

Savaş, R. and Başarır, M., 2006, "$(\sigma,\lambda)-$Asiymptotically Statistical

Equivalent Sequences", Faculty of Sci. and Math. Uni. of Niš, 20(1), pp. 35-42.

Savaş, E. and Patterson, R. F., 2006, "$\sigma-$Asiymptotically Lacunary Statistical Equivalnet Sequences", Central European J. of Math., Vol. 4(4), pp. 648-655.

Schaefer, P., 1972, "Infinite Matrices and Invariant Means", Proc. Amer. Math. Soc. 36, pp. 104-110.

Schoenberg, I. J., 1959, "The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods", Amer. Math. Monthly 66, pp. 361-375.

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Bekir SOYTÜRK
Doğum Yeri	Afyonkarahisar
Doğum Tarihi	16.01.1977
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dili	İngilizce – Almanca

	Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise	İzmir Mithatpaşa Anadolu Meslek Lisesi,1991-1995
Lisans	Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Bölümü, Matematik Öğretmenliği Eğitimi, 1996-2002

	Çalıştığı Kurumlar ve Yıl aralığı
2002-2003	Matematik Öğretmeni, Özel Fatih Dershanesi, İzmir
2003-2005	Matematik Öğretmeni, Patnos Anadolu Lisesi, Ağrı
2005-	Matematik Öğretmeni, Şuhut İmam Hatip Lisesi ve Anadolu İmam Hatip Lisesi, Afyonkarahisar