ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIĞI

Uğur ULUSU

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2007

Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{R}$ de veya herhangi bir metrik uzayda fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığının ve I-yakınsaklığının değişik çeşitleri incelenmiştir. (X, M, μ) ölçüm uzayı üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar için Egorov teoreminin bir istatistiksel versiyonu verilmiştir.. Büyük kümeler üzerinde denk-istatistiksel yakınsaklığın düzgün istatistiksel yakınsaklık ile yer değiştiremeyeceği gösterilmiştir. Ayrıca Riesz teoreminin bazı sonuçları ile ölçüme göre istatistiksel yakınsaklık ve I-yakınsaklık ele alınmıştır. Son olarak ölçüme göre dış ve iç istatistiksel yakınsaklığın sonlu ölçümler için denk olduğu gösterilmiştir.

2007, Sayfa : 50

ANAHTAR KELİMELER: *I*- Düzgün Yakınsaklık, Denk-İstatistiksel Yakınsaklık, İstatistiksel Egorov Teoremi, Ölçüme göre İstatistiksel Yakınsaklık, Dış İstatistiksel Yakınsaklık, İç İstatistiksel Yakınsaklık.

ABSTRACT

MsSc Thesis

STATISTICAL CONVERGENCE AND IDEAL CONVERGENCE FOR SEQUENCES OF FUNCTIONS

Uğur ULUSU

Afyonkarahisar Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

September 2007

Supervisor: Prof. Dr. Fatih NURAY

In this thesis, we discuss various kinds of statistical convergence and *I*-convergence for sequences of functions with values in $\mathbb{R}$ or in a metric space. For real valued measurable functions defined on a measure space (X, M, μ), we obtain a statistical version of the Egorov theorem. We show that, in its assertion, equi-statistical convergence on a big set cannot be replaced by uniform statistical convergence. Also, we consider statistical convergence in measure and *I*-convergence in measure, with some consequences of the Riesz theorem. We prove that outer and inner statistical convergences in measure are equivalent if the measure is finite.

2007, Page : 50

KEY WORDS: *I*- Uniform Convergence, Equi-Statistical Convergence, Statistical Egorov's Theorem, Statistical Convergence in Measure, Outer Statistical Convergence, İnner Statistical Convergence.

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. 1951 de Steinhaus ve Fast ın reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi Salat (1980), J. A. Fridy (1985), J. A. Fridy ve M. K. Khan (1998), H. I. Miller (1995), P. Kostyrko-T. Salat ve W. Wilczynski (2000/2001), F. Nuray ve W. H. Ruckle (2000) tarafından araştırılmıştır.

Bu çalışmada fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığının birkaç yeni çeşidi ($I-$ yakınsaklıktan daha genel) verilmiştir. Steinhaus (1951) ve Fast (1951) ın orjinal fikirleri genişletilerek, reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar üzerinde önemle durulmuştur. Özellikle Egorov ve Riesz in; ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığında kullandıkları klasik teoremlerin benzerleri ele alınmıştır.

Bu sebeple çalışmamızda öncelikle temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş ve bu kavramlarla ilgili olarak tanım, notasyon ve teoremlere gerektiği kadarıyla değinilmiştir. Daha sonra $I-$yakınsaklık kavramı ve özellikleri verilerek istatistiksel yakınsaklık kavramı genelleştirilmiştir. Ayrıca istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktalarının benzerleri olan $I-$limit ve $I-$yığılma noktaları verilmiş ve ek olarak $I-$yakınsaklığı koruyan fonksiyonlara değinilmiştir.

Bu tez çalışmasının son bölümünde fonksiyonlar için $I-$yakınsaklık çeşitleri verilmiştir. Bununla birlikte ölçüm teorisinin klasik bir sonucu olan Egorov teoreminin istatistiksel bir versiyonu verilmiş ve büyük bir küme üzerinde bir dizinin denk istatistiksel yakınsaklığı verilerek bunun düzgün istatistiksel yakınsaklıkla yer değiştiremeyeceği gösterilmiştir. Daha sonra ölçüme göre $I-$yakınsaklık tanımı verilmiş ve klasik Riesz teoreminin istatistiksel versiyonunun doğru olup olmadığı incelenmiştir. Son olarak ölçüme göre istatistiksel yakınsaklığın iki çeşidi (dış ve iç) verilmiş ve bu çeşitlerin hangi şartlar altında birbirini gerektirdiği verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda gerek duyulan bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Fonksiyon): A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı,

(i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ var,

(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$.

özelliklerine sahipse f ye A dan B ye bir fonksiyondur denir.

Tanım 2.2 (Dizi): Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir.

Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye *reel terimli dizi*, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye *rasyonel terimli dizi* adı verilir. Dizi $x = (x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3 (Alt Dizi): $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ k(n) = k_n$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$$(xok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir alt dizisi adı verilir ve

$$(xok)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.4 (Komşuluk): $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $K = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine a nın ε komşuluğu denir.

Tanım 2.5 (Yakınsak Dizi): (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a ya yakınsaktır denir ve

$$\lim x_n = a \text{ veya } (x_n) \to a$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.6 (Sınırlı Dizi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.7 (Cauchy Dizisi): (x_n) bir reel terimli dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1 (Cauchy Yakınsaklık Testi): (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.8 (Yığılma Noktası): $(x_n) \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her $\delta-$ komşuluğunda (x_n) dizisinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına (x_n) dizisinin bir yığılma noktası denir.

Tanım 2.9 (Limit Noktası): (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_n) dizisinin bir limit noktası denir.

Tanım 2.10 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.11 (Düzgün Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ varsa f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.12 (Fonksiyon Dizisi): $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \rightarrow F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi adı verilir (Balcı, 1997).

Tanım 2.13 (Noktasal Yakınsaklık): Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir.

Tanım 2.14 (Düzgün Yakınsaklık): Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 2.15 (Metrik Uzay): $X \neq \emptyset$ olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$

M3) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir. Bu genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.16 (Örtü, Açık Örtü, Sonlu Örtü, Alt Örtü): X bir metrik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir. Eğer her $i \in I$ için, A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne, X kümesinin sonlu örtüsü denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye, X kümesinin bir alt örtüsü denir (Yüksel, 2002).

Tanım 2.17 (Kompakt Metrik Uzay): (X, d) metrik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa , (X, d) metrik uzayına kompakt metrik uzay denir (Yüksel, 2002).

Tanım 2.18 (Cauchy Dizisi ve Tam Metrik Uzay): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her (x_n) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına *tam metrik uzay* veya kısaca tam denir.

Tanım 2.19 (Açık Yuvar): $(a_1, a_2, ..., a_n), \mathbb{R}^n$ de bir sabir nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli $\varepsilon-$ yarıçaplı açık yuvar adı verilir.

Tanım 2.20 (Ayrık Kümeler): $A \cap B = \emptyset$ ise A ile B kümeleri ayrıktır denir.

Tanım 2.21 ($\sigma-$Cebiri): X bir küme olsun. X in bir $\mathcal{A}$ sınıfı için,

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

özellikleri sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir $\sigma-$cebiri denir (Balcı, 1998).

Tanım 2.22 (Ölçülebilir uzay): X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de ölçülebilir küme denir (Balcı, 1998).

Tanım 2.23 (Ölçü Fonksiyonu, Sonlu Ölçü, Olasılık Ölçüsü): $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) = 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü adı verilir.

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir sonlu ölçü adı verilir.

Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü adı verilir (Balcı, 1998).

Tanım 2.24 (Dış Ölçüm, İç Ölçüm): İlkel bir A kümesinin ölçümü $m^{'}(A)$ ile gösterilsin. Buna göre, P_k dikdörtgenlerinin herhangi ikisi kesişmemek üzere, $A = \bigcup_k P_k$ ise,

(i). $m^{'}(A) \geq 0$ ve

(ii). $m^{'}(A) = \sum_k m(P_k)$

dır.

* Burada,

$$\inf \sum_{A \subseteq \cup P_k} m(P_k)$$

sayısına, A kümesinin dış ölçümü denir ve bu $\mu^*(A)$ ile gösterilir.

* Ayrıca $1 - \mu^*(E \backslash A)$ sayısına, A kümesinin iç ölçümü denir ve bu iç ölçüm, $\mu_*(A)$ ile gösterilir. Buna göre, bir kümenin iç ve dış ölçümü arasında,

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \backslash A)$$

ilişkisi vardır. A kümesinin iç ölçümünü bir önceki tanıma benzer olarak,

$$\mu_*(A) = \sup \sum_{A \supseteq \cup P_k} m(P_k)$$

şeklinde de tanımlanabilir (Dönmez, 2001).

Tanım 2.25 (Ölçülebilir Küme): Bir A kümesi için $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ ise, yani

$$\inf \sum_{A \subseteq \cup P_k} m(P_k) = \sup \sum_{A \supseteq \cup P_k} m(P_k)$$

ise A kümesine ölçülebilirdir veya Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir (Dönmez, 2001).

Tanım 2.26 (Ölçülebilir Fonksiyon): E, ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de E kümesi üzerinde tanımlı ve gerçel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her K gerçel sayısı için, $f(x) > K$ şartını sağlayan $x \in E$ değerlerinin kümesi ölçülebilirse, f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue eanlamında ölçülebilirdir veya kısaca ölçülebilirdir denir. Bazen bu tanımı "μ ölçülebilir" kelimesi ile ifade ederiz (Dönmez, 2001).

Başka bir ölçülebilir fonksiyon tanımı da aşağıdaki gibidir.

* $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

ise $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir (Balcı, 1998).

Teorem 2.2 (Egorov Teoremi): $(f_n(x))$, $n = \{1, 2, ...\}$ bir E kümesinde sonlu, ölçülebilir ve tüm E de sonlu $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ limiti olan fonksiyonlar dizisi verildiğinde, her $\delta > 0$ için, $mE_\delta > mE - \delta$ olacak biçimde öyle bir $E_\delta \subseteq E$ kümesi vardır ki E_δ da $f_n(x)$ dizisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Hacısalihoğlu vd., 2000).

3. İSTATİSTİKSEL VE İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde ilk olarak yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecek, daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramından daha genel olan $I-$ yakınsaklık kavramı verilerek bu kavramlarla ilgili ihtiyaç duyulduğu oranda tanım ve teoremlere değinilecektir. Ayrıca $I-$limit ve $I-$yığılma noktalaları kavramları verilip ek olarak $I-$yakınsaklığı koruyan fonksiyonlara değinilecektir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermeden önce bu kavramın ortaya çıkmasına neden olan yoğunluk kavramını verelim.

Bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani $|K| := cardK$ olsun.

Tanım 3.1.1: $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Buna göre K kümesinin *alt* ve *üst yoğunluğu* sırasıyla

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|K_n|}{n}, \qquad \overline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{|K_n|}{n}$$

olarak verilir. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması ($\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$) durumunda bu limite K kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta\,(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\delta\,(K) = \underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : k \in K\}\right|$$

dir (Niven vd., 1991).

Başka bir yoğunluk kavramı tanımı da aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.1.2: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ olsun. $A \subset \mathbb{N}$ ve $j \in \mathbb{N}$ için,

$$d_j(A) = \frac{card(A \cap \{1, 2, ..., j\})}{j}$$

ifadesine A nın j. kısmi yoğunluğu denir. Eğer varsa,

$$d(A) = \lim_{j \to \infty} d_j(A)$$

limitine $A \subset \mathbb{N}$ nin yoğunluğu denir (Balcerzak vd., basımda).

* Burada d_j operatörünün $j \in \{1, 2, ..., j\}$ ile $P(\mathbb{N})$ üzerinde bir olasılık ölçümü olduğuna dikkat edelim.

Doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılması için Gürdal tarafından 2004 de verilen aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.1: $K = \{1,\ 4, 5, 6,\ \ 13, 14, ..., 24,\ \ 49, 50, ..., 96,\ \ 193, 194, ...\}$ şeklinde verilsin. K indeks kümesi için $\frac{|K|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

(a) $\frac{|K|}{n}$ ifadesinin üst limitini ($\limsup$) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3}$$

şeklindedir.

(b) $\frac{|K|}{n}$ ifadesinin alt limitini ($\liminf$) oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnek için

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n \to \infty} \inf \tfrac{|K_n|}{n} = \tfrac{1}{3}$$

$$\overline{\delta}(K) = \lim_{n \to \infty} \sup \tfrac{|K_n|}{n} = \tfrac{2}{3}$$

olduğundan $\underline{\delta}(K) \neq \overline{\delta}(K)$ dir. Bu nedenle K kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi alt ve üst yoğunluğu olmasına rağmen doğal yoğunluğu olmayan kümeler de vardır. $\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N} \backslash K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \backslash K)$ dır. Eğer K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(K) = 0$, yani doğal yoğunluğu sıfırdır.

Tanım 3.1.3: $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi *hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor* denir ve "h.h.k." şeklinde gösterilir (Gürdal, 2004).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını verebiliriz.

Tanım 3.1.4: $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise yani

$$K := K(\varepsilon) := \left|\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geqslant \varepsilon\}\right|$$

kümesinin yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim x = L$$

biçiminde yazılır (Steinhaus 1951, Fast 1951, Fridy 1985).

Adi anlamda yakınsaklık kavramının tanımını hatırlayarak istatistiksel yakınsaklık fikrinin nereden kaynaklandığını açıklamaya çalışıp bu iki kavram arasındaki bağlantıyı kurmaya çalışalım. Bilindiği gibi, adi yakınsaklıkta x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise, L nin her bir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi bu kavramı biraz daha genelleştirerek L noktasının her bir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda da elemanının kalabileceğinin kabul edelim. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre çok daha azdır. Yani dizinin "hemen hemen" tüm elemanları, L nin ε komşuluğu içerisindedir. Bu durumda x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğu sonucunu çıkarabiliriz. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanlarının sayısının "az" olması, böyle elemanlarının doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Pehlivan, 2001).

S bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini göstermek üzere, yukarıdaki tanımda $L = 0$ olması durumunda S_0 uzayı elde edilir.

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| = 0 \right\}$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \} \right| = 0 \right\}$$

Teorem 3.1.1: $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Salat 1980, Fridy 1985, Miller 1995).

Adi anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak bir dizi olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $K = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda eleman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır. Yani $\delta(K) = 0$ dır. Fakat bu ifadenin tersi doğru olmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak her dizi adi anlamda yakınsak olmayabilir.

Yakınsak dizi sınırlı olmasına rağmen, istatistiksel yakınsak dizi sınırlı olmayabilir.

Örnek 3.1.2:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3, (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüme alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt[3]{n}$$

olduğundan,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \neq 0\}| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

elde edilir. Bu ise $st - \lim x = 0$ demektir.

Örnek 3.1.3:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2, (n = 1, 2, ...) \\ 2\ , & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 2$ dir.

Ayrıca $x = (1, 0, 1, 0, ...)$ dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Şimdi de Fridy tarafından 1985 te verilen istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verelim.

Tanım 3.1.5: $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde veya h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy, 1985)

Teorem 3.1.2: İstatistiksel yakınsak her dizi bir istatistiksel Cauchy dizisidir (Fridy, 1985).

İspat: Bu teoremin ispatında "yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir" teoreminin ispatına benzer bir yol izlenecektir.

$x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise $st - \lim x = L$ dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve h.h.k. için

$$|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Eğer N, $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L|$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (h.h.k. \;\; \text{için})$$

elde edilir.

Şimdi reel terimli diziler için, bir dizinin yığılma noktaları ve limit noktaları kavramlarının istatistiksel benzerleri olan istatistiksel yığılma ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verilerek, bu noktalar ile dizinin adi anlamda limit noktaları arasındaki bağıntılara değinilecektir.

$x = (x_k)$ dizisinin değer kümesi $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ile gösterilir. $\{x_{k(j)}\}_{j=1}^{\infty}, x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K := \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olarak tanımlanırsa, $\{x_{k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ yerine $\{x\}_K$ yazılabilir. $\delta(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine *seyrek alt dizi* veya sıfır yoğunluğa sahip bir alt dizi denir. $\delta(K) > 0$ ise veya K kümesi doğal yoğunluğa sahip değilse $\{x\}_K$ dizisine *seyrek olmayan alt dizi* veya sıfır yoğunluğa sahip olmayan alt dizi denir (Fridy, 1993).

Şimdi seyrek olmayan alt dizi ile ilgili bir örnek verelim.

Örnek 3.1.4 : $x = (x_k) = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ dizisini alalım;

$$\begin{aligned} K &= \{1, 4, 7, ...\} = \{1 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \\ K' &= \{2, 5, 8, ...\} = \{2 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \\ K'' &= \{3, 6, 9, ...\} = \{3 + 3k : k = 0, 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

indeks kümeleri için $|K_n| = |K'_n| = |K''_n| = |\{k \leq n : k \in K| = k + 1$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \delta(K) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{k+1}{1+3k} = \tfrac{1}{3} \\ \delta(K') &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{|K'_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{k+1}{2+3k} = \tfrac{1}{3} \\ \delta(K'') &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{|K''_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{k+1}{3+3k} = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

dir. $\delta(K) = \delta(K') = \delta(K'') = \frac{1}{3} > 0$ olduğundan yukarıdaki indeks kümelerine göre oluşturulan alt diziler x dizisinin seyrek olmayan alt dizileridir (Pehlivan, 2001)

Bilindiği gibi, bir x dizisinin L sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa L sayısı x dizisinin bir adi limit noktasıdır. Bir alt dizinin yoğunluğu gözönüne alınarak istatistiksel limit noktası Fridy tarafından 1993 de verilmiştir.

Tanım 3.1.6: Bir $x = (x_k)$ dizisinin $\lambda \in \mathbb{X}$ sayısına yakınsayan seyrek olmayan (yani $\delta(K) > 0$) bir alt dizisi varsa, λ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* denir. Yani $K = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ ve $\delta(K) \neq 0$ olmak üzere $k \to \infty$ için $(x_{n_k}) \to \lambda$ ise λ, x in bir istatistiksel limit noktasıdır (Fridy, 1993).

Bir $x = (x_k)$ sayı dizisinin adi limit noktalarının kümesi L_x ile istatistiksel limit noktalarının kümesi ise Λ_x ile gösterilir.

Örnek 3.1.5:

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2, (n = 1, 2, ...) \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüme alalım. Bu dizi için $L_x = \{0, 1\}$ ve $\Lambda_x = \{0\}$ dır .

Herhangi bir x dizisi için $\Lambda_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Çünkü $\lambda \in \Lambda_x$ olması, $(x_{n_k}) \to \lambda$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisinin mevcut olması anlamına gelir. Bu da $\lambda \in L_x$ olduğunu verir.

Biz x dizisinin L limit noktası *"L merkezli her açık aralık x dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir"* ifadesi ile karakterize edilebilir. Bu ifadenin istatistiksel benzeri Fridy tarafından 1993 de verilmiştir.

Tanım 3.1.7: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel yığılma noktası* denir (Fridy, 1993).

Bir x dizisinin tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Genelde adi limit noktaları ile ilgili bilgilerimiz bize Λ_x ve Γ_x kümelerinin denk olacağını düşündürür. Fakat durumun böyle olmadığını Fridy 1993 de ispatlamıştır. İstatistiksel limit noktası ile istatistiksel yığılma noktası arasındaki kapsama bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 3.1.1: Herhangi bir x sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir (Fridy, 1993).

Buradan $st - \lim x = \lambda$ ise $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$ olduğu açıktır. Fakat karşıtının doğru olmadığını Fridy 1993 de aşağıdaki örnekte göstermiştir.

Örnek 3.1.6: $x = (x_k) = \left\{\left(1 + (-1)^k\right) k\right\} = \{0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16, 0, ...\}$ dizisini alalım. Bu dizinin iki tane alt dizisi

$$x_{2k} = (4, 8, 12, 16, ...) \to \infty$$

ve

$$x_{2k-1} = (0, 0, 0, 0, ...) \to 0$$

dir. $\delta(1, 3, 5, ...) = \frac{1}{2}$ ve $\delta(2, 4, 6, ...) = \frac{1}{2}$ olduğundan, $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ olup $st - \lim x$ mevcut değildir (Fridy, 1993).

İstatistiksel yakınsaklığın tanımından, verilen bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması veya istatistiksel yakınsak olmamasının, x dizisinin bir seyrek alt dizisinin değerlerinin değiştirmesine bağlı olmadığını söyleyebiliriz. Bu özelliğin istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları içinde geçerli olduğu Fridy tarafından 1993 te gösterilmiştir.

Teorem 3.1.3: x ve y hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde diziler ise $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir (Fridy, 1993).

3.2 $I-$ Yakınsaklık

$I-$yakınsaklık kavramının tanımını vermeden önce ideal ve süzgeç tanımlarını hatırlayalım.

Tanım 3.2.1: $X \neq \emptyset$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $I \subset 2^X$ ailesi

(i) $\emptyset \in I$

(ii) Her $A, B \in I$ için $A \cup B \in I$

(iii) Her $A \in I$ ve $B \subset A$ için $B \in I$

şartlarını sağlıyorsa I ailesine bir *ideal* denir (Kuratowski, 1966).

Örnek 3.2.1: $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ formları $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin bir idealidir.

Tanım 3.2.2: $X \neq \emptyset$ olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{F} \subset 2^X$ ailesi

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) Her $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B \subset X$ için $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlıyorsa F kümeler ailesine X kümesinde bir *süzgeç* denir (Nagata, 1974).

Tanım 3.2.3: $I \neq \emptyset$ ve $X \notin I$ ise I idealine *gerçek ideal* denir (Gürdal, 2004).

İdeal ile süzgeç arasındaki önemli bağıntı aşağıdaki gibidir:

* $I \subset 2^X$ idealinin bir gerçek ideal olması için gerek ve yeter şart

$$\mathcal{F}(I) = \{M \subset X : \exists A \in I : M = X \backslash A\}$$

kümeler ailesinin X kümesinde bir süzgeç olmasıdır (Gürdal, 2004).

Tanım 3.2.4: $I \subset 2^X$ bir gerçek ideal olsun. Eğer her $x \in X$ için $\{x\} \in I$ ise I idealine uygun ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Elbette $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ ideali bir uygun idealdir.

Bu hatırlatmalardan sonra $I-$yakınsaklık tanımını verebiliriz.

Tanım 3.2.5: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \in I$$

ise $(x_n) \in X$ dizisi $\xi \in X$ e $I-$*yakınsaktır* denir (Kostyrko vd., 2000).

Bu ifade

$$I - \lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

ile gösterilir. Burada $\xi \in X$ elemanına $x = (x_n)$ dizisinin $I-$limiti denir.

$I \subset 2^{\mathbb{N}}$ olmak üzere Kostyrko tarafından 2000 de tanımlanan bazı gerçek uygun ideal örnekleri verelim.

Örnek 3.2.2:

a. $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin I_f sınıfı, I ideali olarak alınırsa o zaman I_f gerçek uygun bir idealdir ve I_f- yakınsaklık X de ρ metriğine göre alışılmış yakınsaklık ile çakışır.

b. $\delta(A) = 0$ şartını sağlayan tüm $A \subset \mathbb{N}$ kümelerinin sınıfı I_δ ile gösterilsin. I ideali olarak I_δ alınırsa o zaman I_δ gerçek uygun idealdir ve $I_\delta-$yakınsaklık istatistiksel yakınsaklıkla çakışır.

Uyarı : Burada $I_f \subset I_\delta \subset I$ dır.

Uyarı : Eğer I bir uygun ideal ise, X de alışılmış yakınsaklık X de $I-$yakınsaklığı gerektirir .

Şimdi yakınsaklığın hangi aksiyomlarının $I-$ yakınsaklık için de sağlandığını verelim. En iyi bilinen yakınsaklık aksiyomları aşağıdadır.

(i) Her $\{\xi, \xi, \xi, ..., \xi, ...\}$ sabit dizisi ξ ye yakınsar.

(ii) Her bir yakınsak dizinin limiti tek olarak belirlidir.

(iii) Eğer $x = (x_n)$ dizisinin limiti ξ ise, bu dizinin bütün alt dizilerinin limiti de aynıdır.

(iv) Eğer $x = (x_n)$ dizisinin tüm alt dizileri ξ ye yakınsak ise o zaman x de ξ ye yakınsar.

Önerme 3.2.1: X in en az iki noktası olduğunu kabul edelim. $I \subset 2^X$ bir uygun ideal olsun.

a. $I-$yakınsaklık (i), (ii) ve (iv) yi sağlar.

b. Eğer I sonsuz bir küme içeriyorsa, o zaman $I-$yakınsaklık (iii) yi sağlamaz (Kostyrko vd., 2000).

Uyarı : Eğer I sonsuz küme içermeyen bir uygun ideal ise, o zaman $I-$yakınsaklık genel yakınsaklıkla çakışır ve (iii) nin sağlandığı açıktır.

Tanım 3.2.6: Bir $(x_n) \in X$ dizisinin,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0$$

olacak şekilde bir alt dizisinin indeks kümesi

$$M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\},\ M \in \mathcal{F}(I)$$

(yani $\mathbb{N}\backslash M \in I$) var ise, $(x_n) \in X$ dizisi $\xi \in X$ ye I^*-yakınsaktır denir (Kostyrko vd., 2000).

Önerme 3.2.2: I bir uygun ideal olsun. Eğer

$$I^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ ise } I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

dir (Kostyrko vd., 2000).

İspat : Önermenin ifadesinden,

$$\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi \tag{1}$$

olmak üzere

$$M = \mathbb{N}\backslash H = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$$

olacak şekilde bir $H \in I$ kümesi vardır.

$\varepsilon > 0$ olsun. (1) den dolayı her $k > k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) < \varepsilon$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Dolayısıyla;

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\} \subset H \cup \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \qquad (2)$$

dır. I uygun ideal olduğundan (2) nin sağındaki küme I ya aittir. O halde $A(\varepsilon) \in I$ dır.

Tanım 3.2.7: I bir uygun ideal olsun. Eğer $K := \{n(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $K \in I$ ise $\{x\}_K$ alt dizisine $I-$*seyrek alt dizi* denir. Eğer $K \notin I$ ise $\{x\}_K$ dizisine $x = (x_n)$ dizisinin $I-$*seyrek olmayan alt dizi* denir (Gürdal, 2004).

* Eğer (x_n) in $x_{n_k} \to x$ olacak şekilde bir $I-$seyrek olmayan alt dizisi varsa o zaman biz $x_n \to_{I^*} x$ deriz (Balcerzak vd., basımda).

Teorem 3.2.1: (X, ρ) bir metrik uzay ve $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun.
(i) Eğer X in yığılma noktası yoksa, X de $I-$yakınsaklık ve I^*-yakınsaklık çakışıktır.
(ii) Eğer ξ, X in bir yığılma noktası ise; yani X in bir yığılma noktası varsa, $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ fakat $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mevcut olmayacak şekilde bir $(x_n) \in X$ dizisi ve bir uygun $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali vardır (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 3.2.8: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $i \neq j$, $(i, j = 1, 2, ...)$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve $A_i \in I$ ise, her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu küme ve $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in I$ olacak şekilde B_i kümeleri mevcut ise I ideali (AP) *koşulunu sağlar* denir (Kostyrko vd., 2000).
Burada $I_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ idealinin (AP) şartını sağladığı açıktır.

Ayrıca bir de (AP') şartı vardır ki bu (AP') şartı (AP) ye benzer fakat burada A_n kümelerinin ikişerli ayrık olması gerekli değildir.

Teorem 3.2.2: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal, (X, ρ) keyfi bir metrik uzay ve $x = (x_n) \in X$ olsun. $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{p_k}, \xi) = 0$ olacak şekilde $P = \{p_1 < p_2 <, ... < p_k < ...\}$, $P \in \mathcal{F}(I)$ kümesinin mevcut olmasıdır (Gürdal, 2004).

Teorem 3.2.3: I bir uygun ideal olsun.

(i) Eğer (X, ρ) keyfi bir metrik uzay ve I ideali (AP) özelliğine sahipse, o zaman keyfi bir $(x_n) \in X$ dizisi için $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olması $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olmasını gerektirir.

(ii) (X, ρ) en az bir yığılma noktasına sahip olsun. Keyfi bir $(x_n) \in X$ dizisi ve her $\xi \in X$ için $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ise $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ dur ve o zaman $I, (AP)$ özelliğindedir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 3.2.9: Her $(A_n) \in I$ dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \backslash A_\infty$ sonlu olacak şekilde bir $A_\infty \in I$ varsa $I \subset P(\mathbb{N})$ idealine bir P *ideal* denir (Balcerzak vd., basımda).

Aşağıdaki önerme yukarıdaki tanımlarda verilen özellikler arasındaki ilişkileri açıklamaktadır.

Önerme 3.2.3: $I \subset P(\mathbb{N})$ bir uygun ideal olsun. Aşağıdaki şartlar denktir:

(i) I bir P ideal dir.

(ii) I (AP') şartını sağlar.

(iii) I (AP) şartını sağlar (Balcerzak vd., basımda).

İspat : $(i) \Rightarrow (ii)$. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in I$ olsun. (i) deki kabulümüzden, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \backslash A_\infty$ sonlu olmak üzere bir $A_\infty \in I$ seçelim. $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = A_n \cap A_\infty$ şeklinde ifade edelim. O zaman her n için

$$B_n \Delta A_\infty = B_n \backslash A_\infty$$

olur ve

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset A_\infty \in I$$

olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in I$ olsun.

$$A_1^* = A \text{ ve } A_n^* = A \backslash \bigcup_{j<n} A_j, (n > 1)$$

şeklinde ifade edelim. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i^* = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

olmasından dolayı A_n^* ler I daki ikişerli ayrık kümelerdir. (iii) kabulümüzden her n için $B_n \Delta A_n^*$ sonlu ve

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in I$$

olacak şekilde B_n seçelim. O zaman her n için

$$A_n \backslash B \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i^* \backslash B \subset \bigcup_{i=1}^{n} (A_i^* \backslash B_i)$$

olur. Sonuç olarak $A_n \backslash B$ sonludur.

Sonuç 3.2.1: (X, ρ) keyfi bir metrik uzay ve $I \subset P(\mathbb{N})$ bir uygun ideal olsun. Eğer X bir yığılma noktasına sahipse o zaman $I-$yakınsaklık ve I^*-yakınsaklığın çakışması için gerek ve yeter şart I nın (AP) şartını sağlamasıdır (Balcerzak vd., basımda).

Şimdi $I-$Cauchy dizisi kavramını verelim.

Tanım 3.2.10: (X, ρ) bir metrik uzay ve $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in I$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisine X üzerinde $I-$*Cauchy dizisi* denir (Gürdal, 2004).

* $I-$Cauchy şartının olası formülleştirilmesinden biri de aşağıdaki gibidir.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists D \in I)(\forall m, n \in \mathbb{N} \backslash D)\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olduğu zaman $(x_n) \in X$ dizisi $I-$*Cauchy şartını sağlar* denir (Balcerzak vd., basımda).

Örnek 3.2.3: Her $\varepsilon > 0$ ve $N = N(\varepsilon)$ indeksi için

$$K := K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. I ideali olarak;

$I_f = \{M \subset \mathbb{N} : M$ sonlu) ideali alınırsa I_f-Cauchy dizisi ile adi anlamda Cauchy dizisi,

$I_\delta = \{M \subset \mathbb{N} : \delta(M) = 0\}$ ideali alınırsa $I_\delta-$Cauchy dizisi ile İstatistiksel Cauchy dizisi kavramları çakışır.

Teorem 3.2.4: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, $I^* - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $x = (x_n) \in X$ olsun. Bu durumda x dizisi $I-$Cauchy dizisidir (Gürdal 2004).

Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ (AP) özelliğini sağlayan bir uygun ideal ve $I-\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. Bu durumda $(x_n) \in X$ dizisi $I-$Cauchy dizisidir (Gürdal 2004).

Aşağıdaki önerme, her $P-$ideal I için bir $I-$seyrek olmayan alt dizinin alışılmış Cauchy şartı ve $I-$Cauchy şartı arasındaki denkliği verir.

Önerme 3.2.4: $I \subset P(\mathbb{N})$ uygun bir ideal olsun. (X, ρ) metrik uzayındaki noktaların bir (x_n) dizisi için iki durum dikkate alınır;

(i) $(x_n), I-$Cauchy şartını sağlar.

(ii) Alışılmış Cauchy şartını sağlayan bir $I-$seyrek olmayan (x_{n_k}) alt dizisi vardır.

O zaman (ii), (i) yi gerektirir. Eğer I bir $P-$ideal ise o zaman (i), (ii) yi gerektirir (Balcerzak vd., basımda).

3.2.1 $I-$Limit ve $I-$Yığılma noktaları

Bu kısımda metrik uzaylarda $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktaları kavramlarını vereceğiz. Ayrıca $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktaları kümeleri arasındaki kapsama bağıntılarını inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1.1: I bir uygun ideal olsun. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in I$$

ise x ve y dizileri *I ya göre hemen hemen her n için eşittir* denir ve "$I-$h.h.n. için $x_n = y_n$" yazabiliriz (Gürdal, 2004).

Tanım 3.2.1.2: (X, ρ) bir metrik uzay ve $(x_n) \in X$ olsun.
(a). $M \notin I$ ve $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = \xi$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi var ise $\xi \in X$ elemanına x in *$I-$limit noktası* denir.
(b). Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$ ise $\xi \in X$ elemanına x in $I-$yığılma noktası denir (Kostyrko vd., 2000).

x dizisinin tüm $I-$limit noktaları kümesini $I(\Lambda_x)$ ile, x dizisinin tüm $I-$yığılma noktaları kümesini $I(\Gamma_x)$ ile ve x dizisinin tüm adi limit noktaları kümesini de L_x ile göstereceğiz.

Herhangi bir x dizisi için $I(\Lambda_x) \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Çünkü $\xi \in I(\Lambda_x)$ olması, $\lim x_{n_k} = \xi$ anlamına gelir. Bu da $\xi \in L_x$ olduğunu gösterir.

Önerme 3.2.1.1 : I bir uygun ideal olsun. Bu durumda her $x = (x_n) \in X$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subset I(\Gamma_x)$ dir (Kostyrko vd., 2000).

İspat : $\xi \in I(\Lambda_x)$ olsun. O zaman

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, \xi) = 0 \qquad (*)$$

olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \notin I$ kümesi vardır. $\delta > 0$ alalım. (*) a göre $k > k_0$ için $\rho(x_{m_k}, \xi) < \delta$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Buradan

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \supset M \backslash \{m_1, m_2, ..., m_{k_0}, ...\}$$

dır ve böylece

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \notin I$$

dır. Yani $\xi \in I(\Gamma_x)$ dir.

Önerme 3.2.1.2: I bir uygun ideal olsun. Herhangi bir $x = (x_n) \in X$ dizisi için $I(\Gamma_x) \subseteq L_x$ dir (Gürdal, 2004).

İspat : $\xi \in I(\Gamma_x)$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \varepsilon\} \notin I$$

dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$K_n = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \frac{1}{n}$$

olsun. $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}, \mathbb{N}$ nin sonsuz alt kümelerinin azalan dizisidir. Böylece

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x_{n_k}, \xi) = 0$$

olacak şekilde $K = \{n_1 < n_2 < ...\} \notin I$ kümesi mevcuttur. O halde $\xi \in L_x$ dir.

Teorem 3.2.1.1: I bir uygun ideal, (X, ρ) keyfi metrik uzay ve $x = (x_n) \in X$, $y = (y_n) \in X$ olsun. $I-$h.h.n için $x_n = y_n$ ise $I(\Gamma_x) = I(\Gamma_y)$ ve $I(\Lambda_x) = I(\Lambda_y)$ dir (Gürdal, 2004).

Teorem 3.2.1.2: I (AP) özelliğini sağlayan bir uygun ideal ve (X, ρ) keyfi bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x = (x_n) \in X$ dizisi için $I - \lim_n x_n = \xi$ ise $I(\Lambda_x) = I(\Gamma_x) = \{\xi\}$ dir (Gürdal, 2004).

3.2.2 $I-$ Yakınsaklığı Koruyan Fonksiyonlar

Tanım 3.2.2.1: (X, ρ) bir metrik uzay ve $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer her $\xi \in X$ ve her $(x_n) \in X$ dizisi için

$$I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ iken } I - \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$$

oluyorsa $g : X \to X$ fonksiyonu X de $I-$*yakınsaklığı koruyor* denir (Kostyrko vd., 2000).

Böylece aşağıdaki ifadeyi tahmin etmek zor değildir.

Önerme 3.2.2.1: $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ keyfi bir uygun ideal olsun. $g : X \to X$ fonksiyonunun X de $I-$yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart g nin X üzerinde sürekli olmasıdır (Kostyrko vd., 2000).

İspat : $(\Leftarrow)$. $I - \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ olsun. g sürekli ise, her $\eta > 0$ için $x \in B(\xi, \delta)$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır ve

$$g(x) \in B(g(\xi), \eta)$$

dır. Fakat,

$$C(\delta) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) < \delta\} \subset \{n \in \mathbb{N} : \rho(g(x_n), g(\xi)) < \eta\} = D(\eta)$$

dir ve $C(\delta) \in \mathcal{F}(I)$ olduğundan $D(\eta) \in \mathcal{F}(I)$ dır. Bundan dolayı

$$I - \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$$

dir.

$(\Rightarrow)$. Bazı $\xi \in X$ noktalarında g sürekli değilse, o zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(g(x_n), g(\xi)) \geq \eta$ olacak şekilde bir $(x_n) \in X$ dizisi ve bir $\eta > 0$ sayısı vardır. Bundan dolayı g herhangi bir I ideali için $I-$ yakınsaklığı korumaz.

4. FONKSİYON DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL ve İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığının birkaç yeni çeşidi ($I-$ yakınsaklıktan daha genel) verilecektir. Steinhaus ve Fast ın orjinal fikirleri genişletilerek reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar üzerinde önemle durulacaktır. Özellikle bu bölümde Egorov ve Riesz in ölçülebilir fonksiyonların istatistiksel yakınsaklığında kullandıkları klasik teoremlerin benzerleri ele alınacaktır.

4.1 Fonksiyonlar İçin $I-$Yakınsaklık Çeşitleri

Doğal olarak dizilerin $I-$yakınsaklığı kavramını fonksiyon dizilerinin $I-$yakınsaklığı kavramına genişletebiliriz.

$I \subset P(\mathbb{N})$ bir uygun ideal ve (Y, ρ) bir metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $X \neq \emptyset$ ve $f : X \to Y$, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ fonksiyonları verilsin. İlk olarak fonksiyonlar için $I-$noktasal yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 4.1.1: Eğer her bir $x \in X$ için (Y, ρ) metrik uzayında

$$f_n(x) \to_I f(x)$$

oluyorsa (f_n), f e X üzerine $I-$*noktasal yakınsaktır* denir**.** Bu

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in I)(\forall n \notin M) \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

formülü ile verilebilir (Balcerzak vd., basımda).

Tanım 4.1.2: Her $x \in X$ için

$$I - \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ifadesi sağlanıyorsa $f_n : X \to Y$ $n \in \mathbb{N}$ fonksiyon dizisi $f : X \to Y$ fonksiyonuna $I-$*yakınsaktır* denir.

Burada f fonksiyonuna, (f_n) fonksiyon dizisinin $I-$limit fonksiyonu denir ve

$$f = I - \lim_{n\to\infty} f_n$$

şeklinde gösterilir (Kostyrko vd., 2000).

Bundan sonra X üzerinde (f_n) in f e $I-$ düzgün yakınsaklığına gireceğiz. O $f_n \rightrightarrows_I f$ olarak yazılır ve

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists M \in I)(\forall n \notin M)(\forall x \in X) \quad \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

formülü ile verilir (Balcerzak vd., basımda).

$$f_n \rightrightarrows_I f \Rightarrow f_n \rightarrow_I f \tag{4.1}$$

ve

$$f_n \rightrightarrows_I f \Leftrightarrow \sup_{x\in X} \rho(f_n(x), f(x)) \rightarrow_I 0 \tag{4.2}$$

olduğu açıktır.

Elbette $f_n \rightrightarrows f$ (alışılmış düzgün yakınsaklık) olması $f_n \rightrightarrows_I f$ olmasını gerektirir.

Şimdi I, (Y, ρ) metrik uzayında noktaların dizisinin $I-$yakınsaklığı, alışılmış yakınsaklıktan tam manasıyla daha genel olacak şekilde olsun. Böylece $y_n \rightarrow_I y \in Y$ fakat $y_n \not\rightarrow y$ olacak şekilde bir $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ vardır. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = y_n$ ve $f(x) = y$ şeklinde ifade edilirse; $f_n \rightrightarrows_I f$ fakat $f_n \not\rightrightarrows f$ olur. Bu durumda ${}^XY$ de fonksiyon dizilerinin $I-$düzgün yakınsaklığı alışılmış yakınsaklıktan daha genel olur. Bu nedenle (4.2) den $I-$düzgün yakınsaklığın birkaç özelliğini kolayca elde edebiliriz. Örnek olarak; her (f_n) $I-$düzgün yakınsak dizi, düzgün yakınsak bir alt dizi içerir. Bu bir metrik uzaydan bir metrik uzaya tanımlı fonksiyonlar için $I-$düzgün yakınsaklığın sürekliliği koruduğu anlamına gelir.

Standart bir düşünce ile; eğer f_n ler $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olmak üzere, $[a,b]$ üzerinde $f_n \rightrightarrows_I f$ ise o zaman f de $[a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f_n \to_I \int_a^b f$$

dir. Özel bir durumda (4.1) in tersi için olanaklı olan klasik bir sonucun bir modifikasyonunu verelim.

Önerme 4.1.1: $I \subset P(\mathbb{N})$ bir uygun ideal ve (X,σ) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olsun. Kabul edelim ki $f_n : X \to Y, (n \in \mathbb{N})$ X üzerinde denk sürekli ve $f : X \to Y$ olmak üzere, X üzerinde $f_n \to_I f$ olsun. O zaman X üzerinde f süreklidir ve eğer X kompakt ise o zaman X üzerinde $f_n \rightrightarrows_I f$ dir (Balcerzak vd., basımda).

İspat : İlk olarak f in sürekliliğini kanıtlayalım. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. f_n ler denk sürekli olduklarından $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in B(x_0, \delta)$ için

$$\rho(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $x \in B(x_0, \delta)$ olsun. $f_n \to_I f$ olduğundan,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x_0), f(x_0)) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

kümesi I ya aittir ve $\mathbb{N}$ den farklıdır. Bu nedenle,

$$\rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\rho(f(x_0), f(x)) &\leqslant \rho(f(x_0), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

dur ve böylece f nin sürekliliği elde edilir.

Şimdi $f_n \rightrightarrows_I f$ olduğunu göstereceğiz. $\varepsilon > 0$ olsun. X kompakt olduğundan f düzgün süreklidir ve f_n ler X üzerinde denk-düzgün süreklidir. Bu nedenle $\sigma(x, x') < \delta$ olmak üzere $\forall x, x' \in X$ için

$$\rho(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } \rho(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. X in kompaktlığından, X in $\{B(x, \delta)\}$ örtüsünden sonlu bir $B(x_1, \delta), ..., B(x_k, \delta)$ alt örtüsünü seçelim. $f_n \rightarrow_I f$ olduğundan bütün $n \notin M$ ve $i \in \{1, 2, ...k\}$ için

$$\rho(f_n(x_i), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $M \in I$ seçelim. $n \notin M$ ve $x \in X$ olsun. Böylece bazı $i \in \{1, 2, ...k\}$ için $x \in B(x_i, \delta)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \rho(f_n(x), f(x)) &\leqslant \rho(f_n(x), f_n(x_i)) + \rho(f_n(x_i), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(x)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu X üzerinde $f_n \rightrightarrows_I f$ olduğunu kanıtlar.

Eğer $I = I_d$ ise o zaman $\rightarrow_I$ ve $\rightrightarrows_I$ sırasıyla noktasal istatistiksek yakınsaklık ve düzgün istatistiksel yakınsaklık anlamına gelir. Şimdi biz $\rightarrow_{I_d}$ve $\rightrightarrows_{I_d}$ arasında yer alan bir yakınsaklık çeşidini vereceğiz.

Tanım 4.1.3: $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$g_{j,\varepsilon}(x) = d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}\right), \; x \in X$$

ile verilen $g_{j,\varepsilon} : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $(g_{j,\varepsilon})$ dizisi X üzerinde sıfır fonksiyonununa düzgün yakınsak ise o zaman (f_n) dizisi f e *denk-istatistiksel yakınsaktır* denir ve bu

$$f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$$

şeklinde yazılır (Balcerzak vd., basımda).

Böylece $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(\forall \varepsilon, \sigma > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall j \geqslant k)(\forall x \in X) \;\; d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}\right) < \sigma$$

olmasıdır (Balcerzak vd., basımda).

Tanımlamadan, $f_n \rightarrow_{I_d} f$ olması için gerek ve yeter şartın,

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon, \sigma > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall j \geqslant k) \;\; d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}\right) < \sigma$$

olması gerektiği açıktır. Böylece $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olması $f_n \rightarrow_{I_d} f$ olmasını gerektirir. Başka bir deyişle $f_n \rightrightarrows_{I_d} f$ olması $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olmasını gerektirir.

Gerçekten, $f_n \rightrightarrows_{I_d} f$ olduğunu farzedelim. $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman bütün $n \notin M$ ve $x \in X$ için $\rho(f_n(x), f(x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $M \in I_d$ kümesi bulabiliriz. $M \in I_d$ olduğundan bütün $j \geqslant k$ için $d_j(M) < \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Böylece $\rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon$ olması $n \in M$ olmasını gerektirir. Buradan bütün $j \geqslant k$ için,

$$d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant d_j(M) < \varepsilon$$

dur ki bu $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olduğunun kanıtıdır.

Örnek 4.1.1: $x \in [0,1]$ için, $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ve $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $f_n = \chi_{\{1/n\}}$ ile tanımlansın. O zaman $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ fakat $f_n \not\rightrightarrows_{I_d} f$ olur. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ olsun ve $\frac{1}{k} < \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ alalım. O zaman her $j \geqslant k$ ve $x \in [0,1]$ için,

$$d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \frac{1}{k} < \varepsilon$$

olur. Buradan $[0,1]$ de $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olur. Kabul edelim ki $f_n \rightrightarrows_{I_d} f$ olsun. Böylece bütün $n \notin M$ ve $x \in [0,1]$ için $|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < 1$ olacak şekilde bir $M \in I_d$ kümesi vardır. $k \notin M$ seçelim. O zaman f_k sıfır fonksiyonu olmalıdır. *Çelişki*

Örnek 4.1.2: $x \in [0,1]$ için, $f(x) = 0$ ve $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} 2^{n+1}(x - \frac{1}{2^n}) & ; \quad x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \text{ için} \\ -2^{n+1}(x - \frac{1}{2^{n-1}}) & ; \quad x \in \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \text{ için} \\ 0 & ; \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

sürekli fonksiyonlarını tanımlayalım. O zaman $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ dir. Çünkü $\forall x \in [0,1]$ için

$$card\,\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \neq 0\} < 1$$

dir. Başka bir deyişle $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$$

olduğundan (f_n) in hiçbir alt dizisi düzgün yakınsak değildir.

Yukarıdaki ilginç örneğe rağmen, aşağıdaki teoremde gösterildiği gibi denk-istatistiksel yakınsaklık sürekliliği korur.

Teorem 4.1.1: (X,σ) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ için $f : X \to Y$ ve $f_n : X \to Y$ olsun. $x_0 \in X$ alalım. Eğer X üzerinde $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ ve bütün f_n fonksiyonları x_0 da sürekli ise o zaman f de x_0 da süreklidir (Balcerzak vd., basımda).

İspat : $\varepsilon > 0$ olsun. $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olduğundan her $x \in X$ için

$$d_k\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \rho(f_n(x), f(x)) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı bulabiliriz.

$$E(x) = \left\{n \leqslant k : \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}\right\}, x \in X$$

şeklinde ifade edelim. d_k, $k \in \{1, ..., k\}$ ile $P(\mathbb{N})$ üzerinde bir olasılık ölçümü olduğundan k nın seçiminden bütün $x \in X$ ler için

$$d_k\left(E(x)\right) > \frac{1}{2}$$

olduğu anlaşılır.

$f_1, ..., f_k$ ların x_0 da sürekliliğinden her $i \in \{1, ..., k\}$ ve $x \in B(x_0, \delta)$ için,

$$\rho(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde X de bir $B(x_0, \delta)$ yuvarı vardır. Biz her $x \in B(x_0, \delta)$ için,

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olduğunu göstereceğiz.

$x \in B(x_0, \delta)$ olarak belirleyelim.

$$d_k\left(E(x)\right) > \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad d_k\left(E(x_0)\right) > \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$p \in E(x) \cap E(x_0)$$

bulabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} \rho(f(x), f(x_0)) &\leqslant \rho(f(x), f_p(x)) + \rho(f_p(x), f_p(x_0)) + \rho(f_p(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

$x \in [0, 1]$ için $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman (f_n), "1" noktasında süreksiz olan bir f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Bu yüzden teorem 4.1.1 den $f_n \not\twoheadrightarrow_{I_d} f$ dir.

4.2 İstatistiksel Egorov Teoremi

Bu kısımda Egorov teoremin istatistiksel bir versiyonu verilecektir. Ayrıca büyük bir küme üzerinde bir dizinin denk-istatistiksel yakınsaklığı verilecek ve bunun düzgün istatistiksel yakınsaklık ile yer değiştiremeyeceği gösterilecektir.

Kabul edelim ki $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. X üzerinde hemen hemen her yerde tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonları gözönüne alacağız. Bu eğer gerekliyse X üzerinde her yerde tanımlı ve ölçümü sıfır olan bir küme üzerinde sonsuz değere sahip fonksiyonları ele almamızı sağlar.

Teorem 4.2.1: Kabul edelim ki $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ sonlu bir ölçüm uzayı olsun. $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ X üzerinde hemen hemen her yerde tanımlı ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar ve (f_n), X üzerinde hemen hemen her yerde f e noktasal istatistiksel yakınsak olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $\mu(X \backslash A) < \varepsilon$ ve $(f_n|_A)$, A üzerinde $f|_A$ ya denk-istatistiksel yakınsak olacak şekilde bir $A \in \mathfrak{M}$ vardır (Balcerzak vd., basımda).

İspat : Genelliği kaybetmeksizin biz bütün $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ fonksiyonlarını X üzerinde her yerde tanımlı ve her $x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow_{I_d} f(x)$ kabul edebiliriz. $p, j \in \mathbb{N}$ olsun.

$$H = \left\{ x \in X : d_j \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{p} \right\} \right) < \frac{1}{p} \right\}$$

kümesinin ölçülebilir olduğuna dikkat edelim. Gerçekten, her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|, x \in X$$

fonksiyonu ölçülebilirdir ve böylece,

$$B_n = g_n^{-1} \left(\left[\frac{1}{p}, \infty \right) \right) \in \mathfrak{M}$$

dir.

Her $x \in X$ için $x \in H$ olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{j}\right) \sum_{n=1}^{j} \chi_{B_n}(x) < \frac{1}{p}$$

olmasıdır.

$$h = \left(\frac{1}{j}\right) \sum_{n=1}^{j} \chi_{B_n}(x)$$

fonksiyonu ölçülebilir olduğundan,

$$H = h^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{p}\right)\right) \in \mathfrak{M}$$

dir. $k \in \mathbb{N}$ için,

$$E_{p,k} = \left\{x \in X : (\forall j \geqslant k) \;\; d_j\left(\left\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{p}\right\}\right) < \frac{1}{p}\right\}$$

olarak ifade edilsin. Önceki incelemelerimizden biz $E_{p,k} \in \mathfrak{M}$ sonucuna varırız. Aynı zamanda X üzerinde $f_n \to_{I_d} f$ olduğundan bütün $k \in \mathbb{N}$ ler için $E_{p,k} \subset E_{p,k+1}$ ve

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{p,k}$$

dır. Sonuç olarak

$$\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{p,k})$$

dır.

$\varepsilon > 0$ olsun. $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\mu(X \backslash E_{p,k(p)}) < \frac{\varepsilon}{2^p}$$

olacak şekilde $k(p) \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$A_0 = \bigcup_{p=1}^{\infty} \left(X \backslash E_{p,k(p)}\right)$$

şeklinde ifade edelim. O zaman,

$$\mu(A_0) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \mu(X \backslash E_{p,k(p)}) < \varepsilon$$

olur.

$$A = X \backslash A_0 = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_{p,k(p)}$$

şeklinde ifade edelim. O zaman

$$\mu(X \backslash A) = \mu(A_0) < \varepsilon$$

dur ve buradan,

$$(\forall p \in \mathbb{N})(\forall j \geqslant k(p))(\forall x \in A) d_j \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{p} \right\} \right) < \frac{1}{p}$$

elde ederiz ki bu,

$$f_n|_A \twoheadrightarrow_{I_d} f|_A$$

anlamına gelir.

Sonuç 4.2.1: Kabul edelim ki $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ sonlu bir ölçüm uzayı olsun. $f, f_n (n \in \mathbb{N})$ X üzerinde hemen hemen her yerde tanımlı ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olsun. O zaman X üzerinde hemen hemen her yerde $f_n \rightarrow_{I_d} f$ olması için gerek ve yeter şart her k için A_k üzerinde $f_n|_{A_k} \rightarrow_{I_d} f|_{A_k}$ olacak şekilde $\mathfrak{M}$ deki kümelerin bir (A_k) dizisi vardır ve

$$\mu\left(X \backslash \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = 0$$

dır (Balcerzak vd., basımda).

İspat : $(\Rightarrow)$: Teorem 4.2.1 de $\varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ olduğu göz önüne alınırsa ispat açıktır.

$(\Leftarrow)$: $k \in \mathbb{N}$ için,

$$(f_n|_{A_k} \twoheadrightarrow_{I_d} f|_{A_k}) \Rightarrow (f_n|_{A_k} \rightarrow_{I_d} f|_{A_k})$$

olmasından istenen elde edilir.

Balcerzak vd. tarafından verilen aşağıdaki örnek denk-istatistiksel yakınsaklığın Teorem 4.2.1 de düzgün istatistiksel yakınsaklıkla yer değiştiremeyeceğini gösterir. Verilen örnek mümkün olan en kolay örnek değildir. Fakat verilen örnek teorem 4.2.1 in değiştirilmiş versiyonunun gerçekten geçerli olmaktan çok uzak olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.1: $N \in \mathbb{N}$ için,

$$S_N = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{N-1} k < n \leqslant \sum_{k=1}^{N} k \right\}$$

olsun. Böylece $S_1 = \{1\}, S_2 = \{2,3\}, S_3 = \{4,5,6\}, S_4 = \{7,8,9,10\}, ...$ dir. S_N kümeleri ikişerli ayrıktır,

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_N = \mathbb{N}$$

ve S_N tam olarak N elemana sahiptir.
$n \in \mathbb{N}$ için $n \in S_{N(n)}$ olacak şekilde $N(n) \in \mathbb{N}$ olsun. $N(n) < \sqrt{2n} + 1$ dir. S_N in elemanları 0 dan başlayarak her $N \in \mathbb{N}$ için bağımsız olarak büyüklüklerine göre numaralandırılsın. S_N in en büyük elemanı $N-1$ numarasına sahipken, en küçük elemanı 0 numarasına sahiptir. $r(n) \in \{0, 1, ..., N(n) - 1\}$, $n \in S_{N(n)}$ e tahsis edilen numara olsun. Her $x \in [0,1)$, $x_N \in \{0, 1, ..., N-1\}$ olmak üzere,

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{x_N}{N!}$$

toplamı olarak verilebilir. Bu gösterim, eğer sonsuz çokluktaki N ler için $x_N \neq N - 1$ olduğunu kabul edersek tektir. $N \in \mathbb{N}$ ve $r \in \{0, 1, ..., N-1\}$ için $x_N = x_N(x)$, x in tek olarak gösterilmesinde yukarıda belirlendiği gibi olmak üzere,

$$A_r^N = \{x \in [0,1) : x_N = r\}$$

tanımlayalım. A_r^N kümeleri aşağıdaki özelliklere sahiptir;

* A_r^N aralıkların bir birleşimidir. Daha kesin olarak,

$$A_r^N = \bigcup_{\substack{r_1\in\{0\}, r_2\in\{0,1\}, \\ r_3\in\{0,1,2\},..., \\ r_{N-1}\in\{0,1,2,...,N-2\}, \\ r_N=r}} \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{k!}, \frac{1}{N!} + \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{k!}\right)$$

* Her $N \in \mathbb{N}$ için $A_0^N, A_1^N, ..., A_{N-1}^N$ kümeleri ikişerli ayrıktır ve

$$\bigcup_{r=0}^{N-1} A_r^N = [0,1)$$

dir.

* $\lambda-$Lebesgue ölçümü olmak üzere $\lambda(A_r^N) = \frac{1}{N}$ dir.

Üstelik, eğer $N_1, N_2, ..., N_k \in \mathbb{N}$ ikişerli farklı ve $i = 1, 2, ..., k$ için $r_i \in \{0, 1, ..., N_i - 1\}$ ise o zaman

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{r_i}^{N_i}\right) &= \lambda\left(\{x \in [0,1) : x_{N_i} = r_i, i = 1, 2, ..., k \text{ için}\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \tfrac{1}{N_i} = \prod_{i=1}^{k} \lambda\left(A_{r_i}^{N_i}\right) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ ve $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlamaya hazırız. Her $N \in \mathbb{N}$ ve $r \in \{0, 1, ..., N-1\}$ için B_r^N,

$$\lambda\left(A_r^N \backslash B_r^N\right) < \frac{1}{N2^N}$$

olacak şekilde $Int(A_r^N)$ in kapalı bir alt kümesi olsun. (O zaman $\lambda\left([0,1]\backslash \bigcup\limits_{r=0}^{N-1} B_r^N\right) < 2^{-N}$ dir). B_r^N kümeleri kapalı aralıkların sonlu birleşimleri olarak seçilmiş olabilir.

Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \notin A_{r(n)}^{N(n)}$ için $f_n(x) = 0$ ve $x \in B_{r(n)}^{N(n)}$ için $f_n(x) = \mathbb{N}(n)$ olacak şekilde herhangi sürekli fonksiyonlar olsun. B_r^N kümeleri kapalı aralıkların sonlu birleşimleri olduğundan f_n fonksiyonları *piecewise-lineer* olarak seçilmiş olabilir. $[0,1]$ de $f \equiv 0$ olarak tanımlayalım.

Şimdi $[0,1]$ de $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ olduğunu göstereceğiz. Başka bir deyişle, eğer $A \subset [0,1]$, Lebesgue ölçümüne göre bir sıfır-küme değilse o zaman $\forall C \in \mathbb{R}$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A), |f_n(x) - f(x)| \geqslant C\}$$

kümesinin yoğunluğunun 1 e eşit olduğunu kanıtlayacağız.

Bu şartın $f_n|_A \not\twoheadrightarrow_{I_d} f|_A$ dan daha güçlü olduğuna dikkat edelim.

* "$[0,1]$ de $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$" in ispatı:

$\varepsilon > 0$ olarak belirleyelim. $x \in [0,1]$ ve $j \in \mathbb{N}$ için,

$$g_j(x) = d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right)$$

şeklinde ifade edelim. Her $j \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
g_j(x) &\leq d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \neq f(x)\}\right) \\
&= \tfrac{1}{j} card\left(\{n \leq j : f_n(x) \neq f(x)\}\right) \\
&\leq \tfrac{1}{j} \sum_{N=1}^{N(j)} card\left(\{n \in S_N : f_n(x) \neq f(x)\}\right) \\
&\leq \tfrac{1}{j} \sum_{N=1}^{N(j)} card\left(\left\{n \in S_N : x \in A^N_{r(n)}\right\}\right) \\
&\leq \tfrac{1}{j} N(j) \\
&\leq \tfrac{1}{j}(\sqrt{2j} + 1)
\end{aligned}$$

dir.

Bundan dolayı (g_j) sıfır fonksiyonuna $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve $f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f$ dir.

* "Eğer $A \subset [0,1]$ bir sıfır-küme değilse o zaman $\forall C \in \mathbb{R}$ için, $d\left(\{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A)|f_n(x) - f(x)| \geq C\}\right) = 1$" in ispatı:

$A \subset [0,1]$ bir sıfır-küme olmasın. O zaman bazı $N_0 \in \mathbb{N}$ ler için A nın dış Lebesgue ölçümü $\lambda^*(A) > 2^{-N_0}$ eşitsizliğini sağlar.

$N \in \mathbb{N}$ için,

$$K_N = \{r \in \{0, 1, 2, ...N-1\} : A \cap B_r^N \neq \varnothing\}$$

olsun. O zaman $N \in \mathbb{N}$ için,

$$A \cap \bigcup_{r=0}^{N-1} B_r^N \subset \bigcup_{r \in K_N} B_r^N$$

ve

$$A \cap \bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r=0}^{N-1} B_r^N \subset \bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r \in K_N} B_r^N \subset \bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r \in K_N} A_r^N$$

dir.

$$\begin{aligned} 0 &< \lambda^*(A) - 2^{-N_0} = \lambda^*(A) - \sum_{N>N_0} 2^{-N} < \lambda^*(A) - \sum_{N>N_0} \lambda\left([0,1] \backslash \bigcup_{r=0}^{N-1} B_r^N\right) \\ &\leq \lambda^*(A) - \lambda\left([0,1] \backslash \bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r=0}^{N-1} B_r^N\right) \leq \lambda^*\left(A \cap \bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r=0}^{N-1} B_r^N\right) \\ &\leq \lambda\left(\bigcap_{N>N_0} \bigcup_{r \in K_N} A_r^N\right) = \prod_{N>N_0} \lambda\left(\bigcup_{r \in K_N} A_r^N\right) = \prod_{N>N_0} \frac{card(K_N)}{N} \end{aligned}$$

dir.

$N > N_0$ için $\frac{card(K_N)}{N} \in [0,1]$ sayısının sonucu pozitiftir. Bu

$$\lim_{N \to \infty} \frac{card(K_N)}{N} = 1$$

olduğu anlamına gelir.

Şimdi belirlenmiş bir $C \in \mathbb{R}$ için,

$$d\left(\{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A)|f_n(x) - f(x)| \geq C\}\right)$$

ifadesini hesaplamaya hazırız.

$C' \geq C$ olacak şekilde $C' \in \mathbb{N}$ olsun.

$N(j) > C'$ yü sağlayan j için (yani $j > \frac{C'(C'+1)}{2}$ için);

$$\begin{aligned}
1 &\geq d_j\left(\{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A)|f_n(x) - f(x)| \geq C\}\right) \\
&\geq d_j\left(\left\{n \in \mathbb{N} : A \cap B_{r(n)}^{N(n)} \neq \varnothing \text{ ve } N(n) \geq C\right\}\right) \\
&= d_j\left(\left\{n \in \mathbb{N} : r(n) \in K_{N(n)} \text{ ve } N(n) \geq C\right\}\right) \\
&= \frac{1}{j} card\left(\left\{n \leq j : r(n) \in K_{N(n)} \text{ ve } N(n) \geq C\right\}\right) \\
&\geq \frac{1}{j} \sum_{N=C'}^{N(j)-1} card\left(\{n \in S_N : r(n) \in K_N\}\right) \\
&= \frac{1}{j} \sum_{N=C'}^{N(j)-1} card(K_N) \\
&= \frac{\sum\limits_{k=C'}^{N(j)-1}}{j} \sum_{N=C'}^{N(j)-1} \frac{N}{\sum\limits_{k=C'}^{N(j)-1} k} \frac{card(K_N)}{N} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

dir.

Son satırdaki yakınsaklık Toeplitz teoremi yardımıyla,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=C'}^{N(j)-1} k\right)}{j} = 1$$

den anlaşılır.

$$\left(N \in \mathbb{N} \text{ için} \lim_{N\to\infty} \frac{card(K_N)}{N} = 1, \sum_{N=C'}^{N(j)-1} \frac{N}{\sum\limits_{k=C'}^{N(j)-1} k} = 1 \text{ ve } \lim_{j\to\infty} \frac{N}{\sum\limits_{k=C'}^{N(j)-1} k} = 0 \text{ olduğuna dikkat edelim} \right)$$

Sonuç olarak,

$$d\left(\{n \in \mathbb{N} : (\exists x \in A)|f_n(x) - f(x)| \geq C\}\right) = 1$$

dir ve istenen elde edilir.

4.3 Ölçüme göre $I-$Yakınsaklık

$I \subset P(\mathbb{N})$ bir uygun ideal ve $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $\mathcal{L}^0$ ile biz X üzerinde hemen hemen her yerde tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar uzayını gösterelim. $f \in \mathcal{L}^0$ ve $f_n \in \mathcal{L}^0, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$\forall \eta > 0$ için

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}\right), n \in \mathbb{N}$$

reel sayı dizisi 0 a yakınsıyorsa (f_n) in f e ölçüme göre yakınsak olduğunu bunun $f_n \overset{\mu}{\rightarrow} f$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

Tanım 4.3.1: $\forall \eta > 0$ için

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}\right), n \in \mathbb{N}$$

dizisi 0 a $I-$yakınsak oluyorsa (f_n), f e ölçüme göre $I-$yakınsaktır denir (Balcerzak vd., basımda).
Bu yakınsaklık $f_n \overset{\mu}{\rightarrow}_I f$ ile gösterilir.
Böylece $f_n \overset{\mu}{\rightarrow}_I f$ olması $r = \eta$ ve/veya örnek olarak $\eta = \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}$ alındığı zaman,

$$(\forall r > 0)(\forall \eta > 0)\left\{n \in \mathbb{N} : \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}) \geq r\right\} \in I$$

şartına denktir (Balcerzak vd., basımda).

Uyarı$^{(*)}$: Elbette

$$(f_n \overset{\mu}{\rightarrow} f) \Rightarrow (f_n \overset{\mu}{\rightarrow}_I f)$$

dir.
Eğer, reel sayı dizilerinin $I-$yakınsaklığı tam anlamıyla alışılmış yakınsaklıktan daha genelse, yukarıdaki ifadenin tersinin $(\not\Leftarrow; \Rightarrow)$ elde edilemeyeceğini kolayca gösterebiliriz.

Aynı zamanda

$$(f_n \rightrightarrows_I f) \Rightarrow (f_n \xrightarrow{\mu}_I f)$$

dir.

Gerçekten, $f_n \rightrightarrows_I f$ olduğunu farzedelim ve $\eta > 0$ olsun. O zaman bütün $n \notin M$ ve $x \in M$ için $|f_n(x) - f(x)| < \eta$ olacak şekilde bir $M \in I$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} &\{n \in \mathbb{N} : \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}) \geq r\} \\ &\subset \{n \in \mathbb{N} : \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\} \neq \emptyset\} \subset M \in I \end{aligned}$$

dır ki bu $f_n \xrightarrow{\mu}_I f$ anlamına gelir.

$I = I_d$ olması durumunda ölçüme göre $I-$yakınsaklık Steinhaus (1951) ve Fast (1951) de çalışıldı ve asimtotik istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırıldı. Biz onu *ölçüme göre dış istatistiksel yakınsaklık* olarak adlandırırız (Bir diğer çeşit, *ölçüme göre iç istatistiksel yakınsaklık* olarak adlandırıldı ki biz ileriki bölümde onu ele alacağız). Steinhaus (1951) ve Fast (1951) de aşağıdaki sonuç elde edildi.

Teorem 4.3.1: $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ sonlu bir ölçüm uzayı ve $f, f_n \in \mathcal{L}^0$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Eğer, X üzerinde hemen hemen her yerde $f \to_{I_d} f$ ise o zaman $f \xrightarrow{\mu}_{I_d} f$ dir. Tersine, eğer aşağıdaki $(*)$ şartı sağlanıyorsa o zaman $f \xrightarrow{\mu}_{I_d} f$ olması X üzerinde hemen hemen heryerde $f \to_{I_d} f$ olmasını gerektirir.

$$\begin{aligned} (\exists D \quad \in \quad &\mathfrak{M}, \mu(D) = \mu(X))(\forall x \in D)(\exists \eta_j \searrow 0) \\ &d\left(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta_j\}\right) \end{aligned} \tag{*}$$

var.

İleriki bölümde biz teorem 4.3.1 in ilk kısmının yeni bir ispatını vereceğiz. Ayrıca teorem 4.3.1 in ikinci kısmı içinde biz $(*)$ şartının ihmal edilemeyeceğini göstereceğiz.

Şimdi Balcerzak vd. (2000) tarafından verilen aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.3.1: $[0,1)$ üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonların bir dizisinin iyi bilinen örneği dikkate alınırsa; o ölçüme göre yakınsaktır fakat $[0,1)$ üzerinde hiç bir noktada limite sahip değildir.

Yani $f_1, f_2, f_3, ...$ $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},1]}, \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, \chi_{[0,\frac{1}{8}]}, ...$ fonksiyonların bir dizisi olsun.

Bizim yeni dizimiz $g_1, g_2, g_3, ...$ aynı biçimde sıralı, aynı fonksiyonlardan oluşsun fakat herbir f_n fonksiyonu 2^{n-1} kez tekrar etsin. (g_n) in $[0,1)$ de 0 fonksiyonuna ölçümde yakınsak olduğu açıktır. Ancak $(g_n(x))$ hiçbir $x \in [0,1)$ noktasında 0 a istatistiksel yakınsak değildir. Gerçekten, $n \in \mathbb{N}$ için

$$j_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} = 2^{n-1}$$

olarak tanımlansın. $x \in [0,1)$ olsun ve

$$M = \{m \in \mathbb{N} : g_m(x) = 1 \text{ ve } g_{m+1}(x) = 0\}$$

şeklinde ifade edilsin. Sıra gittikçe arttığı için, bu küme sonsuzdur ve (j_{k_n}), (j_n) in bir alt dizisidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$d_{j_{k_n}}(\{m \in \mathbb{N} : g_m(x) = 1\}) \geq \frac{2^{k_n-1}}{2^{k_n}-1} \geq \frac{1}{2}$$

dir. Bu da istenildiği gibi

$$d_j(\{m \in \mathbb{N} : |g_m(x)| \geq 1\}) \nrightarrow 0$$

olduğunu gösterir.

Klasik Riesz teoremine göre, $\mathcal{L}^0$ daki $f \in \mathcal{L}^0$ a ölçüme göre yakınsak olan her (f_n) fonksiyon dizisi hemen hemen her yerde f e yakınsak olan bir alt dizi içerir. Bu gerçeğin istatistiksel versiyonunun doğru olup olmadığını sormak doğaldır. Ölçüme göre dış istatistiksel yakınsak olan her dizi hemen hemen her yerde yakınsak (alışılmış anlamda) bir alt dizi içerdiğinden cevap "evet" dir. Bu teorem 4.3.1 in kullanılması Hartman tarafından 1951 de ispatlanmıştır.

Şimdi bir $P-$ideal I için, ölçüme göre $I-$yakınsaklığın ρ ya göre $I-$yakınsaklığa denk olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.3.2: $I \subset P(\mathbb{N})$ bir $P-$ ideal ve $f, f_n \in \mathcal{L}^0$ olsun.

Aşağıdaki şartlar denktir.

(i) (f_n), f e ölçümde $I-$ yakınsaktır.

(ii) Herbir $p \in \mathbb{N}$ için, $\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{p}\right\}\right)$, dizisi 0 a $I-$yakınsaktır.

(iii) Her bir $p \in \mathbb{N}$ için, $k \to \infty$ iken $\mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k^{(p)}}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{p}\right\}\right) \to 0$ olacak şekilde bir $\left(n_k^{(p)}\right)$ $I-$seyrek olmayan dizisi vardır.

(iv) Her bir $p \in \mathbb{N}$ için, $k \to \infty$ iken $\mu\left(\left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{p}\right\}\right) \to 0$ olacak şekilde bir (n_k) $I-$seyrek olmayan dizisi vardır.

(v) $(f_{n_k}), f$ e ölçüme göre yakınsak olacak şekilde bir (n_k) $I-$seyrek olmayan dizisi vardır.

(vi) $\rho(f_n, f) \to_I 0$ dır (Balcerzak vd., basımda).

İspat : $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ve $(iv) \Leftrightarrow (v)$ denklikleri, ölçümde yakınsaklık ve ölçümde $I-$ yakınsaklık tanımlarından elde edilir. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ ve $(v) \Leftrightarrow (vi)$ denklikleri; teorem 3.2.1, sonuç 3.2.1 ve ρ nun özelliklerinden elde edilir. $(iv) \Rightarrow (iii)$ olması açıktır. $(iii) \Rightarrow (iv)$ ifadesini göstermek için,

$$M_p = \mathbb{N} \backslash \left\{n_k^{(p)} : k \in \mathbb{N}\right\}, p \in \mathbb{N}$$

şeklinde ifade edelim. I bir $P-$ideal olduğundan, her p için $M_p \backslash M_\infty$ sonlu olacak şekilde $M_\infty \in I$ seçelim. Artan bir (n_k) dizisi olarak $\mathbb{N} \backslash M_\infty$ saptayalım. Eğer sonlu kümeleri görmezlikten gelirsek, bu dizi her $\left(n_k^{(p)}\right)$, $p \in \mathbb{N}$ nin bir alt dizisidir. Böylece (iv) şartı elde edilir.

$(\mathcal{L}^0, \rho)$ nun tamlığını kullanılarak bazı denklikleri formülleştirebiliriz.

Teorem 4.3.3: $I \subset P(\mathbb{N})$ bir $P-$ ideal ve $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathcal{L}^0$ olsun. Aşağıdaki şartlar denktir.

(i) $(f_n), f$ e ölçüme göre $I-$ yakınsak olacak şekilde bir $f \in \mathcal{L}^0$ vardır.

(ii) $(f_n), \rho$ ya göre $I-$ Cauchy şartını sağlar.

(iii) ρ ya göre Cauchy şartını sağlayan bir (f_{n_k}) $I-$seyrek olmayan alt dizi vardır (Balcerzak vd., basımda).

İspat : $(i) \Rightarrow (ii)$: Teorem 4.3.2 de, (i) ifadesi $\rho(f_n, f) \rightarrow_I 0$ olmasına denktir ve bu (ii) olmasını gerektirir. $(ii) \Rightarrow (iii)$ ifadesi önerme 3.2.4 den elde edilir. $(iii) \Rightarrow (i)$: (Y, ρ) nun tamlığından, bazı $f \in \mathcal{L}^0$ lar için $\rho(f_{n_k}, f) \rightarrow_I 0$ elde ederiz. Bundan dolayı teorem 3.2.1 ve sonuç 3.2.1 den $\rho(f_n, f) \rightarrow_I 0$ dır ki bu teorem 4.3.2 yardımıyla (i) nin sağlandığı anlamına gelir.

Sonuç 4.3.1: $I \subset P(\mathbb{N})$ bir $P-$ ideal olsun. O zaman, bir $f \in \mathcal{L}^0$ a ölçüme göre $I-$ yakınsak olan $\mathcal{L}^0$ daki fonksiyonların her (f_n) dizisi hemen hemen her yerde f e yakınsak bir alt dizi içerir (Balcerzak vd., basımda).

İspat : Teorem 4.3.2 de $(i) \Rightarrow (v)$ gerektirmesinden, f e ölçümde yakınsak olan bir (f_{n_k}) alt dizisini gözönüne alalım. O zaman Riesz teoremi yardımıyla, hemen hemen her yerde f e yakınsak bir alt dizi seçilebilir.

4.4 Ölçüme Göre İstatistiksel Yakınsaklığın İki Çeşidi

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. Önceki bölümdeki tanımlamalara göre $\mathcal{L}^0$ daki fonksiyonların bir (f_n) dizisinin bir $f \in \mathcal{L}^0$ a ölçüme göre dış istatistiksel yakınsaklığı, $j \to \infty$ iken,

$$(\forall \eta, r > 0) \quad d_j \left(\{ n \in \mathbb{N} : \mu \left(\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta \} \right) \geq r \} \right) \to 0$$

formülü ile verilir. Burada bu yakınsaklık ($f_n \xrightarrow{\mu}_{I_d} f$ ile önceden gösterildi) $f_n \overset{(d,\mu)}{\to} f$ olarak gösterilecektir. Yukarıdaki formülde eğer d_j ve μ operatörlerinin sırasını değiştirirsek o zaman (f_n) in f e ölçümde iç istatistiksel yakınsaklığını elde ederiz. Bu $f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f$ olarak gösterilip, $j \to \infty$ iken

$$(\forall \eta, r > 0) \mu \left(\{ x \in X : d_j \left(\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta \} \right) \geq r \} \right) \to 0$$

formülü ile verilir (Balcerzak vd., basımda).

Aşağıdaki teorem yakınsaklığın bu iki çeşidi arasındaki ilişki hakkında doğal bir soruya cevaptır.

Teorem 4.4.1 : $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı ve $f, f_n \in \mathcal{L}^0$ olsun. O zaman

(i) $\left(f_n \overset{(d,\mu)}{\to} f \right) \Rightarrow \left(f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f \right)$;

(ii) $\mu(X) < \infty$ olmak şartıyla $\left(f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f \right) \Rightarrow \left(f_n \overset{(d,\mu)}{\to} f \right)$dir (Balcerzak vd., basımda).

Teorem 4.4.1 in (ii) ifadesindeki $\mu(X) < \infty$ varsayımı zorunludur. Gerçekten, $\mathbb{R}$ üzerinde $\lambda-$Lebesgue ölçümü göz önüne alınsın. f, $\mathbb{R}$ üzerinde sıfır fonksiyonu ve $f_n = \chi_{[n,n+1)}, n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman her $\eta > 0$ ve $x \in X$ için,

$$card\{ n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta \} < 1$$

olduğundan $f_n \overset{(\lambda,d)}{\to} f$ dir. Ancak, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda(\{ x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| \geq 1 \}) = 1$$

olduğundan $f_n \overset{(d,\lambda)}{\not\to} f$ dir.

Teorem 4.4.1 e göre sonlu ölçüm uzayları için doğal türlerin her ikisi (iç ve dış) birbirine denk olduğundan ölçümdeki istatistiksel yakınsaklığın bir notasyonu verilebilir. Şimdi Egorov un Teoremini kullanarak Teorem 4.3.1 in ilk kısmı için yeni bir ispat verelim.

* $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ sonlu bir ölçüm uzayı ve $f, f_n \in \mathcal{L}^0$ $(n \in \mathbb{N})$ olsun. Kabul edelim ki X üzerinde hemen hemen her yerde $f_n \to_{I_d} f$ olsun. $f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f$ olduğunu göstereceğiz.

$\eta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 4.2.1 e göre $f_n|_A \twoheadrightarrow_{I_d} f|_A$ ve $\mu(X \backslash A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $A \in \mathfrak{M}$ vardır. Her $j \geq k$ ve $x \in A$ için

$$d_j(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}) < \eta$$

olacak şekilde bir indeks $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Böylece

$$(\forall j \geq k)\{x \in X : d_j(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}) \geq \eta\} \subset X \backslash A$$

dır. Sonuç olarak,

$$(\forall j \geq k)\mu(\{x \in X : d_j(\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}) \geq \eta\} < \varepsilon$$

olup istenen elde edilir.

Yukarıdaki sonuçlardan açıkça görülüyor ki Teorem 4.4.1 kullanılarak Bölüm 4.3 de Uyarı$^{(*)}$ daki benzer düşünce altında $(f_n \twoheadrightarrow_{I_d} f) \Rightarrow (f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f)$ olması, $(f_n \rightrightarrows_{I_d} f) \Rightarrow (f_n \overset{\mu}{\to}_{I_d} f)$ olmasını içerir. Başka bir deyişle Örnek 4.3.1 deki dizi gözönüne alındığında $(f_n \overset{(\mu,d)}{\to} f) \not\Rightarrow (f_n \to_{I_d} f)$ dir. Sonuç olarak $\sigma-$ sonlu ölçülebilir uzay için hemen hemen her yerde $f_n \to_{I_d} f$ olması (f_n) dizisinin f e ölçüme göre iç istatistiksel yakınsak olmasını gerektirmez. Dolayısıyla bu durumda Teorem 4.3.1 in ilk kısmını veremeyiz.

* * *

KAYNAKLAR

Balcerzak, M., Dems, K.,Komisarski, A. (basımda). "Stataistical Convergence and Ideal Convergence for Sequences of Functions", J. Math. Anal. Appl.

Balcı, M. 1997. "Matematik Analiz", Bilim Kitap Kırtasiye, Cilt II, 2. Baskı, Ankara.

Balcı, M. 1998. "Reel Analiz", Bilim Kitap Kırtasiye, Ankara.

Balcı, M. 1999. "Matematik Analiz", Balcı Yayınları, Cilt I, 6. Baskı, Ankara.

Bayraktar, M. 2000. "Fonksiyonel Analiz", Uludağ Üniversitesi, Bursa.

Dönmez, A. 2001. "Reel Analiz", Seçkin Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.

Fast, H. 1951. "Sur La Convergence Statistique", Colloq. Math. 2, 241-244.

Fridy, J. A. 1985. "On Statistical Convergence", Analysis. 5, 301-313.

Fridy, J. A., Khan M. K. 1998. "Tauberian Theorems via Statistical Convergence", J. Math. Anal. Appl. 228, 73-95.

Fridy, J. A. 1993. "Statistical Limit Points", Proc. Amer. Math. Soc. 118, 1187-1192.

Gürdal, M. 2004. "Some Types of Convergence", Süleyman Demirel Üni. Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Math. Ph. D. Thesis.

Hacısalihoğlu H. H., Hacıyev A., Kalantarov V., Sabuncuoğlu A. Brown L. M., İbikli E., Brown S. 2000. "Matematik Terimleri Sözlüğü", Türk Dil Kurumu, Ankara.

Hartman, S. 1951. "Sur une familie singuliere d'ensembles de nombres naturels", Colloq. Math. 2, 245-248.

Kostyrko, P., Salat, T., Willczynski, W. (2000/2001). "I-Convergence", Real Anal. Exchange. 26, 669-689.

Kuratowski, C. 1966. "Topologie", Volume I, PWN Warszawa.

Miller, H. I. 1995. "A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence", Trans. Amer. Math. Soc. 347, 1811-1819.

Nagata, J. 1974. "Modern General Topology", North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London.

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. 1991. "An Introduction to the Theory of Numbers", Fifth Edition, John Wiley and Jons, Inc., p.529.

Nuray F., Ruckle, W. H. 2000. "Generalized Statistical Convergence and Convergence Free Spaces", J. Maht. Anal. Appl. 245, 513-527.

Pehlivan, S. 2001. "İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine Ders Notları", Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

Salat, T. 1980. "On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers", Math. Slovaca. 30, 139-150.

Steinhaus, H. 1951. "Sur La Convergence Ordinarie Et La Convergence Asymptotique", Colloq. Math. 2, 73-74.

Yüksel, Ş. 2002. "Genel Topoloji", Selçuk Üniversitesi, 4. Baskı, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

Uğur ULUSU

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Lisans : Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 1999-2004.

Lise : Sivas Kongre Lisesi – 1999.

İş

2004-2005 Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmenliği.

2005-... Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi.

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı : Sivas 12.01.1982

Cinsiyeti : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce