ÖZET

Doktora Tezi

BESSEL DİAMOND OPERATÖRÜNÜN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Mehmet Zeki SARIKAYA

Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Ekim 2007

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu çalışmada, $k-$ kez tekrarlanan $\lozenge_B^k$ operatörünü

$$\lozenge_B^k = \left[\left(B_{x_1}+B_{x_2}+...+B_{x_p}\right)^2 - \left(B_{x_{p+1}}+...+B_{x_{p+q}}\right)^2\right]^k$$

şeklinde tanımlayarak Bessel Diamond operatörü olarak adlandırdık. Burada, $2v_i = 2\alpha_i + 1,\ \alpha_i > -\frac{1}{2},\ x_i > 0,\ i = 1,2,...,n,\ B_{x_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{2v_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $p+q=n,\ k$ negatif olmayan bir tam sayı ve n, $\mathbb{R}_n^+$ nın boyutudur. İlk olarak, Bessel Diamond operatörünün elementer çözümünü çalıştık. Daha sonra, elementer çözümlerin ve onların $B-$konvolüsyonlarının Fourier Bessel dönüşümlerini çalıştık.

Diğer yandan, $\square_B^r$ $r-$kez tekrarlanan Bessel ultra-hiperbolik operatör, f bir genelleşmiş fonksiyon, u herhangi bir fonksiyon, $x \in \mathbb{R}_n^+$ ve c_r sabit olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \square_B^r u(x) = f(x)$$

şeklindeki bileşik Bessel ultra-hiperbolik denklemi ele aldık. Daha sanra Bessel Diamond operatörü şeklindeki bu denklemin $u(x)$ zayıf çözümünü ve bu çözümün tekliğini çalıştık.

Son bölümde, $\diamondsuit_B^k$ operatörünün elementer çözümünü Riesz'in Bessel Diamond çekirdeği olarak adlandırdık ve bu elementer çözümün $B-$konvolüsyonunu çalıştık.

2007, Sayfa: 74

ANAHTAR KELİMELER: Diamond Operator; Bessel Diamon Operatör; Tempered Distribution; Fourier Bessel Transform; B-konvolüsyon; Riesz çekirdeği.

ABSTRACT

Ph.D Thesis

ON THE ELEMENTARY SOLUTION OF THE BESSEL DIAMOND OPERATOR

Mehmet Zeki SARIKAYA

Afyonkarahisar Kocatepe University
Institute for the Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

October 2007

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

In this study, the operator $\Diamond_B^k$ is introduced and named as the Bessel Diamond operator iterated $k-$times and is defined by

$$\Diamond_B^k = \left[\left(B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} \right)^2 - \left(B_{x_{p+1}} + ... + B_{x_{p+q}} \right)^2 \right]^k$$

where $p+q=n$, $B_{x_i} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \dfrac{2v_i}{x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $2v_i = 2\alpha_i + 1$, $\alpha_i > -\frac{1}{2}$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, k is a nonnegative integer and n is the dimension of the $\mathbb{R}_n^+$. Firstly, we study the elementary solution of the Bessel Diamond operator. After, we

study the Fourier Bessel transform of the elementary solution and also the Fourier Bessel transform of their convolution.

On the other hand, we have studied the compound Bessel ultra-hyperbolic equation of the form

$$\sum_{r=0}^{m} c_r \Box_B^r u(x) = f(x)$$

where $\Box_B^r$ is the Bessel ultra-hyperbolic type operator iterated $r-$times, f is a given generalized function, u is any function, $x \in \mathbb{R}_n^+$ and c_r is a constant. After, we study the weak solution $u(x)$ of above the equation which is of the form Bessel Diamond operator and moreover, such a solution is unique.

In the last chapter, the elementary solution of the operator $\Diamond_B^k$ is called the Bessel diamond kernel of Riesz. Then we study the $B-$convolution of this elementary solution.

2007, Page: 74

KEY WORDS : Diamond Operator; Bessel Diamon Operator; Tempered Distribution; Fourier Bessel Transform; $B-$convolution; Riesz kernel.

1. GİRİŞ

Bugün Fizikte, Elektrik mühendisliğinde, klasik Analizde tanımlı olmayan ve hiç bir gerçeğe uymayan, ideal kavramları simgeleyen, böylece reel olayların işe yarar bir gösterimine olanak veren kavramlar kullanılmaktadır. Bu çeşit fonksiyonlara örnek olarak, Singüler(Tekil) fonksiyonlar adı verilen fonksiyonları veya bir zaman noktasında darbe şeklinde etkileyen *impuls* (Delta) fonksiyonunu verebiliriz.

Singüler fonksiyonlar kavramı, klasik fonksiyonlar yardımıyla tanımlanamamaktadır. Bununla birlikte bugün genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi Matematiğin bir çok bölümlerine yayılmış ve gelişme içindedir.

İdeal fiziksel kavramları açıklayan ve kullanışlı şekle sokan Matematiksel yöntemleri ilk kez S. L. Sobolev 1936 da ortaya koymuştur. Sobolev, Hiperbolik diferensiyel denklem için Cauchy probleminin çözümünün tekliğinin araştırılmasında genelleştirilmiş fonksiyonları kullanmıştır.

Daha sonra L. Schwartz 1945 de "Distribution Teorisi" adı altında eski literatürleri de dikkate alarak sistematik bir şekilde genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisini oluşturmuştur. Onun sınırlamaları Lineer-Topolojik uzay teorisine yaklaşmakta ve önemli sonuçlar elde edilmektedir.

Dağılım, klasik fonksiyonlar kavramını da içermekte olup, onların genel şeklini vermektedir. Bu nedenle Dağılım'a genelleştirilmiş fonksiyon denilmektedir.

Dağılım klasik Matematiğin bazı güçlüklerini, örneğin aslında türetilmeyen fonksiyonları ortadan kaldırır.

S. L. Sobolev adi fonksiyonlar için bilinen türev kavramından daha geniş bir türev tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir:

$\overline{\Omega}$ bölgesinde k. mertebeden sürekli türevlere sahip $(k-1)$ mertebeden tüm türevleri sıfır ve Ω da sınırlı olan fonksiyonlar cümlesi $\mathcal{M}^{(k)}(\Omega)$ ile tanımlansın. $u(x)$ ve $v(x)$, Ω üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere, herhangi bir $\phi \in \mathcal{M}^{(k)}(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial^k \phi}{\partial x_1^{k_1}.\partial x_2^{k_2}...\partial x_m^{k_m}} dx = (-1)^k \int\limits_{\Omega} v\phi dx$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda, v fonksiyonuna Ω da u fonksiyonunun k. mertebeden genelleştirilmiş türevi denir. Genel olarak, genelleştirilmiş türev

$$v(x) = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}.\partial x_2^{k_2}...\partial x_m^{k_m}}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada adi türevli her fonksiyonun genelleştirilmiş türevi vardır ancak tersi doğru değildir.

Örneğin, $\Omega = (-1, 1)$ olsun. $u(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında adi türevi yoktur. Ancak bu $u(x) = |x|$ fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi var ve bu genelleştirilmiş türev $u'(x) = sgnx$ şeklindedır. Gerçekten de, $\phi \in \mathcal{M}^{(1)}(-1, 1)$ olsun. O halde $\phi(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ kapalı aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ dır.

$$\int\limits_{-1}^{1} |x|\, \phi'(x)dx = -\int\limits_{-1}^{0} x\phi'(x)dx + \int\limits_{0}^{1} x\phi'(x)dx.$$

Bu eşitliğin sağındaki iki integrale kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{1} |x|\, \phi'(x)dx &= \int\limits_{-1}^{0} \phi(x)dx - \int\limits_{0}^{1} \phi(x)dx \\ &= -\int\limits_{-1}^{1} \phi(x) sgnx dx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $u(x) = |x|$ fonksiyonunun $v(x) = sgnx$ genelleştirilmiş türevi bulunur.

Klasik analizde belirli bir sayı bölgesindeki her bir x sayı değerine, $y = f(x)$ kuralıyla başka bir sayı değerlerinin bölgesi karşılık getirilir. Fizikte, değişken fiziksel büyüklüğün değerleri, söz gelimi bir elektrik gerilimi gibi, her bir x zaman noktasına $y = f(x)$ sayı değerleri belirlenir ve ölçülür. Gerçekte ölçülecek nedir? Bu fiziksel büyüklüğün kendisi olmayıp onun ölçüm aletine olan etkisidir. Bunun bir $\varphi(x)$ test fonksiyonu ile verilebileceği düşünülmektedir.

Bir Matematiksel Fizik probleminin çözümünde singüler fonksiyonlar veya

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $\delta-$(Dirac-delta) fonksiyonu genel olarak ara hesaplarda gözükmektedir. Sonuçlarda ise singüler fonksiyonlar ya tamamen ortadan kaybolmuş ya da integral işareti altında bir test fonksiyonu(yeterince iyi fonksiyon) ile çarpılmış olarak görünür. Bu bakımdan singüler fonksiyonların ne olduklarına cevap aramak gereksinmemektedir. Yalnızca bir singüler fonksiyonun bir test fonksiyonu $\varphi(x)$ ile çarpımının ne gösterdiğini bilmek yeterli olmaktadır.

Örneğin, $\delta-$fonksiyonunun ne olduğundan çok, bir $\varphi(x)$ test fonksiyonu ile düzenlenen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$$

eşitliğinin varlığını göstermek yeterli olmaktadır.

Diğer bir deyişle, yukarıdaki integralde görüldüğü gibi $\delta-$fonksiyonu için, $\varphi(x)$ test fonksiyonun $\varphi(x_0)$ değerini bilmek yeterli olmaktadır.

Operatör metodu, çeşitli yöntemlerle bulunmuş sonuçları daha basit hesaplamalarla elde etmektedir. Bunların en önemli ve geniş bir sınıfını İntegral Dönüşümleri oluşturmaktadır. Bunlar arasında Laplace, Mellin-Henkel, Riesz, Fourier, Fourier-Bessel dönüşümleri başta gelir.

Bir f fonksiyonu üzerinde yapılan dönüşümler ile F elde ediliyor ise bu bir fonksiyonel dönüşümdür. İşlem

$$F_B[f] = F$$

şeklinde gösterilir. Bu ifade de f üzerine bir F_B dönüşümü uygulanarak F elde ediliyor demektir. F_B, f yi F ye götüren bir operatördür.

$F_B[f] = F$ dönüşümü $\varphi(x) = y$ fonksiyonuna benzemektedir. x, y değişkenleri sırasıyla $f,\ F$ rolünü oynamaktadır. $f,\ F$ fonksiyonları iki soyut uzayın noktalar cümlesi olarak düşünülürse F_B dönüşümü, f uzayının F uzayına tasviri olarak geometrik bir anlam taşır. f ye (ana)original fonksiyon ve F ye de görüntü fonksiyonu denir.

Doğada basit periyodik olaylar, matematiksel olarak sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile gösterilebilir. Örneğin, bir sarkacın küçük genliklerle(amplitüdlerle) salınımı, bir diyapozanın titreşimleri ve buna benzer bir çok fiziksel olay gibi. Eğer olay saniyede n defa tekrarlanıyorsa basit titreşimleri gösteren fonksiyon:

$$A \sin 2\pi n t \quad \text{veya} \quad A \cos 2\pi n t$$

den biridir. Burada t saniye ile ölçülen zamanı, A Amplitüd, $\omega = 2\pi n$ de titreşim hareketinin açısal hızı veya Pülsasyonudur. Basit sinüs ve kosinüs fonksiyonları ile belirtilen olaylara Basit Harmonik Titreşim denir.

Bu bakımdan periyodik fonksiyonları bir Trigonometrik seri ile gösterme gereği duyulmuştur. Böyle bir seri Fourier serisidir. Fourier serisi Elektromagnetik teorisinde, Akustik, Isı akımında ve Matematik-Fiziğin bir çok dallarında vazgeçilmeyacek şekilde önemlidir.

Fourier serileri, Dirichlet koşullarını sağlayan periyodik fonksiyonların ilgilendiği çeşitli, problemlerin incelenmesinde güçlü bir araç olmaktadır. Bir çok pratik problemlerde periyodik fonksiyonlar bulunmaz. Bu çeşit problemlerde (Mekanik-Elektrik sistemleri v.s) etken kuvvet veya voltaj periyotsuz olabilir. Örneğin, bir kez meydana gelen ve tekrarlanmayan Plus gibi. Bu tür fonksiyonlar için Fourier serisini kullanamayız. Fakat verilen bir periyodik fonksiyonun periyodu sonsuza gittiğinde, serinin yaklaştığı limiti(şayet varsa) inceleyerek, periyodik olmayan fonksiyonların uygun bir çözümünü elde etmek için Fourier yöntemi oluşturulmuştur.

Sobolev ilk olarak 1936 da genelleştirilmiş fonksiyonları gözönüne alarak, lineer hiperbolik denklemler için Cauchy probleminin çözümlerini incelemiştir (S.L. Sobolev, 1936). 1958 yılında, L herhangi bir lineer operatör olmak üzere, Gelfand ve Shilov

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_1,...,x_n)=\delta(x_1,...,x_n)$$

şeklindeki L operatörü ile oluşmuş Laplace, ısı ve dalga denklemlerinin çözümlerini genelleştirilmiş fonksiyonlar için çalışmışlardır (Gelfand and Shilov 1958). Daha sonra Kananthai 1999 da, Gelfand ve Shilov'un tanımlamış olduğu bu operatörü

$$\Diamond^k=\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)^2\right]^k, \quad n=p+q$$

şeklinde k-kez tekrarlanan yeni bir operatör olarak yeniden tanımlamış ve diamond operatörü adını vermiştir. Daha sonra bu operatör yardımıyla oluşturulan denklemin çözümlerini araştırarak, elde ettiği çözümlerin Fourier dönüşümlerini incelemiştir (Kananthai 1997, 1999, 2000).

Bu çalışmalar gözönüne alındığında klasik diamond operatörünün daha farklı şekillerde tanımlanması mümkün müdür sorusu akla gelebilir. Bu tezde, bu soruya şöyle bir cevabın verileceğini araştırdık:

$x\in\mathbb{R}_n^+=\{x:x=(x_1,...,x_n),\ x_1>0,...,x_n>0\}\,,\ v_i>0,\ i=\overline{1,n}$ ve

$$B_{x_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{2v_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Bessel operatörü olmak üzere k-kez tekrarlanan diamond operatörünü

$$\Diamond_B^k=\left[\left(B_{x_1}+B_{x_2}+...+B_{x_p}\right)^2-\left(B_{x_{p+1}}+...+B_{x_{p+q}}\right)^2\right]^k, \quad p+q=n$$

şeklinde tanımladık ve $\Diamond_B^k$ operatörünü $k-$defa tekrarlanan Bessel diamond operatörü olarak adlandırdık. Ayrıca,

$$\Box_B^k=(B_{x_1}+B_{x_2}+...+B_{x_p}-B_{x_{p+1}}-...-B_{x_{p+q}})^k, \quad p+q=n$$

ve

$$\Delta_B^k=(B_{x_1}+B_{x_2}+...+B_{x_p}+B_{x_{p+1}}+...+B_{x_{p+q}})^k, \quad p+q=n$$

olmak üzere

$$\Diamond_B^k = \Box_B^k \Delta_B^k$$

şeklindedir. Burada $\Box_B$ ve Δ_B operatörleri sırasıyla Bessel ultra-hiperbolik operatörü ve Laplace Bessel operatörü olarak adlandırılmıştır.

İlk olarak, $\Box_B$ ve Δ_B operatörleri ile oluşmuş denklemlerin çözümlerini elde ettik. Elde ettiğimiz bu çözümler ve B-konvolüsyonların özellikleri yardımıyla,

$$\Diamond_B^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} \Diamond_B^r \delta, \quad \Diamond_B^0 \delta = \delta$$

şeklindeki denklemin elementer çözümünü genelleştirilmiş fonksiyonlar için araştırdık. Daha sonra bu son denklem için elde ettiğimiz elementer çözümlerinin Fourier Bessel dönüşümlerini ve bu çözümleri yeni bir çekirdek olarak tanımlayarak bu çekirdek ile oluşmuş operatörün özelliklerini araştırdık.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1(Kompakt Destek). Bir f fonksiyonunun kompakt desteği(supportu)

$$supp f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır(Schwartz 1996).

Tanım 2.2. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.3. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme *operatör* denir.

Tanım 2.4 (Test fonksiyonu). $\mathbb{R}^n$ üzerinde sınırlı bir bölge dışında sıfır olan sonsuz diferensiyellenebilir $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ fonksiyonuna test fonksiyonu denir (Gelfand and Shilov 1958).

Test fonksiyonlar uzayı H olmak üzere,

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-r^2}} & , \ r < a \\ 0 & , \ r \geq a \end{cases} , \ r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

fonksiyonu kompakt desteğe sahip ve sonsuz diferensiyellenebilir olduğundan bir test fonksiyonudur.

Tanım 2.5. Her $\varphi \in H$ için $< f, \varphi >$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa f ye H üzerinde sürekli lineer fonksiyonel denir.

a) $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ ve α_1, α_2 reel sayıları için

$$< f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 > = \alpha_1 < f, \varphi_1 > + \alpha_2 < f, \varphi_2 >$$

dır.

b) $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_v, ...$ H da sıfıra yakınsıyor ise $< f, \varphi_1 >, < f, \varphi_2 >, ...,$ $< f, \varphi_v >, ...$ sıfıra yakınsar (Gelfand and Shilov 1958).

Tanım 2.6 (Genelleştirilmiş fonksiyon). H üzerinde sürekli lineer fonksiyonellere genelleştirilmiş fonksiyon veya Dağılım denir (Gelfand and Shilov 1958).

Örneğin; $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & |x| < \dfrac{1}{n} \\ \\ 0 & |x| \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

şeklinde (f_n) dizisi verilmiş olsun. Burada (f_n) dizisi lokal integrallenebilir ve $-\frac{1}{n}$ ve $\frac{1}{n}$ dışında süreklidir. (f_n) dizisi sıfır dışında heryerde sıfıra noktasal yakınsak olduğundan (f_n) dizisi bir genelleştirilmiş(dağılım) fonksiyonudur. Lokal integrallenebilen her bir fonksiyon bir genelleştirilmiş(dağılım) fonksiyonudur.

Tanım 2.7. f integrallenebilen bir fonksiyon ve $\varphi \in H$ için

$$< f, \varphi > = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

şeklinde yazılabiliyorsa, f ye H üzerinde regüler genelleştirilmiş fonksiyon denir. Benzer olarak $x \in \mathbb{R}^+,\ v > 0$ ve $x^{2v}dx$ ağırlıklı Lebesgue ölçümüne göre,

$$< f, \varphi > = \int_{0}^{\infty} f(x)\varphi(x)x^{2v}dx \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabiliyorsa f ye H üzerinde regüler genelleştirilmiş fonksiyon denir. Bunun dışındaki tüm genelleştirilmiş fonksiyonlara singüler genelleştirilmiş fonksiyon denir.

Tanım 2.8 (S_+ Schwartz Uzayı). $\mathbb{R}_n^+$ üzerinde C^∞ sınıfına ait olan ve tüm türevleri keyfi polinom ile çarpıldığında sınırlı kalan fonksiyonlar uzayına Schwartz uzayı denir ve S_+ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0\}$$

olmak üzere,

$$S_+ = \left\{ f : \sup_{x \in \mathbb{R}_n^+} \left| x^\beta D^\alpha f(x) \right| < \infty, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \text{ ve } \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \right\}$$

dir. Burada $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ ve $x^{\beta} = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}...x_n^{\beta_n}$ dir (Schwartz 1966).

Tanım 2.9 (Sönümlü Dağılım). S_+ uzayının dualine sönümlü dağılım uzayı denir ve S'_+ ile gösterilir (Schwartz 1945).

Tanım 2.10. H', H nin duali olmak üzere

$$H'_+ = \{f \in H'(\mathbb{R}) : \; suppf \subset [0, \infty)\}$$

uzayına Schwartz dağılım uzayı denir (Schwartz 1945).

Tanım 2.11 (Gamma Fonksiyonu). Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralıyabiliriz.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.12.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörüne $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü denir.

Tanım 2.13. G, $\mathbb{R}^n$ nin açık ve irtibatlı alt cümlesi ve $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ da G de tanımlı n-değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0$$

denklemine Laplace denklemi veya potansiyel denklem denir. Bu denklemin çözümlerine potansiyel fonksiyonlar veya temel harmonik fonksiyonlar denir.

Tanım 2.14 (Bessel Operatörü).

$$B_r \;=\; \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2v}{r}\frac{d}{dr} \quad ,v > 0 \quad r > 0$$

şeklinde ifade edilen B_r operatörüne *Bessel operatörü* denir.

Tanım 2.15. $x_i > 0,\ i = 1, ..., n$ olmak üzere, $v > 0$ parametreli Laplace-Bessel operatörü,

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2v}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -B_r u &= \lambda^2 u \\ u(0) &= 1 \\ u\'(0) &= 0, \quad (\lambda > 0). \end{aligned}$$

Problemde görülen $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2v}{r}\frac{du}{dr} + \lambda^2 u = 0$ denklemine $u = r^m \omega$ dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= r^m \frac{d\omega}{dr} + m r^{m-1} \omega \\ \frac{d^2u}{dr^2} &= r^m \frac{d^2\omega}{dr^2} + 2m r^{m-1} \frac{d\omega}{dr} + m(m-1) r^{m-2} \omega \end{aligned}$$

olacağından denklem,

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{2(m+v)}{r}\frac{d\omega}{dr} + \left[\frac{m(m-1) + 2vm}{r^2} + \lambda^2 \right] \omega = 0$$

şeklini alır. Eğer $m = \frac{1}{2} - v$ ve $m(m-1) + 2vm = s^2$ ise, $s = \pm \left(v - \frac{1}{2} \right)$ bulunur. Şimdi $x = \lambda r$ dönüşümünü altında $dx = \lambda dr$ olacağından,

$$\begin{aligned} \lambda^2 \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{x}\frac{d\omega}{dx} + \left[\lambda^2 - \frac{\lambda^2 s^2}{x^2} \right] \omega &= 0 \\ \frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx} + \left[1 - \frac{s^2}{x^2} \right] \omega &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

s. mertebeden Bessel denklemini elde ederiz. $x = 0$ noktası bu denklemin düzgün aykırı(düzgün tekil) noktasıdır. O halde, (2.2) denkleminin

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n}$$

şeklinde bir seri çözümünü arayabiliriz. Bu durumda

$$\frac{d\omega}{dr} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)\, a_n x^{m+n-1}$$

$$\frac{d^2\omega}{dr^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)\, a_n x^{m+n-2}$$

eşitliklerini x^2 ile çarpıp (2.2) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)\, a_n x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)\, a_n x^{m+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} s^2 a_n x^{m+n} = 0$$

bulunur. Bu sonsuz toplamları n ve x in kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$\left[m(m-1)+m-s^2\right] a_0 x^m + \left[m(m+1)+(m+1)-s^2\right] a_1 x^{m+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left[(m+n)+(m+n)(m+n-1)-s^2\right] a_n + a_{n-2}\right) x^{m+n} = 0$$

$$\left(m^2-s^2\right) a_0 x^m + \left[(m+1)^2-s^2\right] a_1 x^{m+1} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left[(m+n)^2-s^2\right] a_n + a_{n-2}\right) x^{m+n} = 0$$

elde edilir. Buradaki son eşitliğin sağlanması için katsayılarla ilgili olarak,

$$\left(m^2-s^2\right) a_0 = 0$$
$$\left[(m+1)^2-s^2\right] a_1 = 0$$

ve

$$\left[(m+n)^2-s^2\right] a_n + a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

eşitlikleri olmalıdır. $a_0 \neq 0$ olduğundan, $m_1 = +s$ ve $m_2 = -s$ bulunur. İkinci denklemin sağlanması için $a_1 = 0$ olmalıdır. $m_1 = s$ değeri üçüncü denklemde yerine yazılırsa,

$$n(n+2s)\, a_n = a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

katsayılar bağıntısı elde edilir. Buradan $a_1 = a_3 = ... = 0$ olup,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-1}{2(2+2s)} a_0 \ , \\
a_4 &= \frac{-1}{4(4+2s)} a_2 \ , \\
a_6 &= \frac{-1}{6(6+2s)} a_4 \ , \\
a_{2n} &= \frac{-1}{2n(2n+2s)} a_{2n-2}
\end{aligned}$$

dir. Bu katsayılar taraf tarafa çarpılarak,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n! (s+1)(s+2)...(s+n)} a_0 \quad (n \geq 1)$$

bulunur. O halde birinci bağımsız çözüm,

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (s+1)(s+2)...(s+n)} a_0 x^{2n+s} \\
&= a_0 x^s \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! (s+1)...(s+n)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer,

$$a_0 = \frac{1}{2^s \Gamma(s+1)}$$

şeklinde seçilirse, s. basamaktan birinci çeşit Bessel fonksiyonu olarak bilinen,

$$j_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(s+n+1)}$$

fonksiyonu bulunur. Burada,

$$\Gamma(s+1) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+1)(s+2)...(s+k)}$$

formülü kullanılmıştır. O halde $s = v - \frac{1}{2}$ alırsak bu durumda,

$$j_{v-\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^{2n} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma\left(n+v+\frac{1}{2}\right)} \tag{2.3}$$

bulunur.

Tanım 2.16 (Bessel fonksiyonu). v pozitif bir sayı olmak üzere *Bessel fonksiyonu,*

$$J_v(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(v+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-ix\cos\alpha} \sin^{2v}(\alpha) \, d\alpha$$

şeklindedir. Burada $\Gamma(v)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{v-1}dx$ dir.

Tanım 2.17 (Genelleştirilmiş Öteleme). $T^s f(t)=F(s,t)$ şeklinde tanımlanan öteleme operatörü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu operatöre *genelleştirilmiş öteleme operatörü* denir.

i. T^s operatörü lineerdir.

ii. $T^0 f(t)=f(t), \qquad f\in C(\mathbb{R})$

iii. $T_s^r T^s f(t)=T_t^s T^r f(t)\ , \qquad T_t^s f(t)=F(s,t)$

iv. Herhangi bir $f\in C$ için, $F(s,t)=T^s f(t)$ fonksiyonu (s,t) noktasında süreklidir (Levitan 1962).

Tanım 2.18. $T^y f(x)=f(x+y)$ ile gösterilen x noktasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme denir. Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Dolayısıyla $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir. Bu şekildeki adi öteleme kısmi türev operatörü ile ilişkilidir. Yani, adi öteleme operatörü

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\\ u(x,y)\big|_{y=0} &= f(x)\end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$\mathbb{R}^+$ daki genelleştirilmiş öteleme

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi d\varphi$$

şeklinde tanımlanır. Bu öteleme operatörü

$$\begin{aligned}B_x u &= B_y u\\ u(x,0) &= f(x)\\ u_y(x,0) &= 0\end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür. Bu ifade de $T_x^0 f(x)=f(x)$ olduğu aşikardır. T_x^y operatörünün aşağıdaki özellikleri vardır (Levitan 1951 ve Yıldırım 1995).

1. Lineerlik Özelliği:

$$T_x^y \{af(x) + bg(x)\} = aT_x^y f(x) + bT_x^y g(x)$$

dir.

2. Pozitiflik Özelliği: Eğer $f(x) \geq 0$ ise $T_x^y f(x) \geq 0$ dır.

3. $T_x^y(1) = 1$ dir.

4. Eğer $x \geq a$, için $f(x) \equiv 0$ ise bu durumda $|x-y| \geq a$ için $T_x^y f(x) \equiv 0$ dır.

5. T_x^y **operatörü süreklidir:** Eğer $f_n(x)$ sürekli fonksiyonlar dizisi her sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

6. T_x^y **operatörü sınırlıdır:** $f(x)$, $\mathbb{R}^+$ da sınırlı fonksiyon ise $T_x^y f(x)$ de sınırlıdır.

7. T_x^y **operatörünün yer değiştirme özelliği:**

$$T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$$

dir.

8. Değişme özelliği:

$$T_y^z T_x^y f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$$

dir.

9. Eşlenik özelliği: Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty x^{2p+1} |f(x)|\, dx < \infty$$

ve $g(x)$, tüm $x \geq 0$ için sürekli ve sınırlı fonksiyon ise,

$$\int_0^\infty T_x^y f(x)\, g(y)\, y^{2p+1} dy = \int_0^\infty f(y) . T_x^y g(x)\, y^{2p+1} dy$$

dir.

10.

$$T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$$

dir.

11.

$$\int_0^\infty T^y f(x)\, x^{2p} dx = \int_0^\infty f(x)\, x^{2p} dx$$

dir.

Tanım 2.19 (Dirac Fonksiyon). $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan δ fonksiyonuna *Dirac fonksiyonu* denir (Schwartz 1966). Burada $x^{2v}dx$ Lebesgue ölçümüne bağlı olarak,

$$\int_{\mathbb{R}^+} \delta(x) x^{2v} dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^+} \delta(x)\varphi(x) x^{2v} dx = \varphi(0)$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} T^a \delta(x)\varphi(x) x^{2v} dx = \int_{\mathbb{R}^+} \delta(x) T^a \varphi(x) x^{2v} dx = \varphi(a)$$

dır. Bu eşitlikler için δ fonksiyonunu

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & , x > \varepsilon \\ \frac{2v+1}{\varepsilon^{2v+1}} & , 0 < x < \varepsilon \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x)$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} \delta_\varepsilon(x) x^{2v} dx &= \int_0^\varepsilon \frac{2v+1}{\varepsilon^{2v+1}} x^{2v} dx \\ &= \frac{2v+1}{\varepsilon^{2v+1}} \left. \frac{x^{2v+1}}{2v+1} \right|_0^\varepsilon = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\varphi(x)$ test fonksiyonu orijininin komşuluğunda sürekli olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
<\delta_\varepsilon(x), \varphi(x)> &= \int\limits_{\mathbb{R}^+} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)x^{2v}dx \\
&= \int\limits_0^\varepsilon \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)x^{2v}dx + \int\limits_\varepsilon^\infty \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)x^{2v}dx \\
&= \tfrac{2v+1}{\varepsilon^{2v+1}} \int\limits_0^\varepsilon \varphi(x)x^{2v}dx
\end{aligned}
$$

olur. Son integrale, integral hesabın ortalama değer teoremini uygulayalım. $0 \le \xi \le 1$ olmak üzere ortalama değer teoremi gereğince,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\varepsilon \varphi(x)x^{2v}dx &= \varphi(\xi\varepsilon)\int\limits_0^\varepsilon x^{2v}dx \\
&= \tfrac{\varepsilon^{2v+1}}{2v+1}\varphi(\xi\varepsilon)
\end{aligned}
$$

dır. Böylece

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)x^{2v}dx = \varphi(\xi\varepsilon), \quad 0 \le \xi \le 1$$

olur. $\varepsilon \to 0$ için

$$\int_0^\infty \delta(x)\varphi(x)x^{2v}dx = \varphi(0)$$

elde edilir.

Benzer yöntemle

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+} T^a\delta(x)\varphi(x)x^{2v}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^+} \delta(x)T^a\varphi(x)x^{2v}dx = \varphi(a)$$

elde edilir.

Regüler ve singüler genelleştirilmiş fonksiyonlar için sırasıyla birer örnek verelim.

Örnek 2.20. $f(x) = C$ şeklinde sabit fonksiyonu ve $\varphi \in D$ için

$$<C, \varphi> = C\int \varphi(x)x^{2v}dx$$

eşitliği yazılabildiğinden, $f(x) = C$ bir regüler genelleştirilmiş fonksiyondur.

Örnek 2.21. $\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$ Dirac delta fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$< T^x\delta(x_0), \varphi(x) > \;=\; \varphi(x_0)$$

şeklinde tanımlanan $T^x\delta(x_0)$ delta fonksiyonu bir singüler fonksiyondur. Kabul edelim ki $\varphi \in D$ için

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\varphi(x)x^{2v}dx \;=\; \varphi(0) \tag{2.4}$$

olacak şekilde lokal integrallenebilen bir f fonksiyonu vardır. Bundan dolayı

$$\varphi(x,a) \;=\; \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & , \quad x < a \\ \\ 0 & , \quad x \geq a \end{cases},$$

fonksiyonu için

$$\int_{\mathbb{R}^+} f(x)\varphi(x,a)x^{2v}dx = \varphi(0,a) = e^{-1} \tag{2.5}$$

olur. Diğer yanda $\varphi(x,a)$ fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\varphi(x,a)x^{2v}dx \;&=\; \int_0^a f(x)\varphi(x,a)x^{2v}dx + \int_a^\infty f(x)\varphi(x,a)x^{2v}dx \\ &=\; \int_0^a f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}x^{2v}dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

olur. Buradan son integralinde $a \to 0$ iken (2.5) ifadesi e^{-1}, (2.6) ifadesi ise 0 yakınsayacağından (2.4) ile gösterilen integral gösteriminin her zaman yazılamıyacağını gösterir. Dolayısıyla $\delta(x)$ fonksiyonu bir singüler genelleştirilmiş fonksiyondur.

Tanım 2.22. $x \in \mathbb{R}_n^+$, $\alpha > 0$ için $f(\alpha x) = \alpha^\lambda f(x)$ ise f ye λ dereceden homogen dağılım denir. Bu tanım genelleştirilmiş fonksiyonlar anlamında

$$< f(x), \varphi(\tfrac{x}{\alpha}) > \;=\; \alpha^{\lambda+n+2|v|} < f(x), \varphi(x) >$$

eşitliğine denktir.

Teorem 2.23. Genelleştirilmiş f fonksiyounun λ. dereceden homogen olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f$$

Euler denkleminin sağlamasıdır (Gelfand and Shilov 1958).

Tanım 2.24 ($B-$Konvolüsyon). Mutlak integrallenebilen f ve g fonksiyonları için

$$(f * g)(x) = C_v \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) T_x^y g(x) (\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i}) dy$$

integraline $B-$konvolüsyonu denir.

Tanım 2.25 ($B-$Konvolüsyon Cebiri). H'_+ Schwartz dağılım uzayı olmak üzere $f, g \in H'_+$ ise $f * g \in H'_+$ dır. $B-$ konvolüsyon operatörü H'_+ uzayında birleşme ve değişme özelliğine sahip ise H'_+ ya $B-$konvolüsyon cebiri denir. Ayrıca her hangi bir f için $\delta * f = f$ dır. Benzer şekilde D herhangi bir diferensiyel operatör olmak üzere $D\delta * f = Df$ dır. Diğer yandan $B-$konvolüsyonların türevi için

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg$$

dır (Schwartz 1945).

Tanım 2.26 (Fourier Bessel dönüşümü). $j_{v_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)$ (2.3) ile verilen Bessel fonksiyonu olmak üzere, Fourier Bessel dönüşümü ve ters Fourier Bessel dönüşümü

$$\begin{aligned} (F_B f)(x) &= C_v \int_{\mathbb{R}_n^+} f(y) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i) y_i^{2v_i} \right) dy \\ \left(F_B^{-1} f\right)(x) &= (F_B f)(-x) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$C_v = \left(\prod_{i=1}^{n} 2^{v_i - \frac{1}{2}} \Gamma\left(v_i + \frac{1}{2}\right) \right)^{-1}$$

dır (Kipriyanov 1964, 1967). Fourier Bessel dönüşümü için

$$F_B\delta\left(x\right)=1 \quad \text{ve} \quad F_B(f*g)(x)=F_Bf(x).F_Bg(x)$$

eşitlikleri doğrudur. Şimdi $F_B\delta\left(x\right)=1$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim:

$\varphi(x_i), x_i\in\mathbb{R}^+$ test fonksiyonunun Fourier Bessel dönüşümünü

$$F_B[\varphi(x_i)]=\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty \varphi(x_i)j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_iy_i\right)x_i^{2v_i}dx_i=\phi(y_i)$$

ile gösterelim. Burada $C_v^*=2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)$ dir.

$f(x_i)$ mutlak integrallenebilen bir fonksiyon ve $F(y_i)$ de onun Fourier Bessel dönüşümü

$$F_B[f(x_i)]=\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(x_i)j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_iy_i\right)x_i^{2v_i}dx_i=F(y_i)$$

olsun. Her $\varphi(x_i)$ test fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
<f,\varphi> &= \int\limits_0^\infty f(x_i)\varphi(x_i)x_i^{2v_i}dx_i \\
&= C_v^*\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty F(y_i)j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_iy_i\right)y_i^{2v_i}dy_i\right]\varphi(x_i)x_i^{2v_i}dx_i \\
&= C_v^*\int\limits_0^\infty F(y_i)\left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty \varphi(x_i)j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_iy_i\right)x_i^{2v_i}dx_i\right]y_i^{2v_i}dy_i \\
&= C_v^*\int\limits_0^\infty F(y_i)\phi(y_i)y_i^{2v_i}dy_i \\
&= C_v^*<F(y_i),\phi(y_i)>
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğe Parseval eşitliği denir. Buradan da

$$<F(y_i),\phi(y_i)>=\frac{1}{C_v^*}<f,\varphi> \tag{2.7}$$

dır.

f keyfi fonksiyon ve φ test fonksiyonu olmak üzere Fourier Bessel dönüşümü için (2.7) Parseval eşitliğine denk olan

$$< F_B f, \varphi >=< f, F_B \varphi > \tag{2.8}$$

eşitliğini ele alalım. Şimdi (2.8) eşitliğinin sağ tarafından hareketle

$$\begin{aligned}
< f, F_B\left[\varphi(x_i)\right] > &= < f, \phi(y_i) > \\
&= \int_0^\infty f(y_i)\phi(y_i) y_i^{2v_i} dy_i \\
&= \int_0^\infty f(y_i)\left[\frac{1}{C_v^*}\int_0^\infty \varphi(x_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) x_i^{2v_i} dx_i\right] y_i^{2v_i} dy_i \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{1}{C_v^*}\int_0^\infty f(y_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} dy_i\right] \varphi(x_i) x_i^{2v_i} dx_i \\
&= \int_0^\infty F_B\left[f(y_i)\right] \varphi(x_i) x_i^{2v_i} dx_i \\
&= \int_0^\infty F(x_i)\varphi(x_i) x_i^{2v_i} dx_i \\
&= < F, \varphi >
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$< f, \phi(y_i) >=< F, \varphi >$$

veya

$$< f, F_B\varphi >=< F_B f, \varphi >$$

elde edilir.

F_B^{-1} ters Fourier Bessel dönüşümü için (2.7) eşitliği

$$< F_B^{-1}\left[F\right], \varphi >= C_v^* < F, F_B\varphi >$$

yazılır.

Şimdi (2.7) eşitliğinde f yerine δ yı alırsak,

$$< F_B\delta, \phi(y_i) >= \frac{1}{C_v^*} < \delta, \varphi >= \frac{1}{C_v^*}\varphi(0)$$

olur. Buradan $\varphi(0)$, $\phi(y)$ nin ters Fourier Bessel dönüşümü olduğundan,

$$\begin{aligned} < F_B\delta, \phi(y_i) > &= \tfrac{1}{C_v^*} C_v^* \int\limits_0^\infty \phi(y_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(0y_i\right) y_i^{2v_i} dy_i \\ &= \int\limits_0^\infty \phi(y_i) y_i^{2v_i} dy_i =< 1, \phi(y_i) > \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$F_B\delta = 1$$

elde edilir. Diğer yandan dağılım anlamında

$$\begin{aligned} F_B[f*g] &= < f*g,\ j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} > \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty \left(f*g\right)(y_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} dy_i \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) T^{z_i} g(y_i) z_i^{2v_i} dz_i\right] j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} dy_i \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) \left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty T^{z_i} g(y_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} dy_i\right] z_i^{2v_i} dz_i \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) \left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty g(y_i) T^{z_i}\left(j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right)\right) y_i^{2v_i} dy\right] z_i^{2v_i} dz_i \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) \left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty g(y) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i z_i\right) y_i^{2v_i} dy\right] z_i^{2v_i} dz \\ &= \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) \left[\frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty g(y_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) y_i^{2v_i} dy\right] j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i z_i\right) z_i^{2v_i} dz \\ &= F_B g(x_i) \frac{1}{C_v^*}\int\limits_0^\infty f(z_i) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i z_i\right) z_i^{2v_i} dz_i \\ &= F_B f . F_B g. \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $T_{y_i}^{z_i}\left(j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right)\right) = j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i y_i\right) j_{v_i-\frac{1}{2}}\left(x_i z_i\right)$ özelliği kullanılmıştır[Levitan 1951].

Tanım 2.27 ($B-$konvolüsyonun özellikleri). f ve g mutlak integrallenebilen iki fonksiyon olmak üzere, $B-$konvolüsyonun aşağıdaki özellikleri vardır.

i. $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ dır. Bu eşitliği şu şekilde gösterebiliriz. T_x^y operatörünün eşlenik özelliğinden

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y) T_x^y g(x) (\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i}) dy \\ &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} g(y) T_x^y f(x) (\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i}) dy \\ &= (g * f)(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlik F_B dönüşümü yardımıyla doğrudan gösterilebilir. Şimdi bu söylediğimz tekniği aşağıdaki özellikte kullanalım.

ii. $(f * g)(x) * h(x) = f(x) * (g * h)(x)$ dır. $F_B(f * g)(x) = F_B f(x).F_B g(x)$ özelliğinden,

$$\begin{aligned}F_B\left[(f * g) * h\right](x) &= F_B(f * g)(x) F_B h(x) \\ &= F_B f(x).F_B g(x).F_B h(x) \\ &= F_B f(x).F_B(g * h)(x) \\ &= F_B\left[f * (g * h)\right](x)\end{aligned}$$

olur. Buradan da son eşitliğin her iki tarafının ters Fourier Bessel dönüşümünü uygularsak verilen eşitlik elde edilir.

iii. $< f * g,\ h >=< f,\ g * h >$ dır. T_x^y operatörünün eşlenik özelliğinden,

$$\begin{aligned}
< f * g,\ h > &= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} (f * g)(x)h(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} h(x)\left[C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} T_x^y f(x)g(y)(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy\right](\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} h(x)\left[C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y)T_x^y g(x)(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy\right](\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y)\left[C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} h(x)T_x^y g(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx\right](\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y)\left[C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} g(x)T_y^x h(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx\right](\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y)\,(g * h)\,(y)(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy \\
&= < f,\ g * h >
\end{aligned}$$

bulunur.

$f(x)$ ve $g(y)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere direkt çarpımı

$$h(z) = f(x) \times g(y)$$

şeklinde tanımlanır. Direkt çarpım özellikle $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(y)$ fonksiyonlarının çarpımı olan $\varphi(x, y)$ seklindeki basit bir fonksiyondur. Dolayısıyla genelleştirilmiş fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned}
< f(x) \times g(y),\ \varphi_1(x)\varphi_2(y) > &= < f(x),\ < g(y),\ \varphi_1(x)\varphi_2(y) >> \\
&= < f(x),\ \int g(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy > \\
&= \int\int f(x)g(y)\varphi_1(x)\varphi_2(y)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dxdy \\
&= \int f(x)\varphi_1(x)\left[\int g(y)\varphi_2(y)(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy\right](\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int f(x)\varphi_1(x) < g(y),\ \varphi_2(y) > (\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= < f(x),\ \varphi_1(x) < g(y),\ \varphi_2(y) >> \\
&= < f(x),\ \varphi_1(x) >< g(y),\ \varphi_2(y) >
\end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca direkt çarpımın

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x)$$

ve

$$f(x) \times \{g(y) \times h(z)\} = \{f(x) \times g(y)\} \times h(z)$$

şeklinde değişme ve birleşme özelliği vardır. Diğer yandan f ve g mutlak integrallenebilen iki fonksiyon ve $h(x) = f(x) * g(x)$ olmak üzere $T_x^y = T_y^x$

özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
< h(x),\ \varphi(x) > &= \int h(x)\varphi(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int (f * g)(x)\varphi(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int (g * f)(x)\varphi(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx \\
&= \int g(y)\left[\int \varphi(x)T_y^x f(y)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx\right](\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy \\
&= \int g(y)\left[\int f(x)T_y^x \varphi(y)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})dx\right](\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dy \\
&= \int\int f(x)g(y)T_y^x \varphi(y)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{2v_i})(\prod_{i=1}^{n} y_i^{2v_i})dydx \\
&= < f(x) \times g(y),\ T_x^y \varphi(x) >
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece,

$$< f(x) * g(x),\ \varphi(x) >=< f(x) \times g(y),\ T_y^x \varphi(y) >$$

vardır. Buradan da $< \delta(x),\ T_y^x \varphi(y) >=< \delta(x),\ T_x^y \varphi(x) >= \varphi(y)$ özelliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
< \delta(x) * f(x),\ \varphi(x) > &= < f(x) \times \delta(y),\ T_y^x \varphi(y) > \\
&= < f(x),\ < \delta(y),\ T_y^x \varphi(y) >> \\
&= < f(x),\ \ \varphi(x) >
\end{aligned}
$$

olur. Böylece dağılım anlamında $\delta(x) * f(x) = f(x)$ dır. Benzer şekilde D türev operatörü olmak üzere $D\delta(x) * f(x) = \delta(x) * Df(x) = Df(x)$ dır.

Teorem 2.28. Her homogen dağılım bir sönümlü dağılımdır (Donoghue, 1969).

Tanım 2.29. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty, \; 1 \leq p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı, mutlak değerinin p. kuvvetleri integrallenebilen fonksiyonların cümlesidir.

Tanım 2.30. $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_n \geq 0\}$ olmak üzere, v pozitif bir parametre ve $1 \leq p < \infty$ için, $L_{p,v}$ uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L_{p,v} = \left\{ f(x) : \|f(x)\|_{p,v} = \left(\int_{\mathbb{R}_n^+} |f(x)|^p x_n^{2v} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Tanım 2.31 (Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması). İkinci mertebeden verilen

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (2.9)$$

diferensiyel denklem (x_0, y_0) noktasında;

i. $B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) > 0$ ise verilen (2.9) denklemi (x_0, y_0) noktasında Hiperboliktir.

ii. $B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) = 0$ ise verilen (2.9) denklemi (x_0, y_0) noktasında Paraboliktir.

iii. $B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) < 0$ ise verilen (2.9) denklemi (x_0, y_0) noktasında Eliptiktir.

Eğer verilen denklemler tanımlı olduğu bölgenin tüm noktalarında sağlanılıyorsa bölgenin tamamında hiperbolik, parabolik veya eliptiktir denir.

Şimdi $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ikinci mertebeden diferensiyellenebilir ve $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& a_{11}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + ... + a_{1n}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\
& + a_{21}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + a_{22}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + a_{2n}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \qquad (2.10) \\
& \vdots \\
& + a_{n1}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} + a_{n2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} + ... + a_{nn}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f
\end{aligned}$$

sistemine karşılık gelen katsayıların simetrik matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada simetrik matrisi kanonik forma dönüştürelim. Bunun için ilk olarak,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

determinantın çözümünden λ özdeğerleri elde edilir. Buradan da

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & ... & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} & ... & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2 \partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n \partial \xi_2} & ... & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix} = f$$

matrisi elde edilir. Böylece verilen (2.10) denkleminin kanonik formu

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + ... + \lambda_n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n^2} = f$$

şeklinde olur. Bu durumda

i. λ ların hepsi pozitif veya negatif ise verilen (2.10) denklemi Eliptiktir.

ii. λ ların en az biri negatif ise verilen (2.10) denklemi hiperboliktir.

iii. λ ların yarısı negatif yarısı pozitif ise verilen (2.10) denklemi ultra-hiperboliktir.

iv. λ ların en az biri sıfır ise verilen (2.10) denklemi paraboliktir.

Örnek 2.32.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini alalım. Bu denklemin kat sayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan da

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

determinantından $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 2$ olduğundan verilen denklem paraboliktir.

3. BESSEL DİAMOND OPERATÖRÜNÜN ÇÖZÜMLERİ

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

şeklindeki klasik Laplace operatörüne bağlı denklemlerin çeşitli temel çözümleri bir çok yazar tarafından çalışılmıştır (örneğin, Gelfan ve Shilov 1958, Kananthai 1997, 1999, 2000). Laplace operatörü yardımıyla elde edilen

$$\Delta^m u = f$$

ve

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u(x_1, ..., x_n) = \delta(x_1, ..., x_n)$$

denklemlerinin çözümleri ilk olarak Gelfand ve Shilov tarafından ele alınmıştır. Buna ilaveten, Kananthai bu L operatörünü

$$\Diamond = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2}\right)^2, \ \ n = p + q$$

şeklinde tanımlayarak Gelfand ve Shilov'un çözümleri yardımıyla klasik $\Diamond$ diamond operatörüne bağlı denklemlerin çözümlerini daha detaylı olarak incelemiş ve bu çözümlerin Fourier dönüşümlerini ele almıştır. Yukarıda bahsettiğimiz yazarların çalışmaları incelendiğinde daha genel bir operatör tanımlanabilir mi ve çözümleri araştırılabilir mi sorusu akla gelebilir. Bu bölümde , işte böyle bir soruya cevap vereceğiz.

$x \in \mathbb{R}_n^+$, $v_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ ve

$$B_{x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Bessel operatörü olmak üzere, klasik diamond operatörünü

$$\Diamond_B = \left(B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p}\right)^2 - \left(B_{x_{p+1}} + ... + B_{x_{p+q}}\right)^2, \ \ p + q = n$$

şeklinde tanımlayarak bu $\Diamond_B$ operatörünü Bessel diamond operatörü olarak adlandırdık. Daha genel olarak $k-$defa tekrarlanan Bessel diamond operatörü

$$\Diamond_B^k = \left[\left(B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p}\right)^2 - \left(B_{x_{p+1}} + ... + B_{x_{p+q}}\right)^2\right]^k, \ \ p + q = n \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edildi. Burada Bessel diamond operatörü için yapılan adlandırmalar ve tanımlamalar tarafımızdan yapılmıştır.

$$\square_B^k = (B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} - B_{x_{p+1}} - ... - B_{x_{p+q}})^k, \quad p+q=n \tag{3.2}$$

ve

$$\Delta_B^k = (B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} + B_{x_{p+1}} + ... + B_{x_{p+q}})^k, \quad p+q=n \tag{3.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \Diamond_B^k &= \left[\left(\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} \right)^2 - \left(\sum_{i=p+1}^{p+q} B_{x_i} \right)^2 \right]^k \\ &= \left[\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} - \sum_{i=p+1}^{p+q} B_{x_i} \right]^k \left[\sum_{i=1}^{p} B_{x_i} + \sum_{i=p+1}^{p+q} B_{x_i} \right]^k \\ &= \square_B^k \Delta_B^k \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\square_B$ ve Δ_B operatörleri sırasıyla Bessel ultra-hiperbolik operatörü ve Laplace Bessel operatörü olarak adlandırılır.

Bu bölümde

$$\Diamond_B^k u(x) = \sum_{r=0}^{m} \Diamond_B^r \delta, \quad \Diamond_B^0 \delta = \delta \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlamış olduğumuz denklemin elementer çözümünü araştıracağız. Bunun için Fourier Bessel dönüşümünü, B-konvolüsyonunu, genelleştirilmiş fonksiyonları, genelleştirilmiş fonksiyonların ve konvolüsyonların özelliklerine bağlı olarak bunların Fourier Bessel dönüşümlerini kullanacağız.

Lemma 3.1. $0 < \alpha < n + 2|v|$ olmak üzere,

$$F_B\left(|x|^{-\alpha}\right) = 2^{\frac{n+2|v|-2\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2|v|-\alpha}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1} |x|^{\alpha-n-2|v|}$$

eşitliği dağılım anlamında geçerlidir.

İspat. Lemmanın ispatını göstermek için

$$F_B\left(e^{-r|x|^2}\right)(y) \quad = \quad (2r)^{-\left(\frac{n+2|v|}{2}\right)}e^{-\frac{|y|^2}{4r}} \quad ,r>0 \quad ,x,y\in\mathbb{R}_n^+$$

eşitliğinin var olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} F_B\left(e^{-r|x|^2}\right)(y) &= C_v\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-r(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}\left(\prod_{i=1}^{n} J_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)x_i^{2v_i}\right)dx \\ &= C_v\int\limits_0^\infty e^{-rx_1^2}J_{v_1-\frac{1}{2}}(x_1y_1)x_1^{2v_1}dx_1...\int\limits_0^\infty e^{-rx_n^2}J_{v_n-\frac{1}{2}}(x_ny_n)x_n^{2v_n}dx_n \end{aligned}$$

dır. Buradaki herbir integral için Gray(Gray 1931) tarafında ispatı verilen

$$\int\limits_0^\infty e^{-rx_i^2}J_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)x_i^{2v_i}dx_i = \frac{\Gamma(v_i+\frac{1}{2})}{2r^{v_i+\frac{1}{2}}}e^{-\dfrac{y_i^2}{4r}}$$

eşitliği ve C_v 'nün değerini gözönünde bulundurursak,

$$F_B\left(e^{-r|x|^2}\right)(y) \quad = \quad (2r)^{-\left(\frac{n+2|v|}{2}\right)}e^{-\frac{|y|^2}{4r}}$$

olduğunu görürüz. Genelleştirilmiş(Dağılım) fonksiyonlarının Fourier Bessel dönüşümleri için bilinen

$$\langle F_Bf,\varphi\rangle \quad = \quad \langle f,F_B\varphi\rangle$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-r|x|^2}F_B\varphi(x)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{2v_i}\right)dx &= \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} F_Be^{-r|x|^2}\varphi(x)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{2v_i}\right)dx \\ &= (2r)^{-\frac{n+2|v|}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} e^{-\frac{|x|^2}{4r}}\varphi(x)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{2v_i}\right)dx \end{aligned}$$

yazılır. Elde edilen bu son eşitliğin her iki yanını $r^{\frac{\alpha}{2}-1}$ ile çarparak r ye göre 0 dan ∞ a kadar integraller ve integrallerin sırasını değiştirirsek,

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} F_B\varphi\left(x\right)\left(\int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-r|x|^2}dr\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{2v_i}\right)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}_n^+}\varphi\left(x\right)\left(\int_0^\infty r^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(2r\right)^{-\left(\frac{n+2|v|}{2}\right)}e^{-\frac{|x|^2}{4r}}dr\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{2v_i}\right)dx$$

olduğunu görürüz. Diğer yandan $\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx=\Gamma\left(\beta\right)$ olduğundan,

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\int_{\mathbb{R}_n^+}|x|^{-\alpha}F_B\varphi\left(x\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{2v_i}\right)dx$$
$$=2^{\frac{n+2|v|-2\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\left|v\right|-\alpha}{2}\right)\int_{\mathbb{R}_n^+}\varphi\left(x\right)|x|^{\alpha-n-2|v|}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{2v_i}\right)dx$$

yazmak kolaydır. Bu eşitlik için, genelleştirilmiş fonksiyon tanımını kullanarak,

$$\left\langle F_B\left|x\right|^{-\alpha},\varphi\right\rangle = \left\langle 2^{\frac{n+2|v|-2\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\left|v\right|-\alpha}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-1}\left|x\right|^{\alpha-n-2|v|},\varphi\right\rangle$$

eşitliğini elde ederiz. genelleştirilmiş fonksiyon anlamında iki fonksiyonun eşit olması tanımını kullanırsak,

$$F_B\left|x\right|^{-\alpha} = 2^{\frac{n+2|v|-2\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\left|v\right|-\alpha}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}\left|x\right|^{\alpha-n-2|v|}$$

sonucuna varırız. Bu da lemmanın ispatıdır.

Lemma 3.2. $x\in\mathbb{R}_n^+$ için

$$\Delta_B E(x)=\delta \tag{3.5}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda,

$$S_2(x)=\frac{2^{\frac{n+2|v|-4}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^n 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)}\left|x\right|^{2-n-2|v|}$$

olmak üzere

$$E(x)=-S_2(x) \tag{3.6}$$

eşitliği ile verilen $E(x)$, (3.5) denkleminin bir elementer çözümüdür.

İspat: (3.5) denkleminin her iki tarafınına Fourier Bessel dönüşümünü uygularsak

$$F_B \Delta_B E = F_B \delta \tag{3.7}$$

olur. (3.7) eşitliğinin sağ tarafı $F_B\delta = 1$ dır. Diğer yandan (3.7) eşitliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} F_B \Delta_B E(x) &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} (\Delta_B E(y)) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \\ &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 E(y)}{\partial y_i^2} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \\ &+ C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2v_i}{y_i} \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki ilk integrale kısmi integrasyon metodunu uygular ve $E(y) \in S_+$ oluşunu dikkate alırsak,

$$\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y_i^2} dy = dv \quad \text{için} \quad \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} = v$$

ve

$$j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} = u \quad \text{için} \quad \left(\frac{2v_i}{y_i} J_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i) + \frac{\partial j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)}{\partial y_i} \right) y_i^{2v_i} dy_i = du$$

dönüşümleri altında

$$\begin{aligned} F_B \Delta_B E(x) &= -C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2v_i}{y_i} \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \\ &- C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \\ &+ C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2v_i}{y_i} \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$F_B \Delta_B E(x) = -C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(y)}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\prod_{i=1}^{n} J_{v_i - \frac{1}{2}} (x_i y_i)\, y_i^{2v_i} \right) dy$$

olur. Bu son integral için tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$F_B\Delta_B E(x) = C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} E(y)\left[\sum_{i=1}^{n} B_{y_i}\left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\right)\right] y_i^{2v_i}dy$$

elde edilir. Bu integral aynı zamanda

$$\begin{aligned} F_B\Delta_B E(x) &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} E(y)\left[\sum_{i=1}^{n} B_{y_i}\left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\right) y_i^{2v_i}\right] dy \\ &= C_v\left(\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} E(y)B_{y_1}\left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\, y_i^{2v_i}\right)dy + ...\right. \\ &+ \left.\int\limits_{\mathbb{R}_n^+} E(y)B_{y_n}\left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\, y_i^{2v_i}\right)dy\right) \end{aligned}$$

yazılır. Diğer yandan Levitan (Levitan 1962)

$$\int_0^\infty E(y)B_{y_i}j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\, y_i^{2v_i}dy_i = -x_i^2\int_0^\infty E(y)j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\, y_i^{2v_i}dy_i$$

eşitliğinin doğruluğunu göstermiştir. Bu eşitlik yardımıyla elde edilen son eşitlik,

$$\begin{aligned} F_B\Delta_B E(x) &= -(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} E(y)\left(\prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_iy_i)\, y_i^{2v_i}\right)dy \\ &= -\left|x\right|^2 F_B E(x). \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (3.7) eşitliği kısaca

$$F_B\Delta_B E(x) = -\left|x\right|^2 F_B E(x) = 1$$

olur. Bu ise,

$$F_B E(x) = -\left|x\right|^{-2}$$

dır. Lemma 3.1 ve ters Fourier-Bessel dönüşümü yardımıyla,

$$E(x) = -\frac{2^{\frac{n+2|v|-4}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)}\left|x\right|^{2-n-2|v|} \tag{3.8}$$

elde edilir. Bu da lemmanın ispatıdır.

Lemma 3.3. $x \in \mathbb{R}_n^+$ için

$$\Delta_B^k u(x) = \delta \tag{3.9}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda,

$$S_{2k}(x) = \frac{2^{\frac{n+2|v|-4k}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2|v|-2k}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i - \frac{1}{2}} \Gamma\left(v_i + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k)} |x|^{2k-n-2|v|} \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$u(x) = (-1)^k S_{2k}(x)$$

eşitliği ile verilen $u(x)$, (3.9) denkleminin bir elementer çözümüdür.

İspat. $k = 1$ için Lemma 3.2 den

$$\Delta_B u(x) = -F_B^{-1} |x|^2 F_B u(x)$$

olduğunu biliyoruz. $k = 2$ için $F_B F_B^{-1} = I$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\Delta_B^2 u(x) &= \Delta_B \left(\Delta_B u(x)\right) \\
&= \Delta_B \left(-F_B^{-1} |x|^2 F_B u(x)\right) \\
&= (-1)^2 F_B^{-1} |x|^2 F_B F_B^{-1} |x|^2 F_B u(x) \\
&= (-1)^2 F_B^{-1} |x|^4 F_B u(x)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde devam edilerek,

$$\begin{aligned}
\Delta_B^k u(x) &= \Delta_B \left(\Delta_B^{k-1} u(x)\right) \\
&= (-1) F_B^{-1} |x|^2 F_B (-1)^{k-1} F_B^{-1} |x|^{2k-2} F_B u(x) \\
&= (-1)^k F_B^{-1} |x|^{2k} F_B u(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $F_B\delta = 1$ oluşu kullanılırsa,

$$F_B u(x) = (-1)^k |x|^{-2k}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 3.1 ve ters Fourier Bessel dönüşümünden

$$u(x) = (-1)^k \frac{2^{\frac{n+2|v|-4k}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2|v|-2k}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i - \frac{1}{2}} \Gamma\left(v_i + \frac{1}{2}\right) \Gamma(k)} |x|^{2k-n-2|v|}$$

olur.

Lemma 3.4.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

ve

$$x \in \Gamma_+ \;= \left\{ x \in \mathbb{R}_n^+ :\; x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0 \text{ ve } V(x) > 0 \right\}$$

için

$$\Box_B^k u(x) = \delta \tag{3.11}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda

$$K_n(2k) = \frac{\pi^{\frac{n+2|v|-1}{2}} \Gamma\left(\frac{2+2k-n-2|v|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right) \Gamma(2k)}{\Gamma\left(\frac{2+2k-p-2|v|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+2|v|-2k}{2}\right)} \tag{3.12}$$

için

$$R_{2k}(x) = \frac{V^{\left(\frac{2k-n-2|v|}{2}\right)}}{K_n(2k)} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)^{\left(\frac{2k-n-2|v|}{2}\right)}}{K_n(2k)} \tag{3.13}$$

olmak üzere $u(x) = R_{2k}(x)$, (3.11) denkleminin bir elementer çözümüdür.

İspat. $k = 1$ için (3.11) denklemi

$$\Box_B u(x) = (B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} - B_{x_{p+1}} - ... - B_{x_{p+q}}) u(x) = \delta$$

olur. Bu denklem için, Lemma 3.2 ve Fourier Bessel dönüşümünü gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned} F_B \Box_B u(x) &= F_B(B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} - B_{x_{p+1}} - ... - B_{x_{p+q}}) u(x) = F_B\delta \\ &= -(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2) F_B u(x) = 1 \end{aligned}$$

yazılır. Yine bu elde edilen eşitlik için Lemma 3.1 ve ters Fourier Bessel dönüşümü kullanılırsa,

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2$$

olmak üzere,

$$u(x) = -\frac{2^{\frac{n+2|v|-4}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i+\frac{1}{2}\right)} V(x)^{\frac{2-n-2|v|}{2}}$$

yazılır. Burada Gamma fonksiyonunun özellikleri kullanılırsa,

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{2+2-p-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2|v|-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+2|v|-1}{2}}\Gamma\left(\frac{4-n-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(2k\right)} V(x)^{\frac{2-n-2|v|}{2}}$$

elde edilir.

$k=1$ için

$$\Box_B u(x) = -F_B^{-1}V(x)F_B u(x)$$

olduğunu biliyoruz.

$k=2$ için $F_B F_B^{-1} = I$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\Box_B^2 u(x) &= \Box_B\left(\Box_B u(x)\right) \\
&= \Box_B\left(-F_B^{-1}V(x)F_B u(x)\right) \\
&= (-1)^2 F_B^{-1}V(x)F_B F_B^{-1}V(x)F_B u(x) \\
&= (-1)^2 F_B^{-1}V^2(x)F_B u(x)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilerek,

$$\begin{aligned}
\Box_B^k u(x) &= \Box_B\left(\Box_B^{k-1} u(x)\right) \\
&= (-1)F_B^{-1}V(x)F_B(-1)^{k-1}F_B^{-1}V^{k-1}(x)F_B u(x) \\
&= (-1)^k F_B^{-1}V^k(x)F_B u(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $F_B\delta = 1$ oluşu kullanılırsa,

$$\delta = (-1)^k F_B^{-1} V^k(x) F_B u(x)$$

$$1 = (-1)^k V^k(x) F_B u(x)$$

$$(-1)^k V^{-k}(x) = F_B u(x)$$

elde edilir. Buradan da $(-1)^k V^{-k}(x) = F_B u(x)$ eşitliğinde Lemma 3.1 ve Gamma fonksiyonunun özellikleri gözönüne alındığında,

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{2+2k-p-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2|v|-2k}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+2|v|-1}{2}}\Gamma\left(\frac{2+2k-n-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(2k\right)} V(x)^{\frac{2k-n-2|v|}{2}}$$

elde edilir.

Lemma 3.5. $R_{2k}(x)$ ve $S_{2k}(x)$, $(2k - n - 2|v|)$. mertebeden homogen dağılımlardır.

İspat. $R_{2k}(x)$ ve $S_{2k}(x)$ nin $(2k-n-2|v|)$. mertebeden homogen dağılım olması için

$$\begin{aligned}(2k-n-2|v|)R_{2k}(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial R_{2k}(x)}{\partial x_i} \\ (2k-n-2|v|)S_{2k}(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial S_{2k}(x)}{\partial x_i}\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilen Euler denklemlerini sağlamaları yeterlidir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial R_{2k}(x)}{\partial x_i} &= \frac{1}{K_n(2k)} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)^{(\frac{2k-n-2|v|}{2})} \\
&= \frac{(2k-n-2|v|)}{K_n(2k)} (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)^{(\frac{2k-n-2|v|}{2}-1)} \\
&\times \ (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2) \\
&= \frac{(2k-n-2|v|)}{K_n(2k)} (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)^{(\frac{2k-n-2|v|}{2})} \\
&= (2k-n-2|v|) R_{2k}(x).
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $R_{2k}(x)$, $(2k-n-2|v|)$. mertebeden homogen dağılımdır. Benzer şekilde $S_{2k}(x)$ de $(2k-n-2|v|)$. mertebeden homogen dağılımdır.

Lemma 3.6. $R_{2k}(x)$ ve $S_{2k}(x)$ birer sönümlü dağılımdırlar.

İspat. K kompakt bir küme olmak üzere $suppR_{2k} = K \subset \bar{\Gamma}_+$ şeklinde seçelim. O halde (Donoghue 1969) den R_{2k} bir kompakt destekli(supportlu) sönümlü dağılımdır. Dolayısıyla $S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ da var ve $S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ bir sönümlü dağılımdır.

Lemma 3.7. (Sönümlü dağılımların $B-$konvolüsyonları) (3.10) ile tanımlanan $S_{2k}(x)$ ve $S_{2m}(x)$ fonksiyonları için,

$$
S_{2k}(x) * S_{2m}(x) = S_{2k+2m}(x) \tag{3.14}
$$

dır.

İspat. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 den

$$
F_B S_{2k}(x) = -|x|^{-2k} \text{ ve } F_B S_{2m}(x) = -|x|^{-2m}
$$

olduklarını biliyoruz. Böylece B-konvolüsyonu Fourier Bessel dönüşümü için

$$
F_B(f * g)(x) = F_B f(x).F_B g(x)
$$

özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_B\left(S_{2k}(x) * S_{2m}(x)\right) &= F_B S_{2k}(x) F_B S_{2m}(x) \\ &= |x|^{-2k-2m} \end{aligned}$$

yazılır. Buradan da ters Fourier Bessel dönüşümünü yardımıyla,

$$\begin{aligned} S_{2k}(x) * S_{2m}(x) &= F_B^{-1}\,|x|^{-2k-2m} \\ &= C(v,m,k,n)\,|x|^{-2k-2m-n-2|v|} \\ &= S_{2k+2m}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$C(v,m,k,n) = \frac{2^{\frac{n+2|v|-4(m+k)}{2}}\Gamma(\frac{n+2|v|-2(m+k)}{2})}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma(v_i+\frac{1}{2})}$$

şeklindedir.

$m = k = 1$ için (3.8) ve (3.14) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} E(x) * E(x) &= (-S_2(x)) * (-S_2(x)) \\ &= (-1)^2 S_{2+2}(x) \\ &= S_4(x) \end{aligned}$$

olur. Bu dönüşüm altında tümevarım metodu kullanılarak,

$$\underbrace{E(x) * E(x) * ... * E(x)}_{k-\text{kez}} = (-1)^k S_{2k}(x) \tag{3.15}$$

elde edilir.

Lemma 3.8. $x \in \mathbb{R}_n^+$ için

$$\Delta_B^k u(x) = \delta \tag{3.16}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda (3.10) eşitliği ile tanımlanan $S_{2k}(x)$ fonksiyonu için

$$u(x) = (-1)^k S_{2k}(x)$$

eşitliği ile verilen $u(x)$, (3.16) denkleminin bir elementer çözümüdür.

İspat. $\Delta_B^k u(x) = \delta$ denklemini $\delta * u(x) = u(x)$ olduğundan

$$\Delta_B^k \delta * u(x) = \delta \tag{3.17}$$

şeklinde yazabiliriz. $E(x)$ fonksiyonunu, (3.17) eşitliğinin her iki tarafına $B-$konvolüsyon olarak uygularsak,

$$\begin{aligned} E(x) * \left[\Delta_B^k \delta * u(x)\right] &= E(x) * \delta \\ (E(x) * \Delta_B^k \delta) * u(x) &= E(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$(\Delta_B E(x) * \Delta_B^{k-1} \delta) * u(x) = E(x)$$

yazılır. $\Delta_B E(x) = \delta$ olduğundan

$$(\delta * \Delta_B^{k-1} \delta) * u(x) = E(x)$$

dır. Böylece

$$(\Delta_B^{k-1} \delta) * u(x) = E(x)$$

olur. Yukardaki işlemi $E(x)$ fonksiyonunun kendisiyle $k-1$ kez $B-$konvolüsyona tabi tutulursa

$$\delta * u(x) = \underbrace{E(x) * E(x) * ... * E(x)}_{k-\text{times}}$$

yazılır. Buradan da

$$u(x) = (-1)^k S_{2k}(x)$$

olduğun görülür.

Aşağıdaki teoremlerin ispatına geçmeden önce yukarda elde ettiğimiz $R_{2k}(x)$ ve $(-1)^k S_{2k}(x)$ fonksiyonlarının $B-$konvolüsyonlarını yeniden tanımlayalım. $2k \geq n + 2\,|v|$ olması durumunda,

$$R_{2k}(x) = \frac{V^{\left(\frac{2k-n-2|v|}{2}\right)}}{K_n(2k)} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2)^{\left(\frac{2k-n-2|v|}{2}\right)}}{K_n(2k)}$$

ve

$$S_{2k}(x) = \frac{2^{\frac{n+2|v|-4k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2|v|-2k}{2}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n} 2^{v_i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(v_i + \frac{1}{2}\right)\Gamma(k)} |x|^{2k-n-2|v|}$$

şeklinde tanımlamlanan $R_{2k}(x)$ ve $(-1)^k S_{2k}(x)$ analitik fonksiyonlar olup bu fonksiyonların,

$$(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x) \tag{3.18}$$

$B-$konvolüsyonu vardır. Diğer yandan $2k < n + 2\,|v|$ olması durumunda Lemma 3.6 dan $R_{2k}(x)$ ve $(-1)^k S_{2k}(x)$ birer sönümlü dağılımlardır.
K bir kompakt küme ve $\bar{\Gamma}_+$, Γ_+ nin kapanışı olmak üzere $K \subset \bar{\Gamma}_+$ olsun. $suppR_{2k}(x) = K$ olarak seçilsin. Bu durumda $suppR_{2k}(x)$ kompakt(kapalı ve sınırlı) olur. Dolayısıyla

$$(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

$B-$konvolüsyonu var ve Lemma 3.6 dan bu konvolüsyon bir sönümlü dağılımdır.
Teorem 3.1. $x \in \mathbb{R}_n^+$ için

$$\Diamond_B^k u(x) = \delta \tag{3.19}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda

$$u(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x),$$

eşitliği ile verilen $u(x)$, (3.19) denkleminin bir tek elementer çözümüdür.
İspat. (3.19) denklemini

$$\Diamond_B^k u(x) = \Box_B^k \Delta_B^k u(x) = \delta$$

şeklinde yazabiliriz. Burada n çift (p çift ve q çift veya p tek ve q tek) için

$$\Delta_B^k u(x) = R_{2k}(x) \tag{3.20}$$

olduğundan, $R_{2k}(x)$ fonksiyonu $\Box_B^k$ operatörünün bir tek elementer çözümüdür. Böylece (3.20) denklemi $B-$konvolüsyon metodu ile

$$\Delta_B^k \delta * u(x) = R_{2k}(x)$$

şeklinde yazılır. Bu son eşitliğinin her iki tarafını $(-1)^k S_{2k}(x)$ fonksiyonu ile $B-$konvolüsyona tabi tutarsak,

$$(-1)^k S_{2k}(x) * \left(\Delta_B^k \delta * u(x)\right) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

olur. Buradan da

$$\left((-1)^k S_{2k}(x) * \Delta_B^k \delta\right) * u(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

veya

$$\Delta_B^k \left((-1)^k S_{2k}(x)\right) * u(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

olur. Lemma 3.8 den $\Delta_B^k \left((-1)^k S_{2k}(x)\right) = \delta$ olduğundan

$$u(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2. $0 < r < k$ için

$$\Diamond_B^r \left((-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right) = (-1)^{k-r} S_{2k-2r}(x) * R_{2k-2r}(x)$$

ve $k \leq m$ için

$$\Diamond_B^m \left((-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right) = \Diamond_B^{m-k} \delta$$

dır.

İspat. Teorem 3.1 den

$$\Diamond_B^k \left((-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right) = \delta$$

dır. Böylece

$$\Diamond_B^{k-r}\Diamond_B^{r}\left((-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right)=\delta$$

veya

$$\Diamond_B^{k-r}\delta*\Diamond_B^{r}\left((-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right)=\delta \tag{3.21}$$

yazılır. (3.21) eşitliğinin her iki tarafına $(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)$ fonksiyonunu $B-$konvolüsyonu anlamında uygularsak,

$$\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\left[\Diamond_B^{k-r}\delta*\Diamond_B^{r}\left((-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right)\right]$$

$$=\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\delta$$

yazılır. Buradan da

$$\Diamond_B^{k-r}\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\Diamond_B^{r}\left[(-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right]$$

$$=\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\delta$$

olur. Teorem 3.1 den

$$\delta*\Diamond_B^{r}\left[(-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right]=\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]$$

dır. Böylece $0<r<k$ için

$$\Diamond_B^{r}\left[(-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right]=(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)$$

elde edilir. Diğer yandan yine Teorem 3.1 den $k\leq m$ için

$$\begin{aligned}\Diamond_B^{m}\left((-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right) &= \Diamond_B^{m-k}\Diamond_B^{k}\left[(-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)\right]\\ &= \Diamond_B^{m-k}\delta\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. n tek (p tek ve q çift) veya n çift (p tek ve q tek), c_r sabit, δ Dirac-deltası ve $\Diamond_B^0\delta=\delta$ olmak üzere

$$\Diamond_B^k u(x)=\sum_{r=0}^{m}c_r\Diamond_B^r\delta \tag{3.22}$$

lineer denklemi verilmiş olsun. O halde (3.22) denkleminin çözümleri k ve m değerleri arasındaki ilişkiye bağlı olacak şekilde aşağıda verilmiştir:

(1). $m < k$ ve $m = 0$ ise

$$u(x) = c_0(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

ile verilmiş $u(x)$, (3.22) denkleminin bir elementer çözümü olup $2k < n+2|v|$ için bir adi fonksiyondur.

(2). $0 < m < k$ ise

$$u(x) = \sum_{r=1}^{m} \left[(-1)^{k-r} S_{2k-2r}(x) * R_{2k-2r}(x)\right]$$

ile verilmiş $u(x)$, (3.22) denkleminin bir çözümü olup $2k - 2r \geq n + 2|v|$ için bir adi fonksiyon ve $2k - 2r < n + 2|v|$ için de bir sönümlü dağılımdır.

(3). $m \geq k$ ve $k \leq n + 2|v| \leq M$ ise

$$u(x) = \sum_{r=k}^{M} c_r \Diamond_B^{r-k} \delta$$

ile verilmiş $u(x)$, (3.22) denkleminin bir çözümü olup bu çözüm bir singüler dağılımdır.

İspat. **(1)** $m = 0$ için

$$\Diamond_B^k u(x) = c_0 \delta$$

dır. Teorem 3.1 den

$$u(x) = c_0(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

dır. $2k \geq n + 2|v|$ için $(-1)^k S_{2k}(x)$ ve $R_{2k}(x)$ birer dağılımdır. Ayrıca $(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ şeklindeki $B-$konvolüsyonu var ve bu konvolüsyon da bir dağılımdır.

$2k \geq n + 2|v|$ için $(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ nin bir adi fonksiyon olduğunu biliyoruz. Lemma 3.6 den $2k < n + 2|v|$ için $(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ bir sönümlü dağılımdır. Dolayısıyla $c_0(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ var ve bu da bir sönümlü dağılımdır.

(2). $0 < m < k$ için

$$\Diamond_B^k u(x) = c_1 \Diamond_B \delta + c_2 \Diamond_B^2 \delta + ... + c_m \Diamond_B^m \delta \tag{3.23}$$

yazılır. Buradan da (3.23) eşitliğinin her iki tarafına $(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ fonksiyonunu B-konvolüsyon anlamında uygularsak,

$$\begin{aligned}
\Diamond_B^k \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] * u(x)) &= c_1 \Diamond_B \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \\
&+ c_2 \Diamond_B^2 \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \\
&\vdots \\
&+ c_m \Diamond_B^m \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den

$$\begin{aligned}
u(x) &= c_1(-1)^{k-1} S_{2k-2}(x) * R_{2k-2}(x) \\
&+ c_2(-1)^{k-2} S_{2k-4}(x) * R_{2k-4}(x) \\
&\vdots \\
&+ c_m(-1)^{k-m} S_{2k-2m}(x) * R_{2k-2m}(x) \\
&= \sum_{r=1}^{m} c_r \left[(-1)^{k-r} S_{2k-2r}(x) * R_{2k-2r}(x)\right]
\end{aligned}$$

eşitliği kolayca yazılır.

(3). $m \geq k$ ve $k \leq m \leq M$ için

$$\Diamond_B^k u(x) = c_k \Diamond_B^k \delta + c_{k+1} \Diamond_B^{k+1} \delta + ... + c_M \Diamond_B^M \delta \tag{3.24}$$

dır. Buradan da (3.24) eşitliğinin her iki tarafına $(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ fonksiyonunu B-konvolüsyon anlamında uygularsak,

$$\begin{aligned}
\Diamond_B^k \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] * u(x) &= c_k \Diamond_B^k \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \\
&+ c_{k+1} \Diamond_B^{k+1} \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \\
&\vdots \\
&+ c_M \Diamond_B^M \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 den

$$\begin{aligned} u(x) &= c_k\delta + c_{k+1}\diamondsuit_B\delta + ... + c_M\diamondsuit_B^{M-k}\delta \\ &= \sum_{r=k}^{M} c_r\diamondsuit_B^{r-k}\delta \end{aligned}$$

elde edilir.

4. BESSEL DİAMOND OPERATÖRÜNÜN ÇÖZÜMLERİNİN FOURİER BESSEL DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, Bessel operatörü yardımıyla tanımladığımız Bessel diamond operatörünün ve çözümlerinin Fourier Bessel dönüşümlerini ele alacağız.

Lemma 4.1($\Diamond_B^k \delta$ nin Fourier Bessel Dönüşümü). $x \in \mathbb{R}_n^+$ için $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ olsun. Bu durumda

$$\left|F_B \Diamond_B^k \delta\right| \leq C_v \|x\|^{2k} \tag{4.1}$$

eşitsizliği vardır. Yani, $F_B \Diamond_B^k \delta$, S'_+ sönümlü dağılım uzayı üzerinde sınırlı ve süreklidir. Ayrıca ters Fourier-Bessel dönüşümü için

$$\Diamond_B^k \delta = C_v F_B^{-1}\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^k$$

dır.

İspat. $g(y) = \Box_B^k \delta(y)$ olmak üzere, Fourier Bessel dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
F_B \Diamond_B^k \delta(x) &= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \Diamond_B^k \delta(y) \left(\prod_{i=1}^n j_{v_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i}\right) dy \\
&= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \Delta_B^k \Box_B^k \delta(y) \left(\prod_{i=1}^n j_{v_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i}\right) dy \\
&= C_v \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \Delta_B^k g(y) \left(\prod_{i=1}^n j_{v_i - \frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i}\right) dy \\
&= F_B\left(\Delta_B^k g\right)(x)
\end{aligned}$$

dır. $k \in \mathbb{N}$ ve $f \in S_+$ için

$$F_B(\Delta_B^k) f = (-1)^k |x|^{2k} F_B f$$

dır (Yıldırım ve Sarıkaya 2001). Böylece

$$\begin{aligned}
F_B \Diamond_B^k \delta(x) &= C_v (-1)^k |x|^{2k} F_B g(x) \\
&= C_v (-1)^k \left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^k F_B \Box_B^k \delta(x)
\end{aligned}$$

yazılır. Buraya kadar yapılanlara benzer olarak,

$$F_B\Box_B^k\delta(x) = C_v(-1)^k\left(x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2\right)^k F_B\delta(x)$$

elde edilir. $F_B\delta(x) = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} F_B\Diamond_B^k\delta(x) &= C_v(-1)^{2k}\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^k\left(x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2\right)^k \\ &= C_v\left[\left(x_1^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^k \end{aligned} \tag{4.2}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} \left|F_B\Diamond_B^k\delta\right| &= C_v\left(\left|x_1^2 + ... + x_n^2\right|\left|x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2\right|\right)^k \\ &\leq C_v\left(\left|x_1^2 + ... + x_n^2\right|\right)^{2k} \\ &= C_v\left\|x\right\|^{4k} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, $F_B\Diamond_B^k\delta$, $S_+^{'}$ üzerinde sınırlı ve süreklidir.

(4.2) eşitliğine ters Fourier Bessel dönüşümünü uygularsak,

$$\Diamond_B^k\delta = C_v F_B^{-1}\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^k$$

elde edilir.

Teorem 4.1($(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ nin Fourier Bessel Dönüşümü). $x \in \mathbb{R}_n^+$ olmak üzere

$$F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \leq C_v M$$

dır. Burada M pozitif reel bir sabittir. Yani, F_B, $S_+^{'}$ sönümlü dağılım uzayı üzerinde sınırlı ve süreklidir.

İspat. Lemma 3.8 den

$$\Diamond_B^k\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] = \delta$$

veya

$$(\Diamond_B^k\delta) * \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] = \delta \tag{4.3}$$

yazılır. (4.3) eşitliğinin her iki tarafının Fourier Bessel dönüşümünü alırsak,

$$F_B\left[(\Diamond_B^k\delta) * \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right]\right] = F_B\delta(x)$$

$$C_v < (\Diamond_B^k\delta) * \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right], \prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i} >= 1$$

elde ederiz. Buradan da $B-$konvolüsyonun özelliklerinden

$$C_v < (\Diamond_B^k\delta), < \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right], \prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(z_i y_i)\, y_i^{2v_i} \prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i} >>= 1$$

$$C_v < \left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right], \prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(z_i y_i)\, y_i^{2v_i} >< (\Diamond_B^k\delta), \prod_{i=1}^{n} j_{v_i-\frac{1}{2}}(x_i y_i)\, y_i^{2v_i} >= 1$$

$$F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] \frac{1}{C_v} F_B(\Diamond_B^k\delta) = 1$$

olur. Lemma 4.1 den

$$F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right]\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^k = C_v$$

yazılır. Buradan da

$$F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] = \frac{C_v}{\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^k}$$

elde edilir. Böylece $x = (x_1, ..., x_n) \in \Gamma_+$ için

$$\left|F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right]\right| = \frac{C_v}{\left|x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right|^k \left|x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2\right|^k} \tag{4.4}$$

olur. Dolayısıyla $\left(x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2\right) > 0$ olduğundan yeterince büyük x_i ler ve yeterince büyük k için (4.4) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra gider. Böylece (4.4) pozitif bir M sayısı ile sınırlıdır. Buda F_B nin $S_+^{'}$ sönümlü dağılım uzayı uzerinde sınırlı ve sürekli oluşunu verir.

Teorem 4.2. k ve m negatif olmayan tam sayılar ve F_B, $S_+^{'}$ sönümlü dağılım uzayı uzerinde sınırlı ve sürekli olmak üzere

$$F_B\left[\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] * \left[(-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{C_v} F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] F_B\left[(-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x)\right]$$

$$= \frac{C_v}{\left(\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right)^{k+m}}$$

dır.

İspat. $S_{2k}(x)$ ve $R_{2k}(x)$ nin kompakt supporta sahip sönümlü dağılım oluşları gözönüne alınır ve Lemma 3.6 ve Lemma 3.7 kullanılırsa

$$\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] * \left[(-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x)\right]$$

$$= (-1)^{k+m}\left[S_{2k}(x) * S_{2m}(x)\right] * \left[R_{2k}(x) * R_{2m}(x)\right] \quad (4.5)$$

$$= (-1)^{k+m} S_{2(k+m)}(x) * R_{2(k+m)}(x)$$

yazılır. Buradan da (4.5) eşitliğinin her iki tarafının Fourier Bessel dönüşümünü alır ve Teorem 4.2 kullanırsak,

$$F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] * \left[(-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x)\right]$$

$$= \frac{C_v}{\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^{k+m}}$$

$$= \frac{1}{C_v} \frac{C_v}{\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^{k}}$$

$$\times \frac{C_v}{\left[\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2\right)^2 - \left(x_{p+1}^2 + ... + x_{p+q}^2\right)^2\right]^{m}}$$

$$= \frac{1}{C_v} F_B\left[(-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)\right] F_B\left[(-1)^m S_{2m}(x) * R_{2m}(x)\right]$$

elde edilir. $(-1)^{k+m}S_{2(k+m)}(x) * R_{2(k+m)}(x) \in S'_+$ ve Teorem 2.2 den F_B sınırlı ve S'_+ üzerinde süreklidir.

5. BİLEŞİK BESSEL ULTRA-HİPERBOLİK DENKLEMLERİNİN ZAYIF ÇÖZÜMÜ

$x \in \mathbb{R}_n^+$ ve

$$\Box_B^k = (B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p} - B_{x_{p+1}} - ... - B_{x_{p+q}})^k$$

olmak üzere genelleştirilmiş f fonksiyon için

$$\Box_B^k u(x) = f(x) \tag{5.1}$$

denklemini gözönüne alalım.

C_r sabiti ile birlikte (5.1) denklemini

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_B^r u(x) = f(x), \quad \Box_B^0 u(x) = u(x) \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlayalım. (5.2) denklemine bileşik Bessel ultra-hiperbolik denklem ve bu denklemin çözümlerine zayıf çözümler denir. Burada genelleştirilmiş fonksiyonlar için B-konvolüsyonların özelliklerini kullanarak (5.2) denkleminin zayıf çözümlerini elde edeceğiz.

Lemma 5.1(Sönümlü Dağılımların B-konvolüsyonları).

a) $u(x)$ herhangi bir sönümlü dağılım olmak üzere,

$$(\Box_B^k \delta) * u(x) = \Box_B^k u(x) \tag{5.3}$$

dır.

b) $R_{2k}(x)$ ve $R_{2m}(x)$, (3.13) deki gibi tanımlı fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$$

B-konvolüsyonu var ve bu konvolüsyon bir sönümlü dağılımdır.

c) $R_{2k}(x)$ ve $R_{2m}(x)$, (3.13) deki gibi tanımlı fonksiyonlar olsun. Bu durumda k ve m negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k+2m}(x)$$

dır.

d) $R_{2k}(x)$ ve $R_{2m}(x)$, (3.13) deki gibi tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer

$$R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = \delta$$

ise bu durumda H'_+, $B-$konvolüsyon cebirinde $R_{2k}(x)$, R_{2m}'nın tersidir ve

$$R_{2k}(x) = R_{2m}^{-1}(x)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $R_{2m}^{-1}(x)$ tektir.

İspat. a) İlk olarak $k = 1$ için (5.3) eşitliğinin olduğunu gösterelim.

$$\Box_B \delta(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_i^2} + \frac{2v_i}{x_i} \frac{\partial \delta}{\partial x_i} \right) - \sum_{j=p+1}^{p+q} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x_j^2} + \frac{2v_j}{x_j} \frac{\partial \delta}{\partial x_j} \right), \; p + q = n$$

ve $\varphi(x)$, S_+ Schwartz uzayında bir test fonksiyonu olsun. Bu durumda $B-$konvolüsyonun özellikleri ve $< \delta(y), T^x \varphi(y) >= \varphi(x)$ den,

$$\begin{aligned}
< \Box_B \delta * u(x), \varphi(x) > &= < u(x) * \Box_B \delta, \varphi(x) > \\
&= < u(x), < \Box_B \delta(y), T^y \varphi(x) >> \\
&= < u(x), < \delta(y), \Box_B T^y \varphi(x) >> \\
&= < u(x), < \delta(y), T^y \left(\Box_B \varphi \right)(x) >> \\
&= < u(x), \Box_B \varphi(x) > \\
&= < \Box_B u(x), \varphi(x) >
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\Box_B \delta * u(x) = \Box_B u(x)$$

yazılır. Benzer şekilde her hangi bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\Box_B^k \delta * u(x) = \Box_B^k u(x)$$

elde edilir.

b) Lemma 3.5 den R_{2k} ve R_{2m} birer sönümlü dağılımdır. $\bar{\Gamma}_+$, Γ_+ nın kapanışı ve K kompakt bir küme olmak üzere $suppR_{2k} = K \subset \bar{\Gamma}_+$ olarak seçelim. (Donoghue, 1969) dan R_{2k} kompakt destekli sönümlü dağılım olup $R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$ var ve bu konvolüsyonda bir sönümlü dağılımdır.

c)

$$\Box_B^{k+m} u(x) = \delta$$

denklemini gözönüne alalım. Lemma 3.4 den

$$u(x) = R_{2k+2m}(x)$$

yazılır. Her hangi bir negatif olmayan m tam sayısı için

$$\Box_B^{k+m} u(x) = \Box_B^k \Box_B^m u(x) = \delta$$

dır. Lemma 3.4 den

$$\Box_B^m u(x) = R_{2k}(x) \tag{5.4}$$

olur. Buradan da (5.4) eşitliğinin her iki tarafını $R_{2m}(x)$ fonksiyonu ile $B-$konvolüsyonuna tabi tutulursa,

$$R_{2m}(x) * \Box_B^m u(x) = R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$$

veya

$$\Box_B^m R_{2m}(x) * u(x) = R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.4 den $\Box_B^m R_{2m}(x) = \delta$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\delta * u(x) = R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$$

olur. Bu da,

$$u(x) = R_{2k}(x) * R_{2m}(x)$$

demektir. $u(x) = R_{2k+2m}(x)$ olduğundan

$$R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k+2m}(x)$$

elde edilir.

d) $R_{2k}(x)$ ve $R_{2m}(x)$ kompakt supportlu sönümlü dağılım olduklarından, $R_{2k}(x)$ ve $R_{2m}(x)$ H'_{+} uzayının elemanlarıdır. O halde

$$R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = \delta$$

olduğundan Zemanain(Zemanain 1965) den $R_{2k}(x) = R_{2m}^{-1}(x)$ bir tek terstir.

Lemma 5.2. $R_{2k}(x)$ ve $K_{n,v}(2k)$ sırasıyla (3.13) ve (3.12) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda

a)

$$K_{n,v}(2k+2) = 2k(2k+2-n-2\,|v|)K_{n,v}(2k)$$

dır.

b) k ve m negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\square_B^k R_{2m}(x) = R_{2m-2k}(x)$$

dır.

c) k negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$R_{-2k}(x) = \square_B^k \delta(x)$$

dır.

İspat. **a)** (3.12) den

$$\begin{aligned} K_{n,v}(2k+2) &= \frac{\pi^{\frac{n+2|v|-1}{2}}\Gamma\left(\frac{4+2k-n-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-1-2k}{2}\right)\Gamma\left(2k+2\right)}{\Gamma\left(\frac{4+2k-p-2|v|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2|v|-2k-2}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n+2|v|-1}{2}}\frac{2+2k-n-2|v|}{2}\Gamma\left(\frac{2+2k-n-2|v|}{2}\right)\frac{-2}{1+2k}\Gamma\left(\frac{1-2k}{2}\right)2k(2k+1)\Gamma\left(2k\right)}{\frac{2+2k-p-2|v|}{2}\Gamma\left(\frac{2+2k-p-2|v|}{2}\right)\frac{2}{p+2|v|-2k-2}\Gamma\left(\frac{p+2|v|-2k}{2}\right)} \\ &= 2k(2k+2-n-2\,|v|)K_{n,v}(2k) \end{aligned}$$

elde edilir.

b) Lemma 5.1 in (c) kısmı yardımıyla

$$\delta * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}$$

$$\Box_B^k R_{2k}(x) * R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}$$

$$R_{2k}(x) * \Box_B^k R_{2m}(x) = R_{2k}(x) * R_{2m-2k}$$

olur. Buradan da Fourier Bessel dönüşümü yardımıyla

$$\Box_B^k R_{2m}(x) = R_{2m-2k}$$

eşitliği yazılır.

c) $m = k$ için Lemma 5.2 nın (b) kısmı yardımıyla

$$\Box_B^k R_{2k}(x) = R_0 \quad , \quad \delta = R_0$$

yazılır. $m = 0$ için Lemma 5.2 nın (b) kısmı yardımıyla

$$\Box_B^k R_0 = R_{-2k}(x)$$

veya

$$\Box_B^k \delta = R_{-2k}(x)$$

elde edilir.

Teorem 5.1. $x \in \mathbb{R}_n^+$, f bir sönümlü dağılım, n tek ve C_r sabit olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_B^r u(x) = f(x) \tag{5.5}$$

bileşik Bessel ultra-hiperbolik denklemi verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} w(x) &= C_{m-1} + C_{m-2}\frac{V}{2(4-n-2|v|)} + C_{m-3}\frac{V^2}{2.4(4-n-2|v|)(6-n-2|v|)} + ... \\ &+ C_0\frac{V^{m-1}}{2.4.6....2(m-1)(4-n-2|v|)(6-n-2|v|)...(2m-n-2|v|)}, \\ & V = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q} \end{aligned} \tag{5.6}$$

ve $(C_m R_0(x) * w(x) R_2(x))^{*-1}$, $C_m R_0(x) * w(x) R_2(x)$ nin tersi olmak üzere,

$$u(x) = f(x) * R_{2m}(x) * (C_m R_0(x) * w(x) R_2(x))^{*-1} \tag{5.7}$$

şeklindeki $u(x)$ fonksiyonu (5.5) denkleminin bir tek zayıf çözümüdür.

İspat. Lemma 5.1 in (a) kısmı yardımıyla, (5.5) demklemini

$$\left(C_m \square_B^m \delta + C_{m-1} \square_B^{m-1} \delta + ... + C_1 \square_B \delta + C_0 \delta\right) * u = f(x) \tag{5.8}$$

şeklinde yazabiliriz. (5.8) denkleminin her iki tarafı $R_{2m}(x)$ fonksiyonu ile $B-$konvolüsyonu anlamında işleme tabi tutarsak,

$$\left(C_m \square_B^m R_{2m} + C_{m-1} \square_B^{m-1} R_{2m} + ... + C_1 \square_B R_{2m} + C_0 R_{2m}\right) * u = f(x) * R_{2m}$$

yazılır. Lemma 3.4 ve Lemma 5.2 nın (c) kısmı yardımıyla

$$\left(C_m \delta + C_{m-1} R_2(x) + C_{m-2} R_4(x) + ... + C_1 R_{2(m-1)}(x) + C_0 R_{2m}(x)\right) * u = f(x) * R_{2m} \tag{5.9}$$

olur. Lemma 5.2 nın (a) kısmından

$$\begin{aligned} R_4(x) &= \frac{V^{\frac{4-n-2|v|}{2}}}{K_n(4)} \\ &= R_2(x) \frac{V}{2(4-n-2|v|) K_n(2)} \end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} R_6(x) &= \frac{V^{\frac{6-n-2|v|}{2}}}{K_n(6)} \\ &= R_4(x) \frac{V}{4(6-n-2|v|)} \\ &= R_2(x) \frac{V^2}{2.4(4-n-2|v|)(6-n-2|v|)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_8(x) &= R_2(x) \frac{V^3}{2.4.6(4-n-2|v|)(6-n-2|v|)(8-n-2|v|)} \\ ... &\quad ... \quad .... \\ R_{2m}(x) &= R_2(x) \frac{V^{m-1}}{2.4.6(4-n-2|v|)(6-n-2|v|)(8-n-2|v|)....(2m-n-2|v|)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.6) daki $w(x)$ fonksiyonu elde edilir. Buradan da n nin tek olması durumunda, $w(x)$ sürekli ve sonsuz diferensiyellenebilirdir. $R_2(x)$ kompakt destekli sönümlü dağılım olduğundan, $w(x)R_2(x)$ de kompakt destekli sönümlü dağılım ve dolayısıyla

$$C_m R_0(x) * w(x)R_2(x)$$

konvolüsyonu vardır. Lemma 5.1(d) den $C_m R_0(x) * w(x)R_2(x)$ nın bir tek tersi var ve bu ters $(C_m R_0(x) * w(x)R_2(x))^{*-1}$ dır.
(5.9) eşitliği

$$(C_m R_0(x) * w(x)R_2(x)) * u(x) = f(x) * R_{2m}(x), \quad R_0 = \delta \tag{5.10}$$

şeklinde yazılır. Buradan da (5.10) denkleminin her iki tarafı $(C_m R_0(x) * w(x)R_2(x))^{*-1}$ ile $B-$konvolüsyona tabi tutulursa,

$$u(x) = f(x) * R_{2m} * (C_m R_0(x) * w(x)R_2(x))^{*-1}$$

elde edilir.
Bu eşitlikte $R_{2m}(x)$ bir tek, Lemma 5.1(d) den $(C_m R_0(x) * w(x)R_2(x))^{*-1}$ de bir tek ve n tek boyutlu olduğundan, $u(x)$ zayıf çözümü de bir tektir.

6. RİESZ BESSEL DİAMOND ÇEKİRDEĞİNİN B-KONVOLÜSYONU

Birinci bölümde, $\Diamond_B^k u(x) = \delta$ denkleminin çözümleri olan $u(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$ konvolüsyonunu

$$T_k(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x) \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlayalım ve $T_k(x)$ i Riesz Bessel diamond çekirdeği olarak adlandırılır. Bu bölümde, tanımlanan $T_k(x)$ çekirdeği için

$$T_k(x) * T_m(x)$$

konvolüsyonunun var olduğu ve bununla birlikte $T_k(x)$ nın tersinin T_k^{-1} olduğu elde edilecek.

Teorem 6.1. $T_k(x)$, (6.1) ile tanımlı Riesz Bessel diamond çekirdeği olsun. Bu durumda $T_k(x)$ sönümlü dağılım ve negatif olmayan r için $r < k$ olmak üzere

$$T_k(x) = T_{k-r}(x) * T_r(x)$$

dır. Bununla birlikte eğer $\ell = k - r,\ n = r$ ise, $\ell + n = k$ için

$$T_{\ell+n}(x) = T_\ell(x) * T_n(x)$$

dır.

Proof. Lemma 3.5 den

$$T_k(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

bir sönümlü dağılımdır. Böylece, $\Diamond_B^k T_k(x) = \delta$ den $r < k$ için

$$\Diamond_B^r \Diamond_B^{k-r} T_k(x) = \delta$$

yazılır. Teorem 3.1 den

$$\Diamond_B^{k-r} T_k(x) = (-1)^r S_{2r}(x) * R_{2r}(x) \tag{6.2}$$

yazılır. (6.2) eşitliğinin her iki tarafı $(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)$ ile $B-$konvolüsyona tabi tutulursa,

$$\begin{aligned} &\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\Diamond_B^{k-r}T_k(x) \\ &\qquad = \left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*\left[(-1)^{r}S_{2r}(x)*R_{2r}(x)\right] \end{aligned} \tag{6.3}$$

veya

$$\begin{aligned} &\Diamond_B^{k-r}\left[(-1)^{k-r}S_{2k-2r}(x)*R_{2k-2r}(x)\right]*T_k(x) \\ &\qquad = (-1)^{k}\left[S_{2k-2r}(x)*S_{2r}(x)\right]*\left[R_{2k-2r}(x)*R_{2r}(x)\right] \end{aligned}$$

olur. $S_{2k}(x)$ ve $R_{2k}(x)$ sönümlü dağılım ve H'_+ uzayının elemanlarıdır. Lemma 3.3 ve Teorem 3.1 den

$$\begin{aligned} \delta * T_k(x) &= (-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x) \\ T_k(x) &= (-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x) \end{aligned}$$

olur. (6.3) den

$$T_k(x) = T_{k-r}(x)*T_r(x)$$

elde edilir. Şimdi, $\ell = k-r,\ n = r$ alırsa,

$$T_\ell(x)*T_n(x) = T_{\ell+n}(x) = T_k(x)$$

elde edilir.

Teorem 6.2. $T_k(x)$, (6.1) ile tanımlı Riesz Bessel diamond çekirdeği olsun. Bu durumda $T_m(x)$, H'_+ nın elemanıdır ve

$$T_m(x)*T_m^{-1} = T_m^{-1}*T_m(x) = \delta$$

olacak şekilde $T_m(x)$ nin T_m^{-1} tersi vardır.

İspat. Lemma 3.5 den

$$T_k(x) = (-1)^k S_{2k}(x)*R_{2k}(x)$$

bir sönümlü dağılımdır. Dolayısıyla $S_{2k}(x)$ ve $R_{2k}(x)$ kompakt desteklilerdir. Buradan da $S_{2k}(x)$ ve $R_{2k}(x)$ fonksiyonları H'_+ nın elemanlarıdır. Lemma 5.1 in (c) kısmı yardımıyla

$$T_m(x) * T_m^{-1} = T_m^{-1} * T_m(x) = \delta$$

olacak şekilde $T_m(x)$ nin bir tek T_m^{-1} tersi vardır.

KAYNAKLAR

Donoghue W. F. (1969), *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York.

Gelfand I. M., Shilov G. E. (1964), *Generalized Function*, Academic Press, New York.

Gray A, Mathews G. B. (1931), *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*, Mac. and Co. Lim. St., Londan.

Kananthai A. (1997), *On the distribution related to the ultra-hyperbolic equations*, Jour. of Computation. and Applied Math., 84, 101-106.

Kananthai A. (1997), *On the solution of the n-Dimensional Diamond Operator*, Applied Math. and Computation 88: 27-37.

Kananthai A. (1999), *On the Fourier transform of the Diamond Kernel of Marcel Riesz*, Applied Math. and Computation 101:151-158.

Kananthai A. (2000), *On the convolutions of the diamond kernel of Marcel Riesz*, Applied Math. and Computation 114: 95-101.

Kipriyanov I. A. (1964), Doklady Academyy Nauk of the USSR, 158, No:2, p.274-278.

Kipriyanov I. A. (1967), Tr. Math. Im. V.A. Steklova Akad. Nauk SSSR, Vol. No:89, p.130-213.

Levitan B. M. (1962), *Generalized translation operators and some of their applications*, Moskova, (Translation 1964).

Levitan B. M. (1951), *Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions*, Uspeki Mat., Nauka (N.S) 6, No: 2(42), pp.102-143 (in Russian).

Schwartz, L. (1966), *Mathematical for the physical sciences,* Hermann, Editeurs des sciences et des arts. Paris.

Schwartz, L. (1945), *Theories des distributions,* Vols. I and II Hermann, Paris.

Sobolev S. L. (1936), *Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales*, Mat. Sbornik, 1, 39-72,

Sobolev S. L. (1950), *Some applications of functional analysis to Mathematical Physics*, Leningrad State Univ. Press, Leningrad, (in Russian).

Yıldırım H. (1995), *Riesz Potentials Generated by a Generalized shift operator*, Ankara Uni. Graduate school of Natural and Applieds Sciences Department of Math.Ph.D.thesis.

Yıldırım H., Sarıkaya M. Z. (2001), *On The Generalized Riesz Type Potentials*, Jour. of Inst. of Math. and Comp. Sci. Vol 14, No.3, 217-224.

Zemanian, A. H. (1965), *Distribution and transform analysis*, McGraw-Hill, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Zeki SARIKAYA

Doğum Yeri : Bulanık

Doğum Tarihi : 03.02.1975

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Gebze Endüstri Meslek Lisesi, Torna Tesviye Bölümü, 1994

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2000

Yüksek Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2003

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

2000- Araştırma Görevlisi. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

EKLER

1. Bessel diamond ve Bessel ultra-hiperbolik operatörlerinin tanımları bu çalışmada ilk olarak ifade edilmiştir.

2. Sırasıyla üçüncü ve dördüncü bölümlerde

$$\Diamond_B^k = \left[\left(B_{x_1} + B_{x_2} + ... + B_{x_p}\right)^2 - \left(B_{x_{p+1}} + ... + B_{x_{p+q}}\right)^2\right]^k, \quad p + q = n$$

operatörü yardımıyla elde edilen denklemlerin ve bu denklemlerin Fourier Bessel dönüşümleri ile ilgili yapılan çalışmalar *"Proceedings of the Indian Academy of Sciences – Mathematical Sciences"* isimli dergide yayınlanmıştır.

3. Beşinci bölümde

$$\sum_{r=0}^{m} C_r \Box_B^r u(x) = f(x), \quad \Box_B^0 u(x) = u(x)$$

tipindeki bileşik Bessel ultra-hiperbolik denklemin zayıf çözümleri üzerine yapılan çalışma *"Applied Mathematics and Computation"* isimli dergide yayınlanmıştır.

4. Altıncı bölümde

$$T_k(x) = (-1)^k S_{2k}(x) * R_{2k}(x)$$

Riesz Bessel diamond çekirdeğinin $B-$konvolüsyonu ile ilgil yapılan çalışma yayın için gönderilmiştir.