170797

UÇ DEĞER TEOREMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Deniz UÇAR

Danışman
Doç. Dr. İsmet DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL 2005

T.C.
AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Deniz UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Danışman
Doç. Dr. İsmet DOĞAN

AFYONKARAHİSAR
2005

Deniz UÇAR'ın yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Uç Değer Teoremi" başlıklı bu çalışma, lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

02/09/2005

Jüri Üyesi : Doç Dr. İsmet DOĞAN
(Başkan)

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Yüksel TERZİ

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Yaşar Bolat

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14.09.2005 Gün ve 2005/127 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Fatih Nuray

ÖZET

Ekstremum olayların ortaya çıkma olasılıklarını tahmin etmek birçok bilim dalında temel önem taşımaktadır. Alman matematikçi Emil Julis Gumbel'ın 1950'lerde kullandığı dağılımlar istatistiğin yeni ve hızla gelişen konularıdır. İlk uygulamalar çevresel sorunlara cevap bulmak için yapılmıştır ve bunu hızlı bir şekilde finans endüstrisi takip etmiştir. Bununla birlikte internet ağı, yapısal güvenirlilik ve biyoteknik analizleri veri dağılımlarının kalın uçlu olmasından dolayı Uç Değer Teoremi uygulamalarının esas hedefleri olmuşlardır.

Doğal afetler dünyamızı tehdit etmeye devam etmektedir ve etmeye de devam edecektir. Teknoloji ve sanayideki hızlı gelişmeler doğal afetlerin verebileceği zararları da arttırmaktadır. Eski doğal afetlerle can ve mal kaybı karşılaştırıldığında, günümüzdeki doğal afetlerde daha fazla can ve mal kaybı olmaktadır. Hızlı nüfus artışı ile köyler kasabalara, kasabalar şehirlere ve şehirler de metropollere dönüşmektedir. Bu dönüşümden kaynaklanan sorunlar afet risk ölçümü yapılmadan elverişsiz yerleşim ve sanayi alanlarının kurulmasına neden olmaktadır. Bu bölgelerde olabilecek büyük bir doğal afet çok büyük miktarda can ve mal kaybının oluşmasına neden olabilecektir.

Bu çalışmada ülkemizde 1976 ile 2003 yılları arasında olmuş deprem verileri kullanılmıştır. Veriler Kandilli Rasathanesi tarafından tutulan kayıtlardan alınmıştır. Bu veriler kullanılarak Uç Değer Teorisi yardımıyla 4–7,4 arasında şiddetlere sahip depremlerin ortaya çıkma olasılıkları En Çok Olabilirlik Yöntemi, Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi ve Momentler Yöntemi ile hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Deprem, Uç Değer Teoremi, Momentler Yöntemi, En Çok Olabilirlik Yöntemi, Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi.

SUMMARY

Estimation of the occurance probabilities of extreme incidents has a vital importance in many science fields. The distributions which were used by German mathematician Emil Julis Gumbel in the 1950s, are recently and rapidly developing topics of statistics. The first applications were to answer environmental questions and quickly have followed by the finance industry. Besides, since the distribution of data of internet network, structural reliability and biotechnic analysis are heavy tailed, they have become the main targets of EVT applications.

Natural disasters have threatened the world and they will so. Moreover, the fast development of industry and technology contribute to the damage caused by natural disasters. When compared with the ones happened in the past, natural disasters happening now, cause to more damage. As a result of rapidly growing populations, villages turn into towns and towns into metropolis which leads to the establishment of residental and industrial areas without measuring the disaster risks. Any natural disaster likely to occour in such areas might cause a great deal of destruction.

In this study, the data of the earthquakes which occured in our country between the years 1976 and 2003 has been used. The data has been taken from the records kept by Kandilli Observatory. By using this data, the probabilities of earthquakes ranging between 4 and 7,4 have been calculated with Extreme Value Theory, Moments Method, Maximum Likelihood, Incompleted Means Method.

Key Words : Earthquake, Extreme Value Theory, Moments Method, Maximum Likelihood Method, Incompleted Means Method.

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$P(x)$	Herhangi Bir x Olayının Olma Olasılığı
$F(x)$	Bir x Rasgele Değişkeninin Dağılım Fonksiyonu
$f(x)$	Bir x Rasgele Değişkeninin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$E(x)$	x'in Beklenen Değeri
μ	Beklenen Değer (Ortalama)
σ	Standart Sapma
$V(x)$	Varyans
m_k	k. Mertebeden Moment
ψ	Digama Fonksiyonu
δ_E	Euler Katsayısı
$\bar{x}$	x'in Ortalaması

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	Açıklama
EVT	Extreme Value Theory
UDT	Uç Değer Teoremi
$K_Ç$	Çarpıklık Katsayısı
K_B	Basıklık Katsayısı

ŞEKİL DİZİNİ

Şekil

1. GİRİŞ

1.1 Uç Değer Teoremi

"Bir baraj yapılırken kullanılacak setin yüksekliği ne kadar olmalıdır ki su seviyesi bu noktaya yüz yılda sadece bir defa ulaşabilsin? Gelecekte olabilecek bir depremin büyüklüğü ne kadar olabilir? Olası bir stok piyasası çöküşü gelecekte ne kadar büyüklükte olabilir?"

Tahmin gerektiren birçok soruya henüz cevap bulunamamıştır. Adından da anlaşılacağı gibi ekstremum (uç) olaylar, çok nadir görülen olaylardır. Uç Değer Teoremi, nadir ortaya çıkan durumları ele alır ve kuramsal tahmine bilimsel bir alternatif sunar.

Ekonomide, teknikte ve doğada çok sayıda verilerle yapılan deneylerin değerlendirilmesinde, uygun istatistiksel yöntemler ve olasılık kuramı kullanılırsa, ancak o zaman deneylerin sonucu bilimsel bir kestirim özelliğini taşır. Bu tür deneyler ve işlemler için rasgele etkiler çok iyi belirlenmelidir. Örneğin, asma köprü yapımında rüzgârın hızı, baraj yapımında mevsimlik bir değişim gösteren nehirlerin su miktarı rastlantıya bağlı faktörlerdir ve çok iyi saptanmalıdır. Yapılacak ilk iş uç değerlerin ortaya çıkma olasılıklarını saptamak, yani bu değerlerin olasılık dağılımlarını bulmak ve güven aralığına karar vermektir. Böylece araştırma sırasında kullanılabilecek çok anlamlı değerler elde edilir.

UDT uzay mekiği Challenger'ı kurtarabilir miydi? 28 Ocak 1983 tarihindeki Challenger uzay mekiğinin patlaması, ekstremum bir olayın sonucudur. Kalkıştan önceki gece son derece düşük olan sıcaklık (önceki kalkıştan 15 F daha düşük), sıfır halkalarında hataya ve bu hata da bir felakete neden oldu. Standart Uç Değer Teorisi analizini kullanarak, o derece soğuk bir havada mekiğin kalkmaması gerektiği, aynı sıcaklıkta hiçbir ölçüm yapılmadan söylenebilirdi. (Chavez, 2004)

Depremler, seller ve borsadaki hareketler belli bir kurala bağlı olmadan gözlemlenen olağanüstü olaylardır, ama dikkatli incelemeler bu ekstremum olaylara da uygun dağılımların keşfedilebileceğini ortaya koymaktadır.

Eğer çok sayıda insanın boyunu ölçer ve uzunluklarını histograma işaretlerseniz, normal dağılımın iyi bilinen çan eğrisine benzer bir matematik kuralını keşfedersiniz. Şaşırtıcı bir şekilde gerçek hayattaki çoğu veriler normal dağılıma uymaktadır. Bununla birlikte dağılımın uçlarındaki ekstremum değerlerini aranırken, sıkça gerçek hayattaki durumlarının uç değerlerinin klasik tahmin dağılımlarından daha kalın uçlu olduğu görülür.

Alman matematikçi Emil Julis Gumbel 1950'lerde kullandığı dağılımlar istatistiğin yeni ve hızla gelişen dallarıdır. İlk uygulamalar çevresel sorunlara cevap bulmak için olmuştur ve bunu hızlı bir şekilde finans endüstrisi takip etmiştir. Bununla birlikte internet ağı, yapısal güvenirlilik ve biyoteknik analizleri veri dağılımlarının kalın uçlu olmasından dolayı uç değer teoremi uygulamalarının esas hedefleri olmuşlardır.

Cevabı istenen asıl soru " Eğer bir şeyler ters giderse ne kadar ters gidebilir?"dir. O halde problem ender görülen olağanüstü olaylara model oluşturmaktadır. UDT, ekstremum olayları açıklayacak istatistiksel modeller üzerine kurabileceğimiz doğrulanmış teorik temeller sağlar. UDT, nadir görülen olayların büyüklüğünün önceden bilinmesini sağlayan, zor problemlere en bilimsel yönden yaklaşan bir yöntemdir. (Chavez, 2004)

Afetler, insanoğlunun dünya var olduğundan beri birlikte yaşamak durumunda kaldığı doğal bir gerçekliktir. Bu afetler sonucunda milyonlarca insanın yaşamını yitirdiği, sayısız yapının yıkıldığı bilinmektedir.

Dünyadaki en etkin deprem kuşaklarının üzerinde bulunan Anadolu'nun bilinen geçmişinde bu topraklarda pek çok deprem olmuş, bunların azımsanmayacak bir kısmı da önemli can ve mal kayıplarına yol açmıştır. Deprem bölgeleri haritasına göre, yurdumuzun % 98'inin deprem bölgeleri içerisinde olduğu, nüfusumuzun % 95'inin deprem tehlikesi altında yaşadığı ve ayrıca büyük sanayi merkezlerinin % 98'i ve barajlarımızın % 93'ünün deprem bölgesinde bulunduğu bilinmektedir. Tüm ülke halkı için acı bir hatıra olan 1999 Marmara Depreminde binlerce vatandaşımız yaşamını yitirmiş, on binlercesi yaralanmış, yüz binlerce yapı yıkılmıştır.

Geçmişten edindiğimiz deneyimler bizi gelecekte de bu tür yıkıcı depremlerle karşı karşıya kalacağımız gerçeğine ulaştırmaktadır. Bu noktada yapılması gereken, bizim gibi deprem kuşağında bulunup bizdekinin aksine depremlerde en az can vé mal kaybını sağlayabilen ülkelerdekine benzer bir toplumsal bilinç geliştirebilmektir. İstenilen bilinç düzeyine ulaşmak için yöresel boyutta gösterilecek bilgilendirme ve bilinçlendirme çabaları acil eylem planlarının gerçekleştirilmesinde büyük rol oynamaktadır. (Kibici vd. 2005)

Depremlerin en önemli oluş nedenleri bu bölgede oluşan konveksiyon (bir gaz ya da sıvının ısınarak hafifleyip yükselmesi ve başka bir yerde soğuyup ağırlaşarak aşağıya inmesi) akımlarının oluşumu sonucu ortaya çıkan enerjidir. Yerkabuğunun üst kısımlarında geniş zaman aralıklarında biriken elastik enerjinin aniden boşalarak yeryüzünün sarsılması olayına deprem adı verilir. Diğer bir deyişle deprem; yerkabuğu içindeki kırılmalar nedeniyle ani olarak ortaya çıkan titreşimlerin dalgalar halinde yayılarak geçtikleri ortamları ve yer yüzeyini sarsma olayıdır. Deprem, insanın hareketsiz kabul ettiği ve güvenle ayağını bastığı toprağın da oynayacağını ve üzerinde bulunan tüm yapıların da hasar görüp can kaybına uğrayacak şekilde yıkılabileceklerini gösteren bir doğa olayıdır. (Kibici vd. 2005)

Bu çalışma ile, doğal olayların ortaya çıkma ihtimallerinin tahmin edilmesinde yoğun bir şekilde kullanılan Uç Değer Teoremi tanıtılmış ve ülkemiz için önemli bir doğal afet olan deprem verileri kullanılarak Uç Değer Teoremi yardımı ile tahminler yapılması amaçlanmıştır.

1.2 Temel Bilgiler

Bu bölümde, çalışmanın ileri kısımlarında kullanılan bazı tanımlar verilecek ve gerekli açıklamalar yapılacaktır.

1.2.1 Rasgele değişken

Değeri bir deney sonucuyla belirtilen bir değişkene rasgele değişken denir. Bir başka ifade ile, belirli değerleri belirli olasılıklar ile alan değişkendir.

1.2.2 Kesikli rasgele değişken

X bir rasgele değişken olsun. X'in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise X'e kesikli rasgele değişken denir.

Örneğin, bir zar atılması deneyi düşünülürse, örnek uzay $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ olacaktır. Bu örnek uzayda sonlu sayıda eleman vardır. Bu örnek uzay üzerinde tanımlanan X rasgele değişkeni kesikli rasgele değişkendir. Benzer şekilde, bir paranın iki kez atılması deneyini düşünürsek örnek uzay $S=\{YY,YT,TY,TT\}$ olacaktır. X rasgele değişkeni "örneklemde bulunan turaların sayısı olarak kabul edilirse X'in alabileceği değerler 0,1 ve 2'dir. O halde X sonlu sayıda değer aldığından kesikli rasgele değişkendir. (Akdeniz 1998)

1.2.3 Sürekli rasgele değişken

X bir rasgele değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X'e sürekli rasgele değişken denir.

1.2.4 Kesikli rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

X, sonlu sayıdaki $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ değerlerini alabilen kesikli rasgele değişken ve karşılık gelen olasılıklar $P(X = x_i)$, $i = 1,2,3,...,n$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşulları sağlayan $P(x)$ fonksiyonuna X'in olasılık fonksiyonu denir.

1. $P(x) \geq 0$, tüm x değerleri için **2.** $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

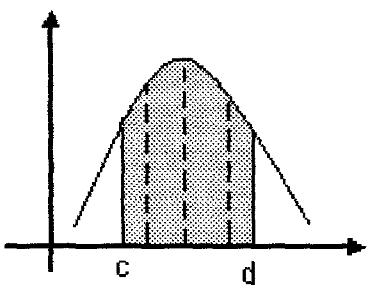
1.2.5 Kesikli rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

Bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu F(x) ile gösterilir ve X'in x'e eşit ya da daha küçük olması olasılığıdır. O halde,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} F(x_i)$$

olacaktır.

1.2.6 Sürekli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu



X, şekilde gösterilen $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir

1. $f(x) \geq 0$, $-\infty \leq x \leq \infty$

2. $f(x)$ eğrisi altında kalan ve x ekseni ile sınırlanan alan 1'e eşittir.

1.2.7 Sürekli rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

X, $f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olsun. X'in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

olarak tanımlanır.

1.2.8 Bir rasgele değişkenin beklenen değeri

X, $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1,2,3,\dots,n$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rasgele değişken olsun. X'in $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

X rasgele değişkeni sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ sonuçlarını alıyorsa beklenen değeri şu şekilde tanımlanır.

$$E(x) = x_1.f(x_1) + x_2.f(x_2) + x_3.f(x_3) + \dots + x_n.f(x_n) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.f(x_i)$$

X bir boyutlu sürekli bir rasgele değişken olsun. $f(x)$, X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X'in beklenen değeri (ortalaması)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx \,, \; -\infty < x < \infty$$

olacaktır. (Akdeniz 1998)

1.2.9 Üstel dağılım

Negatif olmayan değerler alan sürekli X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\alpha.e^{-\alpha x} & , x>0\\ 0 & , x\leq 0\end{cases}$$

olsun. Bu takdirde X, $\alpha>0$ parametresi ile üstel dağılıma sahiptir denir. Verilen $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\alpha.e^{-\alpha x}\,dx=1$$

Olduğundan $f(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur. (Akdeniz 1998)

1.2.10 Momentler

$g(X)=X^k$ fonksiyonunun beklenen değerine X rasgele değişkeninin sıfıra göre k. mertebeden momenti denir.

$$m_k=E\left(X^k\right)$$

şeklinde gösterilir.

X, x_i değerlerini P_i olasılıklarıyla alan kesikli rasgele değişken ise

$$m_k=E\left(X^k\right)=\sum_i x_i{}^k.P_i$$

ifadesine k. mertebeden momenti denir.

X, f (x) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken ise

$$m_k=E\left(X^k\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k.f(x).dx$$

ifadesine k. mertebeden momenti denir.

$E\left[(X-c)^k\right]$ beklenen değerine c noktasına göre k. mertebeden moment denir. (Hasgür 2000)

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

2.1 Uç Değer Dağılımı

n tane öğeden oluşan bir zincir sistemi var olsun. i. öğenin direnci X_i $(i=1,2,3,...,n)$, dağılım fonksiyonu $P(X_i \langle x)=F(x)$ olan bir rastlantı değişkenidir. Zincirdeki öğelerin dirençleri birbirinden bağımsız olsun. Zincir bir bütün olarak bir kuvvete karşı nasıl tepki verir? Zincirin direnci nasıl dağılmıştır?

Zincirin direnci, en zayıf öğesinin direncine eşittir ve zincir bir kuvvet karşısında direnci en zayıf öğenin bulunduğu yerden kopar. Zincirin direnci Z_n olsun. O halde,

$$Z_n = \min\left(X_1, X_2, X_3, ..., X_n\right)$$

yazılabilir. Bu durumda $Z_n \geq x$ olayının olasılığının bulunması gerekir. Burada her i $(i=1,2,3,...,n)$ değeri için $X_i \geq x$ eşitsizliği sağlandığında $Z_n \geq x$ olacaktır. X_i'lerin dağılımı aynı olduğu için,

$$P(X_i \geq x) = 1 - P(X_i < x) = 1 - F(x)$$

dir. X_i'ler, bağımsız rastlantı değişkenleri oldukları için çarpım ilkesini kullanarak,

$$P(Z_n \geq x) = P(X_1 \geq x_1,\ X_2 \geq x_2,\ X_3 \geq x_3, ...,\ X_n \geq x_n) = [1 - F(x)]^n$$

yazılabilir. Bütün zincir için dağılım fonksiyonu ise,

$$P(Z_n < x) = 1 - [1 - F(x)]^n \tag{2.1}$$

olacaktır.

Bu sonuca bir başka şekilde ulaşılmaya çalışılırsa,

$(X_1, X_2, X_3, ... X_n)$, dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan kitleden çekilmiş örneklem olsunlar. Örneklemin en küçük öğesi,

$$Z_n = X_{n,1} = \min\left(X_1, X_2, X_3, ..., X_n\right)$$

$$P(X_{n,1} \langle x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

dağılım fonksiyonuna sahiptir.

Benzer olarak en büyük öğe,

$$X_{n,n} = \max(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$$

ise,

$$P(X_{n,n} < x) = [F(x)]^n \tag{2.2}$$

dağılım fonksiyonuna sahiptir. Burada $[F(x)]^n$, $X_i < x$,$(i = 1,2,3,...,n)$ olaylarının aynı anda ortaya çıkması olasılığıdır. Bu da,

$$X_{n,n} = \max(X_1, X_2, X_3, ..., X_n) < x$$

olayı ile eş anlamlıdır.

$X_{n,1}$ ve $X_{n,2}$ değişkenlerindeki ikinci indisler $X_1, X_2, X_3, ... X_n$ rastlantı değişkenlerinin küçükten büyüğe sırasını göstermek üzere,

$$\min(X_1, X_2, ..., X_n) = X_{n,1} \le X_{n,2} \le .... \le X_{n,n} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$$

şeklinde yazılabilir.

Birkaç özel durum incelenecek olursa,

Zincir sisteminin her bir öğesinin direnci bir a değişmezinden büyük olsun. Bu durum $F(a) = 0$ şeklinde ifade edilebilir. Herhangi bir $h > 0$ için, $F(a+h) > 0$ olacaktır.

$h > 0$ için,

$$F(a+h) = (c + \varepsilon_h).h \tag{2.3}$$

yazılabilir. Burada c pozitif bir değişmez olup, $h \to 0$ iken ε_h da sıfıra yaklaşır. (2.1) eşitliğine göre tüm zincirin direnci a'dan küçük değildir, çünkü herhangi bir n için $P(X_{n,1} < a) = 0$'dır. Yine (2.1) eşitliğinden şu olasılık yazılabilir,

$$P(X_{n,1} < a + h) = 1 - [1 - F(a+h)]^n \tag{2.4}$$

Bu olasılık her h > 0 için n yeteri kadar büyük olduğunda 1'e yaklaşır. t > 0 bir sabit sayı olmak üzere $h = \frac{t}{n}$ yazılır ve bu (2.3) eşitliğinde yerine koyulursa,

$$F(a+\frac{t}{n})=(c+\varepsilon_h).\frac{t}{n} \tag{2.5}$$

elde edilir.

(2.4) ve (2.5) eşitliklerinden büyük n için,

$$P(X_{n,1}<a+\frac{t}{n})=1-\left[1-(c+\varepsilon_h).\frac{t}{n}\right]^n \cong 1-e^{-ct}$$

yaklaşımı yazılabilir. Burada $a+\frac{t}{n}=x$ ve $c.n=\lambda$ yazılırsa,

$$P(X_{n,1}<x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda.(x-a)} & ,x>a\\ 0 & ,x\leq a\end{cases}$$

elde edilir. Böylece çok uzun bir zincirin üstel dağıldığı söylenebilir. $h>0$ için daha genel bir şekilde,

$$F(a+h)=(c+\varepsilon_h).h^{\delta} \tag{2.6}$$

yazılırsa, $c>0,\delta>0$ ve $h\rightarrow 0$ için $\varepsilon_h\rightarrow 0$ ise limit dağılım,

$$P(X_{n,1}<x)=F_1(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda.(x-a)^{\delta}} & ,x>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases} \tag{2.7}$$

şeklini alır.

Bilindiği gibi bir sayı dizisinin maksimumu, işaret değiştirerek elde edilen dizinin minimumudur. O halde $X_1,X_2,X_3,...X_n$ örnekleminin maksimumu $X_{n,n}$, $(-X_1,-X_2,-X_3,...,-X_n)$ örnekleminin minimumu $-X_{n,1}$'e eşittir. Yani

$$X_{n,n}=\max(X_1,X_2,X_3,...,X_n)=\min(-X_1,-X_2,-X_3,...,-X_n)=X'_{n,1}$$

olacaktır.

İfade genel olarak yazılırsa,

$$P(X_{n,n}<x)=P(-X_{n,1}<x)=P(X_{n,1}>-x)=1-P(X_{n,1}\leq -x) \tag{2.8}$$

elde edilir.

İkinci bir özel durum olarak, X_i $(i=1,2,3,...,n)$ örnekleminin üstten bir b değişmezi ile sınırlandığı düşünülürse, $P(X<x)=F(x)$ dağılım fonksiyonu için $F(b)=1$'dir. Ayrıca $h>0$ için $\delta>0$ ve $h\to 0$ iken $\varepsilon_h\to 0$ olmak üzere,

$$P(b-h)=1-(c+\varepsilon_h).h^{\delta} \tag{2.9}$$

olsun. Bu durumda $X_i'=-X_i$ rastlantı değişkenleri $a=-b$ ile yukarıda gözlendiği şekildedir. $X_{n,1}'=\min(X_1',X_2',...,X_n')$ ifadesi büyük n değerleri için, (2.7) şeklinde bir dağılım gösterir. (2.8) eşitliği ile

$$X_{n,n}=\max(X_1,X_2,X_3,...,X_n)$$

için,

$$P\left(X_{n,n}'<x\right)=1-P\left(X_{n,1}'\leq -x\right)=F_1(x)=\begin{cases} e^{-\lambda.(x-a)^{\delta}} & ,\ x<b \\ 0 & ,\ x\geq b \end{cases}$$

fonksiyonu elde edilir.

$F_1(x)$ ve $F_n(x)$ bir dizi bağımsız rastlantı değişkenlerinin uç değer dağılım fonksiyonlarıdır. Bu dağılımlardan, sadece X_i rastlantı değişkenleri belli bir $[a,b]$ aralığında değerler aldığında ve dağılım fonksiyonları (2.6) ve (2.9) eşitliklerini sağladığında söz edilebilir.

Örneklem büyüklüklerinin kısıtlanmadığı, yani X_i ve dolayısıyla $X_{n,1}$ ve $X_{n,n}$'nin rasgele büyük değerler alabileceği durum incelenecek olursa, X_i rastlantı değişkeni üstel dağılsın.

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda.x} & ,\ x>0 \\ 0 & ,\ x\leq 0 \end{cases}$$

$\lambda\rangle 0$ parametresi x'in beklenen değerine eşittir. $a=0, c=\lambda\ ve\ \delta=1$ olmak üzere,

$$F(a+h)=(c+\varepsilon_h).h^{\delta}$$

$$F(h)=(c+\varepsilon_h).h\cong\lambda.h$$

olur ve (2.1) eşitliğine göre,

$$1-e^{-c.t}=1-e^{-cn(x-a)}=1-e^{-nx\lambda}$$

elde edilir. $X_{n,1}$ minimum değişkenin dağılım fonksiyonu $x<0$ için,

$$F(x)=1-e^{-nx\lambda}$$

olur. $X_{n,1}$'in beklenen değeri ve varyansını bulmak için,

$$P(X_{n,1}<x)=1-e^{-nx\lambda}$$

dağılım fonksiyonunun x'e göre türevi alınırsa,

$$f(x)=\lambda n e^{-\lambda nx}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Beklenen değer tanımından,

$$E(X_{n,1})=\int_0^\infty x.f(x)dx=\int_0^\infty x.\lambda.n.e^{-\lambda nx}\,dx=\lambda n\int_0^\infty x.e^{-\lambda nx}\,dx \qquad (2.10)$$

integrali kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak çözülürse,

$$x=u \Rightarrow dx=du$$

$$dv=e^{-\lambda nx}dx \Rightarrow v=-\frac{e^{-\lambda nx}}{\lambda n}$$

$$\lambda n\int_0^\infty x.e^{-\lambda nx}\,dx=\lambda n\left[\frac{x.e^{-\lambda nx}}{\lambda n}-\int_0^\infty -\frac{e^{-\lambda nx}}{\lambda n}dx\right]$$

$$=\left[x.e^{-\lambda nx}-\frac{e^{-\lambda nx}}{\lambda n}\right]=\frac{1}{\lambda n}$$

bulunur.

O halde (2.10) eşitliğinden beklenen değer,

$$E(X_{n,1})=\frac{1}{\lambda n}$$

varyans değeri de,

$$V(X_{n,1}) = \left(\frac{1}{\lambda n}\right)^2$$

olacaktır. Burada her iki istatistik de $n \to \infty$ için sıfıra yaklaşacaktır. Bu da $X_{n,1}$ en küçük değerinin $n \to \infty$ için $E(X_{n,1})$ ve $V(X_{n,1})$ değerlerinin stokastik olarak sıfıra yaklaşacağını gösterir.

X_i 'nin en büyük değerlerinin dağılımı, en küçüklerinin dağılımından farklılık gösterir. (2.2) eşitliğine göre,

$x \geq 0$ için,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n,n} < x) = (1 - e^{-\lambda x})^n \tag{2.11}$$

$x < 0$ için,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n,n} < x) = 0$$

değerlerine eşit olacaktır. Ayrıca $x > 0$ ve $n \to \infty$ için,

$$P(X_{n,n} < x) \to 0 \text{ ve } P(X_{n,n} > x) \to 1$$

$X_{n,n} = \max(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ değişkeninin dağılım fonksiyonu (2.11)'deki gibi olacaktır. Yine dağılım fonksiyonunun x'e göre türevi alınırsa,

$$f(x) = \lambda n . e^{-x\lambda} . (1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur. Beklenen değeri bulmak için,

$$E(X_{n,n}) = \int_0^\infty x . f(x) dx = \lambda n \int_0^\infty x . e^{-\lambda x} . (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx \tag{2.12}$$

integrali çözülür.

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow dy = \lambda . e^{-\lambda x} dx$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - y$$

ifadesinde her iki tarafın logaritması alınır ve

$$-\lambda x = \ln(1 - y) \Rightarrow x = -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda}$$

değeri (2.12) integralinde yerine yazılır ise,

$$\int_0^{\infty} x.f(x)\,dx = \lambda n \int_0^1 -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}.y^{n-1}.\frac{1}{\lambda}dy = -\frac{n}{\lambda}\underbrace{\int_0^1 \ln(1-y).y^{n-1}\,dy}_{\mathrm{I}} \quad .$$

elde edilir. I integralinin çözümü için,

$$u = \ln(1-y) \Rightarrow du = -\frac{1}{1-y}\,dy$$

$$dv = y^{n-1}\,dy \Rightarrow v = \frac{y^n}{n}$$

dönüşümü yapılır ve belirsiz integrali hesaplanacak olursa,

$$\int \ln(1-y).y^{n-1}\,dy = \frac{y^n}{n}\ln(1-y) + \frac{1}{n}\int \frac{1}{1-y}y^n\,dy$$

$$\frac{y^n}{y-1} = y^{n-1} + y^{n-2} + y^{n-3} + \ldots + y + 1 + \frac{1}{y-1}$$

$$\begin{aligned}
\int \ln(1-y).y^{n-1}\,dy &= \frac{y^n}{n}\ln(1-y) - \frac{1}{n}\int\left(y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)dy \\
&= \frac{y^n}{n}\ln(1-y) - \frac{1}{n}\left[\frac{y^n}{n} + \frac{y^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{y^2}{2} + y + \ln(1-y)\right] \\
&= \ln(1-y).\left[\frac{y^n}{n} - \frac{1}{n}\right] - \frac{1}{n}\left[\frac{y^n}{n} + \frac{y^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{y^2}{2} + y\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[y^n - 1\right].\ln(1-y) - \frac{1}{n}\left[\frac{y^n}{n} + \frac{y^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{y^2}{2} + y\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\lim_{y\to 1}(y^n - 1).\ln(1-y) = \lim_{y\to 1}\frac{\ln(1-y)}{\frac{1}{y^n-1}}$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{-\frac{1}{1-y}}{-\frac{n.y^{n-1}}{(y^n-1)^2}} = \lim_{y\to 1}\frac{1}{y-1}\,\frac{(y^n-1)^2}{n.y^{n-1}}$$

$y^n - 1$ daima $y-1$'e bölünür. O halde limit,

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y^n-1)(y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + y^{n-3} + \ldots)}{n.y^{n-1}.(y-1)} = 0$$

olacaktır. İntegral sınırları uygulanırsa,

$$=\frac{1}{n}\left[y^{n}-1\right].\ln(1-y)-\frac{1}{n}\left[\frac{y^{n}}{n}+\frac{y^{n-1}}{n-1}+\frac{y^{n-2}}{n-2}+\ldots+\frac{y^{2}}{2}+y\right]$$

$$=-\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right]$$

$$\int_{0}^{\infty}x.f(x)dx=-\frac{n}{\lambda}.\int_{0}^{1}\ln(1-y).y^{n-1}\,dy$$

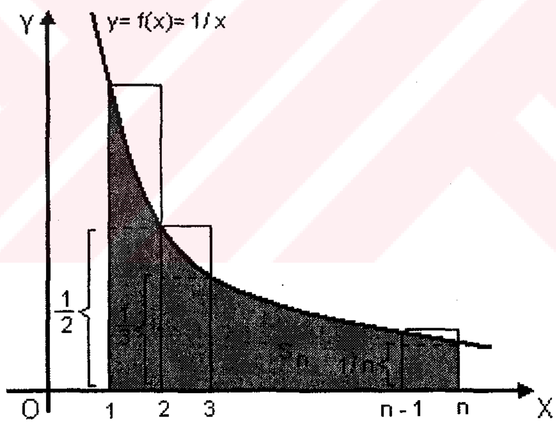
$$=-\frac{n}{\lambda}.-\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right]$$

$$\cong\frac{1}{\lambda}.\ln n$$

bulunur.

$$\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right]\cong\ln n$$

eşitliği gösterilecek olunursa,



Şekil 2.1 $y=f(x)=1/x$ fonksiyonu

Şekil 2.1'deki dikdörtgenlerin alanları,

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

Dikdörtgenlerin üstleriyle birlikte alanları,

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$$

O halde tüm alan $S_n = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$ olduğundan,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} < \ln n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}$$

ise,

$$S_n - 1 < \ln n < S_n - \frac{1}{n}$$

eşitsizliğinde her iki tarafı S_n'e bölünürse,

$$1-\frac{1}{S_n} < \frac{\ln n}{S_n} < 1-\frac{1}{n.S_n}$$

elde edilir. Burada n sonsuza giderken S_n ıraksak olduğundan,

$$n \to \infty \quad 1 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{S_n} \le 1$$

Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{S_n} = 1$$

olacaktır. O zaman $S_n \cong \ln n$ bulunur. Beklenen değer,

$$E(X_{n,n}) = \int_0^\infty x.f(x)\,dx \cong \frac{1}{\lambda}\ln n$$

$\frac{1}{\lambda} = \alpha$ olup beklenen değer,

$$E(X_{n,n}) = \int_0^\infty x.f(x)\,dx \cong \alpha \ln n$$

değerine eşit olur.

Z herhangi bir sayı olmak üzere $x = \alpha \ln n + Z$ alınırsa, (2.11) eşitliğinden,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{\mathrm{n,n}} < \alpha \ln n + Z\right) = \left(1 - e^{-\ln n - \alpha Z}\right)^n = \left(1 - \frac{e^{-\alpha Z}}{n}\right)^n$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{-x}$$

olduğundan büyük n değerleri için şu ifade yazılabilir.

$$P\left(X_{n,n}<\alpha\ln n+Z\right)=e^{-e^{-\alpha Z}}$$

Bu dağılım Uç Değer Dağılımı olarak adlandırılır. Dağılımın genel biçimi,

$$F(x)=e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}\quad,\quad -\infty<x<\infty \tag{2.13}$$

şeklindedir. (Çalpala 1989)

(2.13) dağılımı simetrik ve sınırlı değildir. Bu fonksiyon $y=\alpha(x-\beta)$ 'nın büyük değerleri için sıfır ve birden az farklılık göstermektedir. O halde y'nin dağılımı da ,

$$F(y)=P(Y\leq y)=e^{-e^{-y}} \tag{2.14}$$

şeklinde olacaktır.

2.2 Uç Değer Dağılımının Özellikleri

Uç değer dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.13) eşitliğinin x değişkenine göre türevinin alınması sonucunda,

$$f(x)=\alpha.e^{-\alpha(x-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}\quad,\quad -\infty<x<\infty$$

olacaktır. (2.13) eşitliğinin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\ln F(x)=\ln\left(e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}\right)$$

$$\ln F(x)=-e^{-\alpha(x-\beta)}$$

$$-\ln F(x)=e^{-\alpha(x-\beta)}$$

$$\ln(-\ln F(x))=\ln\left(e^{-\alpha(x-\beta)}\right)$$

$$\ln(-\ln F(x))=-\alpha(x-\beta)$$

$$\alpha x=\alpha\beta-\ln(-\ln F(x))$$

$$x = \beta - \frac{1}{\alpha}.\ln\left(-\ln F(x)\right) \qquad (2.15)$$

ifadesi bulunur. (2.13) uçdeğer dağılımının x değişkenine göre ikinci türevi alınır,

$$F'(x) = \alpha.e^{-\alpha(x-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} \qquad (2.16)$$

$$F''(x) = \alpha\left[-\alpha.e^{-\alpha(x-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} + \alpha.e^{-\alpha(x-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}.e^{-\alpha(x-\beta)}\right]$$

ve bu eşitlikte x yerine β yazılırsa,

$$F''(\beta) = \alpha\left[-\alpha.e^{-\alpha(\beta-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(\beta-\beta)}} + \alpha.e^{-\alpha(\beta-\beta)}.e^{-e^{-\alpha(\beta-\beta)}}.e^{-\alpha(\beta-\beta)}\right]$$
$$= 0$$

O halde dağılımın tepe değeri β olarak bulunur. Tepe değerinin olasılığı,

$$F(\beta) = e^{-e^{-\alpha(\beta-\beta)}} = e^{-1} = 0{,}368$$

olarak bulunur. (Gumbel 1958)

Uç değer dağılımı çok çabuk yükselen ve yavaş azalan simetrik olmayan bir dağılımdır. (Esensoy ve Kutsal 1976) Bu nedenle çarpıklık ($K_Ç$) ve basıklık (K_B) katsayılarının bilinmesi büyük önem taşımaktadır. Çarpıklık katsayısı üçüncü dereceden momenttir ve dağılımın ortalama etrafındaki simetrisinin bir ölçüsüdür.

$$K_Ç = \frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^3$$

şeklinde ifade edilir. Dağılım,

$K_Ç = 0$ için simetrik,

$K_Ç > 0$ için sola,

$K_Ç < 0$ için sağa,

doğru eğilim gösterir.

Gözlemlerden elde edilen verilerin dağılımları yalnız sapma yönünden değil, basıklık ve sivrilik yönünden de ayrılık gösterirler. Basıklık katsayıları dördüncü dereceden momenttir. (Arıkan ve Gürer, 1984)

$$K_B = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

şeklinde ifade edilir.

2.3 Yineleme Periyodu

Depremlerin değerlendirilmesinde en büyük şiddet miktarlarının yineleme periyodunun bilinmesi gerekir.

X_n: Bir yılda gözlenen en büyük değer olsun. X_n'in bir x değerinden küçük olması olasılığı $P(X_n \leq x) = F(x)$'dir. Depremlerle ilgilenen bilim adamları x'in X_n'den büyük değerleriyle ilgilenerek gelecek t yılda olacak en büyük depremin şiddetini bulmak istemektedirler.

$A = \{X_n > x\}$ şeklindeki bir A olayının olma olasılığı,

$$P(X_n > x) = 1 - F(x) = p \qquad (2.17)$$

olacaktır. t, A olayı olana kadar geçen yılların sayısı ve p de x bir değerden sonra sabit olmak koşuluyla t geometrik dağılımına sahiptir. Geometrik dağılım tanımı gereği,

$$P(T = t) = p(1-p)^{t-1} \qquad (t = 1,2,3,\ldots)$$

$$E(T) = \sum_{t=1}^{\infty} t\, P(T = t) = \sum_{t=1}^{\infty} t\, p(1-p)^{t-1}$$

$$= p \sum_{t=1}^{\infty} t(1-p)^{t-1} = p\left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{p}$$

(2.17) eşitliğinden,

$$E(T) = \frac{1}{1 - F(x)} = T \tag{2.18}$$

olur. Burada T yineleme periyodudur. Anlamı ortalama T yılda bir defa x'ten büyük X_n olacaktır. (Herbach 1986) Ortalama T yineleme periyodu süresindeki en büyük şiddet, (2.15) ve (2.18) eşitliğinden,

$$F(x) = \frac{T - 1}{T}$$

olduğundan x için,

$$x_T = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln\left[-\ln\left(\frac{T-1}{T}\right)\right]$$

olarak bulunur.

3. UÇ DEĞER DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİNİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER

Bu bölümde tahmin edici, tahmin edicilerin özellikleri ve tahmin yöntemlerinin sismolojide (deprem bilimi) uygulanabilirliği açıklanacaktır.

3.1 Tahmin Edici

Örneklemden gözlemlediğimiz değerler yardımıyla, bir kitlenin parametre uzayına ait θ parametresinin değeri olarak kabul edeceğimiz bir sayı ya da bir aralık belirlemek tahmin yapmak demektir. Gözlemler rastlantı değişkenleridir ve gözlemlerin herhangi bir fonksiyonu da bir rastlantı değişkeni olacaktır. Gözlemlerin bir fonksiyonuna istatistik adı verilmektedir. θ parametresinin tahmin edicisi olarak bir istatistik kullanıldığında, bu istatistik parametresinin gerçek değerinden oldukça farklı bir tahmin verebilir. Amaç parametreye en yakın değeri verecek istatistiği bulmaktır.

3.1.1 Tahmin edicilerin özellikleri

İyi bir tahmin edicinin tutarlılık, yansızlık, minimum varyanslılık özelliklerini taşıması gerekir. (İnal ve Günay 1978)

Kitlenin θ parametresinin tahmin edicisi olarak örneklemden saptanan istatistik T_n ile gösterilecek olunursa, T_n'in beklenen değeri θ'ya eşit ise T_n, θ için yansız bir tahmin edici olacaktır.

$$E(T_n) = \theta$$

En iyi tahmin edici, θ parametresinin tüm yansız tahmin edicilerinden en küçük varyansa sahip olanıdır.

3.2 Moment Yöntemi

(2.14) eşitliğinin y değişkenine göre türevi alındığında,

$$f(y) = e^{-y}\, e^{-e^{-y}}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmektedir. $y = \alpha(x-\beta)$ eşitliğinin beklenen değeri 1. momente eşittir. Tanım gereğince k. dereceden moment,

$$m_{y,k} = E(y^k) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k\, f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^k\, e^{-y}\, e^{-e^{-y}}\, dy$$

$e^{-y} = z$ olmak üzere, $k = 1$ değeri için beklenen değer,

$$m_{y,1} = E(y) = \int_{0}^{\infty} (-\ln z)\, z\, e^{-z} \left(-\frac{1}{z}\right) dz$$

$$m_{y,1} = E(y) = \int_{0}^{\infty} (\ln z)\, z\, e^{-z} \left(\frac{1}{z}\right) dz = -\psi(1) = \delta_E$$

olarak bulunur. Burada,

ψ : digama fonksiyonu

δ_E : Euler katsayısıdır ve yaklaşık olarak 0,5772157'dir.

y'nin varyansı ise ikinci moment gereğince,

$$m_2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

olacaktır. x'in ortalama ve varyansı ise $x = \dfrac{y}{\alpha} + \beta$ olmak üzere,

$$\mu = m_{y,1} = \beta + \frac{\delta_E}{\alpha}$$

$$\sigma^2 = m_2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{6}}$$

bulunur. Bu ifadeler düzenlendiğinde α ve β parametreleri, n büyüklüğündeki bir örneklemin ortalaması,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ve standart sapması,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$\alpha = \frac{1.2825}{\sigma}$$

$$\beta = \mu - 0{,}45\sigma$$

bulunur. (Yevjevich 1972)

3.3 En Çok Olabilirlik Yöntemi

α ve β tahmini için dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.16) eşitliğindeki gibidir. $x_1, x_2, ..., x_n$ gözlemlerinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1).f(x_2)...f(x_n)$$

şeklindedir. O halde bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$L = \alpha e^{-\alpha(x_1 - \beta)} e^{-e^{-\alpha(x_1 - \beta)}} . \alpha e^{-\alpha(x_2 - \beta)} e^{-e^{-\alpha(x_2 - \beta)}} ... \alpha e^{-\alpha(x_n - \beta)} e^{-e^{-\alpha(x_n - \beta)}}$$

$$L = \alpha^n e^{-\alpha(x_1 - \beta)} . e^{-\alpha(x_2 - \beta)} ... e^{-\alpha(x_n - \beta)} . e^{-e^{-\alpha(x_1 - \beta)}} . e^{-e^{-\alpha(x_2 - \beta)}} ... e^{-e^{-\alpha(x_n - \beta)}}$$

$$L = \alpha^n e^{-\alpha(x_1-\beta)-\alpha(x_2-\beta)-...-\alpha(x_n-\beta)} . e^{-e^{-\alpha(x_1-\beta)} - e^{-\alpha(x_2-\beta)} - ... - e^{-\alpha(x_n-\beta)}}$$

$$L = \alpha^n . e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \beta)} . e^{- \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha(x_i - \beta)}}$$

$$L = \alpha^n . e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \beta) - \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha(x_i - \beta)}}$$

En çok olabilirlik yöntemi, bu ifadenin logaritması alıp, α ve β'ya göre türevi aldıktan sonra ifadeyi sıfıra eşitlemektedir. Bu $i = 1$ ve $i = 2$ için yapılırsa,

$$L = \alpha^2 \, e^{-\alpha[(x_1-\beta)-(x_2-\beta)]} . e^{-e^{-\alpha(x_1-\beta)} - e^{-\alpha(x_2-\beta)}}$$

$$\ln L = \ln\left[\alpha^2 \, e^{-\alpha[(x_1-\beta)-(x_2-\beta)]} . e^{-e^{-\alpha(x_1-\beta)} - e^{-\alpha(x_2-\beta)}} \right]$$

$$\ln L = \ln \alpha^2 + \ln e^{-\alpha[(x_1-\beta)-(x_2-\beta)]} + \ln e^{-e^{-\alpha(x_1-\beta)} - e^{-\alpha(x_2-\beta)}}$$

$$\ln L = 2\ln\alpha - \alpha[(x_1-\beta)-(x_2-\beta)] - e^{-\alpha(x_1-\beta)} - e^{-\alpha(x_2-\beta)} \qquad (3.1)$$

eşitliğinin α 'ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\alpha} = \frac{2}{\alpha} - [(x_1-\beta)-(x_2-\beta)] + (x_1-\beta).e^{-\alpha(x_1-\beta)} + (x_2-\beta)e^{-\alpha(x_2-\beta)}$$

elde edilir. Bu eşitlik sıfıra eşitlenip α çekilecek olunursa,

$$\frac{2}{\alpha} - [(x_1-\beta)-(x_2-\beta)] + (x_1-\beta).e^{-\alpha(x_1-\beta)} + (x_2-\beta)e^{-\alpha(x_2-\beta)} = 0$$

bulunur. Buradan α 'nın bulunabilmesi için önce β 'nın değerinin bulunması gerekmektedir. Bunun için de (3.1) eşitliğinin β 'ya göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial\beta} = \alpha + \alpha - \alpha.e^{-\alpha(x_1-\beta)} - \alpha.e^{-\alpha(x_2-\beta)}$$
$$= 2\alpha - \alpha\left[e^{-\alpha(x_1-\beta)} + e^{-\alpha(x_2-\beta)}\right]$$

elde edilir. Bu eşitlik sıfıra eşitlenip β çekilecek olunursa,

$$2\alpha - \alpha[e^{-\alpha(x_1-\beta)} + e^{-\alpha(x_2-\beta)}] = 0$$

$$e^{-\alpha(x_1-\beta)} + e^{-\alpha(x_2-\beta)} = 2$$

$$e^{-\alpha x_1 + \alpha\beta} + e^{-\alpha x_2 + \alpha\beta} = 2$$

$$e^{\alpha\beta}\left[e^{-\alpha x_1} + e^{-\alpha x_2}\right] = 2$$

$$e^{\alpha\beta} = \frac{2}{e^{-\alpha x_1} + e^{-\alpha x_2}}$$

$$\ln e^{\alpha\beta} = \ln\left[\frac{2}{e^{-\alpha x_1} + e^{-\alpha x_2}}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{2}{\sum_{i=1}^{2} e^{-\alpha x_i}}\right]$$

elde edilir. Bu eşitlik genelleştirilirse,

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i}}\right] \tag{3.2}$$

bulunur.

$x_1, x_2, ..., x_n$ örneklemlerinin aritmetik ortalaması $\bar{x}$ ile gösterilecek olunursa,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - n(\bar{x} - \beta) + \frac{n.\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \beta).e^{-\alpha x_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i}}$$

bu ifade sıfıra eşitlenip düzenlenirse,

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} x_i.e^{-\alpha x_i} - \left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right).\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i} = 0$$

Bu eşitlik analiz yoluyla çözülemediğinden, Panchang tarafından Taylor açılımı kullanılmıştır.

$$F(\alpha_{j+1}) = F(\alpha_j + h_j)$$

$$F(\alpha_{j+1}) = F(\alpha_j) + h_j.F'(\alpha_j)$$

Burada $F'(\alpha_j)$, $F(\alpha)$'nın α'ya göre birinci dereceden türevidir. Bu $i = 1$ ve $i = 2$ için gösterilirse,

$$F(\alpha) = x_1.e^{-\alpha x_1} + x_2.e^{-\alpha x_2} - \left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(e^{-\alpha x_1} + e^{-\alpha x_2}\right)$$

$$F(\alpha) = x_1.e^{-\alpha x_1} + x_2.e^{-\alpha x_2} - \left[\left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(e^{-\alpha x_1}\right) + \left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(e^{-\alpha x_2}\right)\right]$$

$$F'(\alpha) = -x_1^2.e^{-\alpha x_1} - x_2^2.e^{-\alpha x_2} - \left[\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x_1} - x_1.e^{-\alpha x_1}\left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha x_2} - x_2.e^{-\alpha x_2}\left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

eşitliği genelleştirilirse,

$$F'(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2.e^{-\alpha x_i} + \left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i.e^{-\alpha x_i} - \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i}$$

α_j ve α_{j+1}, α 'ya birbirini izleyen yaklaşımlardır. Panchang'ın yöntemine göre α_1 momentler yönteminde verilen α eşitliğinden hesaplanmaktadır. $F(\alpha_1)$ ve $F'(\alpha_1)$ eşitlikleri değerlendirildiğinde,

$$h_1 = \frac{-F(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + h_1$$

bulunur. Bu yöntem, α değişmez oluncaya kadar tekrar edilir. (Kite 1977)

3.4 Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi

Yöntemde aralıklar üzerinden hesaplanan ortalamalar parametre tahmininde kullanılır. Yöntemin uygulanabilmesi için, n örneklem büyüklüğü olmak üzere $x_1, x_2, ..., x_n$ gözlemleri küçükten büyüğe sıralanması ve $\bar{x}$ 'in hesaplanması gerekmektedir. $\bar{x}$ değerinden büyük olan gözlemlerin ortalaması hesaplanır, bu ortalamaya tamamlanmamış ortalama denir ve $\bar{x}_1$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\bar{x}_1$ değerinden büyük olan gözlemlerin ortalaması hesaplanır, bu ortalamaya da tamamlanmamış ortalama denir ve $\bar{x}_2$ ile gösterilir. Bulunan iki tamamlanmamış ortalama parametrelerin hesaplanmasında kullanılır. (Houghton, 1978; Jain and Singh, 1987)

Bütün gözlemlerin ortalaması,

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

eşitliğinden bulunabilir.

$$y = F(x) \quad , \quad F^{-1}(y) = x$$

$$dy = F'(x)dx = f(x)dx$$

eşitliklerinden,

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(y) dy$$

(α, β) aralığının ortalaması ise (2.15) eşitliği kullanılarak,

$$\bar{x} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\beta - \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln F(x)) \right] dF$$

eşitliği ile bulunabilir. Tamamlanmamış ortalamalar yönteminde alt sınır, $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ tamamlanmamış ortalamalarından küçük olan gözlemlerin sayısı olan n_i'ye bağlı olarak saptanır.

$$\bar{x}_i = \frac{1}{1 - \frac{n_i}{n}} \int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \left[\beta - \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln F(x)) \right] dF$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{1 - \frac{n_i}{n}} \left[\int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \beta \, dF - \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \ln(-\ln F(x)) dF \right] \tag{3.3}$$

bu integraller ayrı ayrı hesaplanacak olursa,

$$\int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \beta \, dF = \beta \left(1 - \frac{n_i}{n} \right)$$

ve

$$\int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \ln(-\ln F(x)) dF = \int_{\frac{n_i}{n}}^{1} \ln\left(\ln F^{-1}(x)\right) dF$$

$$u = \ln F^{-1}(x) \quad , \quad F^{-1}(x) = e^{u}$$

$$F = e^{-u} \quad , \quad dF = -e^{-u} du$$

$$\int_{J = \ln\left(\frac{n}{n_i}\right)}^{0} \ln u \left(-e^{-u}\right) du = \int_{0}^{J} \ln u \; e^{-u} \, du$$

$$e^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + ...$$

eşitliğinden,

$$\int_0^J \ln u \left(1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + ... \right) du = \int_0^J \left[\ln u - u \ln u + \frac{u^2}{2!} \ln u - \frac{u^3}{3!} \ln u + ... \right] du$$

$$\underbrace{\int_0^J \ln u}_{I_1} - \underbrace{\int_0^J u \ln u}_{I_2} + \underbrace{\int_0^j \frac{u^2}{2!} \ln u}_{I_3} - \underbrace{\int_0^J \frac{u^3}{3!} \ln u}_{I_4} + ... \tag{3.4}$$

integraller ayrı ayrı hesaplanacak olunursa,

$$I_1 = \int \ln u \, du = u \ln u - \int u . \frac{1}{u} du$$

$$I_1 = u \ln u - u$$

$$I_2 = \int u \ln u \, du = \frac{u^2}{2} \ln u - \int \frac{u^2}{2} \frac{1}{u} du$$

$$I_2 = \frac{u^2}{2} \ln u - \frac{u^2}{4}$$

$$I_3 = \int u^2 \ln u \, du = \frac{u^3}{3} \ln u - \int \frac{u^3}{3} \frac{1}{u} du$$

$$I_3 = \frac{u^3}{3} \ln u - \frac{u^3}{9}$$

$$I_4 = \int u^3 \ln u \, du = \frac{u^4}{4} \ln u - \int \frac{u^4}{4} \frac{1}{u} du$$

$$I_4 = \frac{u^4}{4} \ln u - \frac{u^4}{16}$$

Bulunan integraller (3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\int_0^J \ln u\left(e^{-u}\right)du = J\ln J - J - \frac{J^2}{2}\ln J + \frac{J^2}{4} + \frac{J^3}{6}\ln J - \frac{J^3}{18} - \frac{J^4}{24}\ln J + \frac{J^4}{96} + \ldots$$

O halde (3.3) eşitliğinden,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{1-\frac{n_i}{n}}\left\{\beta\left(1-\frac{n_i}{n}\right) - \frac{1}{\alpha}\left[J\ln J - J - \frac{J^2}{2}\ln J + \frac{J^2}{4} + \frac{J^3}{6}\ln J + \ldots\right]\right\}$$

$$\bar{x}_i = \beta - \frac{1}{\alpha\left[1-\frac{n_i}{n}\right]}\left[J\ln J - J - \frac{J^2}{2}\ln J + \frac{J^2}{4} + \frac{J^3}{6}\ln J - \frac{J^3}{18} + \ldots\right] \quad (3.5)$$

$\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ tamamlanmamış ortalamaları bulunduktan sonra (3.5) eşitliğinden α ve β bulunur. (Jain ve Singh 1987)

4. UYGULAMA

Bu çalışmada Kandilli Rasathanesinden alınan 1976 ile 2003 yılları arasında gerçekleşmiş 65174 adet deprem verisi kullanılmıştır. Alınan veriler 1976-2003, 1994-2003, 1999-2003 ve sadece 2003 yılı verileri olmak üzere 4 ayrı bölüme ayrılmıştır. Uç değerlerle ilgilenildiğinden yıkıcı sayılabilen 4 şiddeti ile ülkemizde 1976 ile 2003 yılları arasında gerçekleşmiş en büyük şiddet olan 7,4 şiddeti arasındaki depremlerin tahmini için, Moment Yöntemi, En Çok Olabilirlik Yöntemi ve Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi kullanılmıştır.

En Çok Olabilirlik Yöntemine göre belirtilen zaman dilimlerine göre yapılan tahminlerin sonuçları Ek 1'de tablo şeklinde verilmiştir. Ayrıca yine En Çok Olabilirlik Yöntemi kullanılarak belirtilen zaman dilimlerinde 4 ile 7,4 şiddeti arasındaki depremlerin yineleme periyotları bulunmuş ve sonuçlar Ek 4, Ek 5, Ek 6 ve Ek 7'de tablo şeklinde verilmiştir. En Çok Olabilirlik Yönteminin uyumluluğunu gösteren tablolar ise Ek 8, Ek 9, Ek 10 ve Ek 11'de görülmektedir.

Momentler Yöntemine göre belirtilen zaman dilimlerine göre yapılan tahminlerin sonuçları Ek 2'de tablo şeklinde verilmiştir. Ayrıca yine Momentler Yöntemi kullanılarak belirtilen zaman dilimlerinde 4 ile 7,4 şiddeti arasındaki depremlerin yineleme periyotları bulunmuş ve sonuçlar Ek 4, Ek 5, Ek 6 ve Ek 7'de tablo şeklinde verilmiştir. Moment Yönteminin uyumluluğunu gösteren tablolar ise Ek 8, Ek 9, Ek 10 ve Ek 11'de görülmektedir.

Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine göre belirtilen zaman dilimlerine göre yapılan tahminlerin sonuçları Ek 3'te tablo şeklinde verilmiştir. Ayrıca yine Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi kullanılarak belirtilen zaman dilimlerinde 4 ile 7,4 şiddeti arasındaki depremlerin yineleme periyotları bulunmuş ve sonuçlar Ek 4, Ek 5, Ek 6 ve Ek 7'de tablo şeklinde verilmiştir. Tamamlanmamış Ortalamalar Yönteminin uyumluluğunu gösteren tablolar ise Ek 8, Ek 9, Ek 10 ve Ek 11'de görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Uç Değer Teorisi ve özelliklerinin incelendiği bu çalışmada, teori ile ilgili bazı önemli sonuçlara ulaşılmıştır. Bu sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir;

1) Teori ve teoride kullanılan tahmin etme yöntemleri sayısal değerlere karşı önemli bir biçimde duyarlılık göstermektedir. Tahmin etme yöntemlerinde yer alan parametreler ve bu parametrelerden yararlanılarak elde edilen olasılık değerlerinin virgülden sonraki basamak sayıları dahi, elde edilecek yineleme periyodunu etkilemektedir. Dolayısıyla Uç Değerler Teorisi ile yineleme periyotlarının hesaplandığı durumlarda ilgilenilen olay ile ilgili uzman bir kişinin yardımı alınmalıdır.

2) Tahmin etme yöntemleri olarak kullanılan yöntemler her türlü olay için uygun olmayabilmektedir. Örneğin En Küçük Kareler Yöntemi kullanılarak olasılıkların tahmin edilmesinde yararlanılan parametreler tahmin edilmek istendiğinde negatif parametre değerleri ve dolayısıyla da negatif olasılık değerleri ile karşılaşılabilmektedir ki bu durumun bilimsel olarak açıklamasını yapmak mümkün değildir.

3) Uç değer olarak belirlenecek sınır, tahminler üzerinde önemli rol oynamaktadır. Belki de teorinin en zayıf yönü bir sınır değere karar verilmesinde uygun bir yaklaşım yöntemine sahip olmamasıdır. Dolayısıyla uç değer olarak belirlenecek değerin sayısal büyüklüğüne rasgele karar verilmemesi gerekmektedir. Bundan sonra konu ile ilgili yapılacak çalışmalarda üzerinde durulması gereken nokta uç değere karar verebilecek yöntemlerin geliştirilmesi ile ilgili olmalıdır. Çünkü teoride kullanılan tahmin etme yöntemleri verilerin gözlenme sıklığından etkilenmektedir.

4) Teoride kullanılan yöntemlere bakıldığında, En Çok Olabilirlik Yöntemi'nin sonuçlarının diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlara göre daha tutarlı olduğu söylenebilir. Burada da aslında verilerin dağılımı önemli rol

oynamaktadır. Eğer veriler gerçekten Üstel Dağılım'a sahip ise En Çok Olabilirlik Yöntemi en uygun tahminleri verecektedir. Ancak veriler Üstel Dağılım'a sahip değiller ise dağılım bilgisi gerektirmeyen yöntemlerin sonuçları daha tutarlı olabilecektir.

5) Doğada yaşanan olayların olumsuz etkilerinden kurtulmak için olayın yinelenme periyodunun bilinmesi önem arz etmektedir. Teorinin böyle bir soruna çözüm üretmiş olması olumsuz etkilerden asgari etkilenmek açısından oldukça yararlıdır.

6) Teorinin uygulama sonuçlarının tutarlılığı verilerin toplanmasındaki hassasiyet ile önemli ölçüde ilişkilidir. Özellikle deprem, sel felaketi vb. doğal olaylar ile ilgili olasılıklar ve yineleme periyotları hesaplanacaksa verilerin sınırlı bir bölgeye ait olması bunlarla ilgili tahminlerin güvenirliğini artıracaktır.

7) Teori doğa olayları, iktisadi faaliyetler gibi birçok alanda kullanılma olanağı bulmuştur. Ancak bundan sonra özellikle bilgi transferinin yoğun olarak yaşanacağı sahalarda oldukça yoğun bir şekilde kullanılacaktır. Çünkü transfer edilecek bilgi miktarı her geçen gün artmakta ve karmaşıklaşmaktadır. Karmaşık ve çok sayıda bilginin transferi esnasında bilgi kaybının az olması ve transferin daha kısa sürede gerçekleştirilebilmesi için özellikle Bilgi Kuramı ve Uç Değer Teorisi birlikte kullanılmalıdır.

8) Tahminlerde kullanılacak olan verinin zaman dilimi olarak yakın zamanı içermesi tahminlere olan güveni ve doğruluğu arttırmaktadır.

KAYNAKLAR

Akdeniz, F., 1998, “Olasılık ve İstatistik”, Çukurova Üniversitesi, Adana.

Arıkan, A., Gürer, İ., 1984,"Hidrolojide İstatistik Yöntemler", Elektrik İşleri Etüt İdaresi Genel Müdürlüğü, Ankara.

Chavez-Demolin, V., Roehrl, A., 2004, “ Extreme Value Theory Can Save Your Neck”, 8 January.

Çalpala, Ü., 1989, “Birinci Tür Uç Değer Dağılımı, Parametrelerin Tahmin Yöntemleri ve Bir Uygulama”, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Ocak.

Esensoy, Ö., Kutsal, A., 1976, “Uç Örneklem Değerlerinin Kuramı ve Fırat Nehrinin Maksimum Debisinin Tahmini”, Hacettepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, Ankara.

Gumbel, E.J., 1958, “Statistics of Extremes”, Colombia University Pres, New York.

Hasgür, İ., 2000, “Matematiksel İstatistik”, Seçkin Yayınevi, Ankara.

Herbach, L., 1986, “Introduction, Gumbel Model, Statistical Extremes and Aplications”, J. Tiago Oliveira ed., pp 49-80.

Houghton, J. C., 1978, “The Incomplete Means Estimation Procedure Applied to Flood Frequency Analysis”, Water Resources Research, 14, pp 1111-1115.

İnal, C., Günay, S., 1978, “Olasılık ve Matematiksel İstatistik”, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, Ankara.

Jain, D., Singh, V.P., 1987, “Estimating Parameters of EV1 Distribution for Flood Frequency Analysis”, Water Resources Bulletin, 23, pp 59-71.

Kibici, Y., Yıldız, A., Özdemir, M.A., Erkal, T., Ergün, A., Demir, İ., Akbulut, G., Karabekir, H.S., Altındiş, M., 2005, “Deprem”, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon.

Kite, G.W., 1977, “Frequency and Risk Analysis in Hydrology”, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.

Ulugülyağcı, A., 2001, “Extreme Value Theory and Risk Management in Financial Markets”, Degree Master of Economics, Bilkent University, Ankara.

Yevjevich, V.M., 1972, “Probability and Statistics in Hydrology”, Fort Collins.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni her aşamada yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. İsmet DOĞAN'a ve çalışmalarım sırasında sabrıyla benden ilgisini esirgemeyen sevgili eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Uşak'ta doğdu. İlköğrenimini Aybey İlkokulunda, ortaöğrenimini ise Uşak Anadolu lisesinde tamamladı. 2001 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl Uşak Orhan Dengiz Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2002 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Uşak Fen Edebiyat Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.

EKLER

Ek 1 : En Çok Olabilirlik Yöntemine Göre Elde Edilen Tahminler

Şiddet	1976-2003 Verilerine Göre	1994-2003 Verilerine Göre	1999-2003 Verilerine Göre	2003 Verilerine Göre
4,0	0,146609019	0,065122513	0,106423277	0,154706142
4,1	0,120128491	0,047247102	0,080496351	0,116378652
4,2	0,098162239	0,034224201	0,060739288	0,087227809
4,3	0,080036112	0,024762624	0,045748781	0,065202110
4,4	0,065140748	0,017902062	0,034411395	0,048640369
4,5	0,052941248	0,012934568	0,025857422	0,036231449
4,6	0,042976442	0,009341466	0,019415057	0,026958462
4,7	0,034854485	0,006744413	0,014569522	0,020042363
4,8	0,028246019	0,004868291	0,010928662	0,014891519
4,9	0,022876497	0,003513494	0,008195023	0,011059448
5,0	0,018518538	0,002535430	0,006143694	0,008210750
5,1	0,014984770	0,001829480	0,004605017	0,006094310
5,2	0,012121409	0,001320011	0,003451236	0,004522582
5,3	0,009802632	0,000952376	0,002586273	0,003355747
5,4	0,007925756	0,000687109	0,001937945	0,002489705
5,5	0,006407148	0,000495717	0,001452058	0,001847031
5,6	0,005178798	0,000357630	0,001087948	0,001370176
5,7	0,004185476	0,000258006	0,000815115	0,001016390
5,8	0,003382376	0,000186132	0,000610687	0,000753930
5,9	0,002733174	0,000134280	0,000457521	0,000559232
6,0	0,002208448	0,000096872	0,000342766	0,000414807
6,1	0,001784377	0,000069885	0,000256791	0,000307676
6,2	0,001441682	0,000050416	0,000192380	0,000228212
6,3	0,001164766	0,000036371	0,000144124	0,000169270
6,4	0,000941017	0,000026238	0,000107972	0,000125551
6,8	0,000400829	0,000007107	0,000034010	0,000037998
7,2	0,000170710	0,000001925	0,000010712	0,000011500
7,4	0,000111403	0,000001002	0,000006012	0,000006326

Ek 2 : Momentler Yöntemine Göre Elde Edilen Tahminler

Şiddet	1976-2003 Verilerine Göre	1994-2003 Verilerine Göre	1999-2003 Verilerine Göre	2003 Verilerine Göre
4,0	0,121910451	0,076073667	0,099134926	0,138176881
4,1	0,097006938	0,056457145	0,074329205	0,101914254
4,2	0,077002606	0,041824981	0,055603490	0,074915734
4,3	0,061006314	0,030944728	0,041524911	0,054934671
4,4	0,048260147	0,022872857	0,030971946	0,040210962
4,5	0,038131756	0,016894550	0,023079259	0,029395267
4,6	0,030100888	0,012472289	0,017185936	0,021468356
4,7	0,023743934	0,009204042	0,012790870	0,015668245
4,8	0,018718670	0,006790282	0,009516125	0,011429402
4,9	0,014750264	0,005008483	0,007077670	0,008334269
5,0	0,011619013	0,003693666	0,005263084	0,006075691
5,1	0,009149903	0,002723703	0,003913054	0,004428323
5,2	0,007203898	0,002008286	0,002908978	0,003227168
5,3	0,005670782	0,001480691	0,002162357	0,002351575
5,4	0,004463329	0,001091651	0,001607260	0,001713419
5,5	0,003512595	0,000804800	0,001194604	0,001248374
5,6	0,002764142	0,000593311	0,000887864	0,000909511
5,7	0,002175022	0,000437389	0,000659868	0,000662612
5,8	0,001711371	0,000322439	0,000490410	0,000482726
5,9	0,001346501	0,000237697	0,000364465	0,000351671
6,0	0,001059389	0,000175225	0,000270861	0,000256192
6,1	0,000833475	0,000129172	0,000201295	0,000186635
6,2	0,000655724	0,000095222	0,000149596	0,000135962
6,3	0,000515873	0,000070194	0,000111174	0,000099047
6,4	0,000405844	0,000051745	0,000082620	0,000072154
6,8	0,000155450	0,000015280	0,000025200	0,000020321
7,2	0,000059538	0,000004512	0,000007686	0,000005723
7,4	0,000036846	0,000002452	0,000004245	0,000003037

Ek 3 : Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine Göre Elde Edilen Tahminler

Şiddet	1976-2003 Verilerine Göre	1994-2003 Verilerine Göre	1999-2003 Verilerine Göre	2003 Verilerine Göre
4,0	0,0714799698	0,0799336750	0,0972272826	0,1298988519
4,1	0,0627775155	0,0606180441	0,0731291619	0,0963818740
4,2	0,0550848002	0,0458886780	0,0548820028	0,0712909762
4,3	0,0482967031	0,0346920951	0,0411198203	0,0526117900
4,4	0,0423160368	0,0262011181	0,0307706759	0,0387619002
4,5	0,0370537723	0,0197733873	0,0230050743	0,0285229355
4,6	0,0324289645	0,0149140407	0,0171874946	0,0209697197
4,7	0,0283684727	0,0112440715	0,0128345179	0,0154065169
4,8	0,0248065490	0,0084744562	0,0095803430	0,0113137386
4,9	0,0216843463	0,0063854962	0,0071492283	0,0083052688
5,0	0,0189493860	0,0048105870	0,0053339049	0,0060952036
5,1	0,0165550143	0,0036236123	0,0039788977	0,0044723918
5,2	0,0144598643	0,0027292315	0,0029677625	0,0032811847
5,3	0,0126273401	0,0020554415	0,0022133870	0,0024070046
5,4	0,0110251288	0,0015479052	0,0016506582	0,0017655925
5,5	0,0096247465	0,0011656399	0,0012309367	0,0012950307
5,6	0,0084011208	0,0008777483	0,0009179066	0,0009498435
5,7	0,0073322091	0,0006609440	0,0006844622	0,0006966444
5,8	0,0063986532	0,0004976811	0,0005103777	0,0005109293
5,9	0,0055834680	0,0003747412	0,0003805637	0,0003747171
6,0	0,0048717627	0,0002821676	0,0002837645	0,0002748154
6,1	0,0042504951	0,0002124610	0,0002115852	0,0002015464
6,2	0,0037082305	0,0005599738	0,0001577646	0,0001478108
6,3	0,0032349844	0,0001204526	0,0001176338	0,0001084015
6,4	0,0028220088	0,0000906948	0,0000877108	0,0000794992
6,8	0,0016336345	0,0000291499	0,0000271099	0,0000229967
7,2	0,0009453486	0,0000093689	0,0000083791	0,0000066522
7,4	0,0007190731	0,0000053114	0,0000046583	0,0000035777

Ek 4 : 1976-2003 yılları arasındaki verilere göre depremlerin yineleme periyotları (yıl)

Şiddet	En Çok Olabilirlik Yöntemi	Moment Yöntemi	Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi
4	0,14	0,19	0,18
4,1	0,17	0,24	0,21
4,2	0,21	0,30	0,24
4,3	0,26	0,38	0,27
4,4	0,32	0,49	0,31
4,5	0,40	0,62	0,36
4,6	0,49	0,79	0,41
4,7	0,61	1,00	0,47
4,8	0,75	1,27	0,54
4,9	0,93	1,62	0,62
5	1,15	2,06	0,71
5,1	1,42	2,61	0,82
5,2	1,76	3,32	0,94
5,3	2,17	4,22	1,07
5,4	2,69	5,37	1,23
5,5	3,33	6,82	1,41
5,6	4,12	8,67	1,62
5,7	5,10	11,02	1,86
5,8	6,31	14,02	2,13
5,9	7,81	17,81	2,44
6,1	11,96	28,78	3,21
6,2	14,80	36,59	3,68
6,3	18,32	46,51	4,22
6,4	22,68	59,12	4,84
6,8	53,25	154,37	8,37
7,2	125,04	403,07	14,47
7,4	191,61	651,31	19,03

Ek 5 : 1994-2003 yılları arasındaki verilere göre depremlerin yineleme periyotları (yıl)

Şiddet	En Çok Olabilirlik Yöntemi	Moment Yöntemi	Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi
4	0,50	0,39	0,34
4,1	0,69	0,53	0,46
4,2	0,95	0,72	0,61
4,3	1,31	0,98	0,81
4,4	1,82	1,32	1,07
4,5	2,52	1,80	1,43
4,6	3,49	2,44	1,89
4,7	4,84	3,30	2,51
4,8	6,70	4,48	3,34
4,9	9,29	6,08	4,43
5	12,88	8,25	5,89
5,1	17,85	11,19	7,82
5,2	24,74	15,18	10,39
5,3	34,29	20,59	13,8
5,4	47,53	27,93	18,33
5,5	65,88	37,89	24,34
5,6	91,32	51,40	32,33
5,7	126,59	69,72	42,93
5,8	175,47	94,58	57,02
5,9	243,23	128,00	75,73
6,1	467,36	236,00	133,58
6,2	647,84	320,31	17,41
6,3	898,02	434,51	235,62
6,4	1244,80	589,44	312,94
6,8	4595,91	1996,61	973,67
7,2	16968,47	6759,69	3029,45
7,4	32604,58	12439,39	5343,69

Ek 6 : 1999-2003 yılları arasındaki verilere göre depremlerin yineleme periyotları (yıl)

Şiddet	En Çok Olabilirlik Yöntemi	Moment Yöntemi	Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi
4	0,27	0,29	0,29
4,1	0,35	0,39	0,39
4,2	0,47	0,52	0,52
4,3	0,63	0,70	0,70
4,4	0,83	0,95	0,94
4,5	1,11	1,28	1,27
4,6	1,48	1,72	1,70
4,7	1,98	2,31	2,28
4,8	2,64	3,11	3,05
4,9	3,52	1,19	4,10
5	4,7	5,63	5,49
5,1	6,27	7,58	7,37
5,2	8,37	10,20	9,88
5,3	11,16	13,72	13,25
5,4	14,9	18,46	17,78
5,5	19,89	24,84	23,84
5,6	26,55	33,43	31,98
5,7	35,43	44,99	42,89
5,8	47,3	60,53	57,52
5,9	63,13	81,46	77,14
6,1	112,49	147,49	138,75
6,2	150,15	198,47	186,09
6,3	200,43	267,06	249,58
6,4	267,54	359,37	334,73
6,8	849,39	1178,23	1080,00
7,2	2696,66	3862,95	3503,99
7,4	4804,93	6994,62	6302,75

Ek 7 : 2003 yılına göre depremlerin yineleme periyotları (yıl)

Şiddet	En Çok Olabilirlik Yöntemi	Moment Yöntemi	Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemi
4	0,18	0,22	0,23
4,1	0,25	0,30	0,31
4,2	0,33	0,41	0,42
4,3	0,45	0,57	0,58
4,4	0,60	0,78	0,79
4,5	0,81	1,07	1,08
4,6	1,10	1,47	1,47
4,7	1,48	2,01	2,00
4,8	2,00	2,76	2,73
4,9	2,69	3,79	3,72
5	3,63	5,21	5,08
5,1	4,89	7,15	6,93
5,2	6,60	9,81	9,44
5,3	8,90	13,46	12,88
5,4	11,99	18,48	17,56
5,5	16,17	25,37	23,94
5,6	21,80	34,83	32,64
5,7	29,39	47,81	44,51
5,8	39,63	65,63	60,70
5,9	53,43	90,09	82,76
6,1	97,13	169,77	153,88
6,2	130,95	233,04	209,83
6,3	176,55	319,90	286,12
6,4	238,03	439,14	390,14
6,8	786,65	1559,31	1348,74
7,2	2598,80	5536,85	4662,66
7,4	4723,97	10433,47	8669,36

Ek 8 : 1976-2003 Yılları Arasındaki Verilere Göre Uyumluluk

Şiddet	Gözlenen Frekans	En Çok Olabilirlik Yöntemine Göre		Momentler Yöntemine Göre		Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine Göre	
		Frekans	Fark	Frekans	Fark	Frekans	Fark
4	746	756	-10	846	-100	519	227
4,1	556	620	-64	673	-117	456	100
4,2	476	506	-30	534	-58	400	76
4,3	447	413	34	423	24	351	96
4,4	353	336	17	335	18	308	45
4,5	339	273	66	264	75	269	70
4,6	334	222	112	209	125	236	98
4,7	248	180	68	165	83	206	42
4,8	150	146	4	130	20	180	-30
4,9	114	118	-4	102	12	158	-44
5	97	96	1	81	16	138	-41
5,1	38	77	-39	63	-25	120	-82
5,2	37	63	-26	50	-13	105	-68
5,3	29	51	-22	39	-10	92	-63
5,4	23	41	-18	31	-8	80	-57
5,5	15	33	-18	24	-9	70	-55
5,6	9	27	-18	19	-10	61	-52
5,7	8	22	-14	15	-7	53	-45
5,8	9	17	-8	12	-3	47	-38
5,9	1	14	-13	9	-8	41	-40
6	8	11	-3	7	1	35	-27
6,1	6	9	-3	6	0	31	-25
6,2	2	7	-5	5	-3	27	-25
6,3	2	6	-4	4	-2	24	-22
6,4	1	5	-4	3	-2	21	-20
6,8	1	2	-1	1	0	12	-11
7,2	1	1	0	1	0	7	-6
7,4	1	1	0	0	1	5	-4
Toplam	4051	4051		4051		4051	

Ek 9 : 1994-2003 Yılları Arasındaki Verilere Göre Uyumluluk

Şiddet	Gözlenen Frekans	En Çok Olabilirlik Yöntemine Göre		Moment Yöntemine Göre		Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine Göre	
		Frekans	Fark	Frekans	Fark	Ferkans	Fark
4	263	282	-19	265	-2	249	14
4,1	166	204	-38	197	-31	189	-23
4,2	140	148	-8	146	-6	143	-3
4,3	108	107	1	108	0	108	0
4,4	74	77	-3	80	-6	82	-8
4,5	67	56	11	59	8	62	5
4,6	39	40	-1	43	-4	47	-8
4,7	39	29	10	32	7	35	4
4,8	32	21	11	24	8	26	6
4,9	16	15	1	17	-1	20	-4
5	25	11	14	13	12	15	10
5,1	6	8	-2	9	-3	11	-5
5,2	10	6	4	7	3	9	1
5,3	8	4	4	5	3	6	2
5,4	5	3	2	4	1	5	0
5,5	4	2	2	3	1	4	0
5,6	3	2	1	2	1	3	0
5,7	2	1	1	2	0	2	0
5,8	2	1	1	1	1	2	0
5,9	0	1	-1	1	-1	1	-1
6	4	1	3	1	3	1	3
6,1	1	1	0	1	0	1	0
6,2	1	1	0	1	0	0	1
6,3	2	0	2	0	2	0	2
6,4	1	0	1	0	1	0	1
6,8	1	0	1	0	1	0	1
7,2	1	0	1	0	1	0	1
7,4	1	0	1	0	1	0	1
Toplam	1021	1021		1021		1021	

Ek 10 : 1999-2003 Yılları Arasındaki Verilere Göre Uyumluluk

Şiddet	Gözlenen Frekans	En Çok Olabilirlik Yöntemine Göre		Moment Yöntemine Göre		Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine Göre	
		Frekans	Fark	Frekans	Fark	Frekans	Fark
4	131	135	-4	139	-8	138	-7
4,1	78	103	-25	104	-26	103	-25
4,2	72	78	-6	78	-6	78	-6
4,3	63	59	4	58	5	58	5
4,4	43	44	-1	44	-1	44	-1
4,5	39	33	6	32	7	33	6
4,6	21	25	-4	24	-3	24	-3
4,7	26	19	7	18	8	18	8
4,8	23	14	9	13	10	14	9
4,9	8	10	-2	10	-2	10	-2
5	16	8	8	7	9	8	8
5,1	4	6	-2	6	-2	6	-2
5,2	8	4	4	4	4	4	4
5,3	4	3	1	3	1	3	1
5,4	2	2	0	2	0	2	0
5,5	2	2	0	2	0	2	0
5,6	2	1	1	1	1	1	1
5,7	2	1	1	1	1	1	1
5,8	1	1	0	1	0	1	0
5,9	0	1	-1	1	-1	1	-1
6	1	0	1	0	1	0	1
6,1	1	0	1	0	1	0	1
6,2	1	0	1	0	1	0	1
6,3	0	0	0	0	0	0	0
6,4	1	0	1	1	0	0	1
6,8	0	0	0	0	0	0	0
7,2	1	1	0	1	0	1	0
7,4	1	1	0	1	0	1	0
Toplam	551	551		551		551	

Ek 11 : 2003 Yılı Verilerine Göre Uyumluluk

Şiddet	Gözlenen Frekans	En Çok Olabilirlik Yöntemine Göre		Moment Yöntemine Göre		Tamamlanmamış Ortalamalar Yöntemine Göre	
		Frekans	Fark	Frekans	Fark	Frekans	Fark
4	31	31	0	33	-2	33	-2
4,1	22	24	-2	24	-2	24	-2
4,2	14	18	-4	18	-4	18	-4
4,3	17	13	4	13	4	13	4
4,4	11	10	1	10	1	10	1
4,5	8	7	1	7	1	7	1
4,6	4	5	-1	5	-1	5	-1
4,7	0	4	-4	4	-4	4	-4
4,8	5	3	2	3	2	3	2
4,9	4	2	2	2	2	2	2
5	1	2	-1	1	0	2	-1
5,1	1	1	0	1	0	1	0
5,2	1	1	0	1	0	1	0
5,3	1	1	0	1	0	1	0
5,4	0	1	-1	0	0	0	0
5,5	0	0	0	0	0	0	0
5,6	2	0	2	0	2	0	2
5,7	1	0	1	0	1	0	1
5,8	0	0	0	0	0	0	0
5,9	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
6,1	0	0	0	0	0	0	0
6,2	1	1	0	1	0	0	1
6,3	0	0	0	0	0	0	0
6,4	1	1	0	1	0	1	0
6,8	0	0	0	0	0	0	0
7,2	0	0	0	0	0	0	0
7,4	0	0	0	0	0	0	0
Toplam	125	125		125		125	