LORENTZ UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Seher TUNÇER

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2008

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LORENTZ UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Seher TUNÇER

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mayıs 2008

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ danışmanlığında,

Seher TUNÇER tarafından hazırlanan

LORENTZ UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

04/06/2008

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	: Doç. Dr. Emine SOYTÜRK	
Danışman	: Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ	Nejat Ekmekci
Üye	: Doç. Dr. HüseyinYILDIRIM	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

Seher TUNÇER

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nejat EKMEKCİ

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde çalışmamız için gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylere ait boğaz çizgisi, dağılma parametresi, regle yüzeyin Gauss eğriliği ile ilgili teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-boyutlu Lorentz uzayında timelike ve spacelike regle yüzeylere ait boğaz çizgisi, dağılma parametresi, regle yüzeyin Gauss eğriliği ile ilgili teorem ve sonuçlar verilmiştir.

2008, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Regle yüzey, Lorentz uzayı, dağılma parametresi, striksiyon çizgisi.

ABSTRACT

MsSc Thesis

RULED SURFACES in LORENTZ SPACE

Seher TUNÇER

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoct. Prof. Dr. Nejat EKMEKCİ

This thesis contained three chapters.

In first chapter, basic definitions and theorems are given.

In second chapter, the theorems and remarks related to striction lines, distribution parameter and Gauss curvature of ruled surfaces are given in 3-dimensional Euclid Space.

In third chapter, the theorems and remarks related to striction lines, distribution parameter and Gauss curvature of timelike and spacelike ruled surfaces are given in 3-dimensional Lorentz Space.

2008, 75 pages

Keywords: Ruled surface, Lorentz space, distribution parameter, striction line

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her safhasında bilgi,deneyim ve yakın ilgisini benden esirgemeyen sayın hocam Doç.Dr. Nejat EKMEKCİ'ye ve daima bana destek olan eşim Yrd.Doç.Dr. Yılmaz TUNÇER'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

.

Seher TUNÇER

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

X	Doğrultman vektör
k_i	i-inci eğrilik
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
ν	İndeks
E_ν^n	n-boyutlu yarı-Öklid uzayı
ξ	M manifoldunun birim normal vektör alanı
D	Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
∇	Yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
S	Şekil operatörü
T	Teğet vektör alanı
N	Asli normal vektör alanı
B	Binormal vektör alanı

GİRİŞ

Regle yüzeyler konusu, diferensiyel geometri ve kinematik teori tekniklerinin en uygun şekilde kullanılabildiği araştırma konulardan biri olduğundan, matematikçilerin her zaman ilgi odağı olmuştur. Bu yüzden, literatürde bu konu ile ilgili çok sayıda kaynak bulmak mümkündür. Regle yüzeylerin sınıflandırılması, dayanak eğrisiyle ilgili özelliklere göre, regle yüzey ve yüzeyin üzerindeki eğrilik çizgileri, geodezikleri, striksiyon çizgileri ve yüzeyin şekil operatörü ve bunun cebirsel invaryantlarının incelenmesi, regle yüzeylerin açılabilirliği, açılım uzunlukları, kapalı regle yüzeylerin incelenmesi gibi konular regle yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların başında gelmektedir.

Regle yüzeyler en basit ve en sade şekliyle, dayanak eğrisi olarak adlandırılan bir uzay eğrisi boyunca, bir doğrunun hareket ettirilmesiyle oluşturulan yüzey olarak tanımlanır. Hareket ettirilen doğruya regle yüzeyin ana doğrusu, bu doğrunun doğrultmanına da regle yüzeyin doğrultmanı denir. Bu tez çalışmasında,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset IR &\longrightarrow E^3 \\ t \quad &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

regüler birim hızlı eğrisi, yüzeyin dayanak eğrisi olarak ve bir X birim vektör alanının α eğrisine,

$$X(t) = X\big|_{\alpha(t)}$$

şeklinde bir kısıtlaması, yüzeyin doğrultmanı olarak alınmıştır. Dayanak eğrisi boyunca, regle yüzeyin birim normal vektörü $\xi = \xi(t)$ ve dayanak eğrisinin Frenet vektörleri $T = T(t)$, $N = N(t)$ ve $B = B(t)$ olmak üzere, α eğrisi boyunca $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sistem olarak ele alınmıştır.

$\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin dayanak eğrisi boyunca değişimi H. Hilmi Hacısalihoğlu tarafından, a, b ve c t'ye bağlı diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$D_T T = a X + b\xi \qquad D_T X = -a T + c\xi \qquad D_T \xi = -b T - cX$$

bağıntıları ile vermiştir. Dolayısıyla, yüzeyin dağılma parametresini,

$$P_X = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

yüzeyin striksiyon çizgisinin denklemini,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{a}{a^2 + c^2} X(t)$$

ve yüzeyin doğrultmanı boyunca şekil operatörünü kullanarak, regle yüzeyin Gauss eğriliğini,

$$K(t, v) = -\frac{c^2}{\left(\left(a^2 + c^2\right)v^2 - 2av + 1\right)^2}$$

ve doğrultman boyunca Gauss eğriliğinin maksimum değerini,

$$K(t, v) = -\frac{\left(a^2 + c^2\right)^2}{c^2}$$

şeklinde vermiştir.

Bu tez çalışmasında, regle yüzeyin birim normal vektörü ve dolayısıyla yüzeyin doğrulmanı, dayanak eğrisinin Frenet vektörlerinin birer lineer birleşimi olarak ifade edildi. a, b ve c fonksiyonları, ξ birim normal vektörünün asli normal vektörüyle yaptığı $\psi = \psi(t)$ açısı cinsinden hesaplandı. $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin dayanak eğrisi boyunca değişimi yeniden ele alındı. Elde edilen sonuçlar $\psi = \psi(t)$ açısına göre dayanak eğrisinin Frenet elemanları da kullanılarak tekrar yorumlandı.

Benzer düşünce tarzıyla, elde ettiğimiz tüm sonuçları, 3-boyutlu Lorentz uzayında, $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sistemindeki vektörlerin karakterleri (dolayısıyla yüzeyin dayanak eğrisinin, doğrultmanının ve birim normal vektörünün karakteri) göz önünde bulundurularak, spacelike ve timelike regle yüzeyler için tekrar ele alındı.

1.TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 1.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \to IR$ dönüşümü $\forall a, b \in IR$ ve $\forall u, v, w \in V$ için;

i. $g(u, v) = g(v, u)$

ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(u, w)$

iii. $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

özeliklerine sahip ise, bu durumda g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.2: V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall u \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(u, v) > 0$ ise, bu durumda g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii. $\forall u \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(u, v) < 0$ ise, bu durumda g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii. $\forall u \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(u, v) \geq 0$ ise, bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

iv. $\forall u \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(u, v) \leq 0$ ise, bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlı denir (O'Neill 1983).

Tanım 1.1.3: V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to IR$; simetrik bilineer form olsun.

i. g nin non-degenere olması için gerek ve yeter koşul $g(u, v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $u = 0$ olmasıdır.

ii. g nin degenere olması için gerek ve yeter koşul $g(w, v) = 0$ ve $\forall v \in V$ için $w \neq 0$ olmasıdır (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

V üzerindeki g non-degenere simetrik bilineer form V nin bir alt vektör uzayına indirgenebilir. İndirgenen simetrik bilineer form degenere ve non-degeneredir.

Tanım 1.1.4: V bir reel vektör uzayı ve $g: V\times V \rightarrow IR$; V simetrik bilineer form olsun. V nin sıfır uzayı (radikal veya null uzayı);

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, v \in V\}$$

şeklinde tanımlanır ve $RadV \subset V$ dir. $RadV$ alt uzayının boyutuna g nin sıfırlık derecesi (nullity degree) denir ve $nullV$ ile gösterilir (Duggal and Bejancu 1996).

Yukarıdaki tanıma göre; V üzerindeki g simetrik bilineer formunun dejenere (veya non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $nullV > 0$ (veya $nullV = 0$) olmasıdır.

Örnek 1.1.1: 2-boyutlu reel vektör uzayı IR^2 ve g simetrik bilineer formu $\forall x, y \in IR^2$ için;

$$\begin{aligned} g: IR^2 \times IR^2 &\rightarrow IR \\ (x,y) &\rightarrow g(x,y) = -x_1y_1 + x_2y_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $Rad(IR^2) = \{(0,0)\}$ ve g nin sıfırlık derecesi $null\, IR^2 = 0$ olur. Tanım gereğince g non-dejeneredir.

Tanım 1.1.5: g simetrik bilineer formuna karşılık gelen kuadratik form; $\forall v \in V$ için

$$\begin{aligned} h: V &\rightarrow IR \\ v &\rightarrow h(v) = g(v,v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Bu durumda g, h yardımıyla $\forall v, w \in V$ için;

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\}$$

şeklinde ifade edilebilir. V nin bir $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ bazı için; $\lambda_i \in IR$ ve v_i ler de V nin E bazına karşılık gelen koordinat bileşenleri olmak üzere

$$h(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i)^2$$

formuna sahiptir. λ_i katsayılarının pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayıları,sırası ile, p, q ve r ise, bu durumda h ye (p, q, r)-tipindendir denir ve ayrıca $p+q+r=m$ dir (Duggal and Bejancu 1996).

Önerme 1.1.1: V üzerinde g simetrik bilineer formuna ait (p,q,r)-tipinden bir kuadratik form h olsun. Bu durumda

i. g nin dejenere (veya non-dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $r > 0 (r = 0)$ olmasıdır.

ii. g nin pozitif (veya negatif) tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $p = m \quad (q = m)$ olmasıdır.

iii. g nin pozitif (veya negatif) yarı-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $q = 0,\ p > 0,\ r > 0 \quad (p = 0,\ q > 0,\ r > 0)$ olmasıdır

(Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.1.6: V nin bazı $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ olsun. $b_{ij} = g(e_i, e_j)$ olarak tanımlanan $B = [b_{i,j}]_{m \times m}$ matrisine E bazına göre g nin matrisi denir. g simetrik olduğundan B matrisi de simetriktir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Sonuç 3.1.1: V nin herhangi bir E bazına göre g nin matrisi B olsun. g nin non-dejenere (veya dejenere) olması için gerek ve yeter koşul $\operatorname{rank} B = m, \quad (\operatorname{rank} B < m)$ olmasıdır (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.1.7: V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to IR$; V üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

$$g|_W : W \times W \to IR$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g-simetrik bilineer formun indeksi denir ve q ile gösterilir. Ayrıca, q ya V vektör uzayının da indeksi denir ve $\operatorname{ind} V = q$ ile gösterilir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Buna göre $1 \leq q \leq \operatorname{boy} V$ dir. q=0 olması için gerek ve yeter şart g nin pozitif yarı-tanımlı olmasıdır.

Teorem 1.1.1: V nin bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bazı için $(\in_1, \in_2, ..., \in_n)$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin q indeksidir (O'Neill 1983).

1.2 Yarı-Öklid uzayları

Tanım 1.2.1: V reel vektör uzayı üzerinde bir g non-dejenere, simetrik bilineer formu tanımlanırsa g ye bir skalar çarpım (yarı-Öklid metriği) ve V ye de yarı-Öklid uzayı denir. $p.q \neq 0$ ise g ye gerçek yarı-Öklid metriği denir.

Özel olarak g pozitif tanımlı ise, g ye Öklid metriği ve V ye de Öklid uzayı denir. $q = 1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve V ye de Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı denir. V de g dejenere ($\text{null}\,V > 0$) ise, bu durumda V ye lightlike veya dejenere vektör uzayı denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Önerme 1.2.1: (W, g) reel n-boyutlu dejenere vektör uzayı ve W nın sıfır uzayı $\text{Rad}\,W$ olsun. $\text{null}\,W = r < n$ olmak üzere, $\text{Rad}\,W$ nin V deki tümleyeni olan alt uzay non-dejeneredir. Bu uzaya ekran uzayı (screen space) veya perde uzayı denir ve SW ile gösterilir (Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.2.2: Bir $v \in V$ vektörü için;

i. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise, bu durumda v vektörüne spacelike vektör,

ii. $g(v, v) < 0$ ise, bu durumda v vektörüne timelike vektör,

iii. $g(v, v) = 0$ lightlike (null veya isotropik) vektör denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.2.3: V yarı-Öklid uzayı ve g de yarı-Öklid metriği olmak üzere;

i. $\Gamma_N = \{v \in (V - \{0\}) : g(v, v) = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin lightlike konisi,

ii. $\Gamma_S = \{v \in V : g(v, v) \geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi,

iii. $\Gamma_T = \{v \in (V - \{0\}) : g(v, v) < 0\}$ tanımlı Γ_T cümlesine V nin timelike konisi denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.2.4: V yarı-Öklid uzayı ve g de yarı-Öklid metriği olmak üzere;

$$\|.\| : V \to IR$$
$$v \to \|v\| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona norm fonksiyonu denir. $\|v\|$ ya da v nin normu veya v nin boyu denir. Boyu 1 birim olan vektöre de birim vektör denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.2.5: $u, v \in V$ için $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olmak üzere; $g(u,v) = 0$ ise, bu durumda u ve v vektörlerine ortogonal vektörler denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Uyarı: Unutulmamalıdır ki g nin indefinite olması durumunda; Öklid geometrisinde olduğu gibi dik vektörler arasında dik açı olmak zorunda değildir. Örnek olarak lightlike vektörler sıfırdan farklı vektörler olmalarına rağmen kendilerine dik vektörlerdir.

Teorem 1.2.1: Bir $V \neq \{0\}$ yarı-Öklid uzayı daima bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Örnek 1.2.1: m-boyutlu reel vektör uzayı IR^m ve IR^m nin bir ortonormal bazı $E = \{e_1 = (1,0,...,0),...,e_m = (0,0,...,1)\}$ olsun. q indeksi $0 < q < m$ olmak üzere IR^m üzerinde bir yarı-Riemann metrik $\forall x, y \in IR^m$ için

$$g(x,y) = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{j=q+1}^{m} x_j y_j$$

şeklindedir. Bu metrikle birlikte IR^m bir yarı-Öklid uzayı olur ve IR^m_q ile gösterilir. Özel olarak q=1 ise IR^m_1 bir Lorentz (Minkowski) vektör uzayıdır.

Teorem 1.2.2: V vektör uzayı için ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\in_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $v \in V$;

$$v = \sum_{i=1}^{n} \in_i g(v, e_i) e_i \qquad (3.2.1)$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Tanım 1.2.6: $X, Y \in IR_1^3$ olsun. $\langle X, Y \rangle = 0$ ise X ve Y vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Nomizu 1966).

Teorem 1.2.3: Lorentz uzayında timelike vektörler v, w olsun. Bu iki vektörün aynı zaman konisinde olması için gerek ve yeter şart $g(v, w) < 0$ olmasıdır (Nomizu 1966).

Teorem 1.2.4: Lorentz uzayında x, y iki timelike vektör olsun. O zaman;

1) $|\langle x, y \rangle| \geq \|x\|.\|y\|$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)

2) Eğer x, y vektörleri aynı time-konide ise, $\langle x, y \rangle = -\|x\|.\|y\|.\mathrm{ch}\varphi$ olacak şekilde hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır (Nomizu 1966).

Sonuç 1.2.1: İki timelike vektör birbirine dik olamaz (Nomizu 1966).

Tanım 1.2.7: (V, g) m-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. $g|w$ dejenere ise, bu durumda W ya V nin lightlike veya dejenere alt uzayı denir. Aksi halde W ya V nin non-dejenere alt uzayı denir.
$W^{\perp} = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$ cümlesine de W nın dik uzayı denir. Genellikle $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ dir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Önerme 1.2.2: (V, g) m-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda şu özelikler vardır:

i. $\mathrm{boy}\, W + \mathrm{boy}\, W^{\perp} = m$ **ii.** $(W^{\perp})^{\perp} = W$ **iii.** $\mathrm{Rad}\, W = \mathrm{Rad}\, W^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

(O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Sonuç 1.2.2: V bir yarı-Öklid uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

i. W; V nin bir non-dejenere altuzayıdır,

ii. $W^{\perp}$ de V nin bir diğer non-dejenere altuzayıdır,

iii. W ve $W^{\perp}$; V nin tamamlayıcı (complementary) ortogonal altuzaylarıdır.

iv. V; W ve $W^{\perp}$ nin ortogonal direk toplamıdır, yani $V = W \perp W^{\perp}$ dir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

1.3 Yarı-Riemann Manifoldları ve Altmanifoldları

Tanım 1.3.1: M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde non-dejenere ve sabit indeksli (0,2)-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Başka bir ifadeyle M manifoldunun her p noktasındaki T_pM tanjant uzayına $g\big|_p$ skalar çarpımı karşılık gelir ve $g\big|_p$ nin indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

Tanım 1.3.2: M diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere; (M,g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Tanım 1.3.3: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g nin sabit indeksi q ya (M,g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996). q indeksli ve n-boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir.

Tanım 1.3.4: M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise, bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Özel olarak $q = 0$ ise bu durumda M^n bir Riemann manifoldu ve g de bir Riemann metriğidir.

Tanım 1.3.5: M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset IR \to M_q^n$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere ;

i. $g(T,T) > 0$ ise, bu durumda α eğrisine spacelike eğri,

ii. $g(T,T)<0$ ise, bu durumda α eğrisine timelike eğri,

iii. $g(T,T)=0$ ise, bu durumda α eğrisine lightlike (veya null) eğri denir (O'Neill 1983, Duggal and Bejancu 1996).

Eğrinin özel bir hali olan doğruyu göz önüne alalım. Doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise, doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise, doğru timelike doğru ve doğrultman vektörü lightlike ise, doğru lightlike doğrudur.

Tanım 1.3.6: M_v^m, m-boyutlu ve v indeksli bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}_q^n$, n-boyutlu ve q indeksli bir diğer yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$f: M_v^m \to \overline{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise ($\operatorname{rank} f = m$) M_v^m ya $\overline{M}_q^n$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir (O Neill 1983, Ikawa 1985, Nakanishi 1988).

Tanım 1.3.7: n-boyutlu bir M yarı-Riemann manifoldunun (n-1)-boyutlu bir $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifolduna M nin yarı-Riemann hiperyüzeyi denir (Turgut 1995).

Tanım 1.3.8: IR_1^3'de iki vektör $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ olmak üzere;

$$\Lambda : IR_1^3 \times IR_1^3 \longrightarrow IR_1^3$$

$$(X\ ,Y) \longrightarrow X\Lambda Y = (x_2.y_3 - x_3.y_2,\ x_3.y_1 - x_1.y_3,\ -(-x_1.y_2 - x_2.y_1))$$

şeklinde tanımlı Λ operatörüne IR_1^3'de Lorentz anlamında dış çarpım denir.

Bu tanımı, IR^3'deki vektörel çarpımın ifadesine benzer olarak,

$$X\Lambda Y = \det\begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \overrightarrow{-e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz (Tunçer 2000).

Sonuç 1.3.1: $X,Y,Z \in IR_1^3$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

i) $\langle X\Lambda Y, Z\rangle = \det(X,Y,Z)$ **ii)** $(X\Lambda Y)\Lambda Z = \langle Y,Z\rangle.X - \langle X,Z\rangle.Y$

iii) $\langle X, X\Lambda Y\rangle = 0$ **iv)** $\langle Y, X\Lambda Y\rangle = 0$ (Tunçer 2000).

Teorem 1.3.1: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında iki vektör u ve v olsun.

i. u ve v spacelike vektör ise $u \wedge v$ bir timelike vektördür.

ii. u spacelike ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

iii. u spacelike vev null vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \wedge v$ null vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

iv. u ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

v. u timelike ve v null vektör ise $u \wedge v$ spacelike vektördür.

vi. u ve v timelike vektör ise $u \wedge v$ bir spacelike vektördür (Turgut 1995).

Tanım 1.3.9: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun.Her $p \in \overline{M}$ ve her $\omega_p \in T_p\overline{M}$, $V_p \in T_p\overline{M}$ için

$$\langle V_p, \omega_p \rangle = 0 \Rightarrow V_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa $\overline{M}$ ye IR_1^3 uzayında nondejenere yüzey denir (Turgut 1995).

Tanım 1.3.10: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise $\overline{M}$ ye IR_1^3 de bir spacelike yüzey denir (Turgut 1995).

Teorem 1.3.2: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında (U, φ) parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset IR^2 &\to IR_1^3 \\ (u, v) &\to \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) \end{aligned}$$

yüzeyinin spacelike bir yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin timelike bir vektör alanı, yani

$$\langle \xi, \xi \rangle < 0$$

olmasıdır. Burada ξ, $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır (Turgut 1995).

Tanım 1.3.11: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey $\overline{M}$ olsun. $\overline{M}$ yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise $\overline{M}$ ye timelike yüzey denir (Turgut 1995).

Teorem 1.3.3: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey $\overline{M}$ yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin normalinin spacelike bir vektör alnı, yani

$$\langle \xi, \xi \rangle > 0$$

olmasıdır (Turgut 1995).

Tanım 1.3.12: $M_v^m, \overline{M}_q^n$ nun yarı-Riemann altmanifoldu olsun. ξ, M_v^m nin bir normal vektör alanı ve ∇ da, M_v^m üzerindeki koneksiyon olmak üzere;

$$A_\xi : \chi(M_v^m) \to \chi(M_v^m)$$
$$X \to A_\xi(X) = -\nabla_X \xi$$

şeklinde tanımlı A_ξ dönüşümüne M_v^m nin ξ ye göre şekil operatörü denir (O Neill 1983, Ikawa 1985, Nakanishi 1988).

Tanım 1.2.13: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey $\overline{M}$ ve $\overline{M}$ nin şekil operatörüne karşılık gelen matris S olsun. $p \in \overline{M}$ için

$$K(p) = \varepsilon \det S_p$$

$\overline{M}$ yüzeyinin p noktasındaki Gauss eğriliği ve $K : \overline{M} \to IR$ fonksiyonuna $\overline{M}$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Burada $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1$ dir; ξ, $\overline{M}$ yüzeyinin normal vektör alanıdır (Turgut 1995).

1.4 3-Boyutlu IR_1^3 Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 1.4.1: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında, verilen bir *l* doğrusu, verilen bir α eğrisi boyunca hareket ettirilerek elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzey denir. Bu durumda verilen *l* doğrusuna, regle yüzeyin bir ana doğrusu ve α eğrisine, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir (Turgut 1995).

Tanım 1.4.2: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilirdir denir (Turgut 1995).

Tanım 1.4.3: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında açılabilir olmayan bir regle yüzey verilsin. Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun ortak dikmesi varsa, bu dikmenin esas ana doğru üzerindeki ayağına boğaz (merkez veya sitriksiyon) noktası denir (Turgut 1995).

Tanım 1.4.4: IR_1^3, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir regle yüzeyin ana doğrularının her birini dik olarak kesen bir eğri varsa, bu eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir (Turgut 1995).

1.5 Yarı-Riemann Manifoldlarda Bir Eğrinin Frenet Denklemleri

i. Spacelike ve Timelike Eğriler için Frenet Denklemleri

$M_q^n(n \geq 3)$ bir yarı-Riemann manifoldunda diferensiyellenebilir ve lightlike olmayan bir eğri için Frenet denklemleri, aşağıdaki Teorem ile ifade edilmiştir (Ekmekci and Ilarslan 1998).

Teorem 1.5.1: $M_q^n(n \geq 3)$ bir yarı-Riemann manifold ve $\alpha : I \subset IR \to M_n^q$ de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri; $\{V_1,...,V_n\}$ ve $\varepsilon_{i-1} = g(V_i, V_i)$ olmak üzere, Frenet vektörleri ve türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

i. $\nabla_{V_1} V_1 = k_1 V_2$

ii. $\nabla_{V_1} V_i = -\varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1} k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \qquad 1 < i < n$

iii. $\nabla_{V_1} V_n = -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1} k_{r-1} V_{r-1}$

burada ∇, M_q^n yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyondur.

İspat: Yukarıda ifade edilen Frenet denklemlerinin matris gösterimi ise şu şekildedir.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1}V_1 \\ \nabla_{V_1}V_2 \\ \nabla_{V_1}V_3 \\ \cdots \\ \nabla_{V_1}V_{r-2} \\ \nabla_{V_1}V_{r-1} \\ \nabla_{V_1}V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-3}\varepsilon_{r-2}k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

Özel olarak q=1 olsun. Bu durumda manifold Lorentz manifoldu olur. Buna göre Lorentz manifoldunda bir eğrinin Frenet denklemlerini Teorem 1.5.1 yardımıyla n=3 için inceleyelim.

i. α, Lorentz manifoldunda timelike eğri olsun.

Bu durumda α nın Frenet vektör alanları, V_1 timelike vektör alanı, V_2 ve V_3 spacelike vektör alanıdır.Buna göre, $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1$ olacaktır. Bu durumda Teorem 1.5.1 den aşağıdaki Frenet denklemlerini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1}V_1 \\ \nabla_{V_1}V_2 \\ \nabla_{V_1}V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (1.5.1)$$

ii. α, Lorentz manifoldunda spacelike eğri olsun.

Bu durumda α eğrisi iki farklı Frenet denklem sistemine sahiptir.

1. α eğrisinin vektör alanları; V_1 spacelike vektör alanı, V_2 timelike vektör alanı ve V_3 de spacelike vektör alanı olsun. Buna göre $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$ olacaktır. Bu durumda Teorem 1.5.1 den n=3 için aşağıdaki Frenet denklemlerini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1}V_1 \\ \nabla_{V_1}V_2 \\ \nabla_{V_1}V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (1.5.2)$$

2. α eğrisinin vektör alanları; V_1 spacelike vektör alanı, V_2 uzay benzeri vektör alanı ve V_3 de timelike vektör alanı olsun. Buna göre $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = -1$ olacaktır. Bu durumda Teorem 1.5.1 den n=3 için aşağıdaki Frenet denklemlerini yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1} V_1 \\ \nabla_{V_1} V_2 \\ \nabla_{V_1} V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (1.5.3)$$

ii. Lorentz Manifoldlarında Lightlike Eğriler için Frenet Denklemleri

α, (m+2)-boyutlu (M,g) Lorentz manifoldunda bir lightlike eğri ve bu eğrinin teğet vektör alanı λ, M nin Levi-Civita koneksiyonu ∇ ile gösterilsin. Eğrinin Frenet vektörleri, $\{\lambda, N, W_1, ..., W_m\}$ olsun. Burada λ ve N lightlike vektörler, W_i, $(1 \le i \le m)$' ler de spacelike vektörlerdir. Buna göre α nın Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \nabla_\lambda \lambda = h\lambda + k_1 W_1 \\ \nabla_\lambda N = -hN + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_\lambda W_1 = -k_2 \lambda - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\ \nabla_\lambda W_2 = -k_3 \lambda - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W_4 \\ \ldots \\ \nabla_\lambda W_{m-2} = -k_{2m-5} W_{m-4} - k_{2m-4} W_{m-3} + k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m-1} W_m \\ \nabla_\lambda W_{m-1} = -k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m \\ \nabla_\lambda W_m = -k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1} \end{cases} \qquad (1.5.4)$$

burada h, $\{k_1, ..., k_{2m}\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır (Duggal and Bejancu, 1996). Özel olarak m=1 için (1.5.4) denklemleri aşağıdaki şekli alır;

$$\nabla_\lambda \lambda = h\lambda + k_1 W_1 \ , \ \nabla_\lambda N = -hN + k_2 W_1 \ , \ \nabla_\lambda W_1 = -k_2 \lambda - k_1 N \qquad (1.5.5)$$

Bu denklemlerde uygun bir p parametre değişimiyle, h=0 alınabilir ve diğer denklemler değişmeden kalır. Uygun p parametresine, eğrinin seçilmiş parametresi denir. Buna göre (1.5.5) denklemleri aşağıdaki şekli alırlar:

$$\nabla_{\frac{d}{dp}} \frac{d}{dp} = k_1 W_1 \ , \ \nabla_{\frac{d}{dp}} N = k_2 W_1 \ , \ \nabla_{\frac{d}{dp}} W_1 = -k_2 \frac{d}{dp} - k_1 N \qquad (1.5.6)$$

(1.5.6) denklemlerinde özel olarak $\frac{d}{dp} = X,\ -N = Y,\ W_1 = Z$ alınırsa

$$\nabla_X X = k_1 Z\,,\ \nabla_X Y = k_2 Z\,,\ \nabla_X Z = -k_2 X + k_1 Y \tag{1.5.7}$$

elde edilir. Elde edilen bu son denklemler, lightlike eğriler için Cartan denklemleri olarak da bilinmektedir (Duggal and Bejancu 1996).

2. E^3 UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

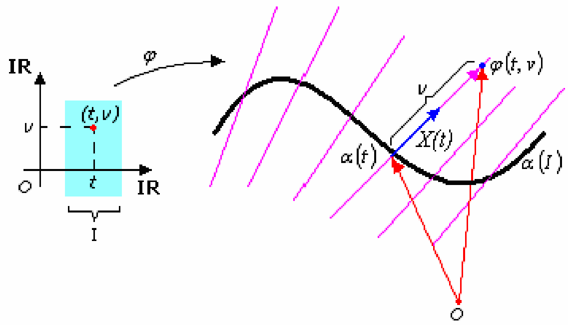
$M \subset E^3$, dayanak eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset IR &\longrightarrow E^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

ve doğrultmanı X(t) ve birim normal vektör alanı ξ olan bir regle yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\longrightarrow E^3 \\ (t, v) &\longrightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirtilir (Hacısalihoğlu, 1980).



$\{T, N, B\}$ α dayanak eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektör alanları, $k_1(t)$ ve $k_2(t)$ eğrinin 1. ve 2. eğrilikleri olsun. X(t) doğrulman vektörünü $\alpha(t)$ noktalarında $\|X\| = 1$ ve

$$X = f_1 T + f_2 N + f_3 B \quad , \quad f_1, f_2, f_3 \in C(E^3, IR)$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda,

$$X' = (f_1' - k_1 f_2)T + (f_2' + k_1 f_1 - k_2 f_3)N + (f_3' + k_2 f_2)B$$

elde edilir. Şimdi $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin α boyunca değişimini inceleyelim.

$$\xi = \cos\psi\, N + \sin\psi\, B \tag{2.1}$$

olsun. Yüzeyin yönlendirmesine bağlı kalarak $T \Lambda X = \xi$ seçelim. Bu durumda

$$T \Lambda X = -f_3 N + f_2 B$$

olup $f_1 = 0$, $f_2 = \sin\psi$, $f_3 = -\cos\psi$ ve buradan da

$$X = \sin\psi\, N - \cos\psi\, B \tag{2.2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$D_T\xi = -k_1 \cos\psi T - \sin\psi(\psi' + k_2)N + \cos\psi(\psi' + k_2)B$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 \sin\psi X + k_1 \cos\psi \xi \\ D_T X &= -k_1 \sin\psi T + (\psi' + k_2)\xi \\ D_T \xi &= -k_1 \cos\psi T - (\psi' + k_2)X \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur.

Diğer taraftan $\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$ eşitliği $\forall v \in IR$ sabit değeri için M'nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı A ise,

$$A = T + vD_T X$$

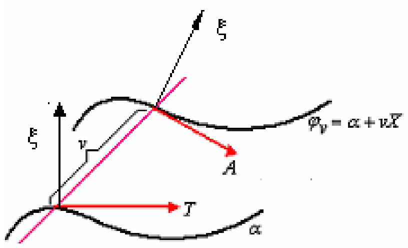
(2.3) eşitliklerinden,

$$A = (1 - vk_1 \sin\psi)T + v(\psi' + k_2)\xi \tag{2.4}$$

şeklinde bulunur. A vektör alanı ξ 'e dik olacağından

$$v(\psi' + k_2) = 0 \tag{2.5}$$

olacaktır.



Bir doğrultman boyunca, M'nin teğet düzlemlerinin çakışık oldukları genellikle doğru değildir. Ancak bu düzlemlerin daima sabit olması, ξ 'nin katsayısı ile yakından ilgilidir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1: Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart

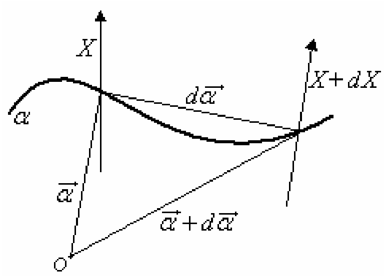
$$\psi' + k_2 = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Ana doğruların birim doğrultman vektörü X olan bir regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dır.



Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|}$$

olarak bulunur (Hacısalihoğlu1980). Eğer ana doğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\sigma = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \|D_T X\| ds = \left\{ k_1^{\,2} \sin^2 \psi + (\psi' + k_2)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_x = \frac{k}{d\sigma} = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|} : \|X'\| ds$$

olup burada

$$\det[d\alpha, X, X'] = \langle T \Lambda X, X' \rangle$$

terimi hesaplanırsa

$$\det[d\alpha, X, X'] = \psi' + k_2$$

bulunur. O halde dağılma parametresi

$$P_x = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|X'\|^2}$$

bağıntısından

$$P_X = \frac{\psi' + k_2}{k_1^{\,2}\sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.2: Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$\psi' + k_2 = 0$$

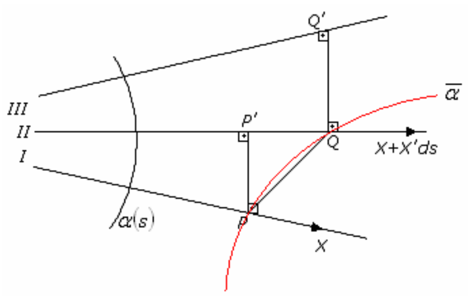
eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 2.1: Bir regle yüzeyin açılabilir olması için, eğri boyunca ana doğruların teğet düzlemde uzanması gerek ve yeter şarttır.

Diğer taraftan bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\overline{\alpha}}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan uzaklığı $\overline{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\overline{\alpha}(s,\overline{u}) = \alpha(s) + \overline{u}X(s)$$

şekline ifade edilebilir. $\overline{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s) + d\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin.



P,P’ ve Q,Q’ komşu ana doğrularının ortak dikmelerinin ana doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu ana doğrunun ortak dikmesi

$$X(s)\Lambda(X(s) + D_T X(s)ds) = X(s)\Lambda D_T X(s)ds$$

bağıntısından dolayı $X \Lambda D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\left\langle X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle X + D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

olacağından

$$\left\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa ve

$$\left\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

eşitliğinden dolayı

$$\left\langle D_T X, \frac{d\bar{\alpha}}{ds} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle D_T X, T + \frac{d\bar{u}}{ds} X + \bar{u} D_T X \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left\langle D_T X, T \right\rangle + \bar{u} \left\| D_T X \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -\frac{\left\langle D_T X, T \right\rangle}{\left| D_T X \right|^2}$$

bulunur (Hacısalihoğlu 1980). (2.3) eşitliklerinden, değerler yerine yazılırsa,

$$\bar{u} = \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2} \tag{2.7}$$

elde edilir. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\vec{\bar{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2} X(s)$$

şeklinde olur. Eğer $\left\| D_T X \right\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (2.7) eşitliğinde $\bar{u} = 0$ ve dolayısıyla $k_1 \sin\psi = 0$ alınması yeterlidir. Bu durumda şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2: $k_1 \neq 0$ olmak üzere, striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olan regle yüzeylerin (silindirik yüzeyler) doğrultman vektörleri dayanak eğrisinin binormal vektörü doğrultusunda uzanır.

Teorem 2.3: $\psi' + k_2 \neq 0$ olmak üzere bir M kapalı regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(t,v) \to \varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$$

tanımlansın. O zaman, M'nin doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v_o = \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}$$

değerine karşılık gelen $\varphi_{v_o} : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat: $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarında geçen iki doğrultmanı göz önüne alalım. $(t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I)$. Bu iki doğrultman arasında bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık ,

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} \|A\| dt$$

(2.4) eşitliğinden,

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - 2vk_1 \sin\psi + \left(k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2\right)v^2\right)^{1/2} dt$$

elde edilir. $v_0 \in IR$ için J'nin minimum değer alması $J'(v_o) = 0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$-2k_1 \sin\psi + 2\left(k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2\right)v_o = 0 \;\Rightarrow\; v_o = \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}$$

olmasını gerektirir. Demek ki ortogonal yörünge olan

$$\bar{\alpha} : I \to M$$
$$t \to \bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2} X(t)$$

eğrisi (striksiyon eğrisi) boyunca ölçülen uzaklık, doğrutmanlar arasındaki ortogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 2.3: $\dfrac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}$ değeri sabittir.

İspat: $\langle X,\overrightarrow{PQ}\rangle = 0$ ve $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{d\overline{\alpha}}{dt}$ olduğundan

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle = \left\langle X, T + \left(\frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\right) D_T X + \left(\frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\right)' X \right\rangle$$

$$= \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\langle X, D_T X\rangle + \left(\frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\right)' \langle X, X\rangle$$

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle = \left(\frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\right)'$$

Buradan

$$\left(\frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}\right)' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2} = \text{sbt}$$

bulunur.

Sonuç 2.4: Regle yüzey açılabilir bir regle yüzey ise

$$k_1 \sin\left(\int_I k_2 dt\right) = c \in IR$$

değeri sabittir.

Teorem 2.4: M regle yüzey olsun. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen ana doğrultman üzerinde $\varphi(t, v_o)$ noktası striksiyon noktasıdır $\Leftrightarrow$ α'nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanın teğet vektör alanı X olmak üzere , $\varphi(t, v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin normali $D_T X$ dir.

İspat: $(\Leftarrow)$: $\varphi_{V_0} : I \times \{v_o\} \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı, (2.4) eşitliğinden,

$$A = (1 - v k_1 \sin\psi)T + v(\psi' + k_2)\xi$$

olup (2.3) eşitliklerinden,

$$D_T X = -k_1 \sin\psi\, T + (\psi' + k_2)\xi$$

vektörünün teğet düzleme normal olması sebebiyle,

$$\langle D_T X, A\rangle = 0 \Rightarrow \langle -k_1 \sin\psi\, T + (\psi' + k_2)\xi, (1 - v k_1 \sin\psi)T + v(\psi' + k_2)\xi\rangle = 0$$
$$\Rightarrow -k_1 \sin\psi + k_1^2 \sin^2\psi\, v_o + v_o(\psi' + k_2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow v_o = \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_o)$ noktasının merkez noktası olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $\alpha(t)$ noktasından geçen doğrultmanın merkez noktası $\varphi(t, v_o)$ olsun.

$$\langle D_T X, X\rangle = \langle D_T X, A\rangle = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X\rangle = 1 \Rightarrow T[\langle X, X\rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_T X, X\rangle = 0$$

ve

$$\langle D_T X, A\rangle = \langle -k_1 \sin\psi\, T + (\psi' + k_2)\xi, (1 - v k_1 \sin\psi)T + v(\psi' + k_2)\xi\rangle$$
$$= -k_1 \sin\psi + k_1^2 \sin^2\psi\, v + v(\psi' + k_2)^2$$

olur. $\varphi(t, v_o)$ merkez noktası olduğundan

$$v_o = \frac{k_1 \sin\psi}{k_1^2 \sin^2\psi + (\psi' + k_2)^2}$$

dir. Yukarıda yerine yazılırsa $\langle D_T X, A\rangle = 0$ bulunur.

Teorem 2.5: Bir regle yüzeyin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada extremum değerini alır.

İspat: M regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(s, v) \to \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

ile verilsin. O zaman $\varphi(s, v)$ noktasındaki tanjant uzayın bir ortonormal bazı

$$\Phi = \{A, X\}$$

olur. $\varphi(s, v)$ noktasında $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\frac{d\varphi}{ds^*} = A_0 = \frac{1}{\|A\|} A$$

dır. $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin yay parametresi de s^* olduğuna göre

$$A_0 = \frac{d\varphi}{ds^*} = \frac{d\varphi}{ds}.\frac{ds}{ds^*} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = A$$

olup burada

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - vk_1 \sin\psi)^2 + v^2(\psi' + k_2)^2}}$$

dolayısıyla (2.3) eşitlikleri yardımıyla,

$$D_{A_0}A = \frac{1}{\|A\|}D_T A = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} (1 - vk_1 \sin\psi)' T + (1 - vk_1 \sin\psi)(k_1 \sin\psi X + k_1 \cos\psi \xi) \\ + (v(\psi' + k_2))' \xi + v(\psi' + k_2)(- k_1 \cos\psi T - (\psi' + k_2)X) \end{bmatrix}$$

$$D_{A_0}A = \frac{1}{\|A\|}\left\{ \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &(1 - vk_1 \sin\psi)' \\ &- v(\psi' + k_2)k_1 \cos\psi \end{aligned} \right\} T + \left\{ \begin{aligned} &k_1 \sin\psi(1 - vk_1 \sin\psi) \\ &- v(\psi' + k_2)^2 \end{aligned} \right\} X \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &k_1 \cos\psi(1 - vk_1 \sin\psi) \\ &+ (v(\psi' + k_2))' \end{aligned} \right\} \xi \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

ve benzer şekilde

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}D_T T = \frac{1}{\|A\|}\{k_1 \sin\psi \; X + k_1 \cos\psi \, \xi\}$$

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}\{k_1 \sin\psi \; X + k_1 \cos\psi \, \xi\} \tag{2.9}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}D_T \xi = \frac{1}{\|A\|}\{- k_1 \cos\psi T - (\psi' + k_2)X\}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}\{- k_1 \cos\psi T - (\psi' + k_2)X\} \tag{2.10}$$

bulunur. $\varphi(s,v)$ noktasındaki ortonormal baz $\{A_o, X, \xi\}$ dir. Burada $A_o = \frac{A}{\|A\|}$ olmak üzere $\varphi(s,v)$ noktasında $\xi_{\varphi(s,v)}$ normal vektör alanı,

$$\xi_{\varphi(s,v)} = A_o \Lambda X = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}((1 - vk_1 \sin\psi)T + v(\psi' + k_2)\xi)\Lambda X$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}\left((1-vk_1\sin\psi)T\Lambda X + v(\psi'+k_2)\xi\Lambda X\right)$$
$$= \frac{1}{\|A\|}\left(-v(\psi'+k_2)T + (1-vk_1\sin\psi)\xi\right)$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}\left(-v(\psi'+k_2)T + (1-vk_1\sin\psi)\xi\right) \qquad (2.11)$$

Diğer taraftan

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 X$$
$$S(X) = \mu_1 A_0 + \mu_2 X$$

S matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(A_0), A_0\rangle & \langle S(A_0), X\rangle \\ \langle S(X), A_0\rangle & \langle S(X), X\rangle \end{bmatrix}$$

$\langle S(X), X\rangle = 0$ ve $\langle S(A_0), X\rangle = \langle A_0, S(X)\rangle$ olduğundan

$$K(s,v) = \det S = -\langle S(A_0), X\rangle^2 \qquad (2.12)$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$S(A_0) = D_{A_0}\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds^*} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}.\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|}\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}$$

(2.11) eşitliğinden,

$$\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds} = \left(\frac{1}{\|A\|}\right)'\left(-v(\psi'+k_2)T + (1-vk_1\sin\psi)\xi\right) + \frac{1}{\|A\|}\left\{-v(\psi'+k_2)'T + (1-vk_1\sin\psi)'\xi\right\}$$
$$+\frac{1}{\|A\|}\left\{-v(\psi'+k_2)D_T T + (1-vk_1\sin\psi)D_T\xi\right\}$$

(2.3) eşitlikleri kullanılır ve ifade düzenlenirse,

$$\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds} = \left\{-v(\psi'+k_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)' - v(\psi'+k_2)'\frac{1}{\|A\|} - (1-vk_1\sin\psi)k_1\cos\psi\frac{1}{\|A\|}\right\}T$$
$$+\left\{(1-vk_1\sin\psi)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)' + (1-vk_1\sin\psi)'\frac{1}{\|A\|} - v(\psi'+k_2)k_1\cos\psi\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi$$
$$+\frac{-(\psi'+k_2)}{\|A\|}X$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$S(A_o)=\frac{1}{\|A\|}\left\{-v(\psi'+k_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'-v(\psi'+k_2)'\frac{1}{\|A\|}-(1-vk_1\sin\psi)k_1\cos\psi\frac{1}{\|A\|}\right\}T$$

$$+\frac{1}{\|A\|}\left\{(1-vk_1\sin\psi)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1-vk_1\sin\psi)'\frac{1}{\|A\|}-v(\psi'+k_2)k_1\cos\psi\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi$$

$$+\frac{-(\psi'+k_2)}{\|A\|^2}X$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle S(A_0);X\rangle=\frac{-(\psi'+k_2)}{\|A\|^2} \tag{2.13}$$

bulunur. (2.12) eşitliğinden,

$$K(s,v)=\frac{-(\psi'+k_2)^2}{\|A\|^4} \tag{2.14}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{\partial K(s,v)}{\partial v}=\frac{(\psi'+k_2)^2\left\{2v\left\{k_1^2\sin^2\psi+(\psi'+k_2)^2\right\}-2k_1\sin\psi\right\}}{\left\{v^2\left\{k_1^2\sin^2\psi+(\psi'+k_2)^2\right\}-2vk_1\sin\psi+1\right\}^3}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial K}{dv}=0$$

veya pay kısmındaki tam kareler toplamı olmayan kısmın sıfır olması gerekeceğinden

$$v\left\{k_1^2\sin^2\psi+(\psi'+k_2)^2\right\}-k_1\sin\psi=0$$

$$v=\frac{k_1\sin\psi}{\left\{k_1^2\sin^2\psi+(\psi'+k_2)^2\right\}}$$

bulunur. Bu değere ana doğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan $\vec{X}$ ana doğrusu üzerinde K eğrilik fonksiyonu extremum değerini merkez noktada alır. v'nin bu değeri yerine yazılırsa

$$K_{ext}=\frac{-\left\{k_1^2\sin^2\psi+(\psi'+k_2)^2\right\}^2}{(\psi'+k_2)^2} \tag{2.15}$$

elde edilir.

Sonuç 2.5: Bir regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır.

İspat: (2.6) ve (2.15) eşitliklerinden,

$$K_{ext} = -\left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

veya buradan

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{-K_{ext}}}$$

bulunur. K_{ext} değeri bir doğrultman boyunca tektir. O halde dağılma parametresinin değeri bir doğrultman için aynıdır,doğrultmandan doğrultmana değişir.

Teorem 2.6:(Chasles Teoremi) M bir regle yüzey, M'nin bir doğrultmanı boyunca normali ξ_v, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada M'nin normali ξ ise ξ ile ξ_v arasındaki açının tanjantı, merkezden ξ_v'nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır.

İspat: M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\to E^3 \\ (s,v) &\to \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Üstelik $v = 0$ için $\varphi(s,0)$ noktası, bir merkez noktası olsun. O zaman, $\alpha(s)$ eğrisi $\varphi(s,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. $\alpha : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultmanın birim teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(s,0)$ noktasında $D_T X$, M ye normal olur. Böylece $\varphi(s,0)$ noktasında $k_1 \sin\psi = 0$ olur. Buna göre $\varphi(s,0)$ merkez noktasında dağılma parametresi $k_1 \sin\psi = 0$ olduğundan, (2.6) eşitliğinden,

$$P_X = \frac{1}{\psi' + k_2}$$

olur. Diğer taraftan, bu doğrultman boyunca $k_1 \sin\psi = 0$ olduğundan $A = T + v(\psi' + k_2)\xi$ olur. Buna göre, doğrultman boyunca yüzeyin normali

$$\xi_v = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

veya

$$\xi_v = \frac{-v(\psi' + k_2)}{\left(1 + v^2(\psi' + k_2)^2\right)^{1/2}} T + \frac{1}{\left(1 + v^2(\psi' + k_2)^2\right)^{1/2}} \xi$$

pay ve paydayı $(\psi' + k_2)$ ile bölersek ve $P_X = 1/(\psi' + k_2)$ konumu yapılırsa

$$\xi_v = \frac{-v}{\left(P_X{}^2 + v^2\right)^{1/2}} T + \frac{P_X}{\left(P_X{}^2 + v^2\right)^{1/2}} \xi$$

elde edilir. ξ ile ξ_v arasındaki açının kosinüsü $\cos\theta = \langle \xi, \xi_v \rangle$,

$$\cos\theta = \frac{P_X}{\left(P_X{}^2 + v^2\right)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \cos\theta = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{v}{P_X}\right)^2\right)^{1/2}}$$

olduğundan

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 2.6: Bir M regle yüzeyi üzerinde bir ana doğru boyunca teğet düzlem bir uçtan ötekine ana doğru etrafında 180^0 döner.

İspat: M bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen L_p ana doğrusu üzerindeki merkez noktası P olsun. $P \in M$ noktasında M'nin normali ξ_P ve $Q \in L_P$ noktasındaki normalini de ξ_Q ile gösterelim. $d(P,Q) = v$ olmak üzere ξ_P ve ξ_Q arasındaki açı ise θ ise

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Burada $v \in IR$ parametresini $v \in IR^+ \cup \{0\} \cup IR^-$ olarak düşünebiliriz. Eğer $v = 0$ ise P noktası elde edilir ve $\theta = 0$ dır. $v \in IR^+$ olduğunda L_p üzerinde P'nin bir tarafında kalan noktaları ve $v \in IR^-$ halinde de diğer tarafında kalan noktaları elde ederiz. $v \in IR^+$ halinde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olur. $v \in IR^-$ halinde ise $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ olur. Böylece P' nin iki tarafında ξ normal vektör alanı 90^0 değişme gösterir. O halde, ξ' ye normal olan teğet düzlem L_p boyunca, P'nin iki tarafında 90'ar derecelik değişim gösterir.

3. E^3_1 UZAYINDA REGLE YÜZEYLER

3.1. Timelike Dayanak Eğrili, Spacelike Doğrultmanlı Timelike Regle Yüzeyler

$M \subset E^3$, timelike regle yüzeyinin timelike dayanak eğrisi

$$\begin{array}{l} \alpha : I \subset IR \longrightarrow E^3_1 \\ \quad t \qquad \longrightarrow \alpha(t) \end{array}$$

spacelike doğrultmanı X(t) ve M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı ξ olsun. Bu durumda M yüzeyi

$$\begin{array}{l} \varphi : I \times IR \longrightarrow E^3 \\ (t,v) \longrightarrow \varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t) \end{array}$$

dönüşümü ile belirtilir. Spacelike dayanak eğrisinin Frenet vektörleri T, N ve B olmak üzere sırasıyla timelike, spacelike ve spacelike vektör alanları olacaktır. $k_1(t)$ ve $k_2(t)$ eğrinin 1. ve 2. eğrilikleri olmak üzere dayanak eğrisi boyunca Frenet çatısı $\langle T,T \rangle = -1$ için,

$$D_T T = k_1 N \quad , \quad D_T N = k_1 T + k_2 B \quad , \quad D_T B = -k_2 N$$

ve

$$B \Lambda N = T, \; T \Lambda N = B, \; T \Lambda B = -N$$

şeklinde olacaktır.

X(t) doğrulman vektörünü $\alpha(t)$ noktalarında

$$X = f_1 T + f_2 N + f_3 B \quad , \quad f_1, f_2, f_3 \in C(E^3, IR)$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin α boyunca değişimini inceleyelim.

M timelike regle yüzeyinin birim normal vektör alanını $T \Lambda X = \xi$ olarak seçelim. Bu durumda

$$T \Lambda X = f_3 N + f_2 B$$

olup dolayısıyla

$$\xi = -f_3 N + f_2 B \tag{3.1.1}$$

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1 \Rightarrow f_2^{\,2} + f_3^{\,2} = 1$$

ve

$$X = f_2 N + f_3 B \tag{3.1.2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$D_T \xi = -k_1 f_3 \, T - (f_2 k_2 + f_3')N + (f_2' - k_2 f_3)B$$

ve

$$D_T X = k_1 f_2 \, T + (f_2' - f_3 k_2)N + (f_3' + k_2 f_2)B$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} D_T T &= k_1 f_2 \, X - k_1 f_3 \, \xi \\ D_T X &= k_1 f_2 \, T + \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \\ D_T \xi &= -k_1 f_3 \, T + \{-k_2 + f_3 f_2' - f_2 f_3'\}X \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

bağıntıları elde edilir.

Diğer taraftan $\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$ eşitliği $\forall v \in IR$ sabit değeri için M'nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı A ise (3.1.3)'den,

$$A = (1 + vk_1 f_2)T + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \tag{3.1.4}$$

şeklinde bulunur. A vektör alanı ξ 'e dik olacağından

$$k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2' = 0 \tag{3.1.5}$$

olacaktır.

M'nin teğet düzlemlerinin düzlemlerin daima sabit olması, ξ 'nin katsayısı ile yakından ilgilidir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1: M timelike regle yüzeyin, bir spacelike doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart

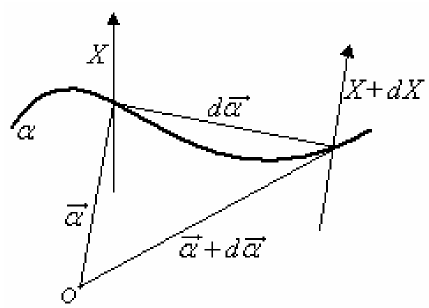
$$k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2' = 0$$

sağlanır.

Ana doğrularının birim spacelike doğrultman vektörü X olan bir timelike regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dır.



Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|}$$

olarak bulunur (Hacısalihoğlu 1980). Eğer ana doğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\sigma = \left\|\frac{dX}{ds}\right\| ds = \|D_T X\| ds = \left\{\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - k_1{}^2 f_2{}^2\right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_x = \frac{k}{d\sigma} = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|} : \|X'\| ds$$

olup burada

$$\det[d\alpha, X, X'] = \langle T \Lambda X, X' \rangle$$

terimi hesaplanırsa

$$\det[d\alpha, X, X'] = \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}$$

bulunur. O halde dağılma parametresi

$$P_x = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|X'\|^2}$$

bağıntısından

$$P_X = \frac{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'}{\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - k_1^2 f_2^2} \qquad (3.1.6)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.1.2: Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2' = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.1.1: Bir timelike regle yüzeyin açılabilir olması için, eğri boyunca ana doğruların teğet düzlemde uzanması gerek ve yeter şarttır.

Sonuç 3.1.2: $A = T + vD_T X$ vektör alanı,

$$\langle A, A \rangle = \langle T + vD_T X, T + vD_T X \rangle$$

$$= -(1 + vk_1 f_2)^2 + v^2 \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2$$

$$-(1 + vk_1 f_2)^2 + v^2 \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 = 0$$

$$\Rightarrow v^2 \left(\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - k_1^2 f_2^2 \right) - 2vk_1 f_2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_v = 4\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 \geq 0$$

O halde

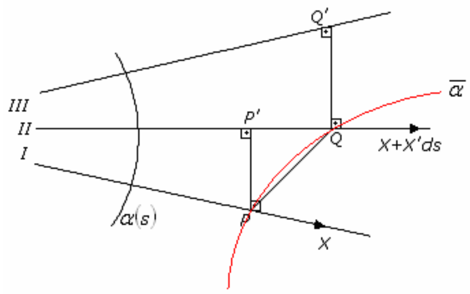
$$v_1 = \frac{1}{\left(\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\} - k_1 f_2 \right)}, \quad v_2 = \frac{-1}{\left(\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\} + k_1 f_2 \right)}$$

parametre değerleri için M üzerinde null striksiyon çizgileri elde edilir.

Diğer taraftan bir $\varphi(s,v)$ timelike regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\overline{\alpha}}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan uzaklığı $\overline{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\overline{\alpha}(s, \overline{u}) = \alpha(s) + \overline{u}X(s)$$

şekline ifade edilebilir. $\overline{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s) + d\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin.



P,P' ve Q,Q' komşu ana doğrularının ortak dikmelerinin ana doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu ana doğrunun ortak dikmesi

$$X(s)\Lambda(X(s)+D_T X(s)ds)=X(s)\Lambda D_T X(s)ds$$

bağıntısından dolayı $X\Lambda D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\left\langle X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0 \quad \text{ve} \quad \left\langle X+D_T X ds,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$$

olacağından

$$\left\langle D_T X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$$

elde edilir. Ayrıca dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa ve

$$\left\langle D_T X, X\right\rangle=0$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\left\langle D_T X,\frac{d\overline{\alpha}}{ds}\right\rangle=0 \Rightarrow \left\langle D_T X, T+\frac{d\overline{u}}{ds}X+\overline{u}D_T X\right\rangle=0$$

$$\Rightarrow \left\langle D_T X, T\right\rangle+\overline{u}\left\|D_T X\right\|^2=0$$

$$\Rightarrow \overline{u}=-\frac{\left\langle D_T X, T\right\rangle}{\left\|D_T X\right\|^2}$$

bulunur (Hacısalihoğlu 1980). (3.1.3)'den değerler yerine yazılırsa

$$\overline{u}=\frac{k_1 f_2}{\{k_2+f_2 f_3'-f_3 f_2'\}^2-k_1{}^2 f_2{}^2} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\vec{\overline{\alpha}}(s)=\vec{\alpha}(s)-\frac{\left\langle D_T X, T\right\rangle}{\left\|D_T X\right\|^2}X(s)$$

ve dolayısıyla

$$\bar{\vec{\alpha}}(s)=\vec{\alpha}(s)+\frac{k_1 f_2}{\{k_2+f_2 f_3'-f_3 f_2'\}^2-k_1^{\,2} f_2^{\,2}}X(s)$$

şeklinde olur. Eğer $\|D_T X\|=0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin timelike silindir olmasını karakterize eder. Bu durumda regle yüzey için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (3.1.7) bağıntısında $\bar{u}=0$ ve dolayısıyla $k_1 f_2=0$ alınması yeterlidir. Bu durumda şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.3: $k_1 \neq 0$ olmak üzere, striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olan timelike regle yüzeylerin (silindirik timelike yüzeyler) spacelike doğrultman vektörleri, timelike dayanak eğrisinin binormal vektörü doğrultusunda uzanır.

Teorem 3.1.3: $k_2+f_2 f_3'-f_3 f_2' \neq 0$ olmak üzere bir M kapalı timelike regle yüzeyi

$$\begin{aligned}\varphi &: I\times IR \to E^3\\ &(t,v)\to \varphi(t,v)=\alpha(t)+vX(t)\end{aligned}$$

tanımlansın. O zaman, M'nin spacelike doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v_o=\frac{k_1 f_2}{\{k_2+f_2 f_3'-f_3 f_2'\}^2-k_1^{\,2} f_2^{\,2}}$$

değerine karşılık gelen $\varphi_{v_o}: I\to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat: $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarında geçen iki spacelike doğrultmanı göz önüne alalım. $(t_1<t_2, t_1, t_2\in I)$. Bu iki doğrultman arasında bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık ,

$$J(v)=\int_{t_1}^{t_2}\|A\|dt$$

dir. (3.1.4) eşitliğinden

$$J(v)=\int_{t_1}^{t_2}\left(v^2\left(\{k_2+f_2 f_3'-f_3 f_2'\}^2-k_1^{\,2} f_2^{\,2}\right)+2vk_1 f_2-1\right)^{1/2}dt$$

elde edilir. $v_0\in IR$ için J'nin minimum değer alması $J'(v_o)=0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$2v_o\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)-2k_1f_2=0 \Rightarrow v_o=\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}$$

olmasını gerektirir. Demek ki ortogonal yörünge olan

$$\beta : I \to M$$

$$t \to \beta(t)=\alpha(t)+\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}X(t)$$

eğrisi (striksiyon eğrisi) boyunca ölçülen uzaklık, spacelike doğrutmanlar arasındaki ortogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.4: $\dfrac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}=$ sabittir.

İspat: $\left\langle X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$ ve $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{d\overline{\alpha}}{dt}$ olduğundan

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=\left\langle X,T+\left(\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\right)D_TX+\left(\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\right)'X\right\rangle$$

$$=\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\left\langle X,D_TX\right\rangle+\left(\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\right)'\left\langle X,X\right\rangle$$

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=\left(\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\right)'$$

Buradan

$$\left(\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}\right)'=0 \Rightarrow \frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}=sbt$$

bulunur.

Sonuç 3.1.5: Timelike regle yüzey açılabilir bir regle yüzey ise

$$k_1f_2=c\in IR$$

değeri sabittir.

Teorem 3.1.4: M timelike regle yüzey olsun. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen ana doğrultman üzerinde $\varphi(t, v_o)$ noktası striksiyon noktasıdır $\Leftrightarrow$ α'nın teğet vektör alanı T ve spacelike doğrultman vektör alanı X olmak üzere , $\varphi(t, v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin normali $D_T X$ dir.

İspat: $(\Leftarrow)$: $\varphi_{V_0} : I \times \{v_o\} \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı, (3.1.4) eşitliğinden,

$$A = (1 + v k_1 f_2) T + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi$$

olup (3.1.3) eşitliğinden,

$$D_T X = k_1 f_2 \, T + \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi$$

teğet düzleme normal olması sebebiyle,

$\langle D_T X, A \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle k_1 f_2 \, T + \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \, , \, (1 + v_o k_1 f_2) T + v_o \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -k_1 f_2 (1 + v_o k_1 f_2) + v_o \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 = 0$$

$$v_o = \frac{k_1 f_2}{\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - k_1^2 f_2^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_o)$ noktasının merkez noktası olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $\alpha(t)$ noktasından geçen spacelike doğrultman üzerindeki merkez noktası $\varphi(t, v_o)$ olsun.

$$\langle D_T X, X \rangle = \langle D_T X, A \rangle = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X \rangle = 1 \Rightarrow T[\langle X, X \rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0$$

ve

$$\langle D_T X, A \rangle = \langle k_1 f_2 \, T + \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \, , \, (1 + v_o k_1 f_2) T + v_o \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \rangle$$
$$= -k_1 f_2 (1 + v_o k_1 f_2) + v_o \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2$$

olur. $\varphi(t, v_o)$ merkez noktası olduğundan

$$v_o = \frac{k_1 f_2}{\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - k_1^2 f_2^2}$$

dir, yukarıda yerine yazılırsa $\langle D_T X, A \rangle = 0$ bulunur.

Teorem 3.1.5: Bir timelike regle yüzeyin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir spacelike doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada extremum değerini alır.

İspat: M regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(s,v) \to \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

ile verilsin. O zaman $\varphi(s,v)$ noktasındaki tanjant uzayın bir ortonormal bazı

$$\Phi = \{A, X\}$$

olur. $\varphi(s,v)$ noktasında $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\frac{d\varphi}{ds^*} = A_0 = \frac{1}{\|A\|} A$$

dır. $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin yay parametresi de s^* olduğuna göre

$$A_0 = \frac{d\varphi}{ds^*} = \frac{d\varphi}{ds} . \frac{ds}{ds^*} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = A$$

olup burada

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - (1 + vk_1 f_2)^2}}$$

dolayısıyla

$$D_{A_0} A = \frac{1}{\|A\|}\left[\begin{array}{l}(1+vk_1 f_2)' T + (1+vk_1 f_2)(k_1 f_2 X - k_1 f_3 \xi) + \{v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\}' \xi \\ + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}(-k_1 f_3 T + \{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\} X)\end{array}\right]$$

$$D_{A_0} A = \frac{1}{\|A\|}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}(1+vk_1 f_2)' \\ - vk_1 f_3\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\end{array}\right\} T + \left\{\begin{array}{l}k_1 f_2(1+vk_1 f_2) \\ + v(k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2')^2\end{array}\right\} X \\ + \left\{-k_1 f_3 (1+vk_1 f_2) + \{v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\}'\right\} \xi\end{array}\right] \tag{3.1.8}$$

ve benzer şekilde (3.1.3) eşitliğinden,

$$D_{A_0} T = \frac{1}{\|A\|} D_T T = \frac{1}{\|A\|}\{k_1 f_2 X - k_1 f_3 \xi\}$$

$$D_{A_0} T = \frac{1}{\|A\|}\{k_1 f_2 X - k_1 f_3 \xi\} \tag{3.1.9}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|} D_T \xi = \frac{1}{\|A\|}\{-k_1 f_3 T + \{-k_2 + f_3 f_2' - f_2 f_3'\}X\}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}\{-k_1 f_3 T + \{-k_2 + f_3 f_2' - f_2 f_3'\}X\} \tag{3.1.10}$$

bulunur. $\varphi(s,v)$ noktasındaki ortonormal baz $\{A_o,\ X,\ \xi\}$ dir. Burada $A_o = \frac{A}{\|A\|}$ olmak üzere $\varphi(s,v)$ noktasında $\xi_{\varphi(s,v)}$ normal vektör alanı

$$\xi_{\varphi(s,v)} = A_o \Lambda X = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\varphi(s,v)} &= \frac{1}{\|A\|}\left((1 + vk_1 f_2)T + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi\right)\Lambda X \\
&= \frac{1}{\|A\|}\left((1 + vk_1 f_2)T\Lambda X + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi \Lambda X\right) \\
&= \frac{1}{\|A\|}\left(v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}T + (1 + vk_1 f_2)\xi\right)
\end{aligned}$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}\left(v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}T + (1 + vk_1 f_2)\xi\right) \tag{3.1.11}$$

Diğer taraftan

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 X$$

$$S(X) = \mu_1 A_0 + \mu_2 X$$

S matrisi

$$S = \begin{bmatrix} -\langle S(A_0), A_0\rangle & \langle S(A_0), X\rangle \\ -\langle S(X), A_0\rangle & \langle S(X), X\rangle \end{bmatrix}$$

$\langle S(X), X\rangle = 0$ ve $\langle S(A_0), X\rangle = \langle A_0, S(X)\rangle$ olduğundan

$$K(s,v) = \det S = \langle S(A_0), X\rangle^2 \tag{3.1.12}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$S(A_0) = D_{A_0}\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds^*} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}.\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|}\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}$$

(3.1.11) eşitliğinden,

$$\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}=\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'\left(v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}T+(1+vk_1f_2)\xi\right)+\frac{1}{\|A\|}\left\{v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}'T+(1+vk_1f_2)'\xi\right\}$$
$$+\frac{1}{\|A\|}\left\{v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}D_TT+(1+vk_1f_2)D_T\xi\right\}$$

(3.1.3) eşitlikleri kullanılır ve ifade düzenlenirse,

$$\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}=\left\{v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'-k_1f_3(1+vk_1f_2)\frac{1}{\|A\|}+v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}'\frac{1}{\|A\|}\right\}T$$
$$+\left\{(1+vk_1f_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1+vk_1f_2)'\frac{1}{\|A\|}-k_1f_3v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi$$
$$+\left\{-\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\frac{1}{\|A\|}\right\}X$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$S(A_0)=\frac{1}{\|A\|}\left\{v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'-k_1f_3(1+vk_1f_2)\frac{1}{\|A\|}+v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}'\frac{1}{\|A\|}\right\}T$$
$$+\frac{1}{\|A\|}\left\{(1+vk_1f_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1+vk_1f_2)'\frac{1}{\|A\|}-k_1f_3v\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi$$
$$+\frac{1}{\|A\|^2}\{-\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}\}X$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle S(A_0);X\rangle=\frac{-\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}}{\|A\|^2} \tag{3.1.13}$$

bulunur. (3.1.12) eşitliğinden,

$$K(s,v)=\frac{(k_2+f_2f_3'-f_3f_2')^2}{\|A\|^4} \tag{3.1.14}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{\partial K(s,v)}{\partial v}=\frac{-2(-k_2+f_3f_2'-f_2f_3')^2\left\{2v\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)-2k_1f_2\right\}}{\left\{v^2\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)-2vk_1f_2-1\right\}^3}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial K}{dv}=0$$

veya pay kısmındaki tam kareler toplamı olmayan kısmın sıfır olması gerekeceğinden

$$2v\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)-2k_1f_2=0$$

$$v=\frac{k_1f_2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2}$$

bulunur. Bu değere, ana doğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan $\vec{X}$ ana doğrusu üzerinde K eğrilik fonksiyonu extremum değerini merkez noktada alır. v'nin bu değeri (3.1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$K_{ext}=\frac{\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)^2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.6: Bir timelike regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır.

İspat: Gauss eğriliğinin extremum değeri

$$K_{ext}=\frac{\left(\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2-k_1{}^2f_2{}^2\right)^2}{\{k_2+f_2f_3'-f_3f_2'\}^2}$$

idi. K'nın doğrultman boyunca extremum değeri dağılma parametresine bağlıdır. Yani

$$K_{ext}=\left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

veya buradan

$$P_X=\frac{1}{\sqrt{K_{ext}}}$$

bulunur. K_{ext} değeri bir doğrultman boyunca tektir. O halde dağılma parametresinin değeri bir doğrultman için aynıdır, doğrultmandan doğrultmana değişir.

Teorem 3.1.6: (Chasles Teoremi) M bir timelike regle yüzey, M'nin bir doğrultmanı boyunca normali ξ_v, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada M'nin normali ξ ise ξ

ile ξ_v arasındaki açının tanjantı, merkezden ξ_v'nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır.

İspat: M yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(s,v) \to \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s)$$

şeklinde verilsin. Üstelik $v = 0$ için $\varphi(s,0)$ noktası, bir merkez noktası olsun. O zaman, $\alpha(s)$ eğrisi $\varphi(s,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. $\alpha : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultmanın birim teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(s,0)$ noktasında $D_T X$, M ye normal olur. Böylece $\varphi(s,0)$ noktasında $k_1 f_2 = 0$ olur. Buna göre $\varphi(s,0)$ merkez noktasında dağılma parametresi $k_1 f_2 = 0$ olduğundan,

$$P_X = \frac{1}{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'}$$

olur. Diğer taraftan, bu doğrultman boyunca $k_1 f_2 = 0$ olduğundan

$$A = T + v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}\xi$$

olur. Buna göre, doğrultman boyunca yüzeyin normali

$$\xi_v = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

veya

$$\xi_v = \frac{v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}}{\left|v^2\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - 1\right|^{1/2}} T + \frac{1}{\left|v^2\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2 - 1\right|^{1/2}} \xi$$

$\langle A, A \rangle < 0$ olduğu da kullanılarak

$$\xi_v = \frac{v\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}}{\left(1 - v^2\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2\right)^{1/2}} T + \frac{1}{\left(1 - v^2\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}^2\right)^{1/2}} \xi$$

pay ve paydayı $\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}$ ile bölersek ve $P_X = 1/\{k_2 + f_2 f_3' - f_3 f_2'\}$ konumu yapılırsa

$$\xi_v = \frac{v}{\left(P_X{}^2 - v^2\right)^{1/2}} T + \frac{P_X}{\left(P_X{}^2 - v^2\right)^{1/2}} \xi$$

elde edilir. ξ ile ξ_v arasındaki açının kosinüsü $\cos\theta = \langle \xi, \xi_v \rangle$,

$$\cos\theta = \frac{P_X}{\left(P_X{}^2 - v^2\right)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \cos\theta = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{P_X}\right)^2\right)^{1/2}}$$

olduğundan

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.8: Bir M timelike regle yüzeyi üzerinde bir ana doğru boyunca teğet düzlem bir uçtan ötekine ana doğru etrafında 180^0 döner.

İspat: M bir timelike regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen L_p spacelike ana doğrusu üzerindeki merkez noktası P olsun. $P \in M$ noktasında M'nin normali ξ_P ve $Q \in L_P$ noktasındaki normalini de ξ_Q ile gösterelim. $d(P, Q) = v$ olmak üzere spacelike ξ_P ve ξ_Q vektörleri arasındaki açı ise θ ise

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Burada $v \in IR$ parametresini $v \in IR^+ \cup \{0\} \cup IR^-$ olarak düşünebiliriz. Eğer $v = 0$ ise P noktası elde edilir ve $\theta = 0$ dır. $v \in IR^+$ olduğunda L_p üzerinde P 'nin bir tarafında kalan noktaları ve $v \in IR^-$ halinde de diğer tarafında kalan noktaları elde ederiz. $v \in IR^+$ halinde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olur. $v \in IR^-$ halinde ise $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ olur. Böylece P ' nin iki tarafında ξ normal vektör alanı 90^0 değişme gösterir. O halde, ξ ' ye normal olan teğet düzlem, spacelike L_p doğrusu boyunca, P'nin iki tarafında 90'ar derecelik değişim gösterir. Dolayısıyla 180^0 'lik bir değişim söz konusudur.

3.2. Spacelike Dayanak Eğrili, Timelike Doğrultmanlı Timelike Regle Yüzeyler

$M \subset E^3$, timelike regle yüzeyinin spacelike dayanak eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset IR &\longrightarrow E_1^3 \\ t \quad &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

timelike doğrultmanı X(t) ve M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı ξ olsun. Bu durumda M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\longrightarrow E^3 \\ (t, v) &\longrightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirtilir. Spacelike dayanak eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere sırasıyla spacelike, timelike ve spacelike veya spacelike, spacelike ve timelike vektör alanları olacaktır. $k_1(t)$ ve $k_2(t)$ eğrinin 1. ve 2. eğrilikleri ve $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, $\langle B, B \rangle = -\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere dayanak eğrisi boyunca Frenet çatısı

$$D_T T = k_1 N \quad , \quad D_T N = -\varepsilon k_1 T + k_2 B \quad , \quad D_T B = k_2 N$$

ve

$$B \Lambda N = \varepsilon T, \; T \Lambda N = B, \; T \Lambda B = N$$

şeklinde olacaktır. X(t) timelike doğrulman vektörünü $\alpha(t)$ noktalarında

$$X = f_1 T + f_2 N + f_3 B \qquad , \quad f_1, f_2, f_3 \in C(E^3, IR)$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin α boyunca değişimini inceleyelim.

ξ yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere $T \Lambda X = \xi$ seçelim. Bu durumda

$$T \Lambda X = f_3 N + f_2 B$$

olup dolayısıyla

$$\xi = f_3 N + f_2 B \tag{3.2.1}$$

$$\langle \xi, \xi \rangle = 1 \Rightarrow f_3^{\,2} - f_2^{\,2} = \varepsilon$$

ve

$$X = f_2 N + f_3 B \tag{3.2.2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$D_T\xi = -\varepsilon k_1 f_3\, T + (f_2 k_2 + f_3')N + (f_2' + k_2 f_3)B$$

ve

$$D_T X = -\varepsilon k_1 f_2\, T + (f_3 k_2 + f_2')N + (f_3' + k_2 f_2)B$$

olacaktır. O halde,

$$\begin{aligned} D_T T &= -\varepsilon k_1 f_2\, X + \varepsilon k_1 f_3\, \xi \\ D_T X &= -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \qquad (3.2.3) \\ D_T\xi &= -\varepsilon k_1 f_3\, T + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}X \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilmiş olur.

Diğer taraftan $\varphi(t,v) = \alpha(t) + vX(t)$ eşitliği $\forall v \in IR$ sabit değeri için M'nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı A ise,

$$A = T + vD_T X$$

olduğundan

$$A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \qquad (3.2.4)$$

şeklinde bulunur. A vektör alanı ξ 'e dik olacağından

$$k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0 \qquad (3.2.5)$$

olacaktır.

Bir doğrultman boyunca, M'nin teğet düzlemlerinin çakışık oldukları genellikle doğru değildir. Ancak bu düzlemlerin daima sabit olması, ξ 'nin katsayısı ile yakından ilgilidir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1: M timelike regle yüzeyinin, bir timelike doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart

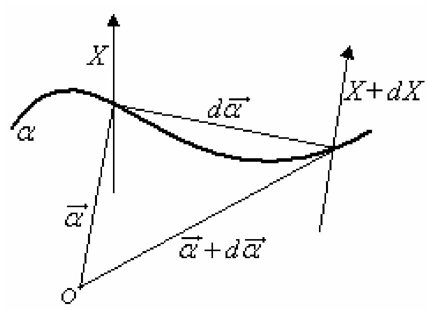
$$k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0$$

sağlanmasıdır.

Ana doğruların birim timelike doğrultman vektörü X olan bir timelike regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu ana timelike doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dır.



Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|}$$

olarak bulunur (Hacısalihoğlu 1980). Eğer ana doğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\sigma = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \|D_T X\| ds = \left\{ k_1{}^2 f_2{}^2 + \left\{ k_2 + \varepsilon\left(f_3 f_2' - f_2 f_3'\right)\right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_x = \frac{k}{d\sigma} = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|} : \|X'\| ds$$

olup burada

$$\det[d\alpha, X, X'] = \langle T \Lambda X, X' \rangle$$

terimi hesaplanırsa

$$\det[d\alpha, X, X'] = k_2 + \varepsilon\left(f_3 f_2' - f_2 f_3'\right)$$

bulunur. O halde dağılma parametresi

$$P_x = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|X'\|^2}$$

bağıntısından

$$P_X = \frac{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')}{{k_1}^2 {f_2}^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} \tag{3.2.6}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.2: Bir $\vec{\varphi}(s, v)$ timelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.2.1: Bir timelike regle yüzeyin açılabilir olması için, spacelike dayanak eğrisi boyunca timelike ana doğruların teğet düzlemde uzanması gerek ve yeter şarttır.

Sonuç: $A = T + vD_T X$ vektör alanı,

$$\langle A, A \rangle = \langle T + vD_T X, T + vD_T X \rangle$$

$$= (1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2 + v^2\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2$$

$$(1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2 + v^2\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 = 0$$

$$\Rightarrow v^2\left(\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 + {k_1}^2 {f_2}^2\right) - 2v\varepsilon k_1 f_2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta_v = -4\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 \leq 0$$

$\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 \neq 0$ için v değerleri sanaldır. O halde

$$\Delta_v = 0 \Leftrightarrow \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 = 0$$

ise,

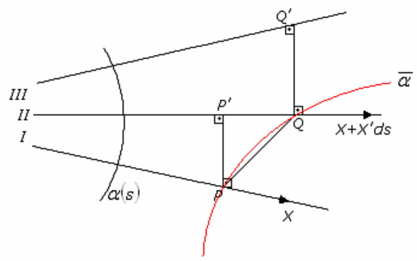
$$v = \frac{\varepsilon}{k_1 f_2}$$

parametre değeri için M üzerinde null striksiyon çizgisi elde edilir.

Diğer taraftan bir $\varphi(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\bar{\alpha}}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s,\bar{u}) = \alpha(s) + \bar{u}X(s)$$

şekline ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s) + d\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin.



P,P' ve Q,Q' komşu ana doğrularının ortak dikmelerinin ana doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu ana doğrunun ortak dikmesi

$$X(s)\Lambda(X(s) + D_T X(s)ds) = X(s)\Lambda D_T X(s)ds$$

bağıntısından dolayı $X\Lambda D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\left\langle X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle X + D_T X ds, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

olacağından

$$\left\langle D_T X, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Ayrıca dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa ve

$$\langle D_T X, X \rangle = 0$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\left\langle D_T X, \frac{d\bar{\alpha}}{ds} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle D_T X, T + \frac{d\bar{u}}{ds} X + \bar{u} D_T X \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, T \rangle + \bar{u}\|D_T X\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -\frac{\langle D_T X, T \rangle}{\|D_T X\|^2}$$

bulunur (Hacısalihoğlu 1980). (3.2.3) eşitlikleri kullanılarak değerler yerine yazılırsa

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1^2 f_2^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\vec{\bar{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle D_T X, T\rangle}{\|D_T X\|^2} X(s)$$

ve dolayısıyla

$$\vec{\bar{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1^2 f_2^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} X(s)$$

şeklinde olur. Eğer $\|D_T X\|=0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal timelike regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (3.2.7) eşitliğinde $\bar{u} = 0$ ve dolayısıyla $\varepsilon k_1 f_2 = 0$ alınması yeterlidir. Bu durumda şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.2: $k_1 \neq 0$ olmak üzere, striksiyon eğrisi, spacelike dayanak eğrisi olan timelike regle yüzeylerin (silindirik timelike yüzeyler) timelike doğrultman vektörleri dayanak eğrisinin binormal vektörü doğrultusunda uzanır.

Teorem 3.2.3: $k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') \neq 0$ olmak üzere bir M kapalı timelike regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\to E^3 \\ (t, v) &\to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

tanımlansın. O zaman, M'nin timelike doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1^2 f_2^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

değerine karşılık gelen $\varphi_{V_o} : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat: $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarında geçen iki timelike doğrultmanı göz önüne alalım. $(t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I)$. Bu iki doğrultman arasında bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık ,

$$J(v) = \int_{t_1}^{t_2} \|A\| dt$$

dir. (3.2.4) eşitliğinden,

$$J(v)=\int_{t_1}^{t_2}\left(v^2\left(\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2+k_1{}^2f_2{}^2\right)-2v\varepsilon k_1f_2+1\right)^{1/2}dt$$

elde edilir. $v_0\in IR$ için J'nin minimum değer alması $J'(v_o)=0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$2v_o\left(\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2+k_1{}^2f_2{}^2\right)-2\varepsilon k_1f_2=0 \Rightarrow v_o=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}$$

olmasını gerektirir. O halde ortogonal yörünge olan

$$\beta: I\to M$$
$$t\to\beta(t)=\alpha(t)+\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}X(t)$$

eğrisi (striksiyon eğrisi) boyunca ölçülen uzaklık, timelike doğrutmanlar arasındaki ortogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.2.3: $\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}=$ sabittir.

İspat: $\left\langle X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$ ve $\overrightarrow{PQ}=\frac{d\overline{\alpha}}{dt}$ olduğundan

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=\left\langle X,T+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)D_TX+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'X\right\rangle$$

$$=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\langle X,D_TX\rangle+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'\langle X,X\rangle$$

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=-\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'$$

Buradan

$$\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'=0 \Rightarrow \frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}=sbt$$

bulunur.

Sonuç 3.2.4: Timelike regle yüzey açılabilir bir regle yüzey ise

$$k_1 f_2 = c \in IR$$

değeri sabittir.

Teorem 3.2.4: M timelike regle yüzey ve α, yüzeyin spacelike dayanak eğrisi olsun. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen timelike ana doğrultman üzerinde $\varphi(t, v_o)$ noktası striksiyon noktasıdır $\Leftrightarrow$ α'nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanın teğet vektör alanı X olmak üzere , $\varphi(t, v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin normali $D_T X$ dir.

İspat: $(\Leftarrow)$: $\varphi_{v_0} : I \times \{v_o\} \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı, (3.2.4) eşitliğinden,

$$A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

olup (3.2.3) eşitliğinden,

$$D_T X = -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

vektörü teğet düzleme normal olması sebebiyle,

$\langle D_T X, A \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \,,\; (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2)T + v_o\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \rangle = 0$

$\Rightarrow -\varepsilon k_1 f_2 (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2) + v_o \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 = 0$

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{{k_1}^2 {f_2}^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_o)$ noktasının merkez noktası olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $\alpha(t)$ noktasından geçen timelike doğrultman üzerindeki merkez noktası $\varphi(t, v_o)$ olsun.

$$\langle D_T X, X \rangle = \langle D_T X, A \rangle = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X \rangle = 1 \Rightarrow T[\langle X, X \rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0$$

ve

$$\begin{aligned}\langle D_T X, A \rangle &= \langle -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \,,\; (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2)T + v_o\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \rangle \\ &= -\varepsilon k_1 f_2 (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2) + v_o \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\end{aligned}$$

olur. $\varphi(t, v_o)$ merkez noktası olduğundan

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{{k_1}^2 {f_2}^2 + \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

dir, yukarıda yerine yazılırsa $\langle D_T X, A \rangle = 0$ bulunur.

Teorem 3.2.4: Bir timelike regle yüzeyin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir timelike doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada extremum değerini alır.

İspat: M timelike regle yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\to E^3 \\ (s, v) &\to \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

ile verilsin. O zaman $\varphi(s, v)$ noktasındaki tanjant uzayın bir ortonormal bazı

$$\Phi = \{A, X\}$$

olur. $\varphi(s, v)$ noktasında $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\frac{d\varphi}{ds^*} = A_0 = \frac{1}{\|A\|} A$$

dır. $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin yay parametresi de s^* olduğuna göre

$$A_0 = \frac{d\varphi}{ds^*} = \frac{d\varphi}{ds} . \frac{ds}{ds^*} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = A$$

olup burada

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2 \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2}}$$

dolayısıyla

$$D_{A_0} A = \frac{1}{\|A\|} \begin{bmatrix} (1 - v\varepsilon k_1 f_2)' T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)(-\varepsilon k_1 f_2 X + \varepsilon k_1 f_3 \xi) + \{v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}' \xi \\ + \{v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}(-\varepsilon k_1 f_3 T + \{k_2 - \varepsilon(f_2 f_3' - f_3 f_2')\} X) \end{bmatrix}$$

$$D_{A_0} A = \frac{1}{\|A\|} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1 - v\varepsilon k_1 f_2)' \\ - v\varepsilon k_1 f_3 \{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} \end{Bmatrix} T + \begin{Bmatrix} - \varepsilon k_1 f_2 (1 - v\varepsilon k_1 f_2) \\ + v(k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3'))^2 \end{Bmatrix} X \\ + \left\{ \varepsilon k_1 f_3 (1 - v\varepsilon k_1 f_2) + \{v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}' \right\} \xi \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

ve benzer şekilde (3.2.3) eşitliğinden,

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}D_T T = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_2\, X + \varepsilon k_1 f_3\, \xi\}$$

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_2\, X + \varepsilon k_1 f_3\, \xi\} \tag{3.2.9}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}D_T \xi = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_3\, T + \{k_2 - \varepsilon(f_2 f_3' - f_3 f_2')\}X\}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_3\, T + \{k_2 - \varepsilon(f_2 f_3' - f_3 f_2')\}X\} \tag{3.2.10}$$

bulunur. $\varphi(s,v)$ noktasındaki ortonormal baz $\{A_o,\, X,\, \xi\}$ dir. Burada $A_o = \frac{A}{\|A\|}$ olmak üzere $\varphi(s,v)$ noktasında $\xi_{\varphi(s,v)}$ normal vektör alanı

$$\xi_{\varphi(s,v)} = A_o \Lambda X = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\varphi(s,v)} &= \frac{1}{\|A\|}\left((1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi\right)\Lambda X \\
&= \frac{1}{\|A\|}\left((1 - v\varepsilon k_1 f_2)T\Lambda X + v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi\Lambda X\right) \\
&= \frac{1}{\|A\|}\left(-v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)\xi\right)
\end{aligned}$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}\left(-v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)\xi\right) \tag{3.2.11}$$

Diğer taraftan

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 X$$

$$S(X) = \mu_1 A_0 + \mu_2 X$$

S matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(A_0), A_0\rangle & -\langle S(A_0), X\rangle \\ \langle S(X), A_0\rangle & -\langle S(X), X\rangle \end{bmatrix}$$

$\langle S(X), X\rangle = 0$ ve $\langle S(A_0), X\rangle = \langle A_0, S(X)\rangle$ olduğundan

$$K(s,v) = \det S = \langle S(A_0), X\rangle^2 \tag{3.2.12}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$S(A_0)=D_{A_0}\xi_{\varphi(s,v)}=\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds^*}=\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}.\frac{ds}{ds^*}=\frac{1}{\|A\|}\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}$$

(3.2.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}=&\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'\left(-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}T+(1-v\varepsilon k_1f_2)\xi\right)\\&+\frac{1}{\|A\|}\left\{-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}'T+(1-v\varepsilon k_1f_2)'\xi\right\}\\&+\frac{1}{\|A\|}\left\{-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}D_TT+(1-v\varepsilon k_1f_2)D_T\xi\right\}\end{aligned}$$

(3.2.3) eşitlikleri kullanılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}=&\left\{-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3(1-v\varepsilon k_1f_2)\frac{1}{\|A\|}\right\}T\\&+\left\{(1-v\varepsilon k_1f_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1-v\varepsilon k_1f_2)'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi\\&+\frac{1}{\|A\|}\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}X\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}S(A_o)=&\frac{1}{\|A\|}\left\{-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'-v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3(1-v\varepsilon k_1f_2)\frac{1}{\|A\|}\right\}T\\&+\frac{1}{\|A\|}\left\{(1-v\varepsilon k_1f_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1-v\varepsilon k_1f_2)'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3v\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi\\&+\frac{1}{\|A\|^2}\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}X\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle S(A_0);X\rangle=\frac{-\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}}{\|A\|^2}\qquad(3.2.13)$$

bulunur. (3.2.12) eşitliğinden,

$$K(s,v)=\frac{\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}{\|A\|^4} \tag{3.2.14}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{\partial K(s,v)}{\partial v}=\frac{2(k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3'))^2\left\{2v\left(\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2+k_1{}^2f_2{}^2\right)-2\varepsilon k_1f_2\right\}}{\left\{v^2\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2+(1-v\varepsilon k_1f_2)^2\right\}^3}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial K}{dv}=0$$

veya pay kısmındaki tam kareler toplamı olmayan kısmın sıfır olması gerekeceğinden

$$v\left(\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2+k_1{}^2f_2{}^2\right)-\varepsilon k_1f_2=0$$

$$v=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}$$

bulunur. Bu değere, ana doğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan $\vec{X}$ ana doğrusu üzerinde K eğrilik fonksiyonu extremum değerini merkez noktada alır. v'nin bu değeri yerine yazılırsa

$$K_{ext}=\frac{\left(k_1{}^2f_2{}^2+\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)^2}{\{k_2+\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2} \tag{3.2.15}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.6: Bir regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır.

İspat: (3.2.6) ve (3.2.15) eşitliklerinden,

$$K_{ext}=\left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

veya buradan

$$P_X=\frac{1}{\sqrt{K_{ext}}}$$

bulunur. K_{ext} değeri bir timelike doğrultman boyunca tektir. O halde dağılma parametresinin değeri bir timelike doğrultman için aynıdır, doğrultmandan doğrultmana değişir.

Teorem 3.2.6: (Chasles Teoremi) M bir timelike regle yüzey, M'nin bir timelike doğrultmanı boyunca normali ξ_v, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada M'nin normali ξ ise ξ ile ξ_v arasındaki açının tanjantı, merkezden ξ_v'nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır.

İspat: M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\to E^3 \\ (s,v) &\to \varphi(s,v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Üstelik $v = 0$ için $\varphi(s,0)$ noktası, bir merkez noktası olsun. O zaman, $\alpha(s)$ eğrisi $\varphi(s,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. $\alpha : I \to M$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultmanın birim teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(s,0)$ noktasında $D_T X$, M ye normal olur. Böylece $\varphi(s,0)$ noktasında $k_1 f_2 = 0$ olur. Buna göre $\varphi(s,0)$ merkez noktasında dağılma parametresi $k_1 f_2 = 0$ olduğundan (3.2.6)eşitliğinden,

$$P_X = \frac{1}{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')}$$

olur. Diğer taraftan, bu doğrultman boyunca $k_1 f_2 = 0$ olduğundan (3.2.4) eşitliğinden,

$$A = T + v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

şeklinde olur. Buna göre, timelike doğrultman boyunca yüzeyin normali

$$\xi_v = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

veya

$$\xi_v = \frac{-v\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}}{\left(1 + v^2\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\right)^{1/2}} T + \frac{1}{\left(1 + v^2\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\right)^{1/2}} \xi$$

olup pay ve paydayı $\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}$ ile bölersek ve $P_X = 1/\{k_2 + \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}$ konumu yapılırsa

$$\xi_v = \frac{-v}{\left(P_X{}^2 + v^2\right)^{1/2}} T + \frac{P_X}{\left(P_X{}^2 + v^2\right)^{1/2}} \xi$$

elde edilir. ξ ile ξ_v arasındaki açının kosinüsü $\cos\theta = \langle \xi, \xi_v \rangle$,

$$\cos\theta = \frac{P_X}{\left(v^2 + P_X{}^2\right)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \cos\theta = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{v}{P_X}\right)^2\right)^{1/2}}$$

olduğundan

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.2.7: Dayanak eğrisi spacelike olan M timelike regle yüzeyi üzerinde bir timelike ana doğru boyunca, teğet düzlem; bir uçtan ötekine ana doğru etrafında 180^0 döner.

İspat: M bir timelike regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen L_p timelike ana doğrusu üzerindeki merkez noktası P olsun. $P \in M$ noktasında M'nin normali ξ_P ve $Q \in L_P$ noktasındaki normalini de ξ_Q ile gösterelim. $d(P,Q) = v$ olmak üzere spacelike ξ_P ve ξ_Q vektörleri arasındaki açı ise θ ise

$$\tan\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Burada $v \in IR$ parametresini $v \in IR^+ \cup \{0\} \cup IR^-$ olarak düşünebiliriz. Eğer $v = 0$ ise P noktası elde edilir ve $\theta = 0$ dır. $v \in IR^+$ olduğunda L_p üzerinde P'nin bir tarafında kalan noktaları ve $v \in IR^-$ halinde de diğer tarafında kalan noktaları elde ederiz. $v \in IR^+$ halinde $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olur. $v \in IR^-$ halinde ise $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$ olur. Böylece P' nin iki tarafında ξ normal vektör alanı 90^0 değişme gösterir. O halde, ξ' ye normal olan teğet düzlem L_p boyunca, P'nin iki tarafında 90'ar derecelik değişim gösterir.

3.3. Spacelike Dayanak Eğrili, Spacelike Doğrultmanlı Spacelike Regle Yüzeyler

$M \subset E^3$ spacelike regle yüzeyinin, spacelike dayanak eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset IR &\longrightarrow E_1^3 \\ t \quad &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

spacelike doğrultmanı X(t) ve M yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı ξ olsun. Bu durumda M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\longrightarrow E^3 \\ (t, v) &\longrightarrow \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t) \end{aligned}$$

dönüşümü ile belirtilir. Spacelike dayanak eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$ olmak üzere sırasıyla spacelike, timelike ve spacelike veya spacelike, spacelike ve timelike vektör alanları olacaktır. $k_1(t)$ ve $k_2(t)$ eğrinin 1. ve 2. eğrilikleri ve $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, $\langle B, B \rangle = -\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere dayanak eğrisi boyunca Frenet çatısı

$$D_T T = k_1 N \quad , \quad D_T N = -\varepsilon k_1 T + k_2 B \quad , \quad D_T B = k_2 N$$

ve

$$B \Lambda N = \varepsilon T, \; T \Lambda N = B, \; T \Lambda B = N$$

şeklinde olacaktır. X(t) spacelike doğrulman vektörünü $\alpha(t)$ noktalarında

$$X = f_1 T + f_2 N + f_3 B \qquad , \qquad f_1, f_2, f_3 \in C(E^3, IR)$$

olacak şekilde seçelim. Şimdi $\{T, X, \xi\}$ ortonormal sisteminin α boyunca değişimini inceleyelim.

ξ yüzeyin birim normal vektör alanı olmak üzere $T \Lambda X = \xi$ seçelim. Bu durumda,

$$T \Lambda X = f_3 N + f_2 B$$

olup dolayısıyla,

$$\xi = f_3 N + f_2 B \tag{3.3.1}$$

$$\langle \xi, \xi \rangle = -1 \Rightarrow f_2^{\,2} - f_3^{\,2} = \varepsilon$$

ve

$$X = f_2 N + f_3 B \tag{3.3.2}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan,

$$D_T\xi = -\varepsilon k_1 f_3\, T + (f_2 k_2 + f_3')N + (f_2' + k_2 f_3)B$$

ve

$$D_T X = -\varepsilon k_1 f_2\, T + (f_3 k_2 + f_2')N + (f_3' + k_2 f_2)B$$

olacaktır. O halde,

$$\begin{aligned} D_T T &= \varepsilon k_1 f_2\, X - \varepsilon k_1 f_3\, \xi \\ D_T X &= -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \\ D_T \xi &= -\varepsilon k_1 f_3\, T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}X \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

bağıntıları elde edilmiş olur.

Diğer taraftan $\varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$ eşitliği $\forall v \in IR$ sabit değeri için M'nin bir $\varphi_v : I \times \{v\} \to M$ eğrisini belirtir. Bu eğrinin teğet vektör alanı A ise,

$$A = T + vD_T X$$

olduğundan

$$A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \tag{3.3.4}$$

şeklinde bulunur. A vektör alanı ξ 'e dik olacağından

$$k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0 \tag{3.3.5}$$

olacaktır.

Bir doğrultman boyunca, M'nin teğet düzlemlerinin çakışık oldukları genellikle doğru değildir. Ancak bu düzlemlerin daima sabit olması, ξ 'nin katsayısı ile yakından ilgilidir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.1: M spacelike regle yüzeyinin, bir spacelike doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart

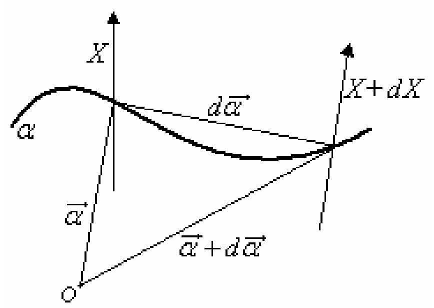
$$k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0$$

sağlanmasıdır.

Ana doğruların birim spacelike doğrultman vektörü X olan bir spacelike regle yüzeyin dralini P_X ile gösterelim. Komşu ana doğruların ortak dikmesi doğrultusundaki birim vektör, vektörel çarpım ile $X \wedge X'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

dir, burada $X' = D_T X$ dır.



Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{\alpha}(s)$ ve $\vec{\alpha}(s+ds) = \vec{\alpha}(s) + d\vec{\alpha}(s)$ olduğundan bu noktalardaki ana doğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{\alpha}$ vektörünün

$$\frac{X \wedge X'}{\|X'\|}$$

vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklık k ile gösterilirse

$$k = \left\langle d\vec{\alpha}, \frac{X \wedge X'}{\|X'\|} \right\rangle = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|}$$

olarak bulunur (Hacısalihoğlu 1980). Eğer ana doğruların küresel göstergesini göz önüne alırsak bu gösterge yay elementi olan

$$d\sigma = \left\| \frac{dX}{ds} \right\| ds = \|D_T X\| ds = \left\{ k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ds$$

komşu iki ana doğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece spacelike regle yüzeyin drali için

$$P_x = \frac{k}{d\sigma} = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|x'\|} : \|X'\| ds$$

olup burada

$$\det[d\alpha, X, X'] = \langle T \Lambda X, X' \rangle$$

terimi hesaplanırsa

$$\det[d\alpha, X, X'] = -\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}$$

bulunur. O halde dağılma parametresi

$$P_x = \frac{\det[d\alpha, X, X']}{\|X'\|^2}$$

bağıntısından

$$P_X = \frac{-\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} \qquad (3.3.6)$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.3.2: Bir $\vec{\varphi}(s, v)$ spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart

$$k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 3.3.1: Bir spacelike regle yüzeyin açılabilir olması için, spacelike dayanak eğrisi boyunca spacelike ana doğruların teğet düzlemde uzanması gerek ve yeter şarttır.

Sonuç 3.3.2: $A = T + vD_T X$ vektör alanı, $A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$

$$\begin{aligned}
\langle A, A\rangle &= \langle T + vD_T X, T + vD_T X\rangle \\
&= (1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2 - v^2\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 \\
&\Rightarrow (1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2 - v^2\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 = 0 \\
&\Rightarrow v^2\left(k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\right) - 2v\varepsilon k_1 f_2 + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \Delta_v = 4\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 \geq 0
\end{aligned}$$

O halde

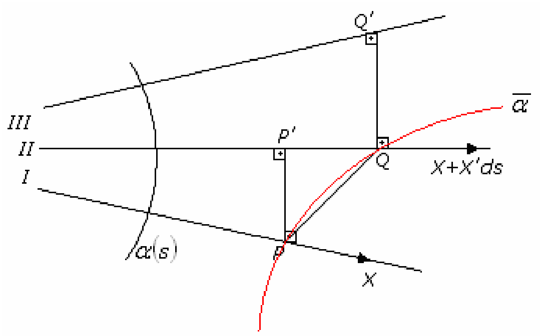
$$v_{1,2} = \frac{\varepsilon k_1 f_2 \pm \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

parametre değerleri için M spacelike regle yüzeyi üzerinde null striksiyon çizgileri elde edilir.

Diğer taraftan bir $\varphi(s,v)$ spacelike regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\bar{\alpha}}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ yer vektörü, $X(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan uzaklığı $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\bar{\alpha}(s,\bar{u})=\alpha(s)+\bar{u}X(s)$$

şekline ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi $\vec{X}(s)$ ve $\vec{X}(s)+d\vec{X}(s)$ olan komşu üç ana doğrusu verilsin.



P,P' ve Q,Q' komşu ana doğrularının ortak dikmelerinin ana doğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu ana doğrunun ortak dikmesi

$$X(s)\Lambda(X(s)+D_T X(s)ds)=X(s)\Lambda D_T X(s)ds$$

bağıntısından dolayı $X\Lambda D_T X$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\left\langle X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0 \quad \text{ve} \quad \left\langle X+D_T X ds,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$$

olacağından

$$\left\langle D_T X,\overrightarrow{PQ}\right\rangle=0$$

elde edilir. Ayrıca dayanak eğrisinin s yay-parametresine göre türevi alınırsa ve

$$\langle D_T X, X\rangle=0$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\left\langle D_T X,\frac{d\bar{\alpha}}{ds}\right\rangle=0 \Rightarrow \left\langle D_T X, T+\frac{d\bar{u}}{ds}X+\bar{u}D_T X\right\rangle=0$$

$$\Rightarrow \langle D_T X, T\rangle+\bar{u}\|D_T X\|^2=0$$

$$\Rightarrow \bar{u}=-\frac{\langle D_T X, T\rangle}{\|D_T X\|^2}$$

bulunur (Hacısalihoğlu 1980). (3.3.3) eşitliklerini kullanarak değerler yerine yazılırsa

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü

$$\bar{\vec{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) - \frac{\langle D_T X, T\rangle}{\|D_T X\|^2} X(s)$$

ve dolayısıyla

$$\bar{\vec{\alpha}}(s) = \vec{\alpha}(s) + \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} X(s)$$

şeklinde olur. Eğer $\|D_T X\|$=0 ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (3.3.7) eşitliğinde $\bar{u} = 0$ ve dolayısıyla $\varepsilon k_1 f_2 = 0$ alınması yeterlidir. Bu durumda şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3.3: $k_1 \neq 0$ olmak üzere, striksiyon eğrisi spacelike dayanak eğrisi olan spacelike regle yüzeylerin (silindirik spacelike yüzeyler) spacelike doğrultman vektörleri, dayanak eğrisinin binormal vektörü doğrultusunda uzanır.

Teorem 3.3.3: $k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3') \neq 0$ olmak üzere bir M kapalı spacelike regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(t, v) \to \varphi(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$$

tanımlansın. O zaman, M'nin spacelike doğrultmanları arasında, ortogonal yörüngeler boyunca en kısa uzaklık

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

değerine karşılık gelen $\varphi_{v_o} : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen uzaklıktır.

İspat: $\alpha(t_1)$ ve $\alpha(t_2)$ noktalarında geçen iki spacelike doğrultmanı göz önüne alalım. $(t_1 < t_2, t_1, t_2 \in I)$. Bu iki doğrultman arasında bir ortogonal yörünge boyunca olan uzaklık ,

$$J(v)=\int_{t_1}^{t_2}\|A\|dt$$

dir. (3.3.4) eşitliğinden,

$$J(v)=\int_{t_1}^{t_2}\left(v^2\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)-2v\varepsilon k_1f_2+1\right)^{1/2}dt$$

elde edilir. $v_0\in IR$ için J'nin ekstremum değer alması $J'(v_o)=0$ olması ile mümkündür. Bu ise

$$2v_o\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)-2\varepsilon k_1f_2=0 \Rightarrow v_o=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}$$

olmasını gerektirir. Demek ki ortogonal yörünge olan

$$\beta: I\to M$$
$$t\to\beta(t)=\alpha(t)+\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}X(t)$$

eğrisi (striksiyon eğrisi) boyunca ölçülen uzaklık, doğrutmanlar arasındaki ortogonal yörünge olan en kısa uzaklıktır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.3.4: $\dfrac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}=$ sabittir.

İspat: $\langle X,\overrightarrow{PQ}\rangle=0$ ve $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{d\overline{\alpha}}{dt}$ olduğundan

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=\left\langle X,T+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)D_TX+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'X\right\rangle$$

$$=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\langle X,D_TX\rangle+\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'\langle X,X\rangle$$

$$\left\langle X,\frac{d\overline{\alpha}}{dt}\right\rangle=\left(\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}\right)'$$

Buradan

$$\left(\frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} = \text{sbt}$$

bulunur.

Sonuç 3.3.5: Spacelike regle yüzey açılabilir bir regle yüzey ise

$$k_1 f_2 = c \in IR$$

değeri sabittir.

Teorem 3.3.4: M spacelike regle yüzeyinin spacelike dayanak eğrisi α olsun. O zaman, $\alpha(t)$ noktasından geçen spacelike ana doğrultman üzerinde $\varphi(t, v_o)$ noktası striksiyon noktasıdır $\Leftrightarrow$ α'nın teğet vektör alanı T ve doğrultmanın teğet vektör alanı X olmak üzere , $\varphi(t, v_o)$ noktasındaki teğet düzlemin normali $D_T X$ dir.

İspat: $(\Leftarrow)$: $\varphi_{V_0} : I \times \{v_o\} \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı, (3.3.4) eşitliğinden,

$$A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

olup (3.3.3) eşitliklerinden,

$$D_T X = -\varepsilon k_1 f_2 \, T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

vektörü teğet düzleme normal olması sebebiyle,

$\langle D_T X, A \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle -\varepsilon k_1 f_2 \, T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \, , \, (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2)T + v_o\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \rangle = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon k_1 f_2 (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2) - v_o\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 = 0$$

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

elde edilir. Bu ise $\varphi(t, v_o)$ noktasının merkez noktası olduğunu gösterir.

$(\Rightarrow)$: $\alpha(t)$ noktasından geçen spacelike doğrultman üzerindeki merkez noktası $\varphi(t, v_o)$ olsun.

$$\langle D_T X, X \rangle = \langle D_T X, A \rangle = 0$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\langle X, X \rangle = 1 \Rightarrow T[\langle X, X \rangle] = 0 \Rightarrow \langle D_T X, X \rangle = 0$$

ve

$$\langle D_T X, A\rangle = \langle -\varepsilon k_1 f_2\, T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi\ ,\ (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2)T + v_o\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi\rangle$$
$$\Rightarrow \langle D_T X, A\rangle = -\varepsilon k_1 f_2 (1 - v_o \varepsilon k_1 f_2) - v_o\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2$$

olur. $\varphi(t, v_o)$ merkez noktası olduğundan

$$v_o = \frac{\varepsilon k_1 f_2}{k_1{}^2 f_2{}^2 - \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

dir, yukarıda yerine yazılırsa $\langle D_T X, A\rangle = 0$ bulunur.

Teorem 3.3.5: Bir spacelike regle yüzeyin Gauss eğriliğinin mutlak değeri, bir spacelike doğrultman boyunca, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada extremum değerini alır.

İspat: M spacelike regle yüzeyi

$$\varphi : I \times IR \to E^3$$
$$(s, v) \to \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s)$$

ile verilsin. O zaman $\varphi(s, v)$ noktasındaki tanjant uzayın bir ortonormal bazı

$$\Phi = \{A, X\}$$

olur. $\varphi(s, v)$ noktasında $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin birim teğet vektörü

$$\frac{d\varphi}{ds^*} = A_0 = \frac{1}{\|A\|} A$$

dır. $\varphi(s, v = \text{sabit})$ eğrisinin yay parametresi de s^* olduğuna göre

$$A_0 = \frac{d\varphi}{ds^*} = \frac{d\varphi}{ds} . \frac{ds}{ds^*} \quad , \quad \frac{d\varphi}{ds} = A$$

olup burada

$$A = (1 - v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - v\varepsilon k_1 f_2)^2 - v^2\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}}$$

dolayısıyla (3.3.4) eşitliğinden,

$$D_{A_0}A = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} (1-v\varepsilon k_1 f_2)' T + (1-v\varepsilon k_1 f_2)(\varepsilon k_1 f_2 X - \varepsilon k_1 f_3 \xi) \\ + \{v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}' \xi \\ + \{v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}(-\varepsilon k_1 f_3 T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}X) \end{bmatrix}$$

$$D_{A_0}A = \frac{1}{\|A\|}\begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1-v\varepsilon k_1 f_2)' \\ -v\varepsilon k_1 f_3\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} \end{Bmatrix} T + \begin{Bmatrix} \varepsilon k_1 f_2 (1-v\varepsilon k_1 f_2) \\ + v(k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3'))^2 \end{Bmatrix} X \\ + \left\{ -\varepsilon k_1 f_3 (1-v\varepsilon k_1 f_2) + \{v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\}' \right\} \xi \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

ve benzer şekilde (3.3.3) eşitliklerinden,

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|} D_T T = \frac{1}{\|A\|}\{\varepsilon k_1 f_2 X - \varepsilon k_1 f_3 \xi\}$$

$$D_{A_0}T = \frac{1}{\|A\|}\{\varepsilon k_1 f_2 X - \varepsilon k_1 f_3 \xi\} \tag{3.3.9}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|} D_T \xi = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_3 T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}X\}$$

$$D_{A_0}\xi = \frac{1}{\|A\|}\{-\varepsilon k_1 f_3 T + \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}X\} \tag{3.3.10}$$

bulunur. $\varphi(s,v)$ noktasındaki ortonormal baz $\{A_o, X, \xi\}$ dir. Burada $A_o = \frac{A}{\|A\|}$ olmak üzere $\varphi(s,v)$ noktasında $\xi_{\varphi(s,v)}$ normal vektör alanı

$$\xi_{\varphi(s,v)} = A_o \Lambda X = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

$$\begin{aligned} \xi_{\varphi(s,v)} &= \frac{1}{\|A\|}((1-v\varepsilon k_1 f_2)T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi)\Lambda X \\ &= \frac{1}{\|A\|}((1-v\varepsilon k_1 f_2)T\Lambda X + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \Lambda X) \\ &= \frac{1}{\|A\|}(v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}T + (1-v\varepsilon k_1 f_2)\xi) \end{aligned}$$

$$\xi_{\varphi(s,v)} = \frac{1}{\|A\|}(v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}T + (1-v\varepsilon k_1 f_2)\xi) \tag{3.3.11}$$

Diğer taraftan

$$S(A_0) = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 X$$

$$S(X) = \mu_1 A_0 + \mu_2 X$$

S matrisi

$$S = \begin{bmatrix} \langle S(A_0), A_0 \rangle & \langle S(A_0), X \rangle \\ \langle S(X), A_0 \rangle & \langle S(X), X \rangle \end{bmatrix}$$

$\langle S(X), X \rangle = 0$ ve $\langle S(A_0), X \rangle = \langle A_0, S(X) \rangle$ olduğundan

$$K(s,v) = -\det S = \langle S(A_0), X \rangle^2 \tag{3.3.12}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan

$$S(A_0) = D_{A_0} \xi_{\varphi(s,v)} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds^*} = \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds} . \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\|A\|} \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds}$$

(3.3.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds} = & \left(\frac{1}{\|A\|} \right)' \left(v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2) \xi \right) \\ & + \frac{1}{\|A\|} \left\{ v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}' T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)' \xi \right\} \\ & + \frac{1}{\|A\|} \left\{ v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} D_T T + (1 - v\varepsilon k_1 f_2) D_T \xi \right\} \end{aligned}$$

(3.3.3) eşitlikleri kullanılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{\varphi(s,v)}}{ds} = & \left\{ v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} \left(\frac{1}{\|A\|} \right)' + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}' \frac{1}{\|A\|} - \varepsilon k_1 f_3 (1 - v\varepsilon k_1 f_2) \frac{1}{\|A\|} \right\} T \\ & + \left\{ (1 - v\varepsilon k_1 f_2) \left(\frac{1}{\|A\|} \right)' + (1 - v\varepsilon k_1 f_2)' \frac{1}{\|A\|} - \varepsilon k_1 f_3 v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} \frac{1}{\|A\|} \right\} \xi \\ & + \frac{1}{\|A\|} \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\} X \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$S(A_o)=\frac{1}{\|A\|}\left\{v\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+v\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3(1-v\varepsilon k_1f_2)\frac{1}{\|A\|}\right\}T$$

$$+\frac{1}{\|A\|}\left\{(1-v\varepsilon k_1f_2)\left(\frac{1}{\|A\|}\right)'+(1-v\varepsilon k_1f_2)'\frac{1}{\|A\|}-\varepsilon k_1f_3v\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}\frac{1}{\|A\|}\right\}\xi$$

$$+\frac{1}{\|A\|^2}\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}X$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle S(A_0);X\rangle=\frac{\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}}{\|A\|^2} \tag{3.3.13}$$

bulunur. (3.3.12) eşitliğinden,

$$K(s,v)=\frac{\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}{\|A\|^4} \tag{3.3.14}$$

şeklinde bulunur.

$$\frac{\partial K(s,v)}{\partial v}=\frac{2(k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3'))^2\left\{2v\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)-2\varepsilon k_1f_2\right\}}{\left\{v^2\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)-2v\varepsilon k_1f_2+1\right\}^3}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial K}{dv}=0$$

veya pay kısmındaki tam kareler toplamı olmayan kısmın sıfır olması gerekeceğinden

$$v\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)-\varepsilon k_1f_2=0$$

$$v=\frac{\varepsilon k_1f_2}{k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2}$$

bulunur. Bu değere, ana doğru üzerindeki karşılık gelen nokta merkez noktası olduğundan $\vec{X}$ ana doğrusu üzerinde K eğrilik fonksiyonu extremum değerini merkez noktada alır. v'nin bu değeri yerine yazılırsa

$$K_{ext}=\frac{\left(k_1{}^2f_2{}^2-\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2\right)^2}{\{k_2-\varepsilon(f_3f_2'-f_2f_3')\}^2} \tag{3.3.15}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.6: Bir regle yüzeyin dağılma parametresi yalnızca doğrultmanlara bağlıdır.

İspat: (3.3.6) ve (3.3.15) eşitliklerinden,

$$K_{ext} = \left(\frac{1}{P_X}\right)^2$$

veya buradan

$$P_X = \frac{1}{\sqrt{K_{ext}}}$$

bulunur. K_{ext} değeri bir spacelike doğrultman boyunca tektir. O halde dağılma parametresinin değeri bir spacelike doğrultman için aynıdır, doğrultmandan doğrultmana değişir.

Teorem 3.3.6: (Chasles Teoremi) M bir spacelike regle yüzey, M'nin bir spacelike doğrultmanı boyunca normali ξ_v, bu doğrultman üzerindeki merkez noktada M'nin normali ξ ise ξ ile ξ_v arasındaki açının tanjantı, merkezden ξ_v'nin başlangıç noktasına olan uzaklık ile doğru orantılıdır.

İspat: M yüzeyi

$$\begin{aligned} \varphi : I \times IR &\rightarrow E^3 \\ (s, v) &\rightarrow \varphi(s, v) = \alpha(s) + vX(s) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Üstelik $v = 0$ için $\varphi(s,0)$ noktası, bir merkez noktası olsun. O zaman, $\alpha(s)$ eğrisi $\varphi(s,0)$ merkez noktasından geçen bir ortogonal yörünge olur. $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $\alpha(s)$ noktasından geçen doğrultmanın birim spacelike teğet vektör alanı X olmak üzere, $\varphi(s,0)$ noktasında $D_T X$, M ye normal olur dolayısıyla timelike vektör alanıdır. Böylece $\varphi(s,0)$ noktasında $k_1 f_2 = 0$ olur. Buna göre $\varphi(s,0)$ merkez noktasında dağılma parametresi $k_1 f_2 = 0$ olduğundan, (3.3.6) eşitliğinden,

$$P_X = \frac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}}$$

olur. Diğer taraftan, bu doğrultman boyunca $k_1 f_2 = 0$ olduğundan, (3.3.4) eşitliğinden,

$$A = T + v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}\xi \qquad (3.3.16)$$

şeklinde olur. Buna göre, doğrultman boyunca yüzeyin normali,

$$\xi_v = \frac{1}{\|A\|} A \Lambda X$$

olup (3.3.2) ve (3.3.16) eşitliklerinden,

$$\xi_v = \frac{v\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}}{\left|1 - v^2\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\right|^{1/2}} T + \frac{1}{\left|1 - v^2\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2\right|^{1/2}} \xi$$

olup pay ve paydayı $\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}$ ile bölersek ve $P_X = 1/\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}$ konumu yapılırsa

$$\xi_v = \frac{v}{(P_X{}^2 - v^2)^{1/2}} T + \frac{P_X}{(P_X{}^2 - v^2)^{1/2}} \xi$$

elde edilir. ξ ile ξ_v arasındaki açının kosinüsü $\cosh\theta = \langle \xi, \xi_v \rangle$,

$$\cosh\theta = \frac{P_X}{(P_X{}^2 - v^2)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \cosh\theta = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{P_X}\right)^2\right)^{1/2}}$$

olduğundan

$$\tanh\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.3.8: Bir M spacelike regle yüzeyi üzerinde spacelike ana doğru boyunca teğet düzlem bir uçtan ötekine ana doğru

$$\frac{-1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} < v < \frac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

değerleri için mümkün bütün hiperbolik dönmeleri yapar.

İspat: M bir regle yüzey ve $P \in M$ noktasından geçen L_p ana doğrusu üzerindeki merkez noktası P olsun. $P \in M$ noktasında M'nin normali ξ_P ve $Q \in L_P$ noktasındaki normalini de ξ_Q ile gösterelim. $d(P,Q) = v$ olmak üzere ξ_P ve ξ_Q arasındaki açı ise θ ise

$$\tanh\theta = \frac{v}{P_x}$$

olur. Eğer $v = 0$ ise P ile Q noktaları aynıdır. Bu durumda $e^{2\theta} = 1$ olup dolayısıyla $\theta = 0$ dır.

Diğer taraftan, (3.3.16) eşitliğinden A spacelike olduğundan

$$1 - v^2 \{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 < \frac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

$$\frac{-1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} < v < \frac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

Eğer $0 < v < \dfrac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$ ise, $\tanh\theta > 0$ olup bu durumda $e^{2\theta} > 1$, dolayısıyla $\theta > 0$ olur.

Eğer $\dfrac{-1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} < v < 0$ ise, $\tanh\theta < 0$ olup bu durumda $e^{2\theta} < 1$, dolayısıyla $\theta < 0$ olur.

Sonuç olarak spacelike regle yüzeylerin, spacelike ana doğruları boyunca teğet düzlemleri

$$\frac{-1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2} < v < \frac{1}{\{k_2 - \varepsilon(f_3 f_2' - f_2 f_3')\}^2}$$

değerleri için mümkün olan bütün hiperbolik dönmeleri yapar.

KAYNAKLAR

Duggal, K. L. and Bejancu, A. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publisher.

Ekmekci, N. and İlarslan, K. 1998. Higher Curvatures in Lorentzian Space. Jour. Of Ins. Of Math. And Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol.11;97-102.

Ekmekci, N. 1991. Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi..

Hacısalihoğlu, H.H. 1980. Diferensiyel Geometri Cilt:I-II, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları No:1, Malatya.

Hicks, N. J. 1974. Notes On Differential Geometry, Von. Nost. Rein. Com., London ,

Ikawa, T.1985. On curves and submanifolds in an indefinite-Riemannian manifold. Tsukuba J. Math. Vol.9; 353-371.

Kılıç, O. 1996. IR_1^3 Minkowski 3-Uzayında Spacelike Eğrilerin Frenet ve Darboux Vektörleri, Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü .

Nakanishi, Y. 1988. On curves in pseudo-Riemannian submanifolds. Yokohama Mathematical Journal. Vol.36;137-146.

Nomizu, K. 1966. Fundamentals Of Linear Algebra, McGraw-Hill Book Company, pp.269, New York.

O'Neill, B. 1983. Semi-Reimann Geometry, Academic Press, New York.

Petrovič-Torgašev Miroslava and Šučurovič Emilija 2000. Some Characterizations of The Spacelike, The Timelike and The Null Curves On The Pseudohyperbolic Space H_0^2 in E_1^3, Kragujevac J. Math. 22, 71-82.

Sabuncuoğlu, A. 1982. Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler, Doçentlik Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

Turgut A. 1995. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

Tunçer Y. 2000. Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Tunçer Y. 2007. L^3 de Altmanifoldların Diferensiyel Geometrisi Ve Kinematiği Üzerine, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Seher TUNÇER
Doğum Yeri	Afyon - Şuhut
Doğum Tarihi	10.02.1978
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dili	İngilizce

	Eğitim Durumu
Lise	Afyon Lisesi, 1995
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2000.

	Çalıştığı Kurumlar ve Yıl Aralığı
2000-2004	Erkmen İlköğretim Okulu
2004-	Uşak Anadolu Meslek Lisesi, Teknik Lise ve Endüstri Meslek Lisesi