NEGATİFLİK VE KONKURUS ÖLÇÜMLERİ ARACILIĞIYLA KUANTUM DOLAŞIK DURUMLARIN BETİMLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Akif ÇAĞ

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Rasim DERMEZ

FİZİK ANABİLİM DALI

Haziran 2008

Bu tez çalışması Akü 07. FENED.09 nolu BAPK projesi ile desteklenmiştir.

T.C.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEGATİFLİK VE KONKURUS ÖLÇÜMLERİ ARACILIĞIYLA KUANTUM DOLAŞIK DURUMLARIN BETİMLENMESİ

Mehmet Akif ÇAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Anabilim Dalı
Danışman
Yrd. Doç. Dr. Rasim DERMEZ

AFYONKARAHİSAR
2008

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Rasim DERMEZ danışmanlığında, **Mehmet Akif ÇAĞ** tarafından hazırlanan **"Negatiflik ve Konkurus ölçümleri aracılığıyla kuantum dolaşık durumların betimlenmesi**" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 16/06/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

16 / 06 / 2008

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Muhammed YÜRÜSOY

(Başkan)

Jüri Üyesi: Yrd. Doç. Dr. Rasim DERMEZ

(Danışman)

Jüri Üyesi: Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEGATİFLİK VE KONKURUS ÖLÇÜMLERİ ARACILIĞIYLA KUANTUM DOLAŞIK DURUMLARIN BETİMLENMESİ

Mehmet Akif ÇAĞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç.Dr. Rasim DERMEZ

Bu çalışmada EPR paradoksu, dolaşık durumlar, dört EPR- Bell dolaşık durumlarının PPE' nin hesaplanması gibi kavramlar ayrıntılı olarak irdelendi. Konkurus (Aynı anda meydana geliş) ve Negatiflik, iki paçacıklı kuantum sistemlerinde dolaşıklığı ölçmek için iyi bir yoldur. Tezimizde genişletilmiş kuantum sistemlerinin, Konkurus ve Negatiflik ölçümleri ile dolaşıklığın nasıl olduğu gösterilmiştir. Kuantum mekaniğinin en ilginç sonuçlarından biri, birbirinden uzak iki ya da daha fazla taneciğin dolaşık durumudur. 1935' te Einstein, Podolsky, Rosen bir düşünce deneyi aracılığıyla dolşık iki-taneciğin durumunu önermişlerdir (Einstein 1935). Bu ilginçlikten dolayı günümüzde kuantum dolaşıklık, modern kuantum bilgi teorisinde önemli bir rol oynar. İki-kübit arasında o andaki dolaşıklığın miktarını tanımlamak istersek, o zaman dolaşıklığın ölçümünün en kullanışlı yolu "Konkurus" dur (Wotters 1998). Burada Burada kompleks bir matrisin kuantum dolaşıklık durumlarının ölçümleri olan Konkurus ve negatifliği hesapladık.

2008, 60 SayfaAnahtar kelimeler: Dolaşıklık, EPR paradoksu, Bell eşitsizlikleri, Dolaşıklık ölçümleri, Konkurus ve Negatiflik.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

THE MEASURES of QUANTUM ENTANGLED STATE VIA NEGATIVITY and CONCURRENCE

Mehmet Akif ÇAĞ

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Rasim DERMEZ

In this thesis, EPR paradox, concepts such as non- locality, Bell's inequalities, measurement problem, entagled states ect. Concurrence and negativity are well-known for the entanglement measures in bipartite quantum systems Experiments performed by means of entangled states are examined and how the entanglement concept being at the very heart of quantum mechanics, will reveal itself in the other fields o physics is investigated. One of the most surprising consequences of quantum mechanics is the entaglement of two or more distant particles. In 1935, Einstein-Podolsky-Rosen suggested the first classic entangled two-particle state, and proposed a gedankenexperiment. So far the defining measure has not been found for arbitrary qudits. We extend arbitrary states of the quantum systems and show how to construct entanglement via concurrence and negativity measurements.

2008, 60 Pages

Keywords: Entanglement, EPR paradox, Bell's inequalities, Measures of Entanglement, Concurrence and Negativitiy.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışmada tez konumu seçen, tüm çalışmalarım sırasında engin bilgi ve tecrübesinden yararlandığım ve benden manevi desteğini esirgemeyen büyük bir özveriyle çalışmalarıma ışık tutan değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Rasim DERMEZ'e sonsuz saygılarımı sunarak teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım kıymetli arkadaşım Şahin ERMEÇ' e teşekkür ederim.

Benden hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen sevgili "**Aileme**" en içten duygularımla teşekkür ederim.

Haziran 2008 Mehmet Akif ÇAĞ

AFYONKARAHİSAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
ρ	Yoğunluk matrisi
ψ	Dalga fonksiyonu
H	Hamiltoniyen işlemcii
Prob	Olasılık
λ	Özdeğer vektör
$\lvert\psi\rangle$	Durum vektörü
P	İzdüşüm işlemci
İd	Birim işlemci
ki, kj	Schmidt katsayıları
C	Konkurus
N	Negatiflik
d	Maristlerde boyut sayısı
$\hat{U}$	Üniter işlemci
α	Yoğunluk matris parametresi

Kısaltmalar	Açıklama
EPR	Einstein Podolsky Rosen
PPE	Pares-Horodecki Parçalı Evriği

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Kuantum kuramı klasik fiziğin bir başka temel ilkesi olan “Nedensellik” ilkesinin atomik boyutlarda geçersiz olduğunu ortaya koydu. Nedensellik ilkesine göre bir şey olduğunda bunun mutlaka bir nedeni olmalıydı. Tuhaf ama artık kuantum dünyasındaki olaylar için bunun doğru olduğunu söyleyemeyiz. Enerjik bir fotonun, bir elektrona çarptığı anda elektronun konumunu net olarak biliyorsak onun nereye gittiği konusunda hiçbir fikrimiz olmaz ve tahmin de edemeyiz. Mutlak bir biçimde, şu andaki varlık geleceği belirlemedi ve bu yüzden de nedensellik ihlal edilmiş oldu.

Max Born’un, Heisenberg’in belirsizlik ilkesiyle ilgili fikirleriyle birlikte, kuantum teorisi hakkındaki olasılık yorumları sonunda Kopenhag yorumları olarak bilinir hale geldi. Klasik kuantum kuramına büyük katkıda bulunan Einstein’in modern kuantum kuramının felsefesi ve yorumlarında farklı görüşlere sahip olduğunu görürüz. Kuşkusuz Einstein, kuantum kuramını formüle eden bu genç radikallerden etkilenmişti, bunun sebebi belki de ona kendi gençliğini hatırlatıyor olmalarıydı. Kuantum mekaniğinde bir şeylerin eksikliğine olan gizli düşüncesine rağmen, Heisenberg ve Schrödinger’in Nobel ödülü’nü hak ettiklerine ikna olmuştu ve 1931’de ikisini de aday olarak gösterdi. Kesinlikle çalışmalarını takdir ediyordu. Başlarda kuantum mekaniğinin temellerine itirazlar etti fakat Bohr’un ustaca yanıtları onu fazlaca etkiledi. Artık kuantum mekaniğinin temellerine saldırmanın faydasız olduğunu anlamıştı. Ama hala teori onu tatmin etmiyordu. Einstein kuantum mekaniğinin belirlenemezliğinin mutlak zorunluluk olduğunu kabul etmeye asla yanaşmadı. “Kuantum mekaniği çok saygı değer” diye yazmıştı Max Born’a. “Ama içimden bir ses bana bunun gerçek yakut olmadığını söylüyor. Teori çok fazla ürün veriyor ama Kadim Kişi’nin sırlarına bizi çok fazla yaklaştırmıyor. Her halükarda O’nun zar atmadığı kanısındayım” diyordu.

Einstein ikna olmasa da Bohr kuşkusuz tüm tartışmaların bittiğini ve kendi yorumlarının kazandığını düşündüğü bir sırada 15 Mayıs 1935’te A. Einstein, Boris Podolsky ve Nathan Rosen tarafından kaleme alınmış

"***Fizik Gerçekliğindeki Kuantum Mekaniği Tanımı Tamamlanmış Olarak Düşünülebilir mi***"? Başlığı altındaki makale Physical Review'de yayımlandı. Bu genellikle EPR makalesi olarak bilinir. Einstein kuantum mekaniğinin matematiksel temellerini benimsemiş fakat kuramın belirsizliği yüzünden henüz tamamlanmış bir kuram olduğundan hiçbir zaman emin olmamıştı. EPR makalesinde ileri sürülen savlar iki temel varsayıma dayalıdır:

1- Durum fonksiyonuyla verilen bir sistemin kuantum mekaniği tanımı tam değildir.
2- Teoride sunulan gözlemler eş zamanlı bir gerçekliğe sahip olamaz.

Makale fiziksel gerçekliğin bir saptamasıyla başlar. "Bir sistemi hiçbir biçimde bozmaksızın (değerini) kesinlikle öngörebildiğimiz" bir fiziksel nicelik "fiziksel gerçeklik unsuru" olarak nitelendirilir. "Sistemi herhangi bir şekilde rahatsız etmeksizin kesinlikle tahmin edebiliriz. Fiziksel nicelik miktarını, sonra fiziksel nicelikle uyuşan bir fiziksel gerçeklik unsuru var olur." Teorinin "tam" tanımı şöyle verilmiştir: "Fiziksel gerçekliğin her öğesi fizik kuramlarıyla bir uyuma sahip olmalıdır." Bu iki ifade mantıklı görüldü ve kimse onlarla tartışma içine girmedi. Beklenildiği gibi bu makale bilim dünyasına bir bomba gibi düştü. Bohr hemen altı hafta içinde yanıtını 29 Haziran 1935'te Nature'da yayımlattı. Daha sonra daha ayrıntılı bir makale de Physical Review' de çıktı. Bohr yanıtında EPR'de özellikle iki şey üzerinde durdu. Birincisi ''Einstein'ın gerçeklik tanımı ve ikincisi "Sistemi herhangi bir şekilde rahatsız etmeksizin" ifadesiydi. Bohr'a göre her ikisi de muğlâk ifadelerdi. Bohr için bu gerçeklikte ölçme prosesi olmaksızın bir "fiziksel gerçeklikten" bahsetmek olanaksızdı ve dolayısıyla da Einstein'ın tezi geçersizdi. Bohr'u yeterli görmeyen Einstein itirazlarını sürdürdü. Bütünüyle alternatif gösterilen şey, tanecikler arasındaki tuhaf "***telepatik***" bir iletişimdi ve Einstein durumun böyle olamayacağından emindi. EPR'den memnun olan tek kişi Schrödinger'di. Schrödinger EPR'yi destekleyen ve kendi görüşlerini de içeren bir makaleyi 29 Kasım 1935'te Die Natur Wissenchraft'ta yayımladı. Makalenin başlığı "Kuantum Mekaniği'nin Bugünkü Durumu" idi. Makalenin en ilginç kısımlarından birisi de günümüzde Schrödinger'in Kedisi paradoksu olarak bilinen bir paradoksu anlatan beşinci bölümdü. Yıllar sonra bu paradoks neredeyse EPR kadar çok ilgi çekti. Kedi paradoksunda, kedi içinde radyoaktif parçacıkları bulabilen bir dedektör ve radyoaktif bir kaynak bulunan çelik bir kafese kilitlenir. Eğer detektör radyoaktif bir parça bulursa, açığa çıkan zehirli gaz kediyi öldürür. Bir dakika içinde, radyoaktif parçacığın emisyon olasılığı yüzde ellidir. Kafesin biraz uzakta olduğunu düşünürsek radyoaktif kaynağını uzaktan açıp bir dakika bekleriz. Kedi bu bir dakika sonunda ölmüş mü olur yoksa hala hayatta mıdır? Kopenhag yorumlarına göre ikisi de değil. Aslında bunu gözlemleyene kadar ya da ölçene kadar ne ölüdür ne de canlı. Bu sistem dalga fonksiyonu olarak tanımlanır ve dalga fonksiyonunu söndürene kadar kedi belirli bir durum kazanamaz. Pek çok kişi bunun kabul edilmesi güç bir durum olduğunu düşündü. Bu örnekte Schrödinger tabi ki mikro dünyadaki kuantum mekaniği öngörülerini makro dünyaya taşıyor ve bunların burada uygulanması gerekmez.

1964'te CERN'de John Bell Physics'te "Einstein-Podalsky-Rosen Paradoksu Üzerine" başlıklı bir makale yayımladı. Ertesi yıl Reviews of Modern Physics'te oldukça uzun bir makale daha yayımladı. Birinci makalesinde von Neumann'ın gizli değişkenlerin mümkün olmadığını gösteren kanıtının uyulması çok zor bir durum olduğunu gösterdi. Spin halindeki parçacıkları kullanarak bir gizli değişken teorisi oluşturmaya çalıştı. İkinci makalesinde ünlü Bell Eşitsizliğini sundu. Burada hiçbir "yerel" gizli değişken teorisinin, kuantum mekaniğinin istatistiksel öngörülerinin tümüyle aynı olamayacağını kanıtladı. Buradaki yerel (lokal) kelimesiyle kesin bir yerde olmayı ifade etmektedir. Bu yüzden yerel gizli değişken teorisi sadece kesin bir yerde olan şeyler için etkilidir. Bell, yerel gizli değişkenlerin aslında kuantum mekaniğinin tahminlerine zıt sonuçlar üreteceğini gösterdi. İspatı, tanecik spinleri arasındaki ilişkideki bir eşitsizlik formundaydı.

Bell eşitsizliği ile ilgili ilk testler 1972'de fotonların kullanılarak Berkeley, Kaliforniya Üniversitesi'nde uygulandı. Sonraki yıllarda başka pek çok test daha yapıldı. Ve 1975'e kadar altı deney tamamlanmıştı. Bunlardan dördü Bell eşitsizliğini ihlal etti. Eşitsizliğin bozulması hem kuantum teorisinin tam bir teori olduğunu ve de Bohr'un Kopenhag yorumlarını doğruladı. Sonraki deneyler 1970'lerin ortalarında başka deneyciler tarafından yapıldı. Fiziksel düzenek farklıydı. Elektron pozitron imhası gama ışın fotonlarının ilişkilendirilmesini sağladı. Bu durumda yedi testten beşi Bohr'u doğruladı. En kapsamlı ve kesin deney Alain Aspect yönetimindeki bir ekip tarafından 1982'de Paris Üniversitesinde gerçekleştirildi. Aspect tanecik spinini belirlemedeki en kesin yöntemle birlikte fotonları kullandı ve sonuçları kesindi. Bell eşitsizliği kesinlikle ihlal edilmişti ve sonuca giden hiçbir yol yokmuş gibi göründü. Einstein'ın kuantum mekaniğinin tamamlanmamış olduğu sanı geçerliliğini yitirmiş, teoride gizli değişkenlerin olmadığı kesinlik kazanmıştı.

2. LİTERATÜR BİLGİLER

2.1. Kuantum bilgi teorisinde kuantum dolaşıklık (Kuantum bit, kübit)

Bit, klasik hesaplama ve klasik bilginin temel birimidir. Kuantum hesaplama ve kuantum bilgisi kuantum bit, kısacaca kübit üzerine kurulmuştur. Kübit, gerçel fiziksel sistemi ortaya çıkaran, bit-benzeri kuantum bilgiye karşılık gelen birimdir. Klasik bilginin bölünmez birimi olan bit, iki mümkün durumdan $\{0,1\}$ sadece birini alabilir. Kübit ise, en basit mümkün bir kuantum sisteminde bu iki bitin üst üste bindiği bir kuantum durum olarak tanımlanır. İki boyutlu Hilbert uzayında fiziksel sistemi gösteren $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ vektörleri bir birine diktir ve bu vektörler ortonormal baz oluştururlar. Kübit için $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ özel durumları, hesapsal baz durumları olarak da bilinir. $\mathrm{H} = \mathrm{C}^2$, $|\psi\rangle \in \mathrm{H}$ olmak üzere üst üste binme kompleks katsayılı hesapsal baz durumlarının liner bileşimiyle,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

olarak verilir. Burada, normalizasyon şartı $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ile sağlanır. Ayrıca Eş.(2,1) de: Dirac yazılımı iki boyutlu Hilbert uzayını tanımlamanın bir başka yolu olan sütun matrise eşitlenir. Baz vektörlerinin sütun matris eşitlikleri $|0\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ve $|1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ şeklindedir. İki boyutlu Hilbert uzayında bir durum ya da vektör olarak tanımladığımız kübit, Eş.(2,1)'deki α ve β katsayılarının herhangi bir değerinde bulunabilir. Böylelikle kübit, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ baz vektörlerinin sonsuz farklı üst üste binmesiyle oluşur. Eş. (2.1)'de kuantum mekaniksel olarak bir ölçüm, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ baz vektörleri üzerinden kübitin iz düşüm operatörü ile gerçekleşebilir. Böylece elde edilen $|0\rangle$ sonucu $|\alpha|^2$ olasılığı ile $|1\rangle$ sonucu $|\beta|^2$ olasılığı ile verilir.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$|0\rangle$ ***' ın ölçümü***

$$\left|\langle 0|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\langle 0|\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)\right|^2 = \left|\left\langle \alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle\right|^2\right| \tag{2.3}$$

$\left|\langle 0|\Psi\rangle\right|^2 = |\alpha|^2$ İle $|0\rangle$ kuantum durumunun bulunma olasılığı

$|1\rangle$ ***' ın ölçümü***

$$\left|\langle 1|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\langle 1|\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)\right|^2 = \left|\alpha\langle 1|0\rangle + \beta\langle 1|1\rangle\right|^2 \tag{2.4}$$

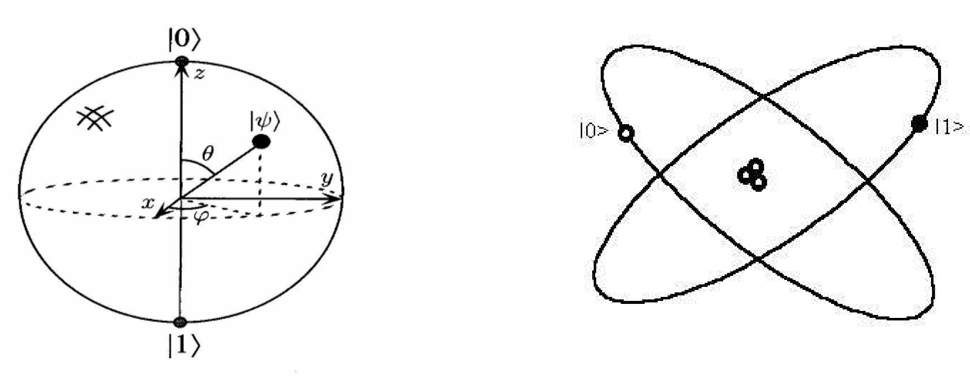
$\left|\langle 1|\Psi\rangle\right|^2 = |\beta|^2$ ile $|1\rangle$ kuantum durumunun bulunma olasılığıdır.

2.2. Spin - $\frac{1}{2}$

Kuantum biti, spini $\frac{1}{2}$ olan elektrona benzetebiliriz. O halde, $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ baz vektörlerinin kodlamalar, z ekseni boyunca spin yukarı $|\uparrow\rangle$ ve spin aşağı $|\downarrow\rangle$ dır. Normalizasyon koşulu ile uzunluğu " **1"** olan kübit, geometrik yorumlanır ise

$$|\psi\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \tag{2.5}$$

şeklinde olur. Burada kutupsal açı θ , azimut açı φ gerçel sayılardır. Şekil (2,1.a) ' da θ ve φ açıları ile üç boyutlu küre üzerinde bir nokta tanımlanır. Bloch küresi olarak tanımlanan bu küre tekli bir kübitin göz önünde canlandırılması için kullanışlı bir yoldur. Bununla birlikte Bloch küresiyle kübiti tanımlama sezgilerimizi sınırlar. Çünkü çoklu kübitler için Bloch küresinin genelleştirilmesi yapılamaz.



a **b**

Şekil 2. 1. **a)** Bir kübitin Bloch küresiyle temsili (Nielsen and Chuang, 2000). **b)** Kübitin bir atomda iki elektronik temsili düzeyle sunumu.

Diğer yandan klasik biti bozuk paraya benzetirsek, sonucu ya yazıdır yada turadır. Fakat geometrik şekline bağlı olarak bir bozuk para, bu iki olasılığın ortası olan köşesi üzerinde durabilir. Böyle bir sonuç normal şartlarda göz önünde bulundurulmaz. Buna karşın bir kübit gözlemleninceye kadar $|0\rangle$ ve $|0\rangle$ ile $|1\rangle$ arasında durumların bir sürekliliğinde var olur. Bir kübit,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \tag{2.6}$$

durumun da ölçülürse $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ sonucuyla % 50 olasılıkla $|0\rangle$ ' $\frac{1}{2}$ sonucuyla % 50 olasılıkla $|1\rangle$ ' i verir. Bu ilginç duruma rağmen, kübitlerin varlığını çift yarık gibi deneyler onaylamıştır ve kübitler gerçektir. Bir fotonun iki farklı kutuplanması, düzgün bir manyetik alanla bir nükleer spinin aynı hizada olması ve şekil(2,1,b) 'de tek atomda dolanan bir elektronun iki durumunun üst üste binmesi gibi örnekler verilebilir. Atomik düzeyde elektronun $|0\rangle$ 'dan $|1\rangle$ durumuna geçmesi mümkündür ve bunun terside geçerlidir. Bundan daha ilginci "ışık gönderdiğimizde ilk başta $|0\rangle$ 'da bulunan elektronun $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ arasında orta yolda hareket edebilir'' olmasıdır. (Nielsen and Chuang 2000). Orta yol durumunu Eş.(2,6). Kısacası kübit ölçüldüğün de $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ 'in üst üste binmesi olan bu özel durum yok olur. Niçin bu tip bir yok olma meydana geliyor? Bunun nedeni araştırmacılar tarafından henüz öngörülememektedir. Aslında bu davranış kuantum mekaniğin temel postulalarından biridir. Gözlem sonucunda tek bir ölçümle kübit durumu hakkında bilginin sadece bir biti elde edilir. Matematiksel olarak paradoks görünüşte çözülmüş gibidir. "Kübitte bir ölçüm yapmaz isek, bir kübit ne kadar bilgi tutar? " İlginç bir soru olarak karşımıza çıkmaktadır. Başka bir deyişle, bilgiyi ölçmeden nasıl nitelendirebiliriz? Zira onu ölçmeden bilginin miktarı hakkında bir şey söylenemez. Ama yine de geldiğimiz süreçte kavramsal bir önem vardır. Doğa, kübitlerden oluşan kapalı bir kuantum sisteminde gelişir. Burada, yapılacak bir ölçüm fazla bir rol oynamaz. Doğada, kübitin kuantum durumunu tanımlayan α ve β gibi sürekli değişkenler saklıdır. Böylelikle, doğada kübitler aracılığıyla "gizli bilginin büyük miktarı'' barınır. Bu "**gizli bilginin**" doğadaki potansiyel miktarı, kübitin sayısıyla üstel olarak artar. Bu bağlamda bilim adamları için " gizli kuantum bilgisini " anlamak önemli bir sorundur. (Nielsen and Chuang 2000). Kuantum devreler, kuantum Fourier dönüşümü, kuantum algoritmalar ve konumun pratikte fiziksel uygulaması olan kuantum bilgisayarlar gibi pek çok araç bu sorunu çözmede yardımcıdır. Bu araçların çalışma yöntemleri ve kuralları da kuantum bilgi teorisinin temel kavramları ile belirlenmektedir.

2.3. Çoklu Kübitler

Tensör çarpımı, vektör uzayları ile birlikte daha büyük vektör uzayları oluşturmak için tanımlanmıştır. Bu yapı çok parçacıklı sistemlerin kuantum mekaniğini anlamak için çok önemlidir. Y ve W sırasıyla m ve n boyutlu Hilbert uzayları olsun. O zaman $Y \otimes W$, Tensör çarpımı mn – boyutlu vektör uzayıdır. $Y \otimes W$'nın elemanları; Y'nin $|y\rangle$ ve W'nın $|w\rangle$ elemanları arasındaki $|y\rangle \otimes |w\rangle$ tensör çarpımlarının liner kombinasyonlarıdır. Bileşik kuantum sisteminin bir elemanı $|y\rangle|w\rangle, |y,w\rangle, |yw\rangle$ ve $|y\rangle \otimes |w\rangle$ yazılımlarında biriyle gösterilir. Uygun matris gösterimleri Kronecker çarpımı olarak bilir.

A; mxn , B; pxq Matrislerin tensör çarpımı;

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{nn}B \end{pmatrix}}_{nq}\right\} mp \tag{2.7}$$

olarak verilir. Çoklu kübitte öncelikle iki kübit göz önünde bulundurulur. İki klasik bitten, 00, 01, 10 ve 11 yazılımı ile dört mümkün durum oluşturulur. Bunun karşılığı iki kübitli sistem, $|00\rangle_{AB}$, $|01\rangle_{AB}$, $|10\rangle_{AB}$ *ve* $|11\rangle_{AB}$ tensör çarpımlarıyla gösterilen dört hesapsal baz durumlarına sahiptir. Bu dört bazın, iç ve dış çarpımından farklı $\otimes$ tensör çarpımı;

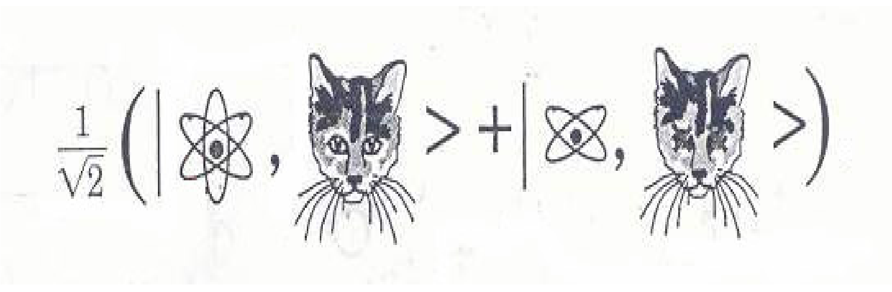
$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

şeklinde olur. Kübitlerin bir çifti, bu dört durumun herhangi ikisinin üst üste binmesinden varolabilir. İki-kübitli kuantum durumunda, her bir hesapsal baz durumunun ayrı ayrı bulunma olasılık genlikleri vardır.

2.4. Kuantum Dolaşık Durumlar

Kuantum kuramının, özellikle “***fiziksel gerçekçiliğin***” ne olduğu konusunda kabul edilmesi oldukça zor sonuçlar doğurması, birçok büyük fizikçiyi rahatsız etmişti. Bunların başında da Albert Einstein geliyordu. Einstein ve bazı fizikçiler, uzun süre bu “gariplikleri n’’ kuantum kuramının eksik bir kuram olmasından kaynaklandığını düşündüler (Einstein et. al 1935). Kuantum kuramının var olan haliyle eksikliğini kanıtlayacak bir çelişki aramaya koyuldular (Selleri 1998). Einstein ile kuramın var olan haliyle doğru olduğunu savunan Bohr arasında yıllar süren bir bilimsel tartışma yaşandı. Bu tartışmanın, kuantum kuramının kavramlarının oturmasına önemli katkıları oldu. Einstein kuramı didik didik edip açık noktaları bulup çıkarıyordu. Bu tartışmanın son noktası EPR paradoksu olarak bilinen olgudur (Bal 2005). EPR paradoksu; Kuantum Kuramının gerçekte kabul edilmesi ne kadar zor hatta akıl almaz sonuçlara vardığını gösteriyordu. EPR paradoksunu anlatmak için önce kuantumdaki ‘’dolaşıklık’’ (entanglement) kavramından söz etmekte yarar var. Dolaşık durum kavramı Einstein ve arkadaşları tarafından ilk defa öne sürüldüğünde, kuantum mekaniğinin kuruluş temellerini sorgulamak amacını taşıyordu (Rungta 2001). Kuantum dolaşıklık kavramı ilkez Erwin Scrödinger tarafından İngilizcesi ve Almancası adlandırılmıştır. (Almancası: **Verschrankt**, İngilizcesi: **Entanglement**).



Şekil 2. 2. Scrödinger’in kedisi ile bir atomun dolaşık durumu (Terhal et al.,2003).

Üst üste binme ilkesi kuantum tuhaflıklarından biriydi. Bir elektron bu ilkeye göre aynı anda birden fazla durumda yani elektron spini birden fazla yöne yönelmiş olabilir. Dolaşıklık ise bu tuhaflıkların bir adım ötesidir. İki farklı kuantum sistemden oluşan bir yeni kuantum toplam sistemin sahip olduğu kuantum durumlarında, alt sistemlerin durumları arasında kuantum korelasyon varsa iki sistemin dolaşık olduğunu söyleriz (Çamursoy 2003). A ve B adında iki elektronumuz olduğunu varsayalım, bu elektronların uzaydaki her türlü hareketlerini bir yana bırakarak, dikkatimizi sadece spinlerine verecek olursak, her bir elektronun durumunu (karmaşık) iki katsayı ile z yönündedeki spinin öz vektörlerini kullanarak gösterebilir. A ve B elektronlarının spin durumları bra-ket notasyonunda

$$|A\rangle = c_{A1}|\uparrow\rangle_A + c_{A2}|\downarrow\rangle_A$$

$$|B\rangle = c_{B1}|\uparrow\rangle_B + c_{B2}|\downarrow\rangle_B \tag{2.9}$$

şeklinde gösterilebilir.

$|A\rangle$, A elektronun spin durumunu göstermek için kullanılır. $|\uparrow\rangle$, spinin z yönünde ve $+\frac{1}{2}$ olduğunu; $|\downarrow\rangle$ ise, spinin z yönünde ama $-\frac{1}{2}$ olduğunu öz durumunu göstermek için kullanılır. $\frac{1}{2}$ spinli bir parçacığın spin durumu herhangi bir yöndeki spinin pozitif ve negatif yöndeki öz durumları cinsinden yazılabileceği için, tıpkı bizim yaptığımız gibi herhangi bir elektron spininin genel durumunu $|SPIN\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$ şeklinde yazabilir. Burada normalizasyon $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ dir. Elektronlarımızı A ve B adlarında iki ayrı sistem olarak düşünmektense, elimizde AB adında tek bir sistemimiz olduğunu (herhangi bir ek varsayım yapmaksızın) hayal edebiliriz. Bu sistemin durumunu, yani $|AB\rangle$'yi göstermek için tensör çarpımını, '$\otimes$' işareti kullanılır.

$$|AB\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle \tag{2.10}$$

Tensör çarpımında $|A\rangle\ ve\ |B\rangle$ spin durumları;

$$|AB\rangle = \left(c_{A1}|\uparrow\rangle_A + c_{A2}|\downarrow\rangle_A\right) \otimes \left(c_{B1}|\uparrow\rangle_B + c_{B2}|\downarrow\rangle_B\right) \tag{2.11}$$

şeklinde yerine yazılabilir. Normalizasyon gereği A ve B kuantum durumlarının bulunma olasılıkların karelerinin toplamı $|c_{A1}|^2 + |c_{A2}|^2 = 1$ ve $|c_{B1}|^2 + |c_{B2}|^2 = 1$ olmak zorundadır.

$$|AB\rangle = c_{A1}c_{B1}|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + c_{A1}c_{B2}|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + c_{A2}c_{B1}|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + c_{A2}c_{B2}|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B \quad (2.12)$$

şeklinde açılabilir.

$$|\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B = |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} \quad (2.13)$$

$$|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B = |\uparrow\downarrow\rangle_{AB} \quad (2.14)$$

$$|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B = |\downarrow\uparrow\rangle_{AB} \quad (2.15)$$

$$|\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B = |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} \quad (2.16)$$

Daha sonrasında bulunma olasılık genlikleri

$$\begin{aligned} C_{A1}C_{B1} &= C_1 \\ C_{A1}C_{B2} &= C_2 \\ C_{A2}C_{B1} &= C_3 \\ C_{A2}C_{B2} &= C_4 \end{aligned} \quad (2.17)$$

bu işlemler, $|AB\rangle$ ’ nin görünümünü şeklinde düzenlenerek

$$|AB\rangle = c_1|\uparrow\uparrow\rangle + c_2|\uparrow\downarrow\rangle + c_3|\downarrow\uparrow\rangle + c_4|\downarrow\downarrow\rangle \quad (2.18)$$

şeklinde daha düzenli kılar. Fakat $|AB\rangle$ tensörel çarpımı kuantum olasılık durumunu tarif etmez. Bu dört ifadeden özel alınan ikişerli gruplar kuantum olasılığın matematiksel ifadelerini verir. Normalizasyon $|c_n|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 = 1$ şeklindedir. Şimdi de bir örnek üzerinde düşünelim. Elimizde iki elektronumuz bolduğunu hayal edelim ve bu iki elektronun kuantum durmu

$$|AB\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|\uparrow\downarrow\rangle \tag{2.19}$$

şeklinde olsun. Bu iki elektronu iki arkadaşımıza birer birer vermek istiyoruz. Birinci elektronu (yani A elektronunu) Ayşe' e ikinci elektronu (yani B elektronunu) Burak' a verip, elektronlara bakmalarını istersek ne olur? Elektronları Eş.(2.18) numaralı denklemdeki gibi ifade edilmiş olan durumlarını Eş.(2.11)'deki hale getirmek istiyoruz. Bunun için Eş.(2.17) numaralı denklem grubunu, matematik bilgilerimizi kullanarak kolaylıkla sonuca ulaşabiliriz:

$$|A\rangle \otimes |B\rangle = |\uparrow\rangle_A \otimes \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_B - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_B\right). \tag{2.20}$$

Ya da:

$$|A\rangle = |\uparrow\rangle_B$$

$$|B\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_B - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle_B \tag{2.21}$$

Yani, Ayşe 'nin elinde $|\uparrow\rangle$ durumda, Bora'nın elinde ise $\tfrac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$ durumunda birer elektron var. Bu dolaşık olmayan durum ya da diğer bir ifadeyle "ayrılabilir" bir durum olduğu için; herhangi bir sorun yaşamadık, ama gelin bir de Ayşe ile Bora'ya dağıtacağımız elektronların durumu

$$|AB\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \tag{2.22}$$

olduğunda katsayılara Eş.(2.18) 'de verdiğimiz ifadeleri kullanacak olursak

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 0 \\
C_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
C_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
C_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

olduğunu görürüz. Şimdi de Eş.(2.17) ‘yi kullanalım:

$$
\begin{aligned}
C_{A1}C_{B1} &= C_1 = 0 \\
C_{A1}C_{B2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
C_{A2}C_{B1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
C_{A2}C_{B2} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Bu eşitliklerden ilki c_{A1} ile c_{B1}’den en azından birinin sıfır olduğunu söylerken, ikinci ve üçüncü eşitlikler bunun olmayacağını gösteriyorlar. Aynı şekilde son denklem de ya c_{A2}’nin ya da c_{B2}’nin (ya da her ikisinin de) sıfıra eşit olmasını söylüyor; Fakat bu böyle görülmemektedir. Bu dört denklemi aynı anda sağlayacak c’ler bulmamız maalesef olanak dâhilin de değildir. Fakat bu böyle görülmemektedir. Peki, bu ne demek? Öyle görünüyor ki bu elektron çiftinin durumunu açık halde yani Eş.(2.11)‘deki gibi, iki elektronun ayrı ayrı durumlarının tensör çarpımı olarak yazılamamaktadır. Yani, her ne kadar elimizde iki ayrı elektron olsa ve biz bunları evrenin iki ayrı köşesindeki Ayşe ve Bora’ya versek bile; bu elektronların ayrı ayrı kendilerine ait birer durumları olamıyor. İşte böyle durumlardaki sistemler için dolaşık (ya da ayrılamaz) sözcüğü kullanılıyor. İşin matematiksel yanı bu şekilde olmaktadır. Ayşe ile Bora tıpkı öncekinde olduğu gibi ellerindeki elektronlara baktıklarında fiziksel olarak ne görecekler? Kuantum mekaniğinin temel yasalarına dayanarak, Ayşe’nin elindeki elektronun z yönündeki spini ölçtüğü zaman ya $|\uparrow\rangle$ ya da $|\downarrow\rangle$ bulacağından emin olunabilir.

Bu ölçümden sonra Ayşe'nin elektronu gözlemlediği duruma dönecektir. Gerçekten de bahsi geçen deney yapıldığı takdirde Ayşe %50 olasılıkla $|\uparrow\rangle$, %50 olasılıkla da $|\downarrow\rangle$ bulacaktır. Böylece bu elektronun bir 'süperpozisyon' durumunda olduğunu, yani $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$ veya $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$ olduğunu mu gösterir? Fiziksel olarak böyle bir sonuç çıkmamaktadır. Eğer elektron $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$ durumunda olsaydı x, $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$ durumda olsaydı y yönündeki spinin öz durumunda olmuş olurdu ve bu yönlerdeki spin ölçümlerinden hep aynı sonuçlar alınırdı. Fakat yapılan deneyler, Ayşe'nin hangi yöndeki spini ölçerse ölçsün %50 ihtimalle $+\frac{1}{2}$, %50 olasılıkla $-\frac{1}{2}$ bulduğunu gösteriyor. Ayşe z yönündeki spini ölçtükten sonra, Bob da elindeki B elektronuna aynı ölçümü uygularsa ne bulur? Tahmin edebileceğiniz gibi Bob da %50 olasılıkla $+\frac{1}{2}$, %50 olasılıkla $-\frac{1}{2}$ bulacaktır; ancak bir tek şartla: Eğer Ayşe $+\frac{1}{2}$ bulduysa Bora $-\frac{1}{2}$, eğer Bora $+\frac{1}{2}$ bulduysa Ayşe $-\frac{1}{2}$ bulmak zorundadır. İşte klasik fiziğin açıklamadığı kuantum dolaşık durum, bu şekilde ifade edilir. Dolaşıklığı oluşturan öğeler elektronlar, fotonlar gibi temel atomik parçacıklarla olabilir. Örnek vermek gerekirse aynı orbitali paylaşan elektronlar kuantum dolaşık durumdadır. Bu elektronların spinlerinin zıt olması gerektiği bilinmektedir. Ancak Kophenag yorumlarına göre bir ölçüm yapılırsa diğer parçacıkta spini ilk parçacığın vereceği sonuca göre''eşzamanlı'' düzenler. Parçacıklar arasındaki mesafe ışık yılı mertebesinde bile olsa parçacıklar birbiriyle eşzamanlı haberdardır. A: yukarı spin, B: aşağı spini temsil etmek üzere dolaşık iki elektronu temsil eder. Fiziksel durum $\Psi_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\mathrm{A}\rangle \otimes |\mathrm{B}\rangle\right]$ şeklinde ifade edilir. Kuantum teorisinde böyle bir sonucun ortaya çıkması Einstein'in teoriye karşı çıkmasına neden oldu. Bu ilke öncelikle fiziksel olayların önce yakın çevresini etkileyeceğini söyleyen yerellik ilkesine aykırıydı. Ayrıca "eşzamanlı" iletişim ışık hızından hızlı mesaj iletimini yasaklayan özel görelik ilkesini de kesinlikle ihlal etmekteydi. Bu nedenlerden ötürü 1935 yılında Albert Einstein, Boris Podolsky ve Nathen Rosen Physical Review'de fiziksel gerçekliğin kuantum mekaniksel açıklaması tamamlanmış olarak düşünülebilir mi? adlı bir inceleme yayımladılar. İnceleme birleşik çok parçacıklı sistemlerde parçacık ilişkilerini tartışmaya açtı. EPR bu tip sistemlerin kuantum açıklamasının doğruluğunu değil tamamlanması olmasını sorgulamak için tartıştı (Çamursoy 2003).

Kuantum kuramında incelenen her sistemin bir dalga fonksiyonu vardır. Belirsizlik ilkesi gereğince, bir parçacığın dalga fonksiyonu, parçacığın hem konumunu hem de momentumunu (momentumu hız olarak düşünebilir.) aynı anda kesin olarak veremiyor. Konumu ne kadar kesin biliyorsak momentumu o kadar bulanıklaşıyor; benzer olarak momentumu ne kadar kesin bilirsek bu kez konum o kadar bulanıklaşıyor. Burada sözün gelişi parçacık diyoruz; biliyoruz ki kuantumda dalga tanecik ikiliğinden dolayı, atom düzeyindeki maddeler dalga veya tanecik olarak davranabiliyor. Yani bizim parçacık dediğimiz şey (örneğin: bir elektron, bir proton vb.) belli koşullarda tanecik değil, bir dalga olarak karşımıza çıkabiliyor. Bir parçacığın konumunu kesin olarak bilmek demek o parçacığın gerçekten parçacık (tanecik) gibi davranması demektir. Yani tam olarak bir noktada konumlanmış olması, uzaya yayılmamış olması anlamındadır. Momentumunu kesin olarak bilmek demek ise dalga gibi davranması, yani bütün uzaya yayılmış olması belli bir yerinin olmaması anlamına geliyor. Kuantum çok önemli yasası şunu söyler: "Eğer bir parçacığın konumunu ölçerseniz onun konumunu öğrenirsiniz, dolayısıyla onu tanecik haline getirirsiniz." Eğer momentumunu ölçerseniz, onun dalga boyunu öğrenirsiniz, dolayısıyla dalga haline getirirsiniz.'' Yani bir parçacığı isteğe göre dalga veya tanecik haline getirmek çok kolaydır. Üzerinde konum veya momentum ölçümü yapmak yeterlidir (Bal 2005). Şimdi iki parçacıktan oluşan bir sistem düşünelim. Bu iki parçacık dolaşık (entangled) değilse sistemin dalga fonksiyonu, her iki parçacığın tek tek dalga fonksiyonlarının bir toplamı gibi düşünülebilir. Ancak bu iki parçacık dolaşık ise, elimizdeki dalga fonksiyonu, tek tek parçacıklar hakkında hiçbir bilgi vermeyip, bunun yerine iki parçacık arasındaki ilişkiye ait bilgiler veriyor olabilir. Örneğin dolaşık iki parçacıktan oluşan bir sistemin dalga fonksiyonu, iki parçacığın konumları arasındaki uzaklığı ve iki parçacığın momentumlarının toplamını verebilir, bu durumda parçacıkların herhangi birinin konumu veya momentumu konusunda bir bilgi vermez. EPR paradoksunda işte bu şekilde dolaşık özdeş iki parçacıktan oluşan bir sistem göz önüne alınmaktadır. Bu iki parçacık birbirinden ters yönlere doğru uzaklaşmaya başlasınlar. Yeterince uzun bir zaman beklersek artık birbirlerinden çok uzağa gitmiş olacaklardır. Birbirlerinden yeterince uzaklaştıktan sonra bu parçacıklardan biri üzerinde ölçüm yapalım. Bu parçacık üzerinden konum ölçümü yaparsak, bu parçacığın konumu öğrenilir. Ve o tanecik haline gelmiş olur. Fakat dalga fonksiyonları bize bu iki parçacığın konumları arasındaki uzaklığı veriyordu; dolayısıyla uzaktaki parçacığın konumunu da öğrenilmiş olur. Böylece kuantum parçacık tanecik haline getirilmiştir. Tersine birinci parçacık üzerinde momentum ölçümü yaparsak, momentumunu öğrenmiş oluruz ve onu da dalga haline getirmiş oluruz; çünkü dalga fonksiyonları bize momentumlarının toplamını verir. Peki, paradoks bunun neresinde? Şurada: Bu iki parçacık birbirinden çok uzaklaşmışlardı. Bunlardan birinin konumunu veya momentumunu ölçerek çok uzaktaki diğer parçacığı dalga veya tanecik haline getirilir. Yani ona hiç dokunmadan, belki milyonlarca kilometre ötedeyken üstelik anında gerçekleşiyor. Ölçüm yaptığım aynı anda diğeri tanecik veya dalga haline dönüşüveriyor. Sanki buradaki parçacığa dokunulduğunda hayali bir elde aynı anda diğer parçacığa müdahale ediyormuş gibidir. Bu nasıl olabilir ki? Üstelik görelik kuramına göre hiçbir cisim ışıktan hızlı ilerleyemez. Fakat buradaki kuantum etki ışık hızından daha hızlıdır. Etki ancak ışığın oraya varması için geçen süre kadar sonra hissedilebilirdi. Einstein ve arkadaşları, bunun açık bir mantıksızlık olduğunu düşünerek, kuantum kuramının var olan haliyle böyle bir paradoksa dönüşüyor olmasının onun yanlış değilse bile en azından eksik olduğu sonucuna vardılar. Son yapılan deneyler doğanın gerçekten bu şekilde davrandığını ortaya koyuyor. Örneğin son yıllarda yapılan "ışınlama" deneyleri tam olarak EPR paradoksunda tarif edilen dolaşık sistemlerin uzaktan anlık etkisini kullanmaktadır. Bu durumunda EPR bir paradoks olmaktan çıkıp bir olgu haline gelmektedir. Bu nedenle EPR paradoksu yerine EPR etkisi, EPR olgusu veya EPR argümanı gibi bir adlandırma daha doğrudur (Wikipedia, 2003). Görelilik ilkesi özünde madde ve ona eşdeğer olan enerji ile uğraşır. Aslında yalnızca madde ve enerjinin ışıktan hızlı ilerleyemeceği (iletilemeyeceği) belirtir. Görelilik kuramı ortaya atıldığında dalga fonksiyonunda bahsedilmemiştir. Ayrıca dalga fonksiyonu klasik görelilik kuramı çerçevesinde açıklanamaz. Görelilik kuramının "madde ve enerjinin ışıktan hızlı ilerleyemeceği" ilkesi biraz dikkatsiz davranılarak ve kuantum kuramı göz ardı edilerek ''hiçbir şeyin ışıktan hızlı ilerleyemeceği''şeklinde ifade edilebilmektedir. Bunun altında yatan bilimsellik dalga fonksiyonunu gerçek dünyada var olan bir "**şey**" olarak görmemektir (Nielsen and Chuang, 2000). EPR' nin sonuçlarına bakarak'' böyle bir paradoksa düştüğüne kuantum kuramı yanlıştır''demek yerine "evet böyle bir sonuç ne kadar paradoksal gelirse gelsin doğanın gerçeğidir" diye düşünülüyor (Bal 2005). Dolaşıklık olgusu her ne kadar eşzamanlı bir iletişim öngörse de bu olgu kodlanmış ve bilinçli bir haber iletişimini olanaklı kılmamaktadır. Çünkü kuantum mekaniksel ölçüm sonuçları tamamen rastlantısaldır ve olasılıklara dayanmaktadır. Bu yüzden özel görelilik ilkesine aykırılık teşkil etmediği düşünülebilir. Yinede eşzamanlı bir iletişim itirazlara neden olmuş ve kuantum mekaniğin tamamlanmamış, eksik bir teori olduğu fikri gündeme getirilmiştir. Bu iddialardaki en büyük dayanak ise yerellik ve nedensellik ilkeleriydi. Yerellik ilkesi fiziksel olayların yakın çevresini etkilediğini belirtir. Newton'un genel çekim kanunu bir kütlenin uzaklardaki bir kütleye kuvvet uygulanması fikri yüzünden birçok kişinin aklını karıştırmıştı. Einstein, genel görelilik kuramında kütlenin, içinde bulunduğu uzayda eğilme bükülmelere neden olduğunu ve bu eğrilmeyi diğer cisimlerin kendilerine uygulamış bir kuvvetmiş gibi algıladıklarını söyleyerek kütle çekim kuvvetine yerel bir açıklama getirmiştir.

Nedensellik ilkesi ise neden sonuç ilişkisine bağlı iki olaydan nedenin sonuçtan önce meydana gelmesi gerektiğini söyler. Özel görelilik kuramındaki yer zaman dönüşümlerine göre eğer mesaj ışıktan hızlı gönderilebiliyorsa o zaman gönderene göre hareket eden bazı gözlemciler sonucun nedenden önce oluştuğunu görürler. Bu da nedensellik ilkesine aykırıdır. Ancak kuantum mekaniğine göre eş zamanlı iletişim kodlanmış bir haber iletişimini öngörmediğinden dolaşıklık yerellik ilkesine aykırı ancak nedensellik ilkesiyle uyumlu bir olay olarak karşımıza çıkmaktadır (Bozdemir 2005).

3. EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN PARADOKS

Kuantum mekaniği aşağıdaki postulalardan türetilebilir.

1) Durum: Fiziksel bir sistemin eksiksiz tasvirine durum denir ve bu Hilbert uzayında bir $|\Psi\rangle$ vektörüyle karakterize edilir.
2) Gözlenebilirler ve işlemciler: Her bir gözlenebilirse, Hilbert uzayında karşılık gelen bir işlemci vardır.
3) Zaman Evrimi: Durum vektörü zaman içinde

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\Psi(t)\rangle \tag{3.1}$$

Veya

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}\,|\Psi(t=0)\rangle \tag{3.2}$$

Scrödinger denklemine göre evrilir. Burada $\hat{H}$ Hamilton işlmcisi ve $\hat{U} = e^{-\left(i/_t\right)}$

$\hat{U}^{t}\,\hat{U} = \hat{1}$.

4) Ölçüm: Ölçümün, $|\Psi\rangle$ durum vektörü üzerindeki etkisi, onu ölçülen değişkenin $|k\rangle$ özvektörlerinden birine $prob\,\alpha \quad |\langle k|\Psi\rangle|^2$ olasılığıyla dönüşmektedir.

Bu ise

$$\hat{P}_{|k\rangle} = \frac{|k\rangle\langle k|}{\langle k|\Psi\rangle} \tag{3.3}$$

üniter olmayan izdüşüm işlemciyle anlatılır.

Kuantum teorisinde konum, bir çarpım işlemcisi gibi davranan, dalga onksiyonunun q bağımsız değişkeniyle çarpan lineer hermitik bir $\hat{Q}$ işlemcisiyle temsil edilir. Böylece

$$\hat{Q}u(q;x) = qu(q;x) \tag{3.4}$$

özdeğer denklemi q'nun herhangi bir gerçel değeri için

$$u(q;x) = \delta(x-q) \tag{3.5}$$

bir konum Dirac δ- özfonksiyonu ile çözülür. Eş.(3,5) dalga foksiyonu sabit bir konumu işaret eder ve aynı zamanda

$$u(q;x) = \frac{1}{h}\int dp' \exp\left(ip' \frac{x-q}{h} \right) \tag{3.6}$$

biçiminde de ifade edilebildiği için momentumun her değeri eşit olasıdır. Momentum işlemcisi ise momentum uzayında konum işlemcisiyle aynı formda olmasıyla birlikte konum uzayındaki formu

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.7}$$

biçimindedir.

$$\hat{P}v(p;x) = pv(p;v) \tag{3.8}$$

Özdeğer denklemi p'nin herhangi bir gerçel değeri için

$$v(p;x) = \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \tag{3.9}$$

momentum özfonksiyonuyla çözülür. Eş.(3,9)'un karesi $|v(p;x)|^2$ konum olasılık dağılımıdır ve buda sabit olduğundan her değeri eşit olasıdır. Eğer bir sistemi hiçbir şekilde bozmadan, fiziksel bir niceliğin aldığı değer kesinlikle (yani %100 olasılıkla) öngörülebiliyorsa, o zaman bu fiziksel niceliğe karşılık gelen fiziksel gerçekliğin bir öğesi vardır. Bu EPR gerçeklik ölçütüdür. Diğer öne sürdükleri ölçüt ise herhangi bir teorinin eksikliği hakındadır: Fiziksel gerçekliğin her öğesi, fiziksel teori içinde onu betimleyen bir karşılığa sahip olmalıdır. Böylece bir öğenin teorinin anlatımında yeri yoksa teori eksiktir. Bu ölçütleri ortaya koyduktan sonra EPR, kuantum mekaniğinin eksik bir teori olduğu sonucuna vardılar. Bunun için EPR α ve β alt sistemlerinde kurulu bir $\varepsilon = \alpha + \beta$ sistemini düşündü. ε Sisteminin parçaları sonlu bir T süresi boyunca etkileşmişler (etkileşmeler Hamilton işlemcisiyle 3. Postulaya göre oluşur) ancak bundan sonra birbirleriyle etkileşmeyi kesmişlerdir. Böyle bir ε sistemini kuantum mekaniğinde betimleyen durum fonsiyonları şöyle yazılabilir;

$$\varphi(q_0; x_1, x_2) = \int dq' c(q') u_\alpha(q'; x_1) u_\beta(q_0 + q'; x_2) \tag{3.10}$$

$$\tilde{\varphi}(p_0; x_1, x_2) = \int dp' \tilde{c}(p') v_\alpha(p', x_1) v_\beta(p_0 + p', x_2) \tag{3.11}$$

Böylece sistem üzerine yapılacak bir ölçümden önce konum ve momentumu sonsuz küçük bir aralıkta ölçme olasılıkları şöyledir;

$$\Pr ob[Q_\alpha = (q', q'+dq')] = |c(q')|^2 dq' \tag{3.12}$$

$$\Pr ob[P_\alpha = (p', p'+dp')] = |\tilde{c}(p')|^2 dp' \tag{3.13}$$

Ve ölçüm sonrasında, yine 4. Ölçüm postulasına göre konum ve momentumun %100 olasılıkla aşağıdaki değerleri alacaktır;

$$Q_\alpha = q' \Rightarrow Q_\beta = q_0 + q' \tag{3.14}$$

$$P_\alpha = p' \Rightarrow P_\beta = p_0 + p' \tag{3.15}$$

olavaklardır. Aynı zamanda bu sistemin relatif konumu $\hat{Q} \equiv \hat{Q}_{\alpha} - \hat{Q}_{\beta}$ ve toplam momentumu $\hat{P}_{\varepsilon} \equiv \hat{P}_{\alpha} + \hat{P}_{\beta}$ da sıra değişen işlemcilerle anlatılır; $\left|\hat{Q}_{\varepsilon}, \hat{P}_{\varepsilon}\right| = 0$. İşte EPR böyle bir durum fonksiyonu buldu;

$$\varphi = \hat{\varphi}\left(q_0; p_{0,} x_1, x_2\right) = \frac{1}{h} \int dp' \exp\left[\frac{i\left(x_1 - x_2 + q_0\right)}{\hbar}\right] \tag{3.16}$$

$$= \delta\left(x_1 - x_2 + q_0\right) = \int dq' \, \delta\left(x_1 - q'\right) \delta(q' - x_2 + q_0)$$

Burada $p_0 = 0$, $\tilde{c}\left(p'\right) = \frac{1}{h}, ve \; c\left(c'\right) = 1$ dir. O halde kuantum mekaniksel olasılığın frekans yorumunu uygularsak, (3.16)'ya benzer durumunda hazırlanmış N üyeli topluluğun, örneğin $\frac{N}{2}$ tanesi α üzerinde Q_{α} ölçümü yapıldığında $x_{\alpha i}$ bulunduysa, $x_{\beta i} = x_{\alpha i} - q_0$ kesinlikle (%100) olmalı (i=1,2,3,…N/2). Benzer şekilde topluluğun geri kalan kısmı için yine α üzerinde P_{α} ölçümü yapılıp $P_{\beta j} = -P_{\alpha j}$ olacaktır. (j=N/2+1,N/2+2,..,N). Dahası bu iki sonucu da bütün bir topluluğa genişletebiliriz çünkü bunlar birbirinde çok uzakta ve etkileşmediklerinden, α üzerindeki bir değişiklik β üzerinde herhangi bir etkisi olmayacaktır. O halde β alt sisteminin konumu ve momentumu EPR gerçeklik ölçütüne göre eşanlı (birlikte) bir gerçekliğe sahiptir. Aksi halde β' nın gerçeklik öğeleri, α tarafından uzaktan ve hayalet bir anında etkiyle (spooky action at a distance) yaratılmış demektir. Bu ise Einstein'ın özel göreliğine aykırı olduğundan, EPR bunu absürd bulmuştur. Ve kuantum mekaniği $\left|\hat{Q}_{\beta J} \hat{P}_{\beta}\right| = i\hbar$ demekle bu durumu betimleyemediği için, EPR kuantum mekaniğinin eksik olduğu sonucuna varır. Bohr'a göre somut olarak ifa ettiğimiz ölçüm eyleminden başka sözü edilebilecek bir gerçeklik öğesi yoktur. Dikkat edilirse 4. Ölçüm postülası üniter bir işemci yerine bir izdüşüm işlemcisiyle anlatılıyor. Üniter değilse, fiziksel bir etkileşme (Hamiltonyen yoluyla) söz konusu değil ama bu yine de α'nın β'yı etkilemediği sonucuna götürmez. P_α Ve Q_α eşanlı ölçülemezler; Q_α ölçülürse P_α belirsiz kalır. Bu durumda momentumun korunumundan bahsedilemez. Konum ölçümü, momentumu bozduğu veya bilgisini değiştirdiği için değil bu, ontolojik anlamda artık momentuma sahip olmadığındandır. O halde konumun gerçekliği ile momentumun gerçekliği birbirlerini dışarlayan ama birbirlerini tümleyen öğelerdir. Bu tümleyicilik (complementarity) özelliği doğa felsefesinin yeni bir özelliğidir.

3.1. Lokal Realizm

Bir önceki bölümde kuantum mekaniğinin postulalaları verilmişti. Şimdi ise lokal realizmin postulaları verilecektir.

1) *Realizim*: Gözlemden ve gözleyenden bağımsız nesnel bir gerçeklik vardır.

2) *Lokalite:* İki nesne arasındaki etkileşme, aralarındaki mesafenin artırılmasıyla istenildiği kadar hatta ihmal edilebilecek kadar azaltılabilir.

3) *Zaman Yönü:* Zamanın uygun bir biçimde tanımlanmış bir "oku" vardır. Bütün fiziksel etkiler, geçmişten geleceğe doğru yol alırlar ve geçmiş tekrar düzenlenemez.

Birinci postulaya, örnek vermek gerekirse, ay kimse bakmadığında da oradadır, gözlenildiği zaman da bir atom var olmayı sürdürür vs. Nesnelerin kişilerden ve onların gözlemlerinden bağımsız olması fikri o kadar açıktır ki birçok teorik fizikçinin yanında hemen hemen herkes tarafından kabul edilir. EPR'nin gerçeklik ölçütünün altında aslında bu yatmaktadır. Eğer bir sistemi bozmadan %100 kesinlikle sistemin bir özelliğini öngörmek demek aynı zamanda bu özelliğin deneyciden bağımsız olduğuyla eş anlamlıdır. Aslında bütün bu düşünceler çoğunlukla sadece metafizik sayılmış ve hiçbir empirik sonucunun olmayacağı düşünülmüştür. Hâlbuki ikinci ve üçüncü postulayla birleştirildiğinde, yeterince hassas cihazlarla yapılacak uygun deneylerle Bell tipi eşitsizliklerinin sınanması yoluyla yanlışlanabilcek birçok deney vardır.

İkinci postüla ise nesneler arasındaki etkileşmenin şiddeti aralarındaki mesafeye ters orantılı olarak bağlı olduğu hakkındaki makul sayılan inançtan kaynaklanmaktadır. Çünkü şu ana kadar bilinen bütün temel etkileşmelerin şiddetleri (zayıf, kuvvetli, gravitasyon, elektromagnetik) ya ters kare ya da üstel olarak mesafenin artmasıyla hızla azalır. Yinede örneğin kuarkları çekirdeğe bağlayan, mesafe artıkça şiddeti de artan bazı hipoetik etkileşmeler de vardır. Yine de bunlar çok ciddiye alınmamalı çünkü hala gözlenilmemiş olan bu kuarkları açıklama çabalarının boşa gitmesi üzerine yapılan adhoc türünde bir varsayımdır. Hatta bu doğru olmasa bile bu tür bir etkileşmenin kısa menzilli (short-range) olduğu da söylenebilir.

Son postülada her ne kadar ona ters bazı ister edebi isterse de bilimsel fantastik senaryolar önerilse de büyük çoğunlukla doğru olduğu düşünülmüştür. Fizikte çözülen birçok denklemin bazı çözümleri her ne kadar matematiksel olarak mümkün olsa da bu postülat yüzünden açıkça belirtilmemesine rağmen fiziksel bulunmayarak atılırlar. Uygun olduğu düşünülen zaman okunun yönü, termodinamik bir durum parametresi olan entropinin artış yönüyle aynı oduğu söylenir.

4. BULGULAR

4.1. Dört EPR-Bell dolaşık durumlarının PPE'nin hesaplanması

Shrödinger 1935'teki makalesinde, dolaşıklığın olağanüstü bir gösterimini ünlü kedisini kullanarak sundu (Scrödinger 1935). Sistemin kuantum mekaniksel tanımı uyumlu ise; bileşik kuantum sistemi uyarılmış atom-canlı kedi ile taban atom- ölü kedi üst üste binmesindedir. (Şekil 2,2) Bir bütün olarak izole edilmiş kedi- zehir-atom sistemi; kedinin canlı ya da ölü haldeki bir paradoks ya da bir dolaşık durum halindedir. Şekil (2,2)'i 1964 yılındaki yayınında John Bell farklı bir düşünce tarzı ile göstermiştir (Bell, 1964). Peres-Horodecki PPE işlemi: A Hermityen bir operatör ise eki, kendisine $\mathrm{A} = \mathrm{A}^t$ eşittir. Ayrıca A operatörünün özdeğerleri gerçektir. Kuantum bilgi teorisinde; yoğunluk matrisiyle betimlenen sistemin, bileşik olup olmadığını bilmek önemlidir. Bu, yoğunluk matrisinin yarısının veya parçalı evriğinin alınmasıyla anlaşılabilir. Köşegelenmiş yoğunluk matrisi üzerine uygulanan PPE yöntemi, Peres- Horodecki parçalı evrik işlemi olarak bilinir (Peres et al. 1996).

I. Bell durumu : $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$

*II. Bell durum*u : $|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}\right)$

(4,1)

III. Bell durumu : $|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} - |11\rangle_{AB}\right)$

IV. Bell durumu : $|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}\right)$

Çizelge 4. 1Kübitlerin matris gösterimi

Satır Matris	**Sütun matris**
$\left(\vert 0\rangle\right)^{*} = \langle 0\vert = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\vert 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\langle 1\vert = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\vert 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

İki- kübitin matris gösterimleri:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\langle 0| \otimes \langle 0| = \langle 00| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \langle 0| \otimes \langle 1| = \langle 01| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1| \otimes \langle 0| = \langle 10| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \langle 1| \otimes \langle 1| = \langle 11| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

I.Bell durumu için PPE hesaplanması

I.Bell Durumu : $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$

$$\rho_{00} = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| \Rightarrow \rho_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ \langle 00|_{AB} + \langle 11|_{AB} \tag{4.4}$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right] \tag{4.5}$$

I.Bell durumunun yoğunluk matrisi

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] \tag{4.6}$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

şeklindedir.

Eş.(4,7).de $\rho_{00} = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\ )$

matris değeri verilmişti: $\mathrm{I_A} \otimes \mathrm{T}$ *veya* $id \otimes \mathrm{T}$ matris mekaniğinde “ 1. kübit sabit,

2. kübitin evriği alınır ya da 2. kübit sabit, 1. kübitin ($T \otimes \mathrm{I}_A$ *veya* $T \otimes id$) evriği alınır.“ anlamındadır. Biz burada 2. kübit sabit, 1. kübitin evriğini alacağız. Eş.(4,7)’ nin PPE ‘ i alınırken, dört terimede ayrı ayrı işlem uygulanır.

$$\rho_{00} = |\beta_{00}\rangle\langle\beta_{00}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\,) \tag{4.8}$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right] \tag{4.9}$$

1.terim 2. terim 3.terim 4.terim

I. Bell eşitliğin evrikli matrisinin birinci terimi:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\,|0\rangle_A\langle 0|_A \otimes |0\rangle_B\langle 0|_B\,\right] = \frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right] \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.11}$$

I. Bell eşitliğin evrikli matrisinin ikinci terimi:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\,|0\rangle_A\langle 1|_A \otimes |0\rangle_B\langle 1|_B\,\right] = \frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right] \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.13}$$

I.Bell eşitliğin evrikli matrisinin üçüncü terimi:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\,|1\rangle_A\langle 0|_A \otimes |1\rangle_B\langle 0|_B\,\right] = \frac{1}{2}\mathrm{T}^1\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right] \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_{A}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_{B}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}_{A}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_{B}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.15}$$

I. Bell eşitliğin evrikli matrisinin dördüncü terimi:

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\,|1\rangle_{A}\,\langle 1|_{A}\otimes|1\rangle_{B}\,\langle 1|_{B}\,\right]=\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\quad 1)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\quad 1)\right] \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_{A}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_{B}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_{A}\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_{B}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.17}$$

Bu dört eşitlikten, I.Bell durumunun evrik matrisi

$$(T\otimes id)(|B_{00}\rangle\langle B_{00}|)=(T\otimes I_{A})\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}_{AB}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.18}$$

şeklinde bulunur.

I. Bell durumun PPE'i bulunur. Burada Eş.(4.11) ve Eş.(4.17) matrislerinin evrikleri aynı kalırken, Eş.(4.13) ve Eş.(4.15) matrislerinin evrikleri değişmektedir. I. Bell durumunun bu yeni parçalı evrik matris özdeğerleri $\lambda_{1,2,3,4}=-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ şeklinde bulunur. Bir tane özdeğer negatif çıkmasıyla kuantum dolaşık durum kanıtlanır. Bu özdeğer – özvektör hesabı Mathematica 6,0'da yapılmış ve Ek 1'e konulmuştur.

II. Bell durumu için PPE hesaplanması

II. Bell durumu: $|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}\right)$

$$\rho_{01} = |\beta_{01}\rangle\langle\beta_{01}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}\right) \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}) \tag{4 19}$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\left[|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right] \tag{4.20}$$

II. Bell durumunun yoğunluk matrisi

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right] \tag{4.21}$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right] \tag{4.22}$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

şeklinde yazılır.

$$\rho_{01} = |\beta_{01}\rangle\langle\beta_{01}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{\mathrm{AB}} + |10\rangle_{\mathrm{AB}}\right) \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{\mathrm{AB}} + |10\rangle_{\mathrm{AB}}) \tag{4.24}$$

$$\rho_{01} = \frac{1}{2}\left[|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right] \tag{4.25}$$

II. Bell eşitliğin evrikli matrisinin birinci terimi:

Eş.(4.23)‘ te çıkarımını yaptığımız II. Bell durumunun yoğunluk matrisine, parçalı evrik uygulayarak

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[|0\rangle_A\langle 0|_A \otimes |1\rangle_B\langle 1|_B\right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ \ 1)\right]\ \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}_B\right] \tag{4.26}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.27}$$

II. Bell eşitliğin evrikli matrisinin ikinci terimi:

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[|0\rangle_A\langle 1|_A \otimes |1\rangle_B\langle 0|_B\right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ \ 1)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ \ 0)\right] \tag{4.28}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_B\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.29}$$

II. Bell eşitliğin evrikli matrisinin üçüncü terimi:

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[|1\rangle_A\langle 0|_A \otimes |0\rangle_B\langle 1|_B\right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ \ 0)\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ \ 1)\right] \tag{4.30}$$

$$\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.31}$$

II. Bell eşitliğin evrikli matrisinin dördüncü terimi:

$$\frac{1}{2}T^1\left[|1\rangle_A \langle 1|_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|_B\right]=\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}(0 \quad 1)\otimes\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(1 \quad 0)\right] \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_A \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.33}$$

Bu dört eşitlikten, II. Bell durumunun evrik matrisi

$$(T \otimes id)\left(|B_{01}\rangle\langle B_{01}|\right)=(T \otimes I_A)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.34}$$

şeklinde yazılır. II. Bell durumun PPE ‘si elde edilir. Burada Eş. (4.27) ve Eş.(4.33) matrislerinin evrikleri aynı kalırken, Eş.(4.29) ve Eş.(4.31) matrislerinin evrikleri değişmektedir. II. Bell durumunun bu yeni parçalı evrik matris özdeğerleri $\lambda_{1,2,3,4}=-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ şeklinde bulunur. Bir tane özdeğer negatif çıkmasıyla kuantum dolaşık durum kanıtlanır.

III. Bell durumu için PPE hesaplanması

III. Bell durumu : $|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} - |11\rangle_{AB}\right)$

$$\rho_{10} = |\beta_{10}\rangle\langle\beta_{10}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{\mathrm{AB}} - |11\rangle_{\mathrm{AB}}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|00\rangle_{\mathrm{AB}} - |11\rangle_{\mathrm{AB}}\,) \tag{4.35}$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right] \tag{4.36}$$

III. Bell durumunun yoğunluk matris gösterimi

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}\right] \tag{4.37}$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right] \tag{4.38}$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix} \tag{4.39}$$

şeklinde yazılır.

$$\rho_{10} = |\beta_{10}\rangle\langle\beta_{10}| \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{\mathrm{AB}} - |11\rangle_{\mathrm{AB}}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\,|00\rangle_{\mathrm{AB}} - |11\rangle_{\mathrm{AB}}\,) \tag{4.40}$$

$$\rho_{10} = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right] \tag{4.41}$$

Eş.(4.39)‘ da çıkarımını yaptığımız III. Bell durumunun yoğunluk matrisine, parçalı evrik uygulayarak

III. Bell eşitliğin evrikli matrisinin birinci terimi:

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\,|0\rangle_A\langle 0|_A \otimes |0\rangle_B\langle 0|_B\,\right]=\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] \tag{4.42}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.43}$$

III. Bell eşitliğin evrikli matrisinin ikinci terimi:

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[\,|0\rangle_A\langle 1|_A \otimes |0\rangle_B\langle 1|_B\,\right]=-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right] \tag{4.44}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}_B\right]=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.45}$$

III. Bell eşitliğin evrikli matrisinin üçüncü terimi:

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[\,|1\rangle_A\langle 0|_A \otimes |1\rangle_B\langle 0|_B\,\right]=-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}_B\right] \tag{4.46}$$

$$\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}_B\right]=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{4.47}$$

III. Bell eşitliğin evrikli matrisinin dördüncü terimi:

$$\frac{1}{2}T^1\left[|1\rangle_A\langle 1|_A\otimes|1\rangle_B\langle 1|_B\right]=\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_B\right] \tag{4.48}$$

$$\frac{1}{2}T^1\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_A\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}_B\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{4.49}$$

İfadeleri bulunur. Bu dört eşitlikten,

$$\left(\left(id\otimes T\right)\right)\left(|B_{10}\rangle\langle B_{10}|\right)=\left(T\otimes I_A\right)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}_{AB}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}_{AB} \tag{4.50}$$

III. Bell durumun PPE ‘si elde edilir. Burada Eş. (4.43) ve Eş(4.49) matrislerinin evrikleri aynı kalırken, Eş.(4.45) ve Eş(4.47) matrislerinin evrikleri değişmektedir. III. Bell durumunun bu yeni parçalı evrik matris özdeğerleri $\lambda_{1,2,3,4}=-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ şeklinde bulunur. Bir tane özdeğer negatif çıkmasıyla kuantum dolaşık durum kanıtlanır.

IV. Bell durumu için PPE hesaplanması

IV. Bell durumu: $|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}\right)$

$$\rho_{11} = |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| \Rightarrow \rho_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 01|_{AB} - \langle 10|_{AB}\right) \tag{4.51}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}\left[|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right] \tag{4.52}$$

IV. Bell durumunun yoğunluk matrisi (density matrix)

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right] \tag{4.53}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right] \tag{4.54}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{4.55}$$

şeklinde yazılır.

$$\rho_{11} = |\beta_{11}\rangle\langle\beta_{11}| \Rightarrow \rho_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}\right)\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle_{AB} - |10\rangle_{AB}\right) \tag{4.56}$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}\left[|01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|\right] \tag{4.57}$$

Eş.(4.55)‘ de çıkarımını yaptığımız IV. Bell durumunun yoğunluk matrisine, parçalı evrik uygulayarak

IV. Bell eşitliğin evrikli matrisinin birinci terimi:

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[|0\rangle_{A} \langle 0|_{A} \otimes |1\rangle_{B} \langle 1|_{B} \right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \tag{4.58}$$

$$\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B} \right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{B} \right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{AB} \tag{4.59}$$

IV. Bell eşitliğin evrikli matrisinin ikinci terimi:

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[|0\rangle_{A} \langle 1|_{A} \otimes |1\rangle_{B} \langle 0|_{B} \right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \tag{4.60}$$

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{B} \right] = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{B} \right] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{AB} \tag{4.61}$$

IV. Bell eşitliğin evrikli matrisinin üçüncü terimi:

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[|1\rangle_{A} \langle 0|_{A} \otimes |0\rangle_{B} \langle 1|_{B} \right] = \frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \tag{4.62}$$

$$-\frac{1}{2}T^{1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B} \right] = -\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B} \right] = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{AB} \tag{4.63}$$

IV. Bell eşitliğin evrikli matrisinin dördüncü terimi:

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^{1}\left[\,|1\rangle_{\mathrm{A}}\,\langle 1|_{\mathrm{A}}\otimes|0\rangle_{\mathrm{B}}\,\langle 0|_{\mathrm{B}}\,\right]=\frac{1}{2}\mathrm{T}^{1}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right] \tag{4.64}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}^{1}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}_{\mathrm{A}}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_{\mathrm{B}}\right]=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}_{\mathrm{A}}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}_{\mathrm{B}}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathrm{AB}} \tag{4.65}$$

ifadeleri bulunur. Bu dört eşitlikte

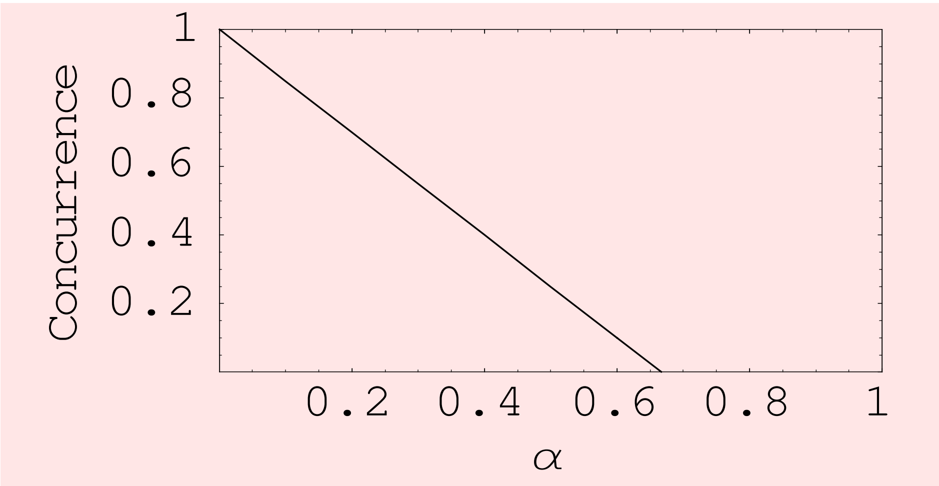
$$\left((id\otimes T)\right)\left(|\mathrm{B}_{11}\rangle\langle \mathrm{B}_{11}|\right)=(T\otimes \mathrm{I}_{\mathrm{A}})\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}_{\mathrm{AB}} \tag{4.66}$$

IV. Bell durumun PPE ‘si elde edilir. Burada Eş. (4.59) ve Eş(4.65) matrislerinin evrikleri aynı kalırken, Eş.(4.61) ve Eş.(4.63) matrislerinin evrikleri değişmektedir.

VI. Bell durumunun bu yeni parçalı evrik matris özdeğerleri $\lambda_{1,2,3,4}=-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ şeklinde bulunur. Bir tane özdeğer negatif çıkmasıyla kuantum dolaşık durum kanıtlanır. Dört tane Bell durumunun özvektör-özdeğer probleminin çözümleri Mathematica 6,0 da elde edilimiş ve ek 1 ‘e konulmuştur. R. Dermez’in doktora tezinde PPE işlemi ikinci matrisin evriği alınarak yapılmıştır. Bu çalışmada ise dört Bell durumu için birinci matrisin evriği alınarak aynı sonuçlar tam doğrulukla bulunmuştur (Dermez 2005).

4.2. Kübitin Alfa Katsayısına Göre Konkurus Değişiminin Hesabı

Kuantum Bilgi teorisinde, kuantum sistemleri analiz etmek istediğimizde, iki-kübit arasında mevcut olan dolaşıklığın miktarını hesaplamak gerekir. Örneğin Ayşe ve Bora ρ_{AB} yoğunluk matrisi ile tanımlanmış dolaşık kübitlerin bir çiftini paylaşır. İki-kübit arasında o andaki dolaşıklığın miktarını tanımlamak istersek, o zaman dolaşıklığın ölçümünün en kullanışlı yolu " Konkurus" dir (Wotters 1998). Burada kompleks bir matrisin "Konkurus" hesabını yaptık. α (yoğunluk matris parametresinin) değişimiyle dolaşıklığın nasıl gözlemlendiğine bakıldı. α Parametresi ideal bir durumu yansıtmamasına rağmen, α' nın artmasıyla yoğunluk matrisinin saflığı Konkurus hesabının grafiği verilmiştir. Ek2'de mathematica notebook'u verilmiştir



Şekil 4. 1. $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$ Bell durumunun α' ya göre "Konkurus" değişimi.

Kuantum mekaniğinin en ilginç sonuçlarından biri, birbirinden uzak iki ya da daha fazla taneciğin dolaşık durumudur. 1935' te Einstein, Podolsky, Rosen bir düşünce deneyi aracılığıyla dolaşık iki-taneciğin durumunu önermişler (Einstein 1935). Bu ilginçlikten dolayı günümüzde kuantum dolaşıklık, modern kuantum bilgi teorisinde önemli bir rol oynar. İki kübit (iki düzeyli iki parçacık) için dolaşıklık üzerine birçok çalışma ve hesap yapılmıştır (Nielsen and Chuang 2000). Fakat litaretür taramasına göre iki kütrit (üç düzeyli iki parçacık) ve iki kuadrit (dört düzeyli iki ayrı parçacık) için dolaşık durumlar tam olarak anlaşılamamıştır. Örneğin şimdiye kadar ki çalışmalarda herhangi bir küdit ($d \geq 3$, d; üç ve daha yukarı düzeyli atomlar) için bir ölçüme rastlanmamıştır. Konkurus (Aynı anda meydana geliş.) ve Negatiflik, iki paçacıklı kuantum sistemlerinde (bipartite quantum systems) dolaşıklığı ölçmek için iyi bir yoldur. Tezimizin bu kısmında genişletilmiş kuantum sistemlerinin, Konkurus ve Negatiflik ölçümleri ile dolaşıklığın nasıl olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde iki- kübit, iki-küdrit ve iki-kuadrit için Konkurus ve Negatifliği hesaplanmıştır. İlkez iki parçacıklı dolaşık durum Schrödinger tarafından matematiksel olarak formüle edilmiştir (Scrödinger 1935). Ayrık iki alt sistemlerden oluşan bileşik bir sistem için temiz durum;

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle = \sum_{a,b} c(a,b)|a\rangle|b\rangle \tag{4.67}$$

şeklinde verilebilir.

Burada ρ; yoğunluk matrisi, a ve b ise birbirine dik iki vektördür. Eğer c(a,b) $f(a)\times g(b)$ formunda bir çarpım içinde yazılamaz ise o zaman

$$\rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2 \tag{4.68}$$

şeklinde durum tensörel çarpım olarak yazılamaz.

$$|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \tag{4.69}$$

şeklinde yazamadığımız için,

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \rho \neq \rho_1 \otimes \rho_2 \tag{4.70}$$

şeklinde yazamıyoruz.

$$\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \,;\, \rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \tag{4.71}$$

bu şekildedir.

Tensörel çarpım biçiminde yazılamayan bu durum dolaşık durum olarak tanımlanmış ve Scrödinger tarafından Almanca ***"verschrankung***" ve ingilizce ***"entanglement***" olarak adlandırılmıştır (Scrödinger 1935). Dolaşıklık son on yıl boyunca modern fiziğin önemli kavramlarından biri olmuştur. Aynı zamanda dolaşıklık, kuantum iletişim ve kuantum hesaplamada kuantum bilginin uygulamaları için önemli bir kaynaktır (Bennett 2004). Burada şöyle bir soru söylenebilir. "Verilen bir kuantum durum ayrılabilir mi? Ya da dolaşık mıdır?" Günümüzde bu srunun cevabı iki düzeyli sistemler ya da kübitlerden (2x2 boyutlu sistem) oluşan bir çift için çözülmüştür (Wootters 1997). Bu bölümde kübit durumları, EPR-Bell durumu (dolaşıklık) yerine Schmidt formunda kullandık. Bu kullanım Schmidt katsayıları ile gerçekleşebilir. Kuantum hesaplamada bir kübit, bir küdrit ve bir kuadrit nasıl gösterilebilir? Schmidt katsayıları ile

Bir kübit:

$$|\Psi\rangle = k_1|1\rangle + k_2|2\rangle, \tag{4.72}$$

Bir kütrit:

$$|\Psi\rangle = k_1|1\rangle + k_2|2\rangle + k_3|3\rangle, \tag{4.73}$$

Bir kuadrit:

$$|\Psi\rangle = k_1|1\rangle + k_2|2\rangle + k_3|3\rangle + k_4|4\rangle \tag{4.74}$$

şeklinde gösterilir. Burada sırasıyla iki-üç-dört düzeyli sistemler; $H^{(2)} / H^{(3)} / H^{(4)}$ iki-üç-dört boyutlu Hilbert uzayındaki vektör durumlarına karşılık gelir. Burada $k_1, k_2, k_3, k_4 \in C$ (komleks uzayı) ve normalizasyon şartı:

$$\sum_i |k_i^2| = 1 \qquad \text{'dir} \tag{4.75}$$

Dolaşıklığın orjinal tanımı yukarıda düşünülen şartlar altında composit(bileşik) fiziksel sistemin özel iki bölümüne bağlıdır. Düşündüğümüz iki bölümlü bileşik sistemin bir parçası “***element***” olarak adlandırılır. Ve kuantum sayısıyla karekterize edilir. Böylece iki bölmeli bileşik sistem elementlerin toplamıdır. I. elementin di boyutunda bir Hilbert uzayında olduğunu düşünelim. Kübit, kütrit, kuadrit, küdit sırasıyla $d_i = 2, d_i = 3, d_i = 4$ ve $d_i = d$ ile iki-, üç-, dört-, ve d-düzeyli elementler olararak adlandırabiliriz.

4.3. İki Kübit Dolaşıklığı

Genel Schmidt denklemi;

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d} k_i |ii\rangle \tag{4.76}$$

şeklinde yazılabilir.

Schmitdt formunda iki kübit (birinci Bell durumu) için temiz durum

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{2} k_i |ii\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)_{AB} \tag{4.77}$$

gibi yazılır. Sistemin yoğunluk matrisinin tüm elemanları;

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2}\left[|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right] \tag{4.78}$$

gibi yazılabilir. Kuantum mekanikte, kuantum sistem ρ_A ikinci kübit üzerine hareket eden indirgenmiş yoğunluk operatörüyle

$$\rho_A = Tr_B(\rho) = Tr_B(\rho_{AB}) \tag{4.79}$$

ile tanımlanabilir.

Eş.(4.79)'a göre indirgenmiş yoğunluk matrisi;

$$\rho_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

ile verilebilir.

Birinci Bell durumu için Konkurusu

$$C(\rho) = \sqrt{2\left(1 - Tr(\rho_A)^2\right)} \Rightarrow C\,(\rho) = 1 \tag{4.81}$$

ile verilir (Rungta 2001). Schmidt katsayılarına göre Birinci Bell durumunun Konkurusu,

$$C\,(|\psi\rangle) = \sqrt{\sum_{i<j} k_i^2 k_j^2} = \sqrt{4k_1^2 k_2^2} \quad = 1 \tag{4.82}$$

ile verilir (Wootters 1998).

Burada k_1, k_2 Schmidt katsayılarıdır. Böylelikle iki farklı yoldan Konkurus'u elde ettik. Görüldüğü gibi Eş.(4.81), Eş.(4.82)'e denktir. Birinci Bell durumunun Negatifi'si,

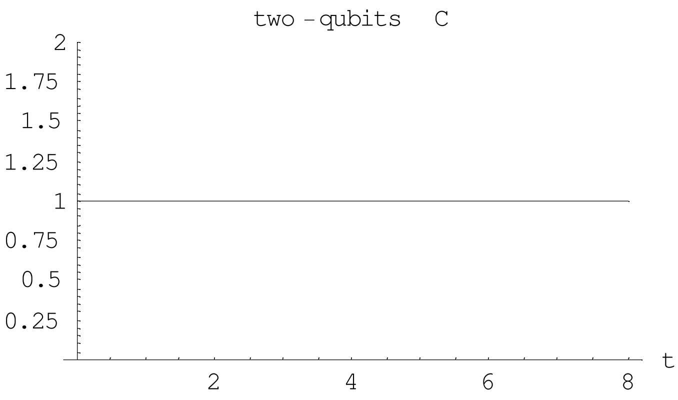
$$N(|\psi\rangle) = \frac{2}{(d-1)} \sum_{i \langle j} k_i k_j \Rightarrow N(|\psi\rangle) = 1 \tag{4.83}$$

şeklinde ifade edilir (Rai 2005) .

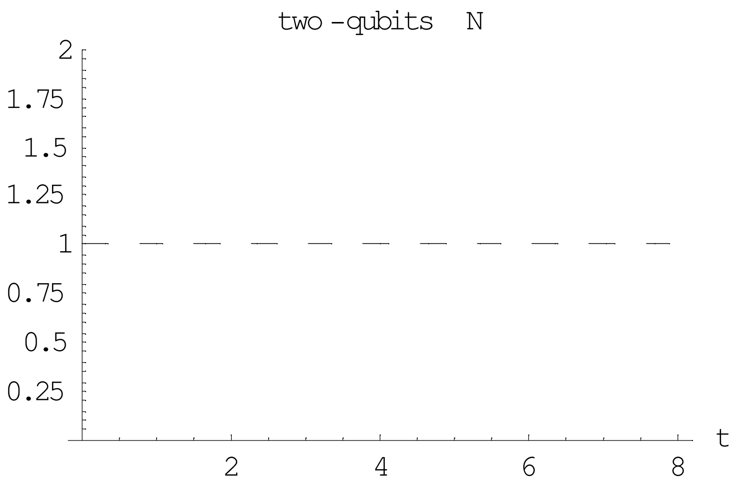
Dolaşıklığın ölçümü Negatiflik olarak adlandırılr ve

$$N(\rho) = \frac{1}{d-1} \cdot \left[g(\rho_A) - 1\right] \tag{4.84}$$

ile gösterilir (Lee 2003). $H_A \otimes H_B$ Kuantum sistemi $d \otimes d'\ (d \leq d')$ temiz durumların Negatifliğini düşündük.



Şekil 4. 2. Temiz durumda $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$ Bell durumu için Konkurus'un zamana bağlı grafiği.



Şekil 4. 3. Temiz durumda $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}\right)$ Bell durumu için Negatifliğin zamana bağlı grafiği.

4.4. İki Kütrit Dolaşıklığı

Schmidt formunda iki qüdrit için temiz durum

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|11\rangle + |22\rangle + |33\rangle\right)_{AB} \tag{4.85}$$

ile yazılır.

İki kütrit $H = H_3 x H_3$ dokuz boyutlu Hilbert uzayında tanımlıdır. İki kütritli sistemin yoğunluk matrisi ρ

$$\rho = \frac{1}{3}\left[|11\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 22| + |11\rangle\langle 33| + |22\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 22| + |22\rangle\langle 33| \right.$$
$$\left. |33\rangle\langle 11| + |33\rangle\langle 22| + |33\rangle\langle 33|\right] \tag{4.86}$$

ile verilir. Eş.(4.86) ‘e göre iki qüdritin indirgenmiş yoğunluk matrisi

$$\rho_A = Tr_B\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.87}$$

ile verilir.

İki kütritin hesaplanmış Konkurus değeri, aşağıdaki gibi dir (Rungta 2001).

$$C(\rho) = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{4.88}$$

İki kütritin Konkurus’u

$$C\left(|\Psi\rangle\right) = \sqrt{4\left(k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_2^2 k_3^2\right)} \tag{4.89}$$

ile verilir (Wootters 1997).

$$\Rightarrow C(|\psi\rangle) = \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{4.90}$$

İki kütritin Konkurus'u iki farklı yolla elde edildi. S.Lee tarafından tanımlanmış Negatiflik

$$N(|\psi\rangle) = \frac{2}{(3-1)}(k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3) = 1 \tag{4.91}$$

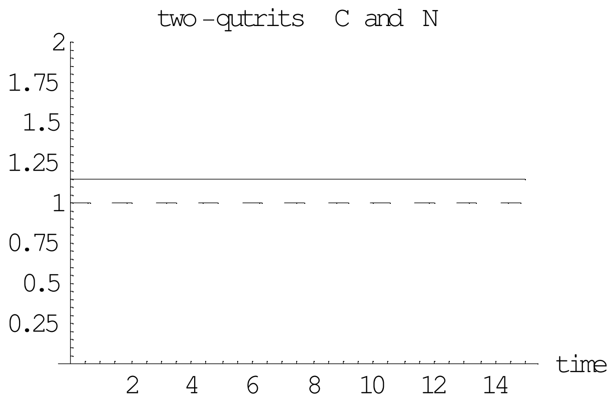
ile verilmiştir (Lee 2003). Burada Negatifliğ' in değeri "1"dir. İki kütrit için N ve C arasında mevcut ilişki

$$N^2 = \frac{C^2}{4} \mp 2 \cdot (k_1 \cdot k_2 \cdot k_3) \cdot \sqrt{1+2N} \tag{4.92}$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \tag{4.93}$$

ile verilir.

Burada $k_1 = k_2 = k_3 = 1/\sqrt{3}$ tür. Buda şekil2 de gösterilmiştir.



Şekil 4. 4. Temiz durumda iki kütrit için Negatiflik ve Konkurus 'un zamana bağlı grafiği C kalın, N kesikli çizgiyle gösterilmiştir.

4.5. İki Kuadritin Dolaşıklığı

Schmidt formunda iki kuadritin indirgenmiş yoğunluk matrisi

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}\left(|11\rangle + |22\rangle + |33\rangle + |44\rangle\right)_{AB} \qquad (4.94)$$

ile verilir.

İki kuadritin yoğunluk matrisi ρ

$$\rho = \frac{1}{4}\big[|11\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 22| + |11\rangle\langle 33| + |11\rangle\langle 44| + |22\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 22| + |22\rangle\langle 33| + |22\rangle\langle 44| + |33\rangle\langle 11| + |33\rangle\langle 22| + |33\rangle\langle 33| + |33\rangle\langle 44| + |44\rangle\langle 11| + |44\rangle\langle 22| + |44\rangle\langle 33| + |44\rangle\langle 44|\big] \qquad (4.95)$$

ile verilir. Eş.(4.82) 'e göre iki kuadritin indirgenmiş yoğunluk matrisi

$$\rho_A = Tr_B\left(|\Psi\rangle\langle\Psi|\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.96)$$

ile verilir. İki kuadritin Konkurus değeri aşağıdaki gibidir.

$$C(\rho) = \sqrt{3/2} \qquad (4.97)$$

S. Rai ve R. Lutra iki kuadritin Konkurus'unu

$$C(|\psi\rangle) = \sqrt{4\left(k_1^2 k_2^2 + k_1^2 k_3^2 + k_1^2 k_4^2 + k_2^2 k_3^2 + k_2^2 k_4^2 + k_3^2 k_4^2\right)} \qquad (4.98)$$

$$\Rightarrow C(|\psi\rangle) = \sqrt{3/2}$$

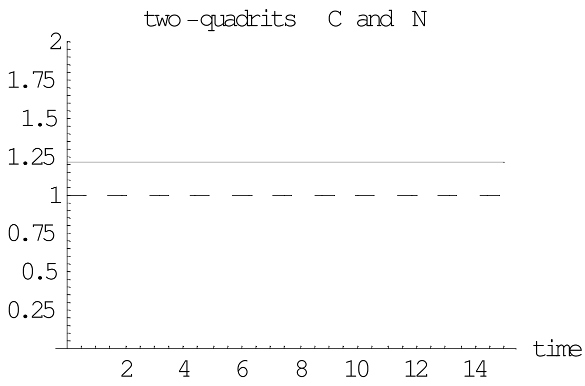
(4.99)

olarak göstermişlerdir (Rai 2005). Burada iki kuadritin Konkurus'u iki farklı yolla hesaplandı. İki kuadritin Negatifliği

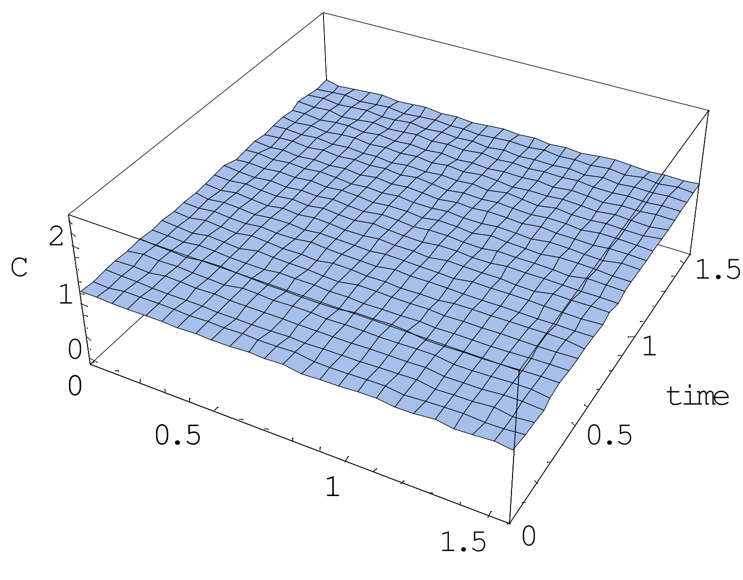
$$N\left(\left|\Psi\right\rangle\right)=\frac{2}{3}\left(k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4\right)$$

$$\Rightarrow N\left(\left|\Psi\right\rangle\right)=1. \qquad (4.100)$$

ile verilir. Kuadrit-kuadrit durumunun N ve C ‘si şekil4.5’ te gösterilmiştir.

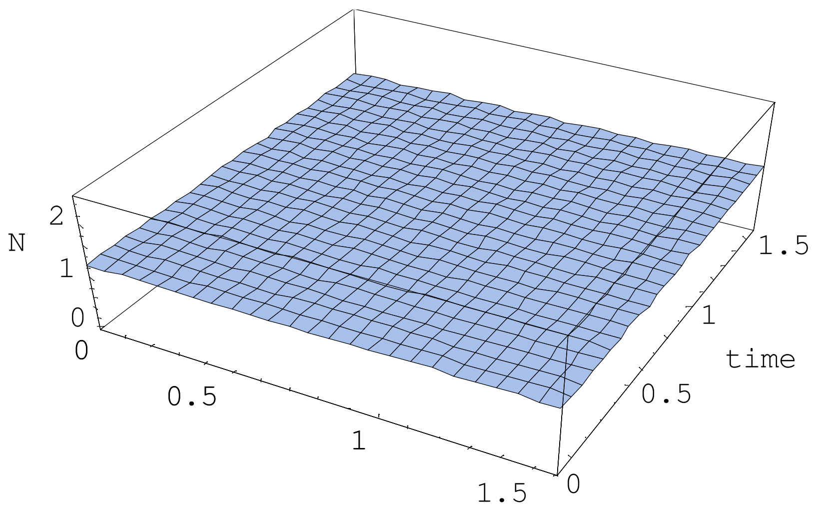


Şekil 4. 5. Temiz durumda iki kuadrit için Konkurus ve Negatifliğin’nin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4. 6. Kuadrit-kuadrit dolaşıklığı için konkurusun küresel paramatrizasyonun çizimi.

N ve C dolaşık özelliğini tanımlayan iki kullanışlı niceliktir. $C \geq N$ İlginç bir not olarak göz önünde bulndurulabilir. Temiz bir durum için Negatiflik Eş.(4.85) ve Eş.(4.91) de tanımlanmıştır. Üç farklı dolaşık qüdit için N ‘in maksimun değeri‘1’dir. İki kübit, iki kütrit iki kuadrit için C’nin maksimun değeri; 1 $\sqrt{4/3}$ ve $\sqrt{3/2}$ dir. İki-kübit için C ve N’ nin değerleri “1”e eşittir.



Şekil 4. 7. Kuadrit-kuadrit dolaşıklığı için Negatifliğin küresel paramatrizasyonun çizimi.

N ve C dolaşık özelliğini tanımlayan iki kullanışlı niceliktir. $C \geq N$ İlginç bir not olarak göz önünde bulndurulabilir. Temiz bir durum için Negatiflik Eş.(4.85) ve Eş.(4.86) de tanımlanmıştır. Üç farklı dolaşık küdit için N ‘in maksimun değeri ‘1’ dir. İki kübit, iki kütrit iki kuadrit için C’nin maksimun değeri; 1 $\sqrt{4/3}$ ve $\sqrt{3/2}$ dir. İki-kübit için C ve N’ nin değerleri “1”e eşittir.

5. DOLAŞIK DURUMUN UYGULAMALARI

1993 yılında IBM'den Charles H.Bennett'in aralarında bulunduğu altı bilim adamı tarayıcının ölçüm almamasını sağlayarak bir sistemin kuantum durumunu uzak bir yere aktarmanın mümkün olduğunu gösterdiler. Üstelik klasik faks makinelerindeki gibi aktarmayı tamamlamak için sadece bir telefon yeterli.

5.1. Bir Kübit Nasıl Işınlanır?

İki düzeyli bir kuantum sisteminin bir kubitlik bilgi taşıdığını söylüyorduk. Böyle bir sistem genellikle 0 ve 1 olarak adlandırılan, iki olası durumdan birinde olabildiği gibi, bunların değişik olasılıklarla üst üste geldiği sonsuz sayıda durumların birinde de olabilir. Bu sistem bir elektron spini olabilir, bir fotonun kutuplaşması ya da bir atomun enerji düzeyleri (uyarılmış ya da değil). Hangi sistemde gerçekleşiyor olursa olsun kuantum durumunu bir kuantum bilgi olarak tanımlıyoruz. Kuantum ışınlanmanın temel ilkesi bir teori olmaktan öte matematiğin desteğiyle deneysel olarak incelenmiştir. Kullanılan ilk metot fotonların ışınlanmasıdır. Fotonlar da elektronlar gibi spinlere sahiptir. Bir kuantum sistemini ışınlamak işin gerekli olan şey o sistemin kuantum durumudur. Yoksa herhangi bir madde aktarımı söz konusu değildir. Heisenberg belirsizlik ilkesinin böyle bir bilginin elde edilmesine müsaade etmeyeceği düşünülebilir. Bu yüzden teorisyenler dolaşık parçacıkları kullanıyorlar. Yapılan deneylerde Kamil'in Berna'ya iki düzeyli bir parçacık (1 numaralı parçacık) ışınlamak istediği düşünülmektedir. Bunu gerçekleştirmek için daha önceden bir dolaşık parçacık çiftinin Kamil'e ve Berna'ya iletilmiş olması gerekiyor (2.ve 3. parçacıklar). Kamil 'in elinde kuantum durumunu bilmediği 1.parçacık ve Berna'nınkine dolaşık olduğunu bildiği 2.parçacık var. Böyle bir sistem üzerinde yapılacak ölçüm en fazla 4 sonuç verecektir. Kamil özellikle elindeki iki parçacığı en yüksek düzeyde dolaşıklaştıracak bir ölçüm alıyor. Bu aşamada Kamil'in elindeki kubitlerdeki orijinal bilgi siliniyor, 1. ve 2. parçacıklar dolaşıklaşıyor ve son olarak da 2. ve 3. parçacılar arasındaki dolaşıklık kayboluyor. Berna'ın elindeki parçacık ışınlanmak istenen parçacığın durumuna sahip ancak işlemin tamamlanması için Kamil'in elde ettiği ölçümün sonucuna ihtiyacı var. Kamil ölçümü sonucunda parçacıkların olası dört durumdan hangisine çöktüğünü Berna'ya bildirmek zorundadır. Bunun için Berna'ya telefon ederek hangisi olduğunu söylemesi yeterli. Son olarak Berna, Kamil'den aldığı bilgiye dayanarak elindeki kubit üzerinde bir dönüşüm gerçekleştirir. Bu aşamada gerçekleştirilen dönüşüm ağırlıklı olarak kuantum hesaplamalarıyla ilgili. Sonuçta Berna'nın elindeki parçacık Kamil'deki birinci parçacığın durumuna geçecektir.

5.2. Kuantum Kuramını Zaferi

Hangi kuramın doğru olduğu konusunda deneysel testler 1970'lerden itibaren yapılmaya başlandı. İlk deneysel test, elektron-pozitron yokolması sonucu açığa çıkan iki fotonun polarizasyonlarının (yani fotonları oluşturan elektrik alanlarının yönünün) dolaşık olduğu bilgisinden hareketle Kasday tarafından yapıldı. Kısa bir süre sonra, daha düşük enerjili fotonlarla, optik düzeneklerin kesinliği kullanılarak daha iyi sonuçlar elde edilmeye başlandı. Örneğin S.J. Freedman ve J.F. Clauser tek değil de iki fotonun birden yayıldığı atomik ışımalarda yine fotonların kutuplaşmalarını inceleyerek Bell'in sonuçlarını test ettiler. Bugün bu testler, daha değişik koşullar altında daha kesin rakamsal sonuçlarla yapılmaya devam ediyor. Deneylerin gösterdiği sonuç kuantum kuramının zaferi anlamına geliyor.

Yani parçacıklar hile değil telepati yapıyorlar!

5.3. Elektron Spinleriyle EPR Deneyi

EPR deneyi anlaşılması daha kolay olduğu için elektronların spinleriyle anlatılır. Elektronları küçük ama sonlu kürecikler olarak düşünürseniz bu kürelerin kendi çevrelerinde dönme hareketine spin denir. Aslında kuantum kuramı elektronlar gibi bazı parçacıkların spinlerinin bildiğimiz anlamda bir dönme hareketinden kaynaklanmadığını söyler. Ama bu küçük detay dışında elektron spinlerini bu şekilde algılamakta büyük bir sakınca yok. Eğer bir cismin dönme yönü sağ elin başparmak dışındaki dört parmağın gösterdiği yönde ise spinin yönü başparmak yönünde olarak tanımlanır. Elektron spinlerinin ölçümleri sonucunda, spinin kuantumlaştığı ve sadece iki değer alabildiği biliniyor. Bir eksen doğrultusunda spin ölçülürse sonuç ya o eksen yönünde (yukarı spin) ya da tam ters yönde (aşağı spin) bulunuyor. Kuantum kuramına göre, bir elektron sadece yukarı spinde, ya da sadece aşağı spinde bulunmaz, bu iki spin değerinin üstüste geldiği durumlarda da bulunabilir. Tabi her ölçüm sonucunda spinin değeri uygun olasılıklarla ya yukarı ya da aşağı çıkar. İki elektronun spinlerinin dolaşık olduğu şöyle bir durum düşünelim: Hem iki elektronun spinleri zıt yönde olsun, hem de her iki elektron her iki spin değerini de alabilsin. Ya, birinci elektron yukarı spinde ve ikinci elektron aşağı spindedir; ya da birinci elektron aşağı spinde ve ikincisi yukarı spindedir. Bu iki durum özellikle eşit olasılıkla gelecek şekilde hazırlanır. Yukarıdaki ifadeye bakarak, "peki spinleri bu şekilde hazırlamak zor değil mi?" diye sorabilirsiniz. İşin doğrusu, birçok atomda elektronlar kendiliğinden bu durumda bulunurlar. Örneğin helyum atomundaki spinler bu şekilde dolaşıktır. Bu nedenle deneycilerin spinleri yukarıda anlatıldığı şekilde ayarlamaları zor değil.

6.TARTIŞMA ve SONUÇ

Kuantum mekaniği nesnel fiziksel gerçekliğin bir tasviri değildir. Bu gerçek onun eksik bir teori olduğunu göstermez. Çünkü onun eksik olduğunu söylemek doğanın eksik olduğunu iddia etmektir. Kuantum mekaniği, sadece fiziksel sistemler üzerine yapılacak olan deneylerin sonuçları hakkında anlamlı sorulara doğru yanıtlar verir. Eğer bu deney sonuçlarıyla tutarlı yanıtlar kişinin sağduyusuyla uyuşmuyorsa, sağduyu deney sonuçlarına göre tekrar düzenlenmelidir. Doğada bundan sonra gözlenebilecek her şey, dünyada birkaç on yıllık bir yaşam ve bilim tecrübesinin sonunda elde edilen sağduyuyla her zaman uyumlu olacağını söylemek, bütün bu bilinmeyen evreni hiçbir orijinal gözlem yapmadan bilinebileceğini söylemekle eşdeğerdir ve bir hatadır. Aynı hata sadece kuantum mekaniği için değil örneğin rölativite teorisini ilk ortaya koyduğunda Einstein'ın, uzayın Euclid geometrisine uymadığını söylediğinde aldığı tepki, Bohr'un tümleyicilik ilkesini öne sürdüğünde Einstein'ın ona verdiği tepkiyle ironik bir biçimde özünde aynı türdedir. Hata, hiç kimsenin daha önce, rölativite konusunda, ışık hızına yakın hızları; kuantum konusunda da mikroskobik dünyayı deneyimlememesinden, sağduyusu bu ikisini ihmal ederek biçimlendirmesinden ileri gelmektedir. "Dış dünya, ilkelerden türetmek için değil," keşfetmek için vardır.

Kuantum dolaşıklık Kuantum Mekaniğinin en garip özelliklerinden biridir. Verilen bir bileşik kuantum sistemin ölçümü iki metotla yapılır; Negatiflik ve Konkurus. Çalışmanın bu bölümünde C ve N dolaşıklık ölçümlerinin tüm formülleri ve hesapları yapıldı. Bu üç farklı kuantum durumunun (iki-kübit, iki-kütrit, iki-kuadrit) zamana bağlı grafikleri gösterilmiştir. N ve C için bu durumların matematiksel ifadeleri ve analizleri (Wotters' a göre) yapıldı. İki-kübitli sistem için Konkurus'unun tanımı Wotters tarafından gösterilmiştir. İki-kütrit ve iki-kuadrit için Konkurus ölçümleri (P. Rungta ve S. Rai ' ye göre) yapılmış. Dört-kübitli sistemin yapısal durum ve ölçümleri (A. Mandilara göre) yapılmış. Konkurus sonuçlarıyla iki-kübit ve iki kütrit için Negatiflik sonuçları karşılaştırıldı. Şöyle önemli bir sonuç bulundu. Konkurus, iki-quatrit dolaşıklığında; iki-kübit ve iki-kütritten daha güçlüdür (TFD, Malatya, Turkey, 2007).

$$C\left(\left|\psi_{4x4}\right\rangle\right) = 1.22 > C\left(\left|\psi_{3x3}\right\rangle\right) = 1.15$$
$$C\left(\left|\psi_{4x4}\right\rangle\right) = 1.22 > C\left(\left|\psi_{2x2}\right\rangle\right) = 1.00$$

ile görülmektedir.

Schmidt katsayılarıyla dolaşıklığın derecesinin zamana bağlılığı şekil.4,2 ve şekil.4,3 ‘te gösterilmiştir. Eş.(4.100, 4.102) ‘de kuadrit-kuadrit dolaşıklığı şekil.4,5 ve şekil.4,6’da gösterilmiştir.

7. KAYNAKLAR

Agarwal, G. S.1974, Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their Relation to Other Applications, Springer-Verlag, Berlin, 239p.

Bell, S. J. 1964, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, Physics 1, 195-200.

Bennett, C. H. and Shor, P.W. 1998, Quantum information theory, IEEE Trans. Inf.

Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W. K.,1993, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett., 70, 1895-1899.

Berkeland, D.J., Miller, J.D., Bergquist, J.C., Itano, W.M. and Wineland, D.J., 1998, Phys. Rev. Lett. 80, 2089-2092.

Bozdemir, S. , Ç. Ü. Fen –Ede. Fak. Fizik Böl. EKER, S. , AEÜ Fen-Ede. Fak.

Çağ, M. A, Dermez, R, TFD, Malatya, Turkey, 2007.

Can, M. A., 2004, Entanglement in atom-photon systems, PhD thesis, Bilkent University, The Institute of Engineering and Science, Ankara, 88p. and the SU Can, M. A. Klyachko A. and Shumovsky A. S., 2002, Entanglement (2) phase states in atomic systems, Phys. Rev. A, 66, 022111.

Can, M.A. , Cakır, Ö., Klyachko, A.A. and Shumovsky, A. S., 2004, Persistent entanglement in three-level atomic systems, J. Opt.B, 6, 13-17. Can, M.A., Klyachko, A.A. and Shumovsky, A.S., 2002, Easily monitored entangled state, Appl. Phys. Lett., 81, 5072-5074.

Can M. A., A. A. Klyachko and A. S. Shumovsky, Phys. Rev. A 66, 022111, (2002)

Cakır, Ö. , Klyachko, A.A. and Shumovsky, A.S. , 2005, Steady-state entanglement, Phys. Rev. A, 71, 034303.

Casado, A. , Fernandez-Rueda, A., Marshall, T. W., Risco-Delgado, R. and Sandos,E., 1997a, Fourth-order interference in the Wigner representation for parametric down-conversion experiments, Phys. Rev. A, 55, 3879-3890.

Çamursoy, O. 2003, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Conference on Computers, Systems and Signal Processing, IEEE Press, New York.

Dermez, R. 2005, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Dermez, R. ve Kılıçkaya, M.S., 2004, Atomik sistemlerde olası dolaşıklık, Türk Fizik Derneği 22. Fizik Kongresi, Bodrum-Türkiye.

Ekert, A. and A. Zeilinger The Physics of Quantum Information, (Springer, Berlin, 2000).

Einstein, A. , B. Podolsky, and N. Rosen. Phys. Rev. 47, 777-780 (1935) .

G. Vidal and R.F.Werner, Phys. Rev. A 65, 032314 (2002).

J.S.Çan. Speak ve kuantum mekaniğindeki tarifsiz(Cambridge üniversite basımı (1987).ISBN 0-521-36869-3.

JJ Sakurai, Modern Kuantum Mekaniği (Addison Wesley 1994) pp,174-187,223-232 ISBN 0-201-53929-2 F. Selleri, yerel gerçekliğe karşı kuantum mekaniği. Einstein- Podolsky-Rosen (Newyork 1998)

Kuzucu, O. , Fiorentino, M., Albota, M.A., Wong, F.N. and Kaertner, F.X., 2005, Two-photon coincident-frequency entanglement via extended phase matching, Phys. Rev. Lett., 594, 083601.

Kwiat, P.G., Waks, E., White, A.G., Appelbaum, I. and Eberghard, P.H., 1999, Ultra-bright source of polarization-entangled photons, Phys. Rev. A, 60, R773-R776.

Kwiat, P.G. , Peters, N., Altepeter, J., Jeffrey, E. and Branning, D., 2003, Precise creation, characterization and manipulation of single optical qubits, Quantum Information and Computation, Vol. 3, 503-517.

Landauer, R., 1961, Irreversibility and heat generation in the computing process, IBM, J. Res. Dev., 5:183.

Lee S. , D.P. Chi, S.D. Oh, and J. Kim, Phys. Rev. A 68, 062324 (2003).

M. Nielsen, and I. Chuang Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge Univ ersity Press, (New York, USA, 2000).

Poppe, A. , Fedrizzi, A., Lorünser, T., Maurhardt, O., Ursin, R., Böhm, R., Peev, M. ,Suda, M., Kurtsiefer, C., Weinfurter, H., Jennewein,T. and Zeilinger, A.,2004,Practical quantum key distribution with polarization entangled photons, quant-ph 0404115.

Rauschenbeutel, A. , Bertet, P., Osnaghi, S., Nogues, G., Brune, M., Raimond, J. M. and Haroche, S., 2001, Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment, Phys. Rev. A, 64, 050301. Shih, Y.H., Sergienko, A.V., Rubin, M.H., Kiess, T.E. and Alley, C.O., 1994, 2-Photon entanglement in type II PDC, Phys. Rev. A., 50, 23-50.

Rai S.and J.R. Luthra quant-ph/0508045; quant-ph 0507263

Rungta P. , V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G.J. Milburn, Phys. Rev. A 64, 042315 (2001).

Schrödinger, E. 1935, Naturwissenschaften, 23, 807, 823, 844; English translation in Quantum Theory of Measurement

Shih, Y.H., 2003, Entangled photons, IEEE Journal of Selected In Quantum Electronics, Vol 3, 1455-1467.

Shih, Y.H. , 2003, Entangled biphoton sources-property and preparation, Rep. Prog. Phys. 66, 1009-1045.

Shih Y. , IEEE Journal of Selected In Quantum Electronics, Vol 3, 1455-1467, (2003)

Shumovsky, A.S. and Tanatar, B., 1993, Quantum-statistical properties of a Raman-type model, Phy. Rev. A, 48, 4735-4741.

Steane, A. , 1998, Quantum computing, Rep. Prog. Phys. 61, 117-173.

Tan, S. M. , Walls, D. F. and Collect, M.J., 1991, Nonlocality of a single photon, Phys. Rev. Lett. 66, 252-255.

Tanas, R. and Ficek, Z. , 2004 Stationary two-atom entanglement induced by nonclassical two- photon correlations, J. Opt. B: Quantum Semi. Opt. 6, S 610-617.

Terhal, B. M., Wolf, M. and Doherty, A. C., April 2003, Quantum entanglement: It’s not your grandfather’s quantum mechanics, Physics Today, 46-51 p.

Theory,44, 2724-2742. Bennett, C. H. and Brassard, G., 1984, in Proc. of IEEE

Tittel, W. , Brendel, J., Zbinden, H. and Gisin, N., 1998, Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart, Phys. Rev. Lett., 81, 3563-3566.

Turchette, Q.A. , Wood, C.S., King, B.E., Myatt, C.J., Leibfried, D., Itano, W.M., Monroe, C. and Wineland, D. J., 1998, Deterministic entanglement of two trapped ions, Phys. Rev. Lett. , 81, 3631-3634.

Von Neumann, J. 1955, Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press; originally published in German in 1932, 472 p.

Walborn, S.P. de Oliveira, A.N., Thebaldi, R.S. and Monken, C.H., 2004, Phys. Rev. A, 69, 023811.

Wineland, D.J. , Monroe, C., Itano, W.M., Heinzen, D.J. and Moore, F.L., 1992, Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy, Phys. Rev. A, 46, R6797-R6800.

Wootters W.K. , Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998); S. Hill and W.K. Wootters,78, 5022 (1997).

Zeilinger, A. , April 2000, Quantum teleportation, Scientific American, 32-41.

Zeilinger, A., Horne, M.A., Weinfurter, H. and Zokowsky, M., 1997, Three-particle entanglements from to entangled pairs, Phys. Rev. Lett., 78, 3031-3033.

Zukowsky, M., Zeilinger, A., Horne, M.A. and Ekert A. K., 1993, Event-ready-detectors: Bell experiment via entanglement swapping, Phys. Rev. Lett., 71, 4287-4290.

7.1. İnternet Kaynakları

7.1. İnternet Kaynakları	Erişim Tarihi
www.Wikipedia.com	12.09. 2007
www.zamandayolculuk.com (BAL Ç.)	19.01.2008
www. tubitak.gov.tr	12.04.2008

EK 1

I. Bell durumu için özdeğer - özvektör hesabı :

$$\text{Eigenvalues}\left[\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \qquad \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

II. Bell durumu için özdeğer - özvektör hesabı :

$$\text{Eigenvalues}\left[\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \qquad \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

III. Bell durumu için özdeğer - özvektör hesabı :

$$\text{Eigenvalues}\left[\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \qquad \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

IV. Bell durumu için özdeğer - özvektör hesabı :

$$\text{Eigenvalues}\left[\frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \qquad \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

EK 2

```
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`;
MDP[a_List?MatrixQ, b_List?MatrixQ] := BlockMatrix[Outer[Times, a, b]];
Concurrence[c_List?MatrixQ, α_, αmin_, αmax_, dα_] := (

  sigy = (0  -ⅈ
          ⅈ   0);
  sigsigy = MDP[sigy, sigy];
  rhototal = c;
  α = Γ;
  rhototal2 = sigsigy.(Conjugate[c]).sigsigy;
  Tabconc = Range[dα + 1];
  For[w = 0, w < dα + 1, w++;
   Γ = N[αmin + (1 / dα) (w - 1) (αmax - αmin)];
   Print[Eigenvalues[rhototal.rhototal2]];
   g = Length[Eigenvalues[rhototal.rhototal2]];
   Conc = √(Chop[Eigenvalues[rhototal.rhototal2][[1]]]) - Σ_{i=2}^{g} √((Chop[Eigenvalues[

   Tabconc[[w]] = {Γ, Conc};
  ];
  Print[Tabconc];
  Γ =.;
  α =.;
  ; Return[ListPlot[Tabconc, PlotRange → {{αmin, αmax}, {0, 1}}, PlotJoined → Tru
    FrameLabel → {"α", "Concurrence"}, TextStyle → {FontSize → 14}]]
)
```

```
ρAB = 1/2 {{1, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {1, 0, 0, 1}
ρAB // MatrixForm
ThroughChannelρAB = (1 - α) ρAB + α (1 / 4) IdentityMatrix[4];
ThroughChannelρAB // MatrixForm
Concurrence[ThroughChannelρAB, α, 0, 1, 10]
```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Akif ÇAĞ

Doğum Yeri : ADIYAMAN

Doğum Tarihi : 15.01.1978

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Yüksek Lisans : Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi, Afyonkarahisar (2006-2008).

Lisans : Konya Selçuk Üniversitesi, Konya (1997-2003)

Lise : Atatürk Lisesi, Adıyaman (1992-1995).

Yayınları: Turkish Physical Society 24th International Physics Confererce 2007, Malatya, Turkey Balkan Physics Letters Proceeding.

Proje : Akü 07. FENED.09 nolu BAPK projesi çalışması (2007).