

İKİ BORU ARASINDAKİ NON-NEWTONYEN AKIŞKAN  
AKIŞINDA DEĞİŞİK VİSKOZİTE MODELLERİ İÇİN  
ENTROPİ ÜRETİMİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KAPUCU

DANIŞMAN

Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Temmuz 2008

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS

İKİ BORU ARASINDAKİ NON-NEWTONYEN AKIŞKAN AKIŞINDA DEĞİŞİK  
VİSKOZİTE MODELLERİ İÇİN ENTROPİ ÜRETİMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet KAPUCU

DANIŞMAN  
Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Temmuz 2008

## ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhammet Yürüsoy danışmanlığında, Mehmet KAPUCU tarafından hazırlanan “İKİ BORU ARASINDAKİ NON-NEWTONYEN AKIŞKAN AKIŞINDA DEĞİŞİK VİSKOZİTE MODELLERİ İÇİN ENTROPİ ÜRETİMİNİN İNCELENMESİ”

başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 23/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇOLAKOĞLU	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Osman ÜNAL	

Afyon Kocatepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun  
...../...../..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT  
Enstitü Müdürü

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b>	ii
<b>ABSTRACT</b>	iii
<b>TEŞEKKÜR</b>	iv
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b>	v
<b>ŞEKİLLER LİSTESİ</b>	vi
<b>1. GİRİŞ</b>	1
<b>2. GENEL BİLGİLER</b>	4
<b>3. MATERYAL VE METOD</b>	5
3.1 Silindirik Koordinatlarda Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum Ve Enerji Denklemlerinin Çıkartılması	5
3.2 Hız Ve Sıcaklık Profilleri İçin Analitik Çözümlerin Bulunması	23
3.2.1 Reynold Viskozite Modeli	26
3.2.2 Vogel Viskozite Modeli	36
3.3 Entropi Analizi	42
<b>4. BULGULAR</b>	47
4.1. Reynold Viskozite Modeli İçin Grafikler	47
4.2. Vogel Viskozite Modeli İçin Grafikler	56
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b>	63
<b>6. KAYNAKLAR</b>	66
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	67

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### İKİ BORU ARASINDAKİ NON-NEWTONYEN AKIŞKAN AKIŞINDA DEĞİŞİK VİSKOZİTE MODELLERİ İÇİN ENTROPİ ÜRETİMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet KAPUCU

**Afyon Kocatepe Üniversitesi**  
**Fen Bilimleri Enstitüsü**  
Makine Eğitimi Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

Bu tez çalışmasında, iç içe geçmiş iki boru arasında non-Newtonyen akışkan akışı, ısı transferi ve entropi üretimi incelenmiştir. Silindirik koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemleri çıkartılmıştır. Silindirik koordinatlar için elde edilen genel hareket denklemlerinden faydalanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akım için momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Bulunan bu denklemler için iki boru arasındaki akışı ifade eden sınır şartları belirlenmiştir. Elde edilen denklemler ve sınır şartları, belli şartlar altında çözümlerin genel olabilmesi için boyutsuz hale getirilmiştir. Sonuçta silindirik koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri araştırılmıştır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon metodu (bir tür seri açılım metodu) olan yaya açılımı (pedestrian) yöntemi kullanılmıştır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu denklemlerin analitik çözümleri Reynold viskozite modeli ve Vogel viskozite modelleri kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen çözümler kullanılarak entropi analizi yapılmıştır. Entropi analizi iki kısımda incelenmiştir. Bunlardan birincisi sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimi diğeri ise ısı transferi neticesinde oluşan entropi üretimidir. Özellikle entropi üretiminde Newtonyen akışkanlar ile non-Newtonyen akışkanlar arasındaki fark grafiklerle açıkça gösterilmiştir.

**2008, 67 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Non-Newtonyen akışkan, İki boru arasındaki akış, Entropi analizi.

## **ABSTRACT**

MSc Thesis

### **INVESTIGATION of ENTROPY GENERATION for NON-NEWTONIAN FLUID FLOW in ANNULAR PIPE USING DIFFERENT VISCOSITY MODELS**

Mehmet KAPUCU

**Afyon Kocatepe University**  
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**  
Department of Mechanical Education

**Supervisor:** Doç. Dr. Muhammet YÜRÜSOY

In this study, non-Newtonian fluid flow in annular pipe, heat transfer and entropy generation have been investigated. Momentum and energy equations that belong to third grade fluids for cylindrical coordinate are derived. By using the general equations gained for cylindrical coordinate, momentum and energy equations for one dimension flow in pipe have been derived. For the derived equations the boundary conditions explaining flow in annular pipe are determined. These equations and boundary conditions have been made dimensionless to be able to generalize the results. Finally, ordinary differential equations systems that refer the one dimension flow in cylindrical coordinate are obtained. The approximate analytical solutions of these equations are investigated. Perturbation method, a pedestrian approach, is used in solving the equations. It is assumed that viscosity is changed according to the heat. The equations' analytical solutions are done by Reynold and Vogel viscosity models. Entropy analysis is used in two stages. The first stage consists of production of entropy caused by friction, and the second stage consists of production of entropy caused by heat transfer. The differences between entropy generation in Newtonian fluids and non-Newtonian fluids are shown with graphics.

**2008, 67 sayfa**

**Keywords:** Non-Newtonian fluid, Annular pipe flow, Entropy generation

## **TEŐEKKÖR**

Tez alıŐmam sűresince benden bilgi ve deneyimlerini hiçbir zaman esirgemeyen tez danıŐmanım ve deęerli hocam Doç. Dr. Muhammet YÖRÖSOY' a sonsuz teŐekkűrlerimi sunarım.

Tez çalıŐmama buldukları katkılarından dolayı ArŐ. Grv. Ali KEÇEBAŐ'A ve tűm bűlűm hocalarıma teŐekkűrlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca tűm űęrenim hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme teŐekkűr ederim.

Mehmet KAPUCU

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### 1. Simgeler

A	Viskozite Sabiti
B	Viskozite Sabiti
$A_1$	Rivlin Ericksen Tensörleri
$A_2$	Rivlin Ericksen Tensörleri
k	Isı İletim Katsayısı
P	Basınç
$\alpha_1$	Akışkan Sabiti
$\alpha_2$	Akışkan Sabiti
$\beta$	Akışkan Sabiti
$\mu$	Viskozite
$\Gamma$	Brinkman Sayısı
$\Lambda$	Boyutsuz non-Newtonyen Akışkan Katsayısı
$\epsilon$	Pertürbasyon parametresi

### 2. Kısaltmalar

Non-Newtonyen	Newtonyen olmayan akışkan
u	x yönündeki vektörel hız
v	y yönündeki vektörel hız



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Şekil No	Sayfa No
Şekil 3.1	İç içe geçmiş iki boru arasındaki akışın şematik gösterimi	23
Şekil 4.1	Değişik $\Lambda$ değerleri için hız profilleri ( $C=-1, \Gamma=1, M=1$ )	47
Şekil 4.2	Değişik $M$ değerleri için hız profilleri ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1$ )	48
Şekil 4.3	Değişik $\Lambda$ değerleri için sıcaklık profilleri ( $C=-1, \Gamma=1, M=1$ )	48
Şekil 4.4	Değişik $M$ değerleri için sıcaklık profilleri ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1$ )	49
Şekil 4.5	Değişik $\Lambda$ değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, \Gamma=1, M=1$ )	49
Şekil 4.6	Değişik $M$ değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, \Gamma=1, \Lambda=0.1$ )	50
Şekil 4.7	Değişik $\Lambda$ değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, \Gamma=1, M=1, \theta_0=1.2$ )	50
Şekil 4.8	Değişik $M$ değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1, \theta_0=3$ )	51
Şekil 4.9	Değişik $\Lambda$ değerleri için toplam entropi üretimi ( $C=-1, \Gamma=1, M=1, \theta_0=1.2$ )	51
Şekil 4.10	Değişik $M$ değerleri için toplam entropi üretimi ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1, \theta_0=3$ )	52
Şekil 4.11	Değişik radyal mesafelerde toplam entropinin $\Lambda$ 'ya göre değişimi ( $C=-1, \Gamma=1, M=1, \theta_0=1.2$ )	52
Şekil 4.12	Değişik radyal mesafelerde toplam entropinin $M$ 'ye göre değişimi ( $C=-1, \Gamma=1, \theta_0=3, \Lambda=0.1$ )	53
Şekil 4.13	Değişik $A$ değerleri için hız profilleri ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05$ )	56
Şekil 4.14	Değişik $A$ değerleri için sıcaklık profilleri ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05$ )	57
Şekil 4.15	Değişik $A$ değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05$ )	57
Şekil 4.16	Değişik $B$ değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, A=1.5, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05$ )	58

Şekil 4.17	Değişik A değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05, \theta_0 = 0.723$ )	58
Şekil 4.18	Değişik B değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1, A=1.5, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05, \theta_0 = 0.723$ )	59
Şekil 4.19	Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin A'ya göre değişimi ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05, \theta_0 = 0.723$ )	59
Şekil 4.20	Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin B'ye göre değişimi ( $C=-1, A=1.5, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05, \theta_0 = 0.723$ )	60
Şekil 4.21	Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin $\Lambda'$ ya göre değişimi ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, A=1, \theta_0 = 1.2$ )	60

## 1. GİRİŞ

Günümüzde akışkanlar mekaniğinin öneminin ne kadar büyük olduğu gelişen teknolojiyle ortaya çıkmaktadır. Kan dolaşımından roketlere kadar çok çeşitli alanlarla doğrudan doğruya ilgili olan akışkanlar mekaniği bütün mühendislik kollarında ve bilim dallarında kaçınılmaz bir bilgi kaynağı durumuna gelmiştir.

Çok yakın tarihe kadar akışkanlar mekaniği bilimi hidrolik adı altında görülmekte idi. Hidroliğin genellikle su ile uğraşması, kapsadığı akışkan sorunlarının çok sınırlı kalması ve deneysel sonuçların matematik temelden yoksun olması, dolayısı ile genelleştirilememesi ve olayların nedenlerine inememesi gibi gerekçeler nedeniyle hidrolik bilimi hızla gelişen tekniğin getirdiği sorunlara karşılık veremez duruma gelmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda birçok gerçek akışkanın, özellikle düşük moleküler ağırlığa sahip olanların mekanik davranışları Navier-Stokes teorisi tarafından doğru olarak belirlenmektedir. Bu teorinin uygulanabildiği akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak adlandırılmaktadır. Kararlı bir halde akan akışkanda, hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer olan akışkanlar Newtonyen akışkanlar olarak tanımlanabilir. Non-Newtonyen akışkanlarda ise hız değişimi ile uygulanan kayma gerilimi arasındaki ilişki lineer değildir. Newtonyen akışkanlara su ve hava gibi akışkanları örnek gösterebiliriz. Bunun yanında non-Newtonyen akışkanlar da günlük hayatta oldukça fazla karşılaştığımız akışkanlardır. Örnek olarak bal, hamur, sulandırılmış nişasta, yumurta akı, bitkisel yağlar bu gruba girerler. Her yerde kullanılan boya ve günlük hayatta oldukça sık rastladığımız asfalt, zift, tutkal gibi maddeler de non-Newtonyen akışkanlardır.

1900'lü yılların başında aerodinamik alanında yapılan çalışmalara önem verilmesi non-Newtonyen akışkanlara verilen önemin azalmasına neden olmuştur. Özellikle 1904'de Prandtl tarafından ortaya atılan sınır tabası kavramı ve gelişen uçak endüstrisi sayesinde bir cisim etrafında hareket eden akış için geniş çalışmalar yapılmıştır. Bu akış ile ilgili birçok tasarım metotları geliştirilmiştir. Bunu aksine non-Newtonyen akışkanlar mekaniği daha yakın bir zamanda gelişmeye başlamıştır. Fiziksel kimyacıların madde

akışı ile moleküler yapı arasında ilişki kurmak istemeleri ve polimerik malzemelerin endüstride önem kazanması bu alanda yapılan araştırmaların artmasına neden olmuştur.

Bu tez çalışmasında iç içe geçmiş iki boru arasında non-Newtonyen akışkan akışı, ısı transferi ve entropi üretimi incelenmiştir. İç içe geçirilmiş iki boru arasındaki akış endüstride geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Mesela; ısı değiştiricilerinde iki farklı sıcaklıktaki akışkanın akıtılması ile ısı transferi sağlanmakta bu sayede ısıtma veya soğutma sağlanmaktadır.

Tez çalışmasında, silindirik koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkışı yapılmıştır. Üçüncü dereceden non-Newtonyen akışkanların momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılmıştır. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler akabinde üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılmıştır. Bu elde edilen momentum ve enerji denklemleri üç boyutlu kararlı akış içindir. Silindirik koordinatlar için elde edilen genel hareket denklemlerinden faydalanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akım için momentum ve enerji denklemleri elde edilecektir. Daha sonra elde edilen denklem için iki boru arasındaki akışı ifade eden sınır şartları belirlenecektir. Elde edilen denklemler ve sınır şartları belli şartlar altında çözümlerin genel olabilmesi için boyutsuz hale getirilecektir. Sonuçta silindirik koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilecektir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri araştırılacaktır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon metodu (bir tür seri açılım metodu) kullanılacaktır. Literatürde birçok perturbasyon yöntemi mevcuttur. Bu tezde yaya (pedestrian) açılımı metodu kullanılmıştır. Hız ve sıcaklık profillerinin bulunmasında yaya açılımı yapılarak denklem Newtonyen ve non-Newtonyen kısımlar olarak ayrıştırılmıştır. Önce Newtonyen kısmın çözümleri sonra non-Newtonyen kısmın çözümleri yapılmıştır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri için iki ayrı viskozite modeli için analitik çözümler üretilmiştir. Bu modellerden ilki Reynold viskozite modeli diğeri ise Vogel viskozite modelidir. Her iki model ile literatürde çalışmalar mevcuttur. Daha sonraki bölümde entropi hakkında genel bilgi verilmiştir. Elde edilen bu hız ve sıcaklık profilleri kullanılarak entropi üretimi (entropy generation) üzerinde

durulmuştur. Entropi analizi iki kısımda incelenmiştir. Bunlarda birincisi sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimi diğeri ise ısı transferi neticesinde oluşan entropi üretimi olacaktır. Özellikle entropi üretiminde Newtonyen akışkanlar ile non-Newtonyen akışkanlar arasındaki fark açıkça gösterilecektir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Non-Newtonyen akışkanlar ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar arasında boru akışı ile ilgili olan çalışmaların bir kısmı şu şekildedir. Massoudi ve Christie (1995) nümerik olarak boru içerisindeki akışı incelemişlerdir. Bu çalışmada viskozite değişken olarak alınmış ve akışkan olarak üçüncü derece non-Newtonyen bir akışkan modeli kullanılmıştır. Yürüsoy ve Pakdemirli (2002) aynı modeli ele alarak bu model üzerinde analitik çözümleri ortaya koymuşlardır. Analitik çözümleri Massoudi ve Christie'nin nümerik çözümleri ile karşılaştırmışlardır. Aynı problem Yürüsoy (2004) tarafından iki boru arasındaki akışa uygulanmıştır. Pinarbasi ve Özalp (2001) kanal içerisinde non-Newtonyen akışkan akışını ele alıp viskozitenin etkilerini araştırmışlardır. Hecht (1973) boru içerisindeki power-law akışkan modelinin akışını incelemiştir. Sabit ısı akışı durumu için çözümler üretmiştir. Wang ve Chukwu (1996) power-law akışkan modelini kullanarak zamana bağlı Couette akışını ele almıştır.

Bu tez çalışmasında iki boru arasında non-Newtonyen akışkan akışında entropi üretimi konusu da ele alınacaktır. Entropi üretimi ile ilgili çalışmalar daha ziyade Newtonyen akışkanlar üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalardan bir kaçısı şunlardır. Akış sistemlerinde entropi üretimi iki şekilde oluşur. Birincisi akışkan sürtünmesi diğeri ısı transferidir. Akış sistemlerinde entropi analizi termodinamik tersinmezliğin miktarını belirler. Bejan (1995) termal sistemlerde entropi üretimin ve minimizasyonunu incelemiştir. Bu çalışmada entropi minimizasyonunun termal sistemlerin tasarımında kullanılabileceği gösterilmiştir. Mahmud ve Fraser (2002) iki boru arasındaki Newtonyen akışkan akışını inceleyip entropi analizi yapmışlardır. Yilbas, Yürüsoy ve Pakdemirli (2004) iç içe iki boru arasında sabit viskozite modeli için non-Newtonyen akışkan akışını inceleyip, entropi analizi yapmışlardır.

### 3. MATERYAL VE METOD

#### 3.1 Silindirik Koordinatlarda Üçüncü Derece Akışkanlara Ait Momentum Ve Enerji Denklemlerinin Çıkartılması

Bu bölümde silindirik koordinatlarda üçüncü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin çıkışı yapılacaktır. Üçüncü dereceden non-Newtonyen akışkanların momentum ve enerji denklemlerinin çıkarılışında Rivlin-Ericksen tensörleri kullanılacaktır. Önce ivme terimleri sonra viskoz terimler akabinde üçüncü derece akışkan terimlerinin çıkışı detaylı olarak anlatılacaktır. Bu bölümde elde edilen momentum ve enerji denklemleri üç boyutlu kararlı akış içindir.

İkinci ve üçüncü derece akışkanlara ait bünye denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.(Fosdick ve Rajagopal,1980)

$$\mathbf{T} = p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta(\text{tr}\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1 \quad (3.1)$$

Burada  $p$  basınç,  $\mu$  viskozite,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ve  $\beta$  akışkan sabitleri  $\mathbf{A}_1$  ve  $\mathbf{A}_2$  ilk iki Rivlin Ericksen tensörleridir. Bu tensörler şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \\ \mathbf{A}_2 &= \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Burada  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$  'dir ve lineer momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\text{div}\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.3)$$

Denklem (3.1) ve (3.2) denklem (3.3)'e yerleştirilip gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) &= -\text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha_1 (\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \alpha_1 \text{grad} (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) \\
&+ \frac{1}{4} (2\alpha_1 + \alpha_2) \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \left[ \mathbf{A}_1 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} + 2 \text{div} \left( (\text{grad} \mathbf{v}) (\text{grad} \mathbf{v})^T \right) \right] \\
&+ \beta \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ikinci ve üçüncü derece akışkanlara ait en genel hareket denklemi denklemde (3.4)'deki gibi elde edilmiş olur.

İkinci ve üçüncü derece akışkanlara ait enerji denkleminin en genel hali aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2 + \frac{1}{4} \alpha_1 \frac{d}{dt} (|\mathbf{A}_1|^2) + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^3 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1|^4 + k \nabla^2 \mathbf{T} \tag{3.5}$$

Burada  $\varepsilon$  iç enerji,  $k$  ısı iletim katsayısıdır.

Denklem (3.4) ve (3.5)'te  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ikinci derece akışkan,  $\beta$  ise üçüncü derece akışkan terimlerinin ifade etmektedir. Bu çalışmada sadece üçüncü derece akışkanlar inceleneceği için denklem (3.4) ve (3.5)'te ikinci derece akışkanlara ait kısımlar çıkarılıp denklem yeniden düzenlenirse

$$\rho \left( \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \beta \mathbf{A}_1 \cdot \text{grad} |\mathbf{A}_1|^2 + \beta |\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \tag{3.6}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2 + \frac{\beta}{2} |\mathbf{A}_1|^4 + k \nabla^2 \mathbf{T} \tag{3.7}$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca süreklilik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.8}$$



Denklem (3.6)'da  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v})$ 'dir. Hız ve gradyan operatörünü şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta, z)\mathbf{i}_r + v_\theta(r, \theta, z)\mathbf{i}_\theta + v_z(r, \theta, z)\mathbf{i}_z \quad (3.9)$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.10)$$

Hız operatöründeki  $v_r$  r yönündeki hızı,  $v_\theta$   $\theta$  yönündeki hızı,  $v_z$  z yönündeki hızı ifade etmektedir.

Süreklilik denklemini açık biçimde ifade edersek denklem (3.11) elde edilir.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

Denklem (3.6)'daki vektörel terimlerin hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle  $|\mathbf{v}|^2$  ifadesinden başlanarak bütün terimler tek tek hesaplanacaktır.

$$|\mathbf{v}|^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 \quad (3.12)$$

(3.12) ifadesinin aşağıdaki gibi gradyanı alınıp 2'ye bölünürse

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 = & \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_r + \left( \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_z}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_\theta \\ & + \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilir.  $\boldsymbol{\omega}$  ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_r & r\mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Denklem (3.14)'ün determinanı alınırsa  $\boldsymbol{\omega}$  aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) \mathbf{i}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_z \quad (3.15)$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  ifadesi ise denklem (3.15) ve denklem (3.9)'un vektörel çarpımıdır. Çarpım sonucu ise şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = & \left[ v_z \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \mathbf{i}_r \\ & + \left[ \frac{v_r}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{v_z}{r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) \right] \mathbf{i}_\theta \\ & + \left[ \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) - v_r \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.16)$$

Denklem (3.13) ile denklem (3.16)'ü toplarsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{grad}|\mathbf{v}|^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = & \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r \\ & + \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{i}_\theta \\ & + \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

denklemleri elde edilir. Basınç gradyanı ise

$$\text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{i}_z \quad (3.18)$$

şeklinde yazılır. Akım sıkıştırılmaz olduğu için hız vektörünün laplasiyeni şu şekilde hesaplanabilir.

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) \quad (3.19)$$

Bu ifadenin eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\text{rotrot}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_r & r\mathbf{i}_\theta & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (rv_\theta) \right) & r \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Denklem (3.20)'nin determinantı alınırsa rotrot( $\mathbf{v}$ ) aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$\begin{aligned} \text{rotrot}(\mathbf{v}) &= \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right) \mathbf{i}_r \\ &+ \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta \partial z} \right) \mathbf{i}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta \partial z} \right) \mathbf{i}_z \end{aligned} \quad (3.21)$$

Burada rotrot( $\mathbf{v}$ ) ifadesini daha sade görünmesi için süreklilik denklemini kullanalım.

Denklem (3.11)'deki süreklilik denkleminin gradyanı alınırsa

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \mathbf{i}_r + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \mathbf{i}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \mathbf{i}_z = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) denklemini düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right) \mathbf{i}_r \\
& + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta \partial z} \right) \mathbf{i}_\theta \\
& + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta \partial z} \right) \mathbf{i}_z = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. Elde edilen denklem (3.23) ile (3.21) ortak düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_r \\
& + \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_\theta \\
& + \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{3.24}$$

denklemini elde edilir. Böylece ivme terimleri hesaplanması tamamlanmış olmaktadır.

Şimdi  $|\mathbf{A}_1|^2$ 'nin hesaplanması yapılacaktır.  $\mathbf{A}_1$ 'in eşiti denklem (3.2) ile tanımlanmıştır.

Denklem (3.2)'de  $\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v}$  ve  $\mathbf{L}$ 'nin transpozesi yerine yerleştirilirse  $\mathbf{A}_1$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

$\mathbf{A}_1$  matrisinin karesi alınır ve köşegen elemanlar toplanırsa  $|\mathbf{A}_1|^2$  bulunmuş olur.  $|\mathbf{A}_1|^2$  aşağıdaki gibi hesaplanmış olur.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1|^2 &= 4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 \\
&+ 2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

grad $|\mathbf{A}_1|^2$  ifadesinin eđiti

$$\begin{aligned}
\text{grad}|\mathbf{A}_1|^2 &= \frac{\partial}{\partial r}\left(4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right. \\
&+ 2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2 + \left.\left(\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right)\mathbf{i}_r \\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right. \\
&+ 2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2 + \left.\left(\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right)\mathbf{i}_\theta \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(4\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2\right. \\
&+ 2\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)^2 + \left.\left(\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right)\mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{3.27}$$

biçimindedir.  $\mathbf{A}_1 \cdot \text{grad}|\mathbf{A}_1|^2$  ifadesinin hesabı ise aşağıdaki gibidir.



$$\begin{aligned}
& + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) \\
& + 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \mathbf{i}_z
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Şimdide  $|\mathbf{A}_1|^2 \cdot \nabla^2 \mathbf{v}$  terimini hesaplayalım. Bu ifade denklem (3.26) ile denklem (3.24)'ün çarpımıdır. Çarpım yapılırsa;











$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{r^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{r^2} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{r^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{4}{r^2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{8}{r^2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\
& + 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + 2 \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) \\
& + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$



$$+ 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.32)$$

denklemleri elde edilmiş olur. Böylece üçüncü derece akışkanlara ait üç boyutlu hareket denklemleri elde edilmiş oldu.

Şimdi de denklem (3.7)'deki enerji denkleminin çıkışı yapılacaktır.  $\frac{d\epsilon}{dt}$  ifadesinin eşiti aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \rho c_p \left( \frac{dT}{dt} + v_r \frac{dT}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dT}{d\theta} + v_z \frac{dT}{dz} \right) \quad (3.33)$$

$|\mathbf{A}_1|^2$  ifadesinin eşiti daha önce hesaplanmıştı (denklem (3.26)). Denklem (3.26) ile viskoziteyi ( $\mu$ ) çarparsak ve 2'ye bölersek  $\frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2$  ifadesini bulmuş oluruz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu |\mathbf{A}_1|^2 = \mu & \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Denklem (3.25)'in dördüncü kuvveti alınıp köşegen elemanlar toplanırsa  $|\mathbf{A}_1|^4$  ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}_1|^4 = & \left( 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right)^2 \\
& + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \right. \\
& + \left. \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \left. + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right)^2 \\
& + \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right)^2 \\
& + \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \left. + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right)^2
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$k\nabla^2\mathbf{T}$  ifadesinin eşiti aşağıdaki gibidir

$$k\nabla^2\mathbf{T} = k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right) \tag{3.36}$$

Bulduğumuz bütün ifadeleri birleştirecek üçüncü derece akışkanlara ait enerji denklemini elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( \frac{dT}{dt} + v_r \frac{dT}{dr} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dT}{d\theta} + v_z \frac{dT}{dz} \right) &= \mu \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\
&+ \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \Big) \\
&+ \frac{\beta}{2} \left[ \left( 4 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right)^2 \right. \\
&+ \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\left. \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
&+ \left. \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right)^2 \\
&+ \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 \right)^2 \\
&+ \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \right. \\
&+ \left. 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right. \\
&\left. \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( \left( r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right. \\
&+ \left. \left( \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} \right) \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right)^2 + \left( \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right. \\
&\left. + \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right)^2 \Big] + k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}
\tag{3.37}$$

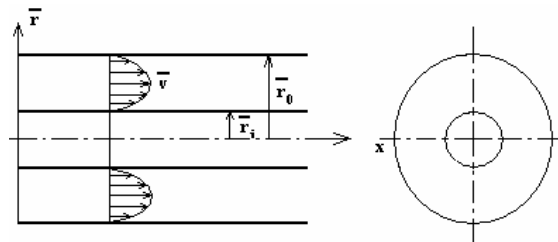
Bu bölümde üçüncü derece akışkanlara ait en genel hareket denklemleri ile enerji denkleminin çıkışı silindirik koordinatlarda elde edilmiş oldu. Sonraki bölümde bu



denklemlerden faydalanılarak boru içerisindeki akışın hareket denklemleri elde edilecektir.

### 3.2 Hız Ve Sıcaklık Profilleri İçin Analitik Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde ikinci bölümde silindirik koordinatlar için elde edilen genel hareket denklemlerinden faydalanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akım için momentum ve enerji denklemleri elde edilecektir. Bulunan bu denklemler için iki boru arasındaki akışı ifade eden sınır şartları belirlenecektir. Elde edilen denklemler ve sınır şartları belli şartlar altında çözümlerin genel olabilmesi için boyutsuz hale getirilecektir. Sonuçta silindirik koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilecektir. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık analitik çözümleri araştırılacaktır. Denklemlerin çözümü için perturbasyon metodu (bir tür seri açılım metodu) kullanılacaktır. Literatürde birçok perturbasyon yöntemi mevcuttur. Bu tezde yaya (pedestrian) açılımı metodu kullanılacaktır. Hız ve sıcaklık profillerinin bulunmasında yaya açılımı yapılarak denklemler Newtonyen ve non-Newtonyen kısım olarak ikiye ayrılacaktır. Önce Newtonyen kısmın çözümleri sonra non-Newtonyen kısmın çözümleri yapılacaktır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri için iki ayrı viskozite modeli için analitik çözümler üretilmiştir. Bu modellerden ilki Reynold viskozite modeli diğeri ise Vogel viskozite modelidir. Her iki model ile literatürde çalışmalar mevcuttur.



Şekil 3.1 İç içe geçmiş iki boru arasındaki akışın şematik gösterimi

İç içe geçirilmiş iki boru arasındaki akış sembolik olarak Şekil (3.1)'de gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında  $r$  ve  $\theta$  yönündeki hızlar sıfır kabul edilmiştir. Hareketin sadece  $z$  yönünde olduğu ve sadece  $r$ 'ye bağlı olarak değiştiği kabulü yapılmıştır. Aşağıda bu tanımlamanın matematiksel ifadesi verilmiştir.

$$v_r = 0, v_\theta = 0, v_z = v_z(r) \quad (3.38)$$

Denklem (3.38)'deki kabuller denklem (3.30), (3.31), (3.32) ve (3.37) yerine konulursa üçüncü derece akışkanlara ait momentum, enerji denklemleri ve probleme ait sınır şartları elde edilmiş olur.

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{r}} \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} + \bar{r} \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{r}^2} \right) + \frac{2\beta}{\bar{r}} \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} + 3\bar{r} \frac{d^2\bar{v}}{d\bar{r}^2} \right) = 0 \quad (3.39)$$

$$k \frac{d^2\bar{\theta}}{d\bar{r}^2} + \frac{k}{\bar{r}} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}} + \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 \left[ \bar{\mu} + \beta \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.40)$$

$$\bar{v}(\bar{r}_1) = 0, \bar{v}(\bar{r}_0) = 0, \bar{\theta}(\bar{r}_1) = 0, \bar{\theta}(\bar{r}_0) = 0 \quad (3.41)$$

Denklem (3.39) momentum denklemini, denklem (3.40) ise enerji denklemini ve denklem (3.41) probleme ait sınır şartlarını ifade etmektedir. Bu tez çalışmasında  $\mu$  yani viskozite değişken olarak kabul edilecektir. Bu nedenle ikinci bölümde denklem (3.1)'de gösterilen bünye denklemlerinin diverjansı alınırken viskoziteyi de dikkate almak gerekecektir. Denklem (3.39)'da gösterilen  $\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{r}} \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}}$  ifadesi buradan gelmektedir.

Bu denklemlerdeki ifadeler boyutlu ifadelerdir. Çözümlerin genel olabilmesi için denklemlerin boyutsuz formda ifade edilmesi gerekmektedir. Boyutlu ve boyutsuz büyüklükler arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$R = \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}_1}, r = \frac{\bar{r}}{\bar{r}_1}, v = \frac{\bar{v}}{V_0}, \theta = \frac{\bar{\theta} - \theta_w}{\theta_m - \theta_w}, \mu = \frac{\bar{\mu}}{\mu_0} \quad (3.42)$$

Denklem (3.42)'deki  $V_0$  referans hızı,  $\mu_0$  referans viskoziteyi,  $\theta_m$  ortalama akışkan sıcaklığını ve  $\theta_w$  cidar sıcaklığını ifade etmektedir. Denklem (3.42)'deki ifadeler denklem (3.39), (3.40) ve (3.41)'de yerine konulur ise boyutsuz denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\frac{d\mu}{dr} \frac{dv}{dr} + \frac{\mu}{r} \left( \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} \right) + \frac{\Lambda}{r} \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \left( \frac{dv}{dr} + 3r \frac{d^2v}{dr^2} \right) = C \quad (3.43)$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \Gamma \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \left[ \mu + \Lambda \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.44)$$

$$v(1) = \theta(1) = 0 \quad v(R) = \theta(R) = 0 \quad (3.45)$$

Denklemlerde  $v$  boyutsuz akışkan hızını,  $\theta$  boyutsuz sıcaklığı ifade etmektedir.

$$C = \frac{C_1 \bar{r}_i^2}{\mu_0 V_0} \quad C_1 = \frac{dp}{dz} \quad \Gamma = \frac{\mu_0 V_0^2}{k(\theta_m - \theta_w)} \quad \Lambda = \frac{2\beta V_0^2}{\mu_0 \bar{r}_i^2} \quad (3.46)$$

Denklem (3.46)'da  $C_1$  eksenel yöndeki basınç düşümü,  $\Gamma$  Brinkman sayısı,  $\Lambda$  boyutsuz non-Newtonyen akışkan katsayısı,  $\beta$  boyutlu üçüncü derece akışkan katsayısı ve  $k$  ısı iletim katsayısıdır.

Bundan sonraki kısımlarda iki ayrı viskozite modeli için yaklaşık analitik yöntemler üretilecektir. Yaklaşık çözümleri elde etmek için yaya açılımı (bir perturbasyon metodu) kullanılacaktır. Perturbatif çözümlerin detaylı olarak anlatıldığı kaynak (Nayfeh 1981) dir.

### 3.2.1 Reynold Viskozite Modeli

Reynold viskozite modeli viskozitenin sıcaklığa bağlı değişiminin eksponansiyel olduğu modeldir. (Massoudi M., Christie I. 1995)

$$\mu = e^{-M\theta} \quad (3.47)$$

Momentum ve enerji denklemlerindeki hız ve sıcaklığın yaya açılımları aşağıdaki gibidir.

$$v = v_0 + \epsilon v_1 \quad (3.48)$$

$$\theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 \quad (3.49)$$

Burada  $\epsilon$  perturbasyon parametresidir. Ayrıca denklem (3.47)'nin de seri açılımı yapılırsa

$$\mu \cong 1 - \epsilon m\theta \quad (3.50)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (3.43)'te viskozitenin türevinin olduğu görülmektedir. Bu yüzden denklem (3.50) türetilirse

$$\frac{d\mu}{dr} \cong -\epsilon m\theta' \quad (3.51)$$

denklemini elde edilmiş olur. Ayrıca çözümlerde boyutsuz non-Newtonyen katsayısı  $\Lambda$  ve viskozite sabiti  $M$ 'de aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\Lambda = \epsilon \lambda, \quad M = \epsilon m \quad (3.52)$$

Yani denklem (3.52)'deki tanımlama ile  $\Lambda$  ve  $M \in$  mertebesinde kabul edilmiştir. Şimdi tanımlama ve kabullerden sonra denklem (3.48)-(3.52) denklem (3.43)-(3.45)'e yerleştirilir ise

$$\begin{aligned}
& -\in m(\theta'_0 + \in \theta'_1)(v'_0 + \in v'_1) + \frac{1}{r}(1 - \in m(\theta_0 + \in \theta_1))((v'_0 + \in v'_1) + r(v''_0 + \in v''_1)) \\
& + \frac{\in \lambda}{r}(v'_0 + \in v'_1)^2((v'_0 + \in v'_1) + 3r(v''_0 + \in v''_1)) = C
\end{aligned} \tag{3.53}$$

denklem (3.53) elde edilir. Bu denklem momentum denkleminde uygulanan yaya açılımını ifade etmektedir. Denklemdeki mertebelerin daha açık görülmesi için denklem (3.53) açılır ise

$$\begin{aligned}
& -\in mv'_0\theta'_0 - \in^2 mv'_1\theta'_0 - \in^2 mv'_0\theta'_1 - \in^2 mv'_1\theta'_1 + \frac{1}{r}(v'_0 + \in v'_1 + rv''_0 + \in rv''_1 - \in mv'_0\theta_0 \\
& - \in^2 mv'_1\theta_0 - \in rmv''_0\theta_0 - \in^2 rmv''_1\theta_0 - \in^2 mv'_0\theta_1 - \in^3 mv'_1\theta_1 - \in^2 rmv''_0\theta_1 - \in^3 rmv''_1\theta_1) \\
& \frac{\lambda}{r}(\in v_0^3 + \in^2 v_0^2 v_1 + 3\in rv_0^2 v''_0 + 3\in^2 rv_0^2 v''_1 + 2\in^2 v_0^2 v_1 + 2\in^3 v_0 v_1^2 + 6\in^2 rv_0 v''_0 v_1 \\
& + 6\in^3 rv_0 v_1 v''_1 + \in^3 v_0 v_1^2 + \in^4 v_1^3 + 3\in^3 rv_0 v_1^2 + 3\in^4 rv_1^2 v_1) = C
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Denklem (3.54) elde edilir. Benzer şekilde enerji denkleminde de açılımlar yerleştirilip ifadeler açılır ise

$$\theta''_0 + \in \theta''_1 + \frac{1}{r}(\theta'_0 + \in \theta'_1) + \Gamma(v'_0 + \in v'_1)^2((1 - \in m(\theta_0 + \in \theta_1)) + \in \lambda(v'_0 + \in v'_1)^2) = 0 \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
& \theta''_0 + \in \theta''_1 + \frac{1}{r}\theta'_0 + \frac{1}{r}\in \theta'_1 + \Gamma v_0'^2 - \in \Gamma mv_0'^2 \theta_0 - \in^2 \Gamma mv_0'^2 \theta_1 + \in \Gamma \lambda v_0'^4 \\
& + 2\in^2 \Gamma \lambda v_0'^3 v_1 + \in^3 \Gamma \lambda v_0'^2 v_1^2 + 2\in \Gamma v_0' v_1 - 2\in^2 \Gamma mv_0' v_1 \theta_0 - 2\in^3 \Gamma mv_0' v_1 \theta_1 \\
& + 2\in^2 \Gamma \lambda v_0'^3 v_1 + 4\in^3 \Gamma \lambda v_0'^2 v_1^2 + 2\in^4 \Gamma \lambda v_0' v_1^3 + \in^2 \Gamma v_1'^2 - \in^3 \Gamma mv_1'^2 \theta_0 \\
& - \in^4 \Gamma mv_1'^2 \theta_1 + \in^3 \Gamma \lambda v_0'^2 v_1^2 + 2\in^4 \Gamma \lambda v_0' v_1^3 + \in^5 \Gamma \lambda v_1'^4 = 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

denklemlerine varılır.

Elde edilen denklem (3.54) ile (3.56)'daki ifadelerde sadece 1 ve  $\in$  mertebeleri dikkate alınacaktır . Bu mertebeler yazılır ise

### 1 Mertebesi

$$rv_0'' + v_0' = Cr \quad (3.57)$$

$$\theta_0'' + \frac{1}{r}\theta_0' + \Gamma v_0'^2 = 0 \quad (3.58)$$

$$v_0(1) = v_0(R) = \theta_0(1) = \theta_0(R) = 0 \quad (3.59)$$

### € Mertebesi

$$rv_1'' + v_1' - m\theta_0 v_0' - rm\theta_0 v_0'' - rm\theta_0' v_0' = -\lambda v_0'^2 (v_0' + 3rv_0'') \quad (3.60)$$

$$\theta_1'' + \frac{1}{r}\theta_1' + \Gamma(v_0')^2 (-m\theta_0 + \lambda v_0'^2) + 2\Gamma v_0' v_1' = 0 \quad (3.61)$$

$$v_1(1) = v_1(R) = \theta_1(1) = \theta_1(R) = 0 \quad (3.62)$$

Şimdi bulunun bu denklemlerin ayrıntılı çözümleri yapılacaktır. Denklem (3.57) ele alınırsa, bu denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d}{dr}(rv_0') = Cr \quad (3.63)$$

Denklem (3.63)'ün integrali alınırsa

$$rv_0' = \frac{Cr^2}{2} + A \quad (3.64)$$

denklem (3.64) elde edilir. Tüm denklem  $r^2$ 'ye bölünür ise

$$v_0' = \frac{Cr}{2} + \frac{A}{r} \quad (3.65)$$

denklem (3.65) elde edilir. Denklem (3.65)'in integrali alınır ise

$$v_0 = \frac{Cr^2}{4} + A \ln(r) + B \quad (3.66)$$

denklem (3.66) elde edilir. Bu denklemde A ve B ifadeleri integral sabitleridir. Denklem (3.59)'de verilen sınır şartları kullanılarak bu sabitleri bulmaya çalışalım. Denklem (3.59) de verilen  $v_0(1) = 0$  sınır şartı denklem (3.66) da uygulanırsa

$$B = -\frac{C}{4} \quad (3.67)$$

denklem (3.67) da verilen B sabiti bulunmuş olur. Benzer şekilde denklem (3.59)'de verilen sınır şartı denklem (3.66) da uygulanırsa

$$A = -\frac{C(R^2 - 1)}{4 \ln(R)} \quad (3.68)$$

A sabiti bulunmuş olur. Bulduğumuz denklem (3.67) ve (3.68)'deki A ve B sabitleri denklem (3.66)da yerine yazılırsa

$$v_0 = \frac{Cr^2}{4} - \frac{C(R^2 - 1)}{4 \ln(R)} \ln(r) - \frac{C}{4} \quad (3.69)$$

hız ifadesinin lineer kısmı bulunmuş olur. Elde edilen hız ifadesi için parantezleme işlemi yapılırsa

$$v_0 = \frac{C}{4} \left( r^2 - \frac{\ln(r)(R^2 - 1)}{\ln(R)} - 1 \right) \quad (3.70)$$

Denklemin yeni şekli bulunmuş olur.

Şimdi denklem (3.58) de verilen 1 mertebesi için enerji denklemi ayrıntılı çözümleri yapılacaktır. Denklem (3.58) düzenlenirse

$$r\theta_0'' + \theta_0' = -\Gamma r \left( \frac{C}{4} \left( r^2 - \frac{\ln(r)(R^2 - 1)}{\ln(R)} - 1 \right) \right)^2 \quad (3.71)$$

Denklemini bulunur. Bu denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d}{dr}(r\theta_0') = -\Gamma r \left( \frac{C}{4} \left( r^2 - \frac{\ln(r)(R^2 - 1)}{\ln(R)} - 1 \right) \right)^2 \quad (3.72)$$

Denklem (3.72)'in integrali alınır

$$r\theta_0' = -\frac{\Gamma C^2}{16} \left( r^4 - \frac{2r^2(R^2 - 1)}{\ln(R)} + \frac{\ln(r)(R^2 - 1)^2}{\ln(R)^2} \right) + K \quad (3.73)$$

Denklem (3.73) elde edilir. Denklem (3.73)  $r'$  ye bölünür ve integrali alınır

$$\theta_0 = -\frac{\Gamma C^2}{64} \left( r^4 - \frac{4r^2(R^2 - 1)}{\ln(R)} + \frac{2\ln(r)^2(R^2 - 1)^2}{\ln(R)^2} \right) + K \ln(r) + L \quad (3.74)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemdeki K ve L ifadeleri integral sabitleridir. Denklem (3.59)'de verilen sınır şartları kullanılarak bu sabitleri bulmaya çalışalım. Denklem (3.59) de verilen  $\theta_0(1) = 0$  sınır şartı denklem (3.74) de uygulanırsa

$$L = \frac{\Gamma C^2}{64} \left( 1 - \frac{4(R^2 - 1)}{\ln(R)} \right) \quad (3.75)$$



L sabiti bulunmuş olur. Benzer şekilde denklem (3.59)de verilen  $\theta_0(R)=0$  sınır şartı denklem (3.74) de uygulanırsa

$$K = \frac{\Gamma C^2}{64} \left( \frac{(3R^4 - 4R^2 + 1)}{\ln(R)} - \frac{4(R^2 - 1)^2}{\ln(R)^2} \right) \quad (3.76)$$

K sabiti bulunmuş olur. Bulduğumuz denklem (3.75) ve (3.76) daki K ve L sabitleri denklem (3.74)de yerine yazılırsa

$$\theta_0 = -\frac{\Gamma C^2}{16} \left[ \frac{1}{4} r^4 - \frac{r^2(R^2 - 1)}{\ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)^2}{2 \ln(R)^2} - \frac{(R^4 - 1) \ln(r)}{4 \ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)}{\ln(R)^2} \right. \\ \left. - \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)}{2 \ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)}{\ln(R)} - \frac{1}{4} \right] \quad (3.77)$$

sıcaklık dağılımının lineer kısmı bulunmuş olur.

Bulmuş olduğumuz denklem (3.70) ve (3.77)'deki çözümler aynı zamanda Newtonyen akışın karakteristiğini ifade etmektedir. Elde edilen bu çözümlerden faydalanılarak  $\in$  mertebesinin çözümleri elde edilecektir. Denklem (3.70) ve (3.77) denklem (3.60) ve (3.61)'ye yerleştirilir ve yukarda anlatılan çözümler benzeri işlemler yapılır ise  $\in$  mertebesinin çözümleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$v_1 = \frac{M\Gamma C^3}{128} \left( -\frac{r^6}{6} + k_1 r^4 - k_2 r^2 \ln(r)^2 + k_3 r^2 \ln(r) - k_4 r^2 + k_5 \ln(r)^3 \right. \\ \left. - k_6 \ln(r)^2 + k_7 \ln(r) + k_8 \right) + \frac{\Lambda C^3}{64} \left( -2r^4 + k_9 r^2 - k_{10} \ln(r) + k_{11} - \frac{k_{12}}{r^2} \right) \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 = & \frac{\Gamma^2 MC^4}{256} \left( \frac{r^8}{64} - s_1 r^6 + s_2 r^4 \ln(r)^2 - s_3 r^4 \ln(r) + s_4 r^4 - s_5 r^2 \ln(r)^2 + s_6 r^2 \ln(r) - s_7 r^2 \right. \\
& + s_8 \ln(r)^4 - s_9 \ln(r)^3 + s_{10} \ln(r)^2 + s_{11} \ln(r) + s_{12} \left. \right) + \frac{\Gamma \Lambda C^4}{64} \left( \frac{r^6}{9} - s_{13} r^4 + s_{14} r^2 - s_{15} \ln(r)^2 \right. \\
& \left. + s_{16} \ln(r) - s_{17} + \frac{s_{18}}{r^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Denklemlerdeki  $k_{1...12}$  ve  $s_{1...18}$  sabitleri aşağıdaki denklemler ile tanımlanmaktadır.

$$k_1 = \frac{9(R^2 - 1)}{8 \ln(R)} \tag{3.80}$$

$$k_2 = \frac{(R^2 - 1)^2}{\ln(R)^2} \tag{3.81}$$

$$k_3 = \frac{(R^2 - 1)(\ln(R)(3R^2 - 1) - 2(R^2 - 1))}{2 \ln(R)^2} \tag{3.82}$$

$$k_4 = \frac{(-2 \ln(R)^2 + \ln(R)(R^2 - 1)(3R^2 + 7) + 2(R^2 - 1)^2)}{4 \ln(R)^2} \tag{3.83}$$

$$k_5 = \frac{(R^2 - 1)^3}{3 \ln(R)^3} \tag{3.84}$$

$$k_6 = \frac{(R^2 - 1)^2 (\ln(R)(3R^2 - 1) - 4(R^2 - 1))}{4 \ln(R)^3} \tag{3.85}$$

$$k_7 = \frac{(R^2 - 1)(2 \ln(R)^2 (R^4 - 8R^2 - 5) - 3 \ln(R)(R^2 - 1)(3R^2 - 13) + 12(R^2 - 1)^2)}{24 \ln(R)^3} \tag{3.86}$$

$$k_8 = \frac{(-8 \ln(R)^2 + 3 \ln(R)(R^2 - 1)(6R^2 + 5) + 12(R^2 - 1)^2)}{24 \ln(R)^2} \quad (3.87)$$

$$k_9 = \frac{6(R^2 - 1)}{\ln(R)} \quad (3.88)$$

$$k_{10} = \frac{(R^2 - 1)(-4 \ln(R)^3(R^4 + R^2) + 12 \ln(R)^2(R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3)}{2 \ln(R)^4 R^2} \quad (3.89)$$

$$k_{11} = \frac{4 \ln(R)^3 - 12 \ln(R)^2(R^2 - 1) + (R^2 - 1)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.90)$$

$$k_{12} = \frac{(R^2 - 1)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.91)$$

$$s_1 = \frac{5(R^2 - 1)}{36 \ln(R)} \quad (3.92)$$

$$s_2 = \frac{(R^2 - 1)^2}{8 \ln(R)^2} \quad (3.93)$$

$$s_3 = \frac{(R^2 - 1)(\ln(R)(3R^2 - 1) - 2(R^2 - 1))}{16 \ln(R)^2} \quad (3.94)$$

$$s_4 = \frac{(-2 \ln(R)^2 + (R^2 - 1)(3R^2 + 7)\ln(R) + 6(R^2 - 1)^2)}{32 \ln(R)^2} \quad (3.95)$$

$$s_5 = \frac{(R^2 - 1)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.96)$$

$$s_6 = \frac{(R^2 - 1)^2 (3R^2 - 1)}{4 \ln(R)^2} \quad (3.97)$$

$$s_7 = \frac{(R^2 - 1) \left( 2 \ln(R)^2 (R^4 - 8R^2 - 5) + 27 \ln(R) (R^4 - 1) + 12 (R^2 - 1)^2 \right)}{48 \ln(R)^3} \quad (3.98)$$

$$s_8 = \frac{(R^2 - 1)^4}{24 \ln(R)^4} \quad (3.99)$$

$$s_9 = \frac{(R^2 - 1)^3 \left( (3R^2 - 1) \ln(R) - 4(R^2 - 1) \right)}{24 \ln(R)^4} \quad (3.100)$$

$$s_{10} = \frac{(R^2 - 1)^2 \left( 2 \ln(R)^2 (R^4 - 8R^2 - 2) - 3 \ln(R) (R^2 - 1) (3R^2 - 5) + 12 (R^2 - 1)^2 \right)}{48 \ln(R)^4} \quad (3.101)$$

$$s_{11} = \frac{(R^2 - 1)}{576 \ln(R)^4} \left( \ln(R)^3 (51R^6 + 147R^4 - 69R^2 - 21) \right. \\ \left. - 2 \ln(R)^2 (R^2 - 1) (77R^4 + 266R^2 + 41) + 72 \ln(R) (R^2 + 5) (R^2 - 1)^2 + 144 (R^2 - 1)^3 \right) \quad (3.102)$$

$$s_{12} = \frac{1}{576 \ln(R)^3} \left( 27 \ln(R)^3 + 2 \ln(R)^2 (R^2 - 1) (12R^4 - 123R^2 - 83) \right. \\ \left. + 108 \ln(R) (3R^2 + 2) (R^2 - 1)^2 + 144 (R^2 - 1)^3 \right) \quad (3.103)$$

$$s_{13} = \frac{(R^2 - 1)}{2 \ln(R)} \quad (3.104)$$

$$s_{14} = \frac{(R^2 - 1) \left( -4 \ln(R)^3 (R^4 + R^2) + 12 \ln(R)^2 (R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3 \right)}{8 \ln(R)^4 R^2} \quad (3.105)$$

$$s_{15} = \frac{(R^2 - 1)^2 \left( -4 \ln(R)^3 (R^4 + R^2) + 8 \ln(R)^2 (R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3 \right)}{8 \ln(R)^5 R^2} \quad (3.106)$$

$$s_{16} = \frac{(R^2 - 1)}{144 \ln(R)^5 R^2} \left( -8 \ln(R)^4 R^2 (11R^4 + 2R^2 - 7) + 288 \ln(R)^3 R^4 (R^2 - 1) \right. \\ \left. - 216 \ln(R)^2 R^2 (R^2 - 1)^2 + 18 \ln(R) (R^2 - 1)^4 - 9 (R^2 - 1)^4 \right) \quad (3.107)$$

$$s_{17} = \frac{1}{144 \ln(R)^4 R^2} \left( 16 \ln(R)^4 R^2 - 72 \ln(R)^3 R^2 (R^2 - 1) (R^2 + 2) \right. \\ \left. + 216 \ln(R)^2 R^2 (R^2 - 1)^2 + 9 (R^2 + 2) (R^2 - 1)^4 \right) \quad (3.108)$$

$$s_{18} = \frac{(R^2 - 1)^4}{16 \ln(R)^4} \quad (3.109)$$

Böylece  $\epsilon$  mertebesindeki çözümler tamamlanmış oldu. Hız ve sıcaklık profillerini tam olarak elde edebilmemiz için denklem (3.70),(3.77)-(3.79)'un denklem (3.48) ve (3.49)'da yerine yazılması gerekmektedir. Bu işlem yapılırsa

$$v = \frac{C}{4} \left( r^2 - \frac{\ln(r)(R^2 - 1)}{\ln(R)} - 1 \right) + \frac{M\Gamma C^3}{128} \left( -\frac{r^6}{6} + k_1 r^4 - k_2 r^2 \ln(r)^2 + k_3 r^2 \ln(r) - k_4 r^2 \right. \\ \left. + k_5 \ln(r)^3 - k_6 \ln(r)^2 + k_7 \ln(r) + k_8 \right) + \frac{\Lambda C^3}{64} \left( -2r^4 + k_9 r^2 - k_{10} \ln(r) + k_{11} - \frac{k_{12}}{r^2} \right) \quad (3.110)$$

$$\theta = -\frac{\Gamma C^2}{16} \left[ \frac{1}{4} r^4 - \frac{r^2 (R^2 - 1)}{\ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)^2}{2 \ln(R)^2} - \frac{(R^4 - 1) \ln(r)}{4 \ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)}{\ln(R)^2} \right. \\ \left. - \frac{(R^2 - 1)^2 \ln(r)}{2 \ln(R)} + \frac{(R^2 - 1)}{\ln(R)} - \frac{1}{4} \right] + \frac{\Gamma^2 M C^4}{256} \left( \frac{r^8}{64} - s_1 r^6 + s_2 r^4 \ln(r)^2 \right. \\ \left. - s_3 r^4 \ln(r) + s_4 r^4 - s_5 r^2 \ln(r)^2 + s_6 r^2 \ln(r) - s_7 r^2 + s_8 \ln(r)^4 - s_9 \ln(r)^3 + s_{10} \ln(r)^2 \right. \\ \left. + s_{11} \ln(r) + s_{12} \right) + \frac{\Gamma \Lambda C^4}{64} \left( \frac{r^6}{9} - s_{13} r^4 + s_{14} r^2 - s_{15} \ln(r)^2 + s_{16} \ln(r) - s_{17} + \frac{s_{18}}{r^2} \right) \quad (3.111)$$

hız ve sıcaklık profilleri tam olarak elde edilmiş oldu. Bundan sonraki kısımda ise başka bir viskozite modeli için çözümler üretilecektir.

### 3.2.2 Vogel Viskozite Modeli

Vogel viskozite modelinde viskozite aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Massoudi M., Christie I. 1995).

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\left(\frac{\Lambda}{B+\theta} - \theta_w\right)} \quad (3.112)$$

Burada A ve B viskozite sabitleridir. Ayrıca çözümlerde boyutsuz non-Newtonyen katsayısı  $\Lambda$  ve  $\Gamma$  Brinkman sayısı için aşağıdaki kabuller yapılacaktır.

$$\Lambda = \epsilon \lambda, \quad \Gamma = \epsilon \gamma \quad (3.113)$$

Momentum ve enerji denklemlerindeki hız ve sıcaklığın yaya açılımları aşağıdaki tanımlanmaktadır.

$$v = v_0 + \epsilon v_1 \quad (3.114)$$

$$\theta = \epsilon \theta_0 + \epsilon^2 \theta_1 \quad (3.115)$$

Ayrıca denklem (3.95) seriye açılırsa

$$\mu \cong \mu_0 \cdot e^{\frac{\Lambda}{B} - \theta_w} \left(1 - \epsilon \frac{\Lambda \theta_0}{B^2}\right) \quad (3.116)$$

denklemini elde edilir. Denklem (3.43)'de viskozitenin türevi olduğu görülmektedir. Bu nedenle denklem (3.99)'un r'ye türevi alınır

$$\frac{d\mu}{dr} \cong -\mu_0 \frac{\Lambda}{B^2} e^{\frac{\Lambda}{B} - \theta_w} \left(1 - \epsilon \frac{\Lambda \theta_0}{B^2}\right) \theta' \quad (3.117)$$

denklemleri elde edilir. Denklem (3.96)-(3.100) denklem (3.43)-(3.45)'e yerleştirilip elde edilen denklemler mertebesine göre ayrıştırılır ve yazılırsa

1. Mertebesi

$$r v_0'' + v_0' = C^* r \quad (3.118)$$

∈ Mertebesi

$$\theta_0'' + \frac{1}{r} \theta_0' + \gamma \frac{C}{C^*} v_0'^2 = 0 \quad (3.119)$$

$$v_0(1) = v_0(R) = \theta_0(1) = \theta_0(R) = 0 \quad (3.120)$$

∈ Mertebesi

$$r v_1'' + v_1' = \frac{A}{B^2} \theta_0 (r v_0'' + v_0') + \frac{A}{B^2} \theta_0' v_0' r - \frac{\lambda C^*}{C} v_0'^2 (v_0' + 3r v_0'') \quad (3.121)$$

∈<sup>2</sup> Mertebesi

$$r \theta_1'' + \theta_1' = r \gamma \frac{C}{C^*} \frac{A}{B^2} \theta_0 v_0'^2 - 2 r \gamma \frac{C}{C^*} v_0' v_1' - r \gamma \lambda v_0'^4 \quad (3.122)$$

$$v_1(1) = v_1(R) = \theta_1(1) = \theta_1(R) = 0 \quad (3.123)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu denklemlerde  $C^*$  ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$C^* = \frac{C}{\mu_0^{A/B-\theta_w}} \quad (3.124)$$

Elde edilen bu denklemlerden (3.101)-(3.103) denklem takımı çözüldüğünde problemin Newtonyen çözümleri (lineer kısmı) elde edilmiş olur. Bu çözümler yapılırsa

$$v_0 = \frac{C^*}{4} \left( r^2 + \frac{\ln(r)(1-R^2)}{\ln(R)} - 1 \right) \quad (3.125)$$

$$\theta_0 = \frac{\Gamma C C^*}{16} \left[ \frac{1}{4} (1-r^4) + \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} (1-r^2) + \frac{(1-R^2)^2}{\ln(R)^2} \ln(r) \left( \frac{1}{2} (\ln(R) - \ln(r)) - 1 \right) + \frac{(R^4-1)}{4 \ln(R)} \ln(r) \right] \quad (3.126)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen bu çözümlerden faydalanılarak  $\epsilon$  mertebesinin çözümleri elde edilecektir. Denklem (3.108) ve (3.109) denklem (3.104) ve (3.105)'e yerleştirilir ve denklem (3.106)'daki sınır şartları dikkate alınarak elde edilen yeni denklemler çözülür ise

$$v_1 = \frac{AC^{*2}C\Gamma}{64B^2} \left( -\frac{r^6}{12} + m_1 r^4 - m_2 r^2 \ln(r)^2 + m_3 r^2 \ln(r) - m_4 r^2 + m_5 \ln(r)^3 - m_6 \ln(r)^2 + m_7 \ln(r) + m_8 \right) - \frac{\Lambda C^{*4}}{64C} \left( 2r^4 + m_9 r^2 + m_{10} \ln(r) - m_{11} - \frac{m_{12}}{r^2} \right) \quad (3.127)$$

$$\theta_1 = \frac{A\Gamma^2 C^2 C^{*2}}{256B^2} \left( \frac{r^8}{64} - t_1 r^6 + t_2 r^4 \ln(r)^2 - t_3 r^4 \ln(r) + t_4 r^4 - t_5 r^2 \ln(r)^2 + t_6 r^2 \ln(r) - t_7 r^2 + t_8 \ln(r)^4 - t_9 \ln(r)^3 + t_{10} \ln(r)^2 + t_{11} \ln(r) + t_{12} \right) + \frac{\Gamma \Lambda C^{*4}}{256} \left( \frac{4r^6}{9} - t_{13} r^4 + t_{14} r^2 - t_{15} \ln(r)^2 + t_{16} \ln(r) - t_{17} + \frac{t_{18}}{r^2} \right) \quad (3.128)$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümlerdeki  $m_{1..12}$  ve  $t_{1..18}$  sabitleri aşağıdaki tanımlanmaktadır.



$$m_1 = \frac{9(R^2 - 1)}{16 \ln(R)} \quad (3.129)$$

$$m_2 = \frac{(R^2 - 1)^2}{2 \ln(R)^2} \quad (3.130)$$

$$m_3 = \frac{(R^2 - 1)(\ln(R)(3R^2 - 1) - 2(R^2 - 1))}{4 \ln(R)^2} \quad (3.131)$$

$$m_4 = \frac{(-2 \ln(R)^2 + \ln(R)(R^2 - 1)(3R^2 + 7) + 2(R^2 - 1)^2)}{8 \ln(R)^2} \quad (3.132)$$

$$m_5 = \frac{(R^2 - 1)^3}{6 \ln(R)^3} \quad (3.133)$$

$$m_6 = \frac{(R^2 - 1)^2(\ln(R)(3R^2 - 1) - 4(R^2 - 1))}{8 \ln(R)^3} \quad (3.134)$$

$$m_7 = \frac{(R^2 - 1)(2 \ln(R)^2(R^4 - 8R^2 - 5) - 3 \ln(R)(R^2 - 1)(3R^2 - 13) + 12(R^2 - 1)^2)}{48 \ln(R)^3} \quad (3.135)$$

$$m_8 = \frac{(-8 \ln(R)^2 + 3 \ln(R)(R^2 - 1)(6R^2 + 5) + 12(R^2 - 1)^2)}{48 \ln(R)^2} \quad (3.136)$$

$$m_9 = \frac{6(R^2 - 1)}{\ln(R)} \quad (3.137)$$

$$m_{10} = \frac{(R^2 - 1)(-4 \ln(R)^3(R^4 + R^2) + 12 \ln(R)^2(R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3)}{2 \ln(R)^4 R^2} \quad (3.138)$$

$$m_{11} = \frac{4 \ln(R)^3 - 12 \ln(R)^2 (R^2 - 1) + (R^2 - 1)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.139)$$

$$m_{12} = \frac{(1 - R^2)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.140)$$

$$t_1 = \frac{5(R^2 - 1)}{36 \ln(R)} \quad (3.141)$$

$$t_2 = \frac{(R^2 - 1)^2}{8 \ln(R)^2} \quad (3.142)$$

$$t_3 = \frac{(R^2 - 1)(\ln(R)(3R^2 - 1) - 2(R^2 - 1))}{16 \ln(R)^2} \quad (3.143)$$

$$t_4 = \frac{(-2 \ln(R)^2 + (R^2 - 1)(3R^2 + 7)\ln(R) + 6(R^2 - 1)^2)}{32 \ln(R)^2} \quad (3.144)$$

$$t_5 = \frac{(R^2 - 1)^3}{2 \ln(R)^3} \quad (3.145)$$

$$t_6 = \frac{(R^2 - 1)^2(3R^2 - 1)}{4 \ln(R)^2} \quad (3.146)$$

$$t_7 = \frac{(R^2 - 1)(2 \ln(R)^2 (R^4 - 8R^2 - 5) + 27 \ln(R)(R^4 - 1) + 12(R^2 - 1)^2)}{48 \ln(R)^3} \quad (3.147)$$

$$t_8 = \frac{(R^2 - 1)^4}{24 \ln(R)^4} \quad (3.148)$$

$$t_9 = \frac{(R^2 - 1)^3 ((3R^2 - 1)\ln(R) - 4(R^2 - 1))}{24\ln(R)^4} \quad (3.149)$$

$$t_{10} = \frac{(R^2 - 1)^2 (2\ln(R)^2 (R^4 - 8R^2 - 2) - 3\ln(R)(R^2 - 1)(3R^2 - 5) + 12(R^2 - 1)^2)}{48\ln(R)^4} \quad (3.150)$$

$$t_{11} = \frac{(R^2 - 1)}{576\ln(R)^4} (\ln(R)^3 (51R^6 + 147R^4 - 69R^2 - 21) - 2\ln(R)^2 (R^2 - 1)(77R^4 + 266R^2 + 41) + 72\ln(R)(R^2 + 5)(R^2 - 1)^2 + 144(R^2 - 1)^3) \quad (3.151)$$

$$t_{12} = \frac{1}{576\ln(R)^3} (27\ln(R)^3 + 2\ln(R)^2 (R^2 - 1)(12R^4 - 123R^2 - 83) + 108\ln(R)(3R^2 + 2)(R^2 - 1)^2 + 144(R^2 - 1)^3) \quad (3.152)$$

$$t_{13} = \frac{2(R^2 - 1)}{\ln(R)} \quad (3.153)$$

$$t_{14} = \frac{(R^2 - 1) (-4\ln(R)^3 (R^4 + R^2) + 12\ln(R)^2 (R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3)}{2\ln(R)^4 R^2} \quad (3.154)$$

$$t_{15} = \frac{(R^2 - 1)^2 (-4\ln(R)^3 (R^4 + R^2) + 8\ln(R)^2 (R^4 - R^2) + (R^2 - 1)^3)}{2\ln(R)^5 R^2} \quad (3.155)$$

$$t_{16} = \frac{(R^2 - 1)}{36\ln(R)^5 R^2} (-8\ln(R)^4 R^2 (11R^4 + 2R^2 - 7) + 288\ln(R)^3 R^4 (R^2 - 1) - 216\ln(R)^2 R^2 (R^2 - 1)^2 + 18\ln(R)(R^2 - 1)^4 - 9(R^2 - 1)^4) \quad (3.156)$$

$$t_{17} = \frac{1}{36\ln(R)^4 R^2} (16\ln(R)^4 R^2 - 72\ln(R)^3 R^2 (R^2 - 1)(R^2 + 2) + 216\ln(R)^2 R^2 (R^2 - 1)^2 + 9(R^2 + 2)(R^2 - 1)^4) \quad (3.157)$$

$$t_{18} = \frac{(R^2 - 1)^4}{4 \ln(R)^4} \quad (3.158)$$

Böylece denklem (3.127) ve (3.128)'deki  $v_1$  ve  $\theta_1$  çözümleri tamamlanmış oldu. Bu mertebedeki çözümler non-Newtonyen akışkanın karakteristiğini ortaya çıkaracak olan terimlerdir.

Hız ve sıcaklık profillerini tam olarak elde edebilmemiz için denklem (3.125)-(3.128)'in denklem (3.114) ve (3.115)'de yerine yazılması gerekmektedir. Bu işlem yapılırsa

$$v = \frac{C^*}{4} \left( r^2 + \frac{\ln(r)(1-R^2)}{\ln(R)} - 1 \right) + \frac{AC^{*2}C\Gamma}{64B^2} \left( -\frac{r^6}{12} + m_1 r^4 - m_2 r^2 \ln(r)^2 + m_3 r^2 \ln(r) - m_4 r^2 + m_5 \ln(r)^3 - m_6 \ln(r)^2 + m_7 \ln(r) + m_8 \right) - \frac{\Lambda C^{*4}}{64C} \left( 2r^4 + m_9 r^2 + m_{10} \ln(r) - m_{11} + \frac{m_{12}}{r^2} \right) \quad (3.159)$$

$$\theta = \frac{\Gamma C C^*}{16} \left[ \frac{1}{4} (1-r^4) + \frac{(1-R^2)}{\ln(R)} (1-r^2) + \frac{(1-R^2)^2}{\ln(R)^2} \ln(r) \left( \frac{1}{2} (\ln(R) - \ln(r)) - 1 \right) + \frac{(R^4-1)}{4 \ln(R)} \ln(r) \right] + \frac{A\Gamma^2 C^2 C^{*2}}{256B^2} \left( \frac{r^8}{64} - t_1 r^6 + t_2 r^4 \ln(r)^2 - t_3 r^4 \ln(r) + t_4 r^4 - t_5 r^2 \ln(r)^2 + t_6 r^2 \ln(r) - t_7 r^2 + t_8 \ln(r)^4 - t_9 \ln(r)^3 + t_{10} \ln(r)^2 + t_{11} \ln(r) + t_{12} \right) + \frac{\Gamma \Lambda C^{*4}}{256} \left( \frac{4r^6}{9} - t_{13} r^4 + t_{14} r^2 - t_{15} \ln(r)^2 + t_{16} \ln(r) - t_{17} + \frac{t_{18}}{r^2} \right) \quad (3.160)$$

Vogel viskozite modeli için hız ve sıcaklık profilleri tam olarak elde edilmiş olur. Bundan sonraki bölümde her iki viskozite modeli için elde edilen çözümler kullanılarak entropi analizi yapılacaktır.

### 3.3 Entropi Analizi

Bu bölümde önceki bölümde elde ettiğimiz çözümlerden faydalanarak entropi analizi yapılacaktır. Elde edilen bu hız ve sıcaklık profilleri kullanılarak entropi analizi

yapılacaktır. Entropi analizi iki kısımda incelenecektir. Bunlarda birincisi sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimi diğeri ise ısı transferi neticesinde oluşan entropi üretimi olacaktır. Özellikle entropi üretiminde Newtonyen akışkanlar ile non-Newtonyen akışkanlar arasındaki fark açıkça gösterilecektir. Öncesinde entropi hakkında biraz bilgi vermemiz faydalı olacaktır.

Termodinamiğin I. ve II. Yasaları sadece kapalı sistemlerde geçerlidir. Kapalı sistemler dış çevre ile enerji, bilgi ve malzeme alış verişinde bulunmazlar. Evren de bir kapalı sistemdir.

I. yasa evrendeki toplam enerjinin sabit olduğunu ve enerjinin yok edilemeyeceğini söyler. Diğeri bir tanımlama ile enerjinin korunumu yasası olarak da bilinir. Bu yasaya göre enerji değişik formlarda bulunabilir. Isı da bir enerji formudur. Radyasyon enerjisi, kimyasal enerji, mekanik enerji, elektrik enerjisi vb. diğeri enerji formlarına örnek olarak sayılabilir. Sayılan enerji çeşitleri yine I. yasaya göre birbirlerine dönüştürülebilir. Hiçbir kaynak kullanmadan enerji üretecek bir makine yoktur.

Birçok enerji formu kayıpsız olarak ısı enerjisine dönüşürken, ısı enerjisinin dışardan destek olmaksızın, örneğin mekanik enerjiye kayıpsız olarak dönüşümü mümkün değildir. Kayıpsız olarak enerji dönüşümü tersinir süreç olarak adlandırılır. 19 yüzyılda Lord Kelvin, Carnot ve Clausius gibi bilim adamları termal enerjiyle (ısı enerjisiyle) çalışan makinelerde enerji alış verişinin matematiksel esaslarını ortaya koymak için yaptıkları çalışmalarda enerjinin değişik formları arasında bir hiyerarşi olduğunu ve enerji dönüşümleri arasında bazı dengesizlikler bulunduğunu ortaya koydular. İşte bu hiyerarşi ve dengesizlikler termodinamiğin II. Yasasının temelini oluşturmuştur.

II. yasaya göre tüm doğal ve teknik enerji dönüşüm süreçleri tersinmezdir ve bu süreçlerin yönü hep olasılığı yüksek olan duruma doğrudur. Enerji farklarının azaldığı ve ortadan kalktığı durum olası durumdur. Isı enerjisi hiçbir zaman tümüyle bir diğeri enerji formuna, örneğin mekanik enerjiye, dönüşmez. Ancak bu saptamadan, dönüşüm süreci esnasında, enerjinin bir kısmının yok edildiği anlamı çıkarılmamalıdır. Çünkü I.

yasaya göre enerji yok edilemez. Bunun anlamı; ısı enerjisinin bir kısmının iş üretme yeteneğinden yoksun kalmasıdır.

Isı enerjisi, sıcaklığı yüksek olan cisimlerden düşük olanlara doğru akar. Bu süreç tersinmezdir. Yani dışardan yardım olmadan ısı, düşük sıcaklıktaki cisimden yüksek sıcaklıktaki cisme ısı aktarmak mümkün olmaz.

İşte, kalitesi düşen enerji için kullanılan ölçüye "entropi" adı verilir. Örneğin içten yanmalı bir motorda ısı enerjisinin mekanik enerjiye dönüşümü esnasında bu ısı enerjisinin bir kısmı iş üretme yeteneği gösterememektedir. İş üretme yeteneğinde olmayan enerjinin evrende geri kazanımı mümkün olmayan biçimde artışı entropi ile ölçülür. Bu kavramı ilk kullanan Clausius'tur.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (3.168)$$

$\delta Q/T$ 'nin termodinamik bir çevrim üzerinden integrali sifıra eşit veya sifirdan küçüktür. Bu eşitlik tersinir veya tersinmez bütün çevrimler için geçerlidir. Bir sisteme veya sistemden olan ısı geçişi, diferansiyel miktarlarda ısı geçişlerinin toplamı olarak düşünülebilir. Bu durumda  $\delta Q/T$ 'nin çevrim üzerinde integrali, diferansiyel ısı geçişinin sinir sıcaklığıyla bölünmesinden sonra elde edilen tüm diferansiyel miktarların çevrim boyunca toplamı olarak görülebilir.(Cengel, Boles 1996)

Bu ilişki, çevredeki entropi artışının verilen ısı enerjisiyle orantılı olduğunun ifadesidir. Bu denklem aynı zamanda, iş üreten bir sisteme verilen ısı enerjisinin kayıpsız olarak mekanik enerjiye dönüştüğünü ve sistemin başlangıç durumu ile son durumu arasındaki entropinin değişmediğini yani sabit kaldığını anlatmaktadır. Ancak bugüne kadar bu özellikte bir enerji değişim süreci gözlenmemiştir. Kısacası, ısı enerjisinin diğer enerji formlarına dönüşümü %100 olamaz.

Termodinamik II. Yasaya göre tüm doğal (reel) enerji dönüşüm süreçlerinde entropi sürekli artar. Entropi kavramı sezgisel bir büyüklüktür, kendine özgü bir birimi yoktur ve sıcaklık, basınç, ağırlık vb fiziksel büyüklükler gibi ölçülmesi mümkün değildir.

Ancak hesap yoluyla bulunur. Entropi artışı sonunda, sistemde ısı eşitliğe ulaşılır. Kapalı bir sistemde ve tersinmez süreçlerde entropi daima artar. Entropi artışı ancak denge (ısı denge) durumunda sabit kalır.

Problemimiz için entropi üretimini inceleyecek olursak, boyutlu viskoz harcanım terimi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\bar{\phi} = \bar{\mu} \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^2 + 2\beta \left( \frac{d\bar{v}}{d\bar{r}} \right)^4 \quad (3.169)$$

Bu ifade boyutsuz hale getirilir ise

$$\bar{\phi} = \frac{\mu_0 V_0^2}{\bar{r}_i^2} \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \left[ \mu + \Lambda \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \right] \quad (3.170)$$

biçiminde elde edilmiş olur. Boyutlu entropi üretim ifadesi ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. (Bejan A. 1995)

$$S_{gen}''' = \frac{k}{\bar{\theta}_0^2} \left( \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{r}} \right)^2 + \frac{\bar{\phi}}{\bar{\theta}_0} \quad (3.171)$$

denklemden  $\bar{\theta}_0$  referans sıcaklıktır. Denklemden ilk terim ısı transferinden dolayı meydana gelen entropi üretimini ikinci terim ise sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimini ifade etmektedir. Denklem (3.170) denklem (3.171)'de yerine yazılır ise boyutsuz entropi üretim ifadesi elde edilmiş olur.

$$N_s = \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \theta_0 \Gamma \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \left[ \mu + \Lambda \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \right] \quad (3.172)$$

Buradaki  $N_s$  toplam entropi üretim ifadesidir. Denklem (3.172)'deki boyutsuz ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Ns = \frac{S_{gen}'''}{S_G'''}, \quad S_G''' = \frac{k(\theta_m - \theta_w)^2}{\bar{\theta}_0^2 \bar{r}_i^2}, \quad \theta_0 = \frac{\bar{\theta}_0}{\theta_m - \theta_w} \quad (3.173)$$

Denklem (3.172)'deki ilk terim  $Ns_1$  ikinci terim ise  $Ns_2$  sembolleri ile gösterilecektir.  $Ns_1$  ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimini  $Ns_2$  ise sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimini ifade etmektedir. Denklem (3.173)'teki  $S_G'''$  referans entropi üretimini ifade etmektedir.

$$Ns_1 = \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2, \quad Ns_2 = \theta_0 \Gamma \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \left[ \mu + \Lambda \left( \frac{dv}{dr} \right)^2 \right] \quad (3.174)$$

Denklem (3.174)'deki  $\mu$  viskozitesi için Reynold viskozite modeli kullanıldığında  $\mu \cong 1 - M\theta$  ifadesi, Vogel viskozite modeli kullanıldığında ise  $\mu \cong \mu_0 \cdot e^{\frac{A}{B} - \theta_w} \left( 1 - \varepsilon \frac{A\theta_0}{B^2} \right)$  ifadesi kullanılacaktır. Önceki bölümde gerek Reynold modeli gerekse Vogel viskozite için elde edilen hız ve sıcaklık çözümlerinin türevleri alınıp denklem (3.174)'de yerine yazılarak entropi üretimleri hesap edilecektir. Bundan sonraki bölümde ise elde edilen hız, sıcaklık profilleri ve  $Ns_1$ ,  $Ns_2$  ifadeleri her iki viskozite modeli için grafikler ile ifade edilecektir. Grafiklerde Newtonyen akışkan ile Newtonyen olmayan akışkan arasındaki farklar açıkça ifade edilecek ve grafiklerin detaylı yorumları yapılacaktır. Yine grafiklerde viskozite de bulunan sabitlerin değişik değerleri için grafikler çizilecek ve viskozite sabitlerinin hız, sıcaklık,  $Ns_1$  ve  $Ns_2$  yi nasıl etkiledikleri açıkça gösterilecektir.

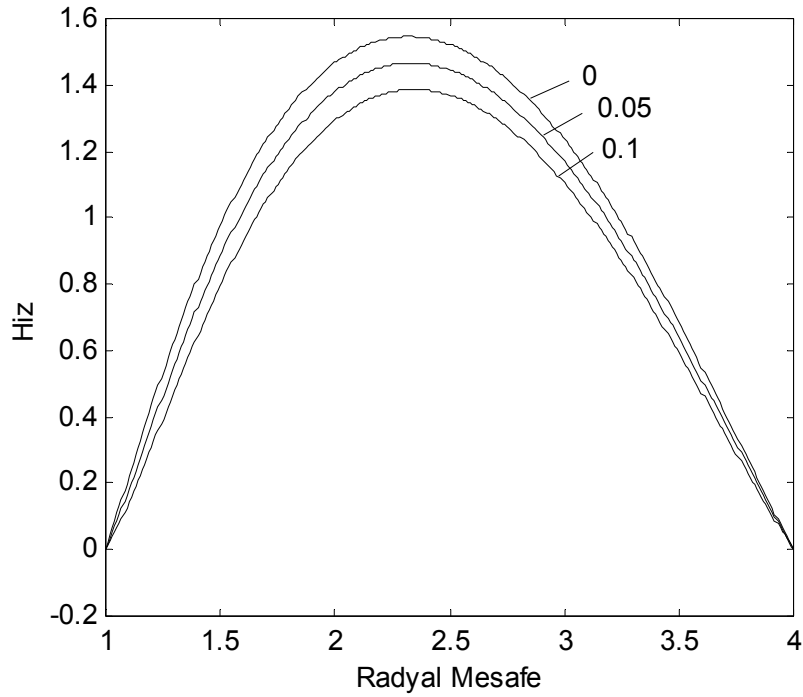


## 4. BULGULAR

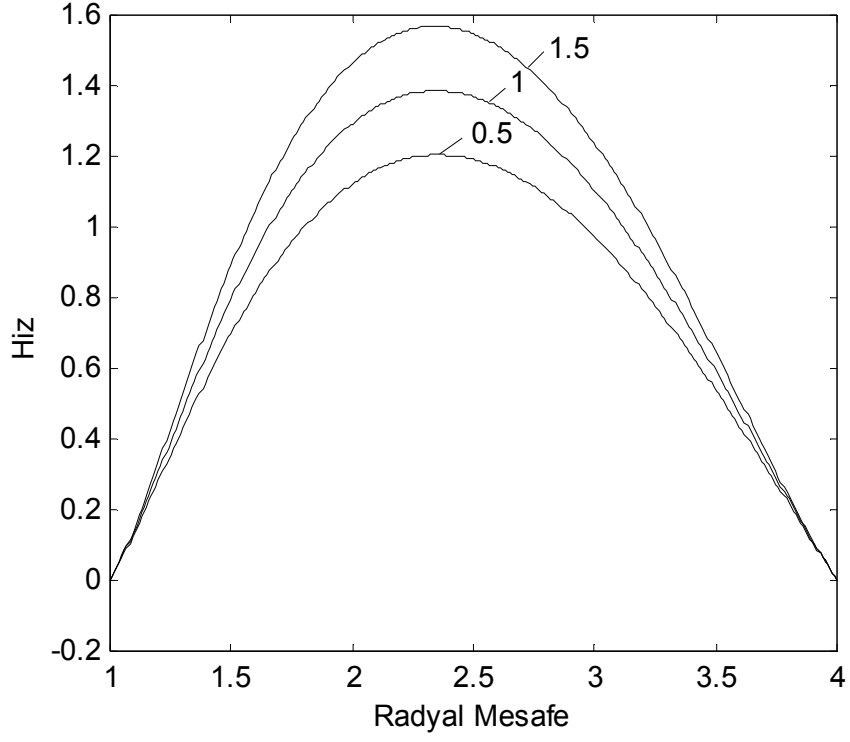
Bu bölümde önceki bölümde elde ettiğimiz analitik çözümler grafiklerle ifade edilecektir. İki ayrı viskozite modeli için perturbasyon yöntemi kullanılarak yaklaşık analitik çözümler üretilmişti. Gerek bulunan hız ve sıcaklık profilleri gerekse bu çözümlerden faydalanarak yapılacak entropi analizi bu bölümde verilecektir. Grafiklerin çizdirilmesinde Matlab paket programı kullanılmıştır.

### 4.1. Reynold Viskozite Modeli İçin Grafikler

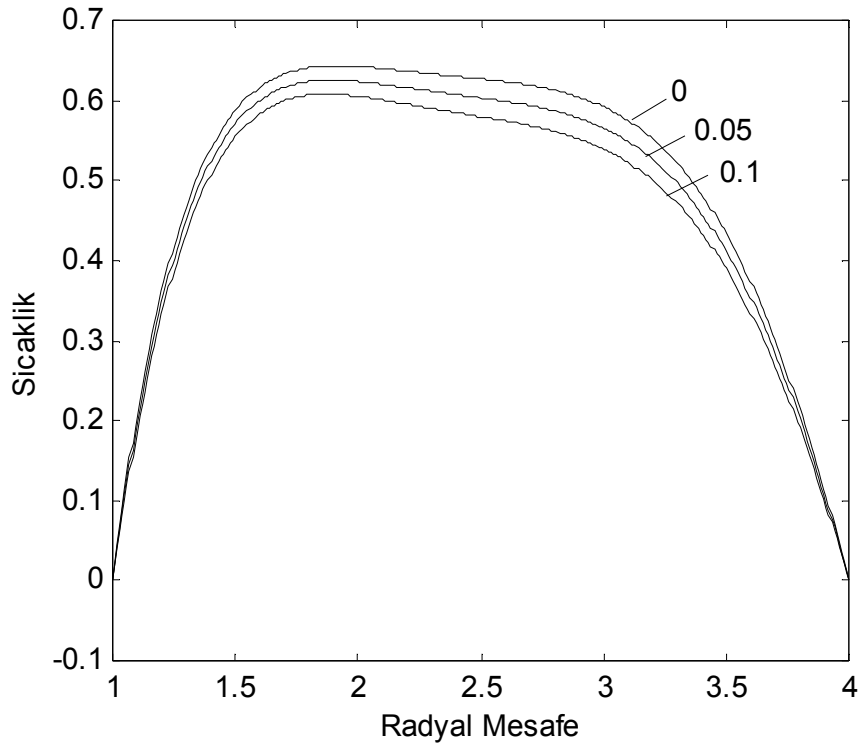
Reynold viskozite modeli için çizilen grafikler aşağıda verilmiştir:



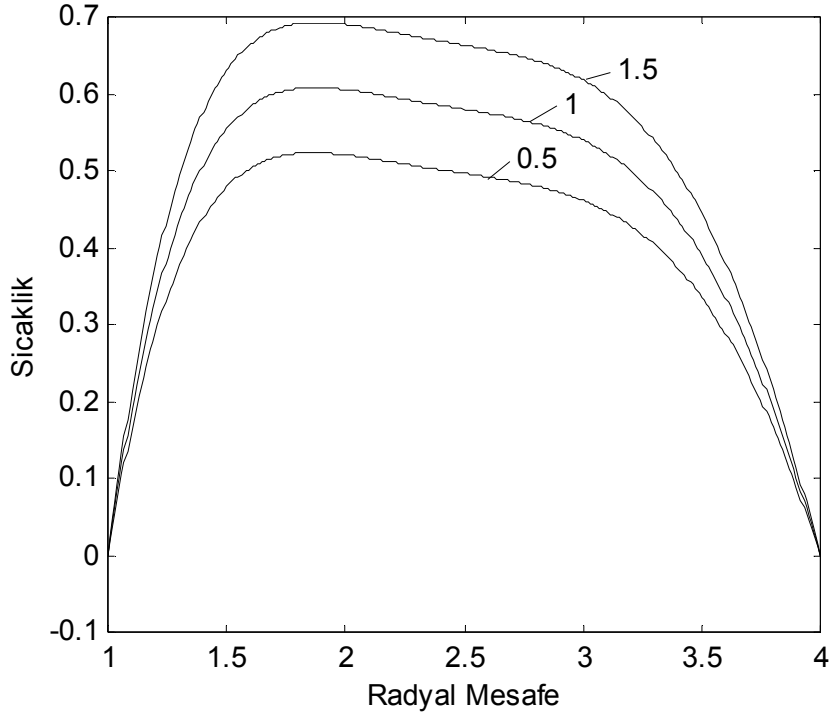
Şekil 4.1 Değişik  $\Lambda$  değerleri için hız profilleri ( $C=-1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $M=1$ )



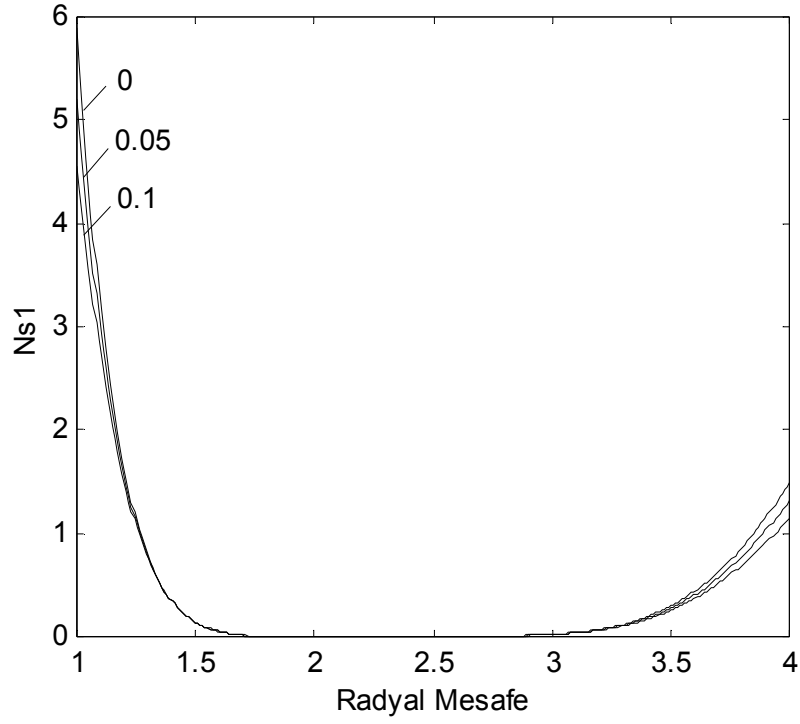
Şekil 4.2 Değişik M değerleri için hız profilleri ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1$ )



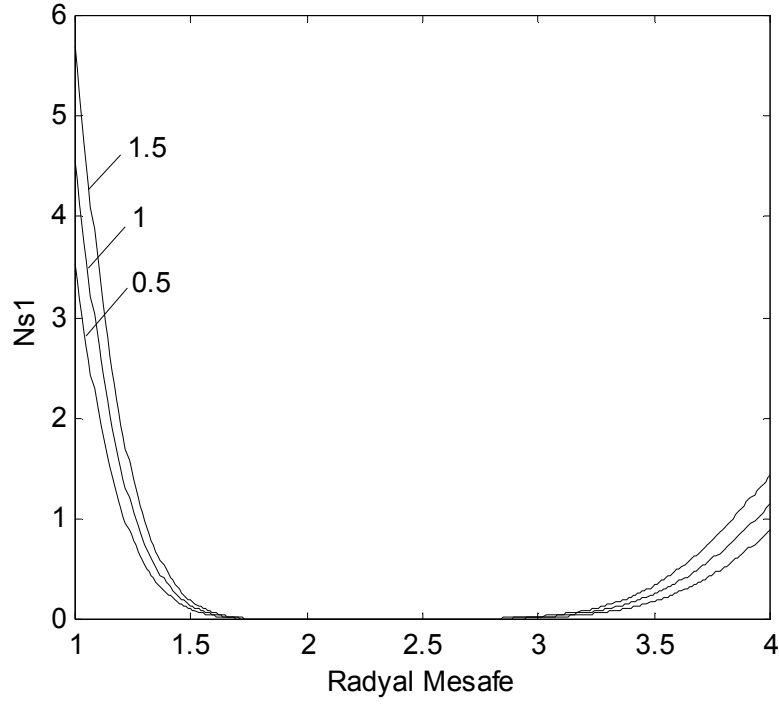
Şekil 4.3 Değişik  $\Lambda$  değerleri için sıcaklık profilleri ( $C=-1, \Gamma=1, M=1$ )



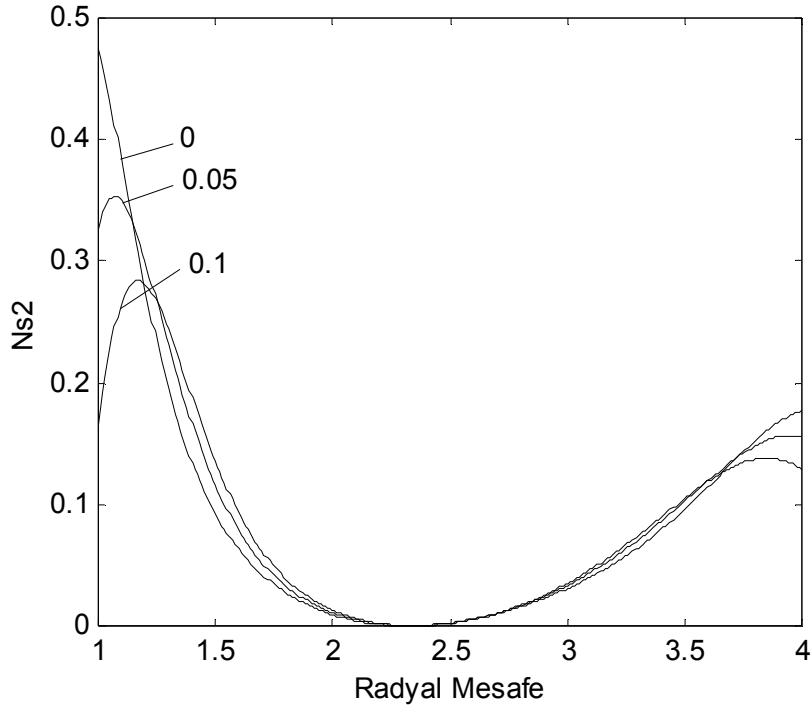
Şekil 4.4 Değişik M değerleri için sıcaklık profilleri ( $\Lambda=0.1$ ,  $C=-1$ ,  $\Gamma=1$ )



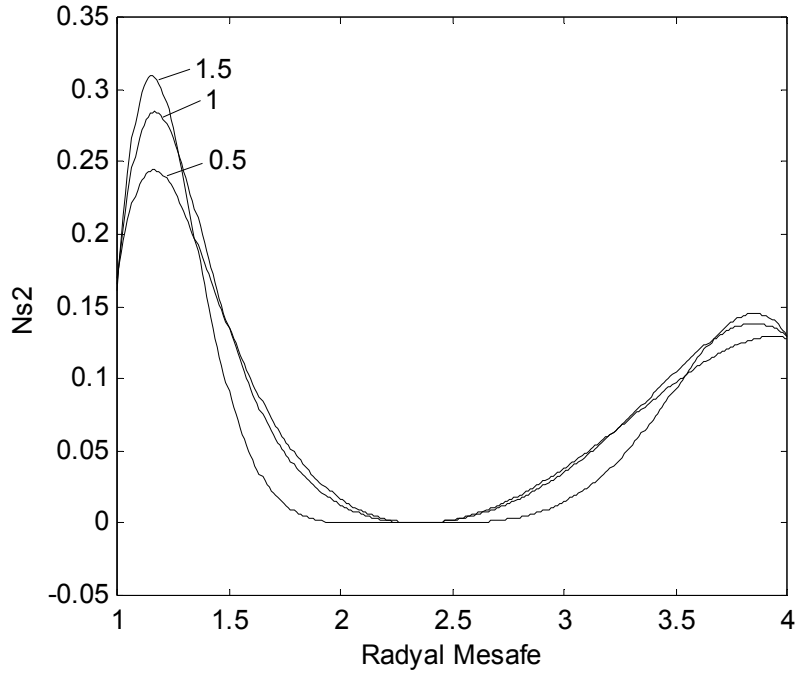
Şekil 4.5 Değişik  $\Lambda$  değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $M=1$ )



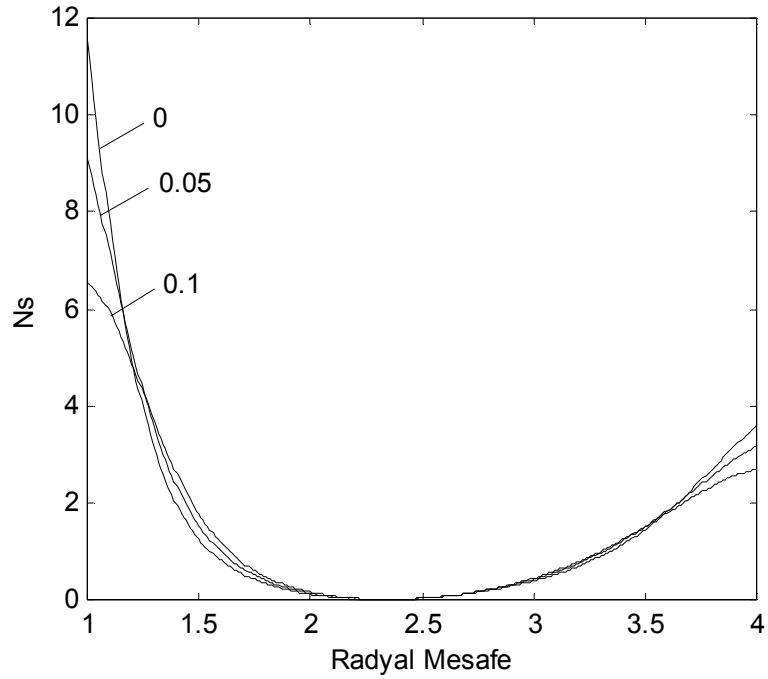
Şekil 4.6 Değişik  $M$  değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.1$ )



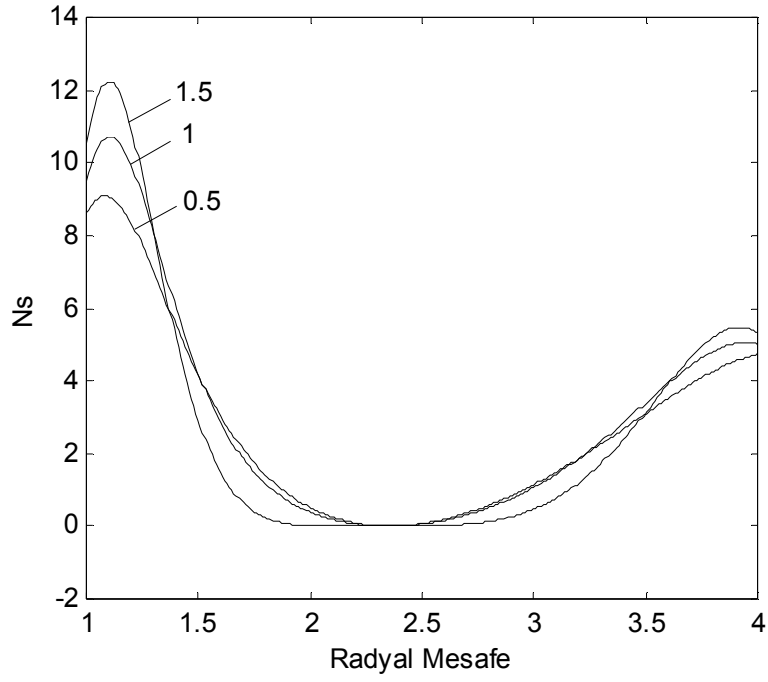
Şekil 4.7 Değişik  $\Lambda$  değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $M=1$ ,  $\theta_0=1.2$ )



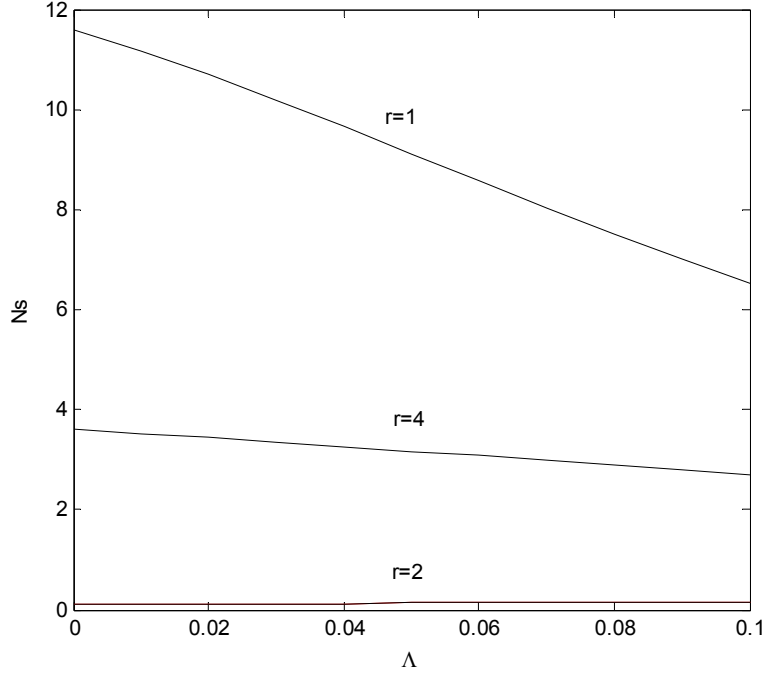
Şekil 4.8 Değişik  $M$  değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $\Lambda=0.1, C=-1, \Gamma=1, \theta_0=3$ )



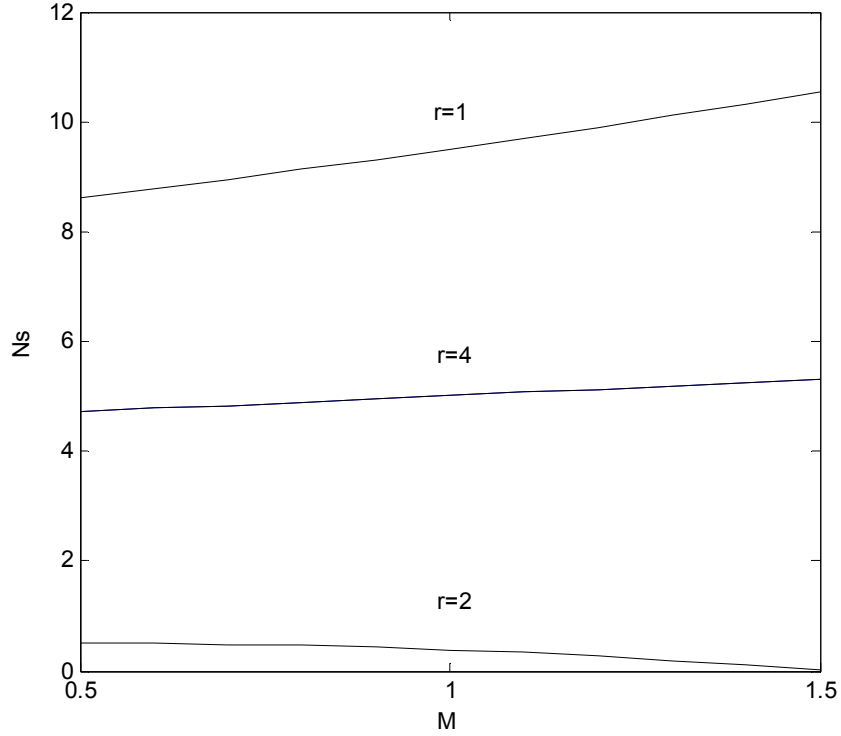
Şekil 4.9 Değişik  $\Lambda$  değerleri için toplam entropi üretimi ( $C=-1, \Gamma=1, M=1, \theta_0=1.2$ )



Şekil 4.10 Değişik M değerleri için toplam entropi üretimi  
 $(\Lambda=0.1, C=, \Gamma=1, \theta_0=3)$



Şekil 4.11 Değişik radyal mesafelerde toplam entropinin  
 $\Lambda$ 'ya göre değişimi  $(C=-1, \Gamma=1, M=1, \theta_0=1.2)$



Şekil 4.12 Değişik radyal mesafelerde toplam entropinin  $M$ ' ye göre değişimi  $C=-1, \Gamma=1, \theta_0=3, \Lambda=0.1$

Şekil 4.1'de radyal mesafe boyunca değişik non-Newtonyen parametreler ( $\Lambda$ ) için hız profilleri çizdirilmiştir.  $\Lambda=0$  Newtonyen akışa karşılık gelmektedir. Şekil 4.2'de ise değişik viskozite parametreleri ( $M$ ) için yine hız profilleri bulunmaktadır. Şekil 4.1'de non-Newtonyen parametre azaldığında maksimum hız büyüklüğünün arttığı görülmektedir. Ayrıca içteki ve dıştaki borunun cidar bölgelerinde akışkanın şekil değiştirme oranı artmaktadır. Sonuç olarak cidarlara yakın bölgelerde akışkanın şekil değiştirme oranı en fazla Newtonyen akışkanda ( $\Lambda=0$ ) olmaktadır. Yine şekil 4.1'de görülen önemli bir sonuçta maksimum hız büyüklüğünün yeri radyal mesafenin ortasında değil de iç boruya doğru hareket etmiş olmasıdır. Non-Newtonyen parametre azaldıkça iç boruya doğru alan hareket daha fazla olmaktadır. Bunu sebebi konvektif ivmelenmedir. Yani non-Newtonyen parametre azaldıkça akışkanın konvektif ivmelenmesi artmaktadır. Şekil 4.2'de ise viskozite parametresinin ( $M$ ) artması ile hızın büyüklüğü artmaktadır. Artan viskozite parametresi akışkanın viskozitesini azalmaktadır. Bunu denklem (3.47) dan da rahatlıkla görmek mümkündür. Azalan

viskozite ise akışkanın cidar bölgelerdeki şekil değiştirme oranını artırmakta ve maksimum hızın büyüklüğünü de artırmaktadır. Şekil 4.1’de olduğu gibi şekil 4.2’de viskozite parametresinin artması ile maksimum hızın yerinin iç boruya doğru hareket ettiği görülmektedir.

Şekil 4.3’te farklı non-Newtonyen parametreler için iki boru arasındaki sıcaklık dağılımı görülmektedir. Non-Newtonyen parametre ( $\Lambda$ ) azaldıkça maksimum sıcaklık artmaktadır. Akışkan içerisindeki iletim ve taşınımından dolayı olan ısı transferi konvektif ivmelenmeyi artırmaktadır. Non-Newtonyen parametre azaldıkça cidar bölgelerdeki sıcaklık gradyanı ise artmaktadır. Şekil 4.4’de ise viskozite parametresinin sıcaklık profili üzerindeki önemli etkileri gösterilmiştir. Viskozite parametresi ( $M$ ) artırıldıkça akışkan içerisindeki sıcaklık artmaktadır. Çünkü konvektif ivmelenme ısı transferi oranını artırmakta, böylece artan sıcaklıktan dolayı viskozite azalmaktadır. İki boru arasındaki mesafenin tam merkezinde ise sıcaklık gradyanındaki değişim ise çok azdır. Tam olarak iki borunun merkezinde sıcaklıktaki değişim hızdaki değişimden daha azdır.

Şekil 4.5’de ısı transferinden kaynaklanan entropi üretiminin ( $N_{S1}$ ) farklı non-Newtonyen parametreler için değişimi görülmektedir. Entropi üretimi cidara yakın bölgelerde maksimum değere ulaşmakta, bu iç boruya ait cidarda daha da belirgindir. Bu bölgelerdeki ısı transferindeki büyük değişim entropi üretimini de artırmaktadır. Non-Newtonyen parametrenin azalması ile entropi üretimi artmaktadır. Radyal mesafenin tam ortasında entropi üretimi azdır bunun sebebi ise merkezde sıcaklık gradyanının küçük olmasıdır. Şekil 4.6’de ise viskozite parametresinin artması ile entropi üretiminin arttığı görülmektedir. Bu özellikle iç borunun cidar bölgelerinde geçerlidir.

Şekil 4.7’de ise sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $N_{S2}$ ) non-Newtonyen parametrenin farklı değerleri için çizdirilmiştir. Entropi üretimi iki boru arasındaki mesafenin tam ortasında minimum değere ulaşır oysaki bu bölgede hız maksimum değerdedir. Ancak akışkandaki şekil değişim oranı bu bölgede en azdır. Sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi özellikle iç borunun cidarına yakın bölgelerde yüksek değerlere ulaşır. Non-Newtonyen parametrenin artması ile entropi üretimi azalmaktadır.

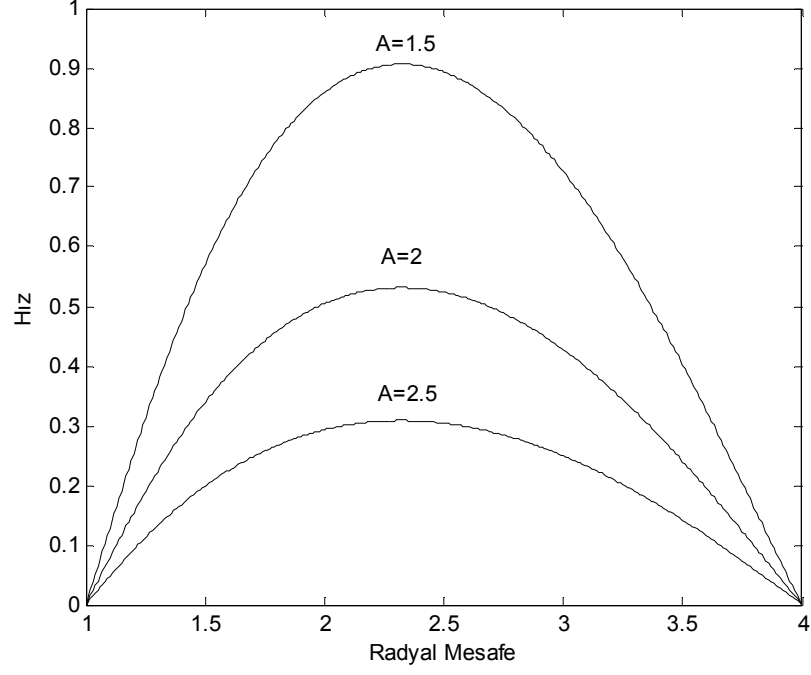


Çünkü bu cidar bölgelerde akışkanın hız gradyanındaki değişim fazladır. Bundan başka non-Newtonyen parametrenin 0.05 ve 0.1 değerleri için maksimum entropi üretimi cidardan biraz daha uzak bölgelerde gerçekleşir. Bu lokal tepe noktalarında akışkanda meydana gelen şekil değişim oranı diğer bölgelerde olan değişimden daha fazladır. Şekil 4.8’de sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretiminin değişik viskozite parametresi değerleri için radyal mesafe boyunca değişimi görülmektedir. Viskozite parametresinin (M) artması ile maksimum entropi üretimi cidardan biraz daha sol tarafa doğru kaymaktadır. Viskozite parametresinin artması ile birlikte akışkanın viskozitesi azalmakta ve akışkandaki şekil değişimi artmaktadır. Bu özellikle iç borunun cidarına yakın bölgede oluşmaktadır. Bu bölgede değişen sürtünme kayıpları aynı bölgede sürtünmeden dolayı oluşan entropi üretimini maksimuma ulaştırmaktadır. Şekil 4.9’da toplam entropi üretiminin sırası ile değişik non-Newtonyen parametreler için değişimi ifade edilmiştir. Özellikle içteki borunun cidarı dikkate alındığında non-Newtonyen parametre arttığında toplam entropinin azaldığı görülmektedir. Radyal mesafenin tam ortalarında ise toplam entropi üretiminin minimum olduğu görülmektedir. Şekil 4.10’de ise viskozite parametresinin değişik değerleri için toplam entropinin değişimi ifade edilmiştir. Burada da viskozite parametresinin artması ile içteki borunun tam cidarında toplam entropinin arttığı görülmektedir. Ancak entropinin maksimum değeri cidarın biraz daha sağ tarafına doğru olan bölgede meydana geldiği görülmektedir.

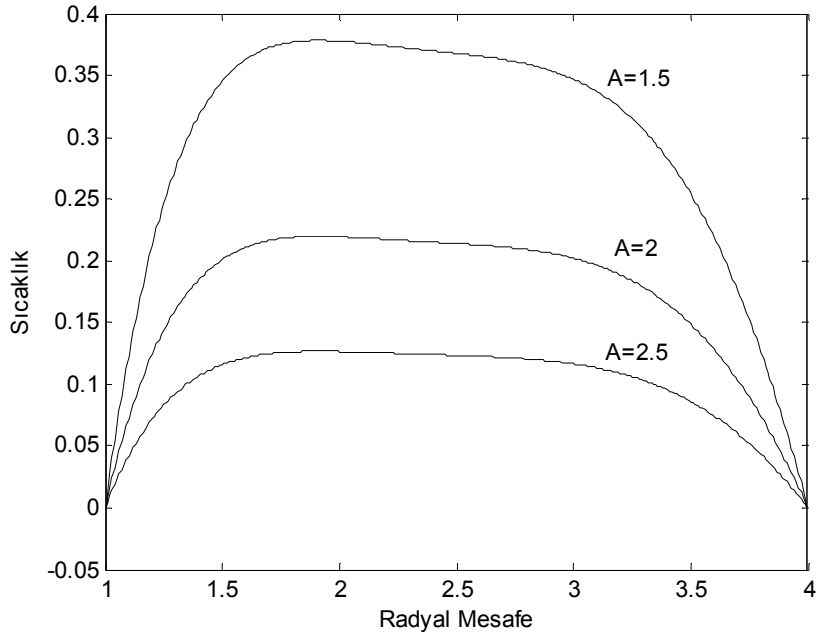
Şekil 4.11’de radyal mesafenin değişik noktalarında toplam entropinin non-Newtonyen parametreye göre değişimi incelenmiştir. Bu grafikten gözlemlendiği kadarı ile non-Newtonyen parametre arttıkça toplam entropinin düştüğü görülmektedir. Özellikle bu iç borunun cidarına yakın bölgelerde daha belirgindir. Ancak toplam entropinin değişimi merkezde ve dış borunun cidarında daha da azdır. Şekil 4.12’te ise yine radyal mesafenin farklı bölgelerinde toplam entropinin viskozite parametresine göre değişimi incelenmiştir.  $r=1$  ve  $r=4$  bölgelerinde viskozite parametresinin artması ile toplam entropinin arttığı gözlenmektedir. Ancak  $r=2$  de ise toplam entropi azalmaktadır. Gerek non-Newtonyen akışkan parametresinin gerekse viskozite parametresinin toplam entropi üretimine etkileri hemen hemen lineerdir.

## 4.2. Vogel Viskozite Modeli İçin Grafikler

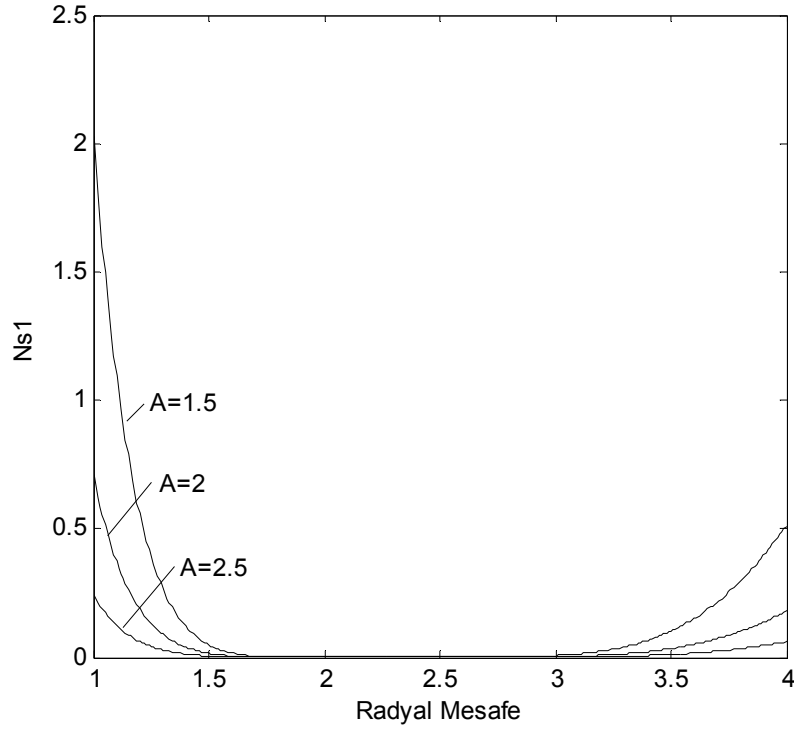
Vogel viskozite modeli için çizilen grafikler aşağıda verilmiştir:



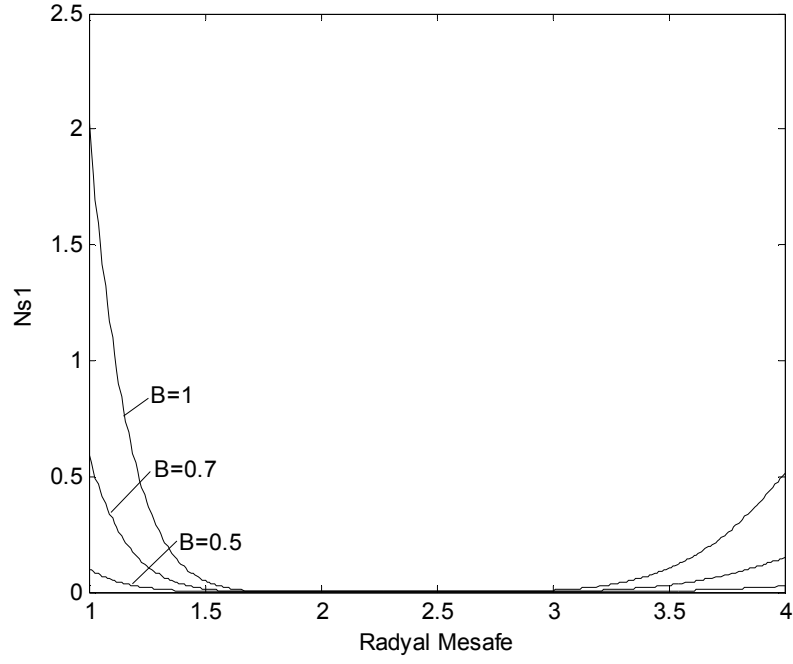
Şekil 4.13 Değişik A değerleri için hız profilleri  
( $C=-1$ ,  $B=1$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ )



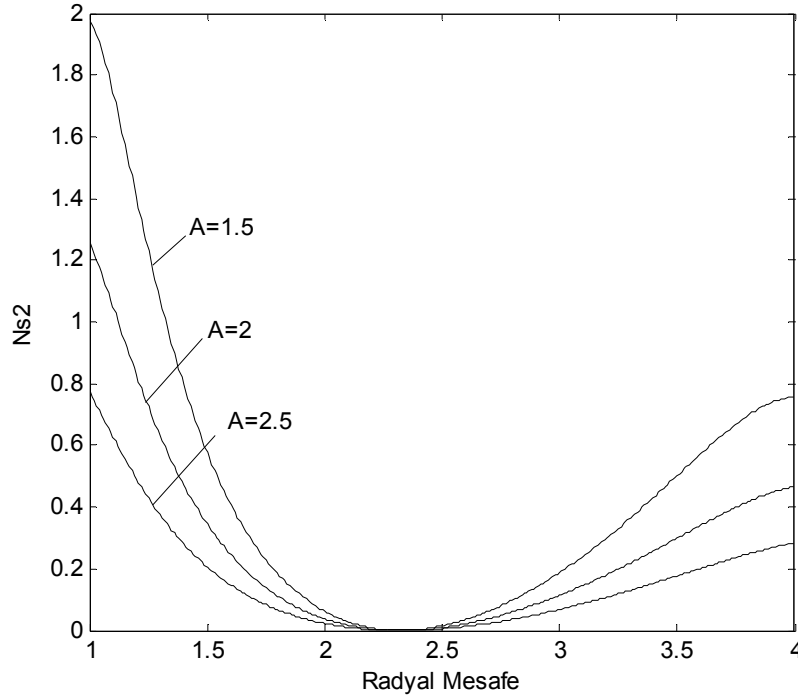
Şekil 4.14 Değişik A değerleri için sıcaklık profilleri  
( $C=-1$ ,  $B=1$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ )



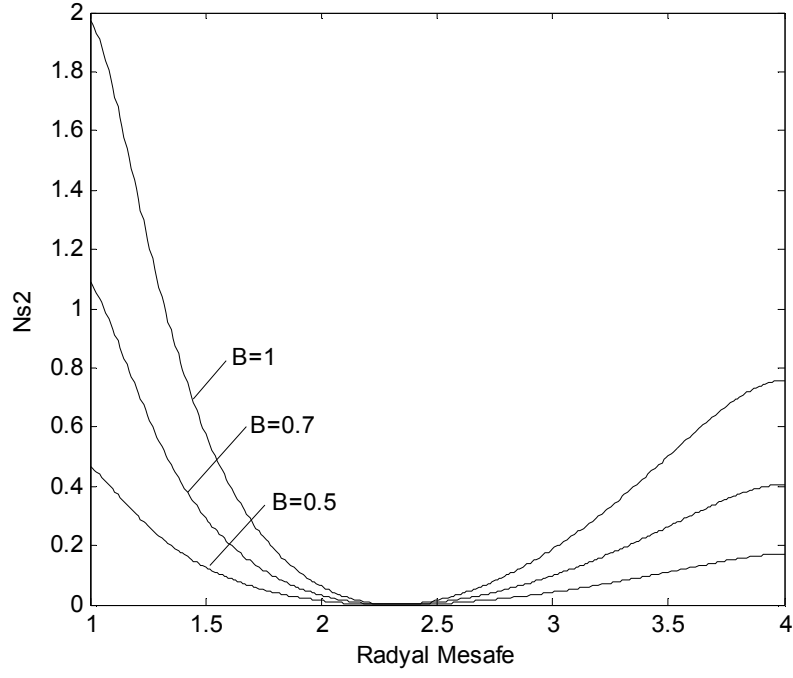
Şekil 4.15 Değişik A değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $B=1$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ )



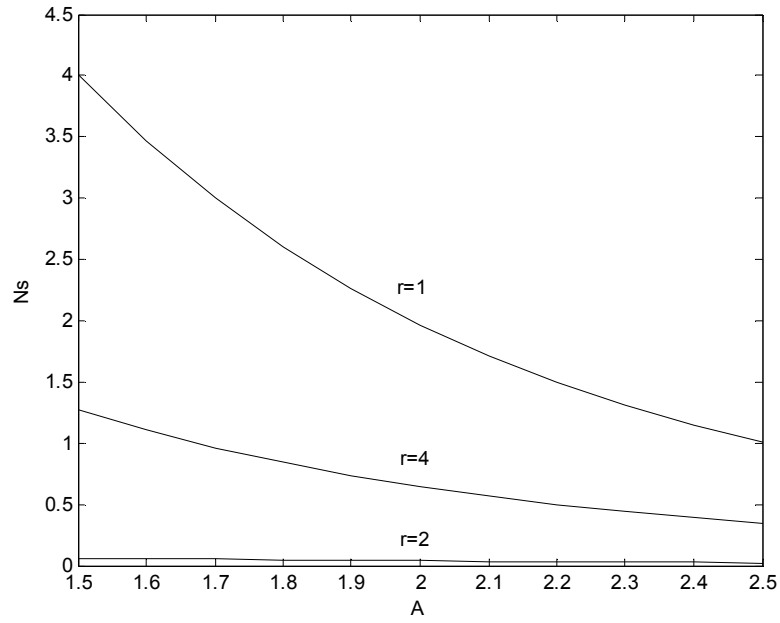
Şekil 4.16 Değişik B değerleri için ısı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $A=1.5$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ )



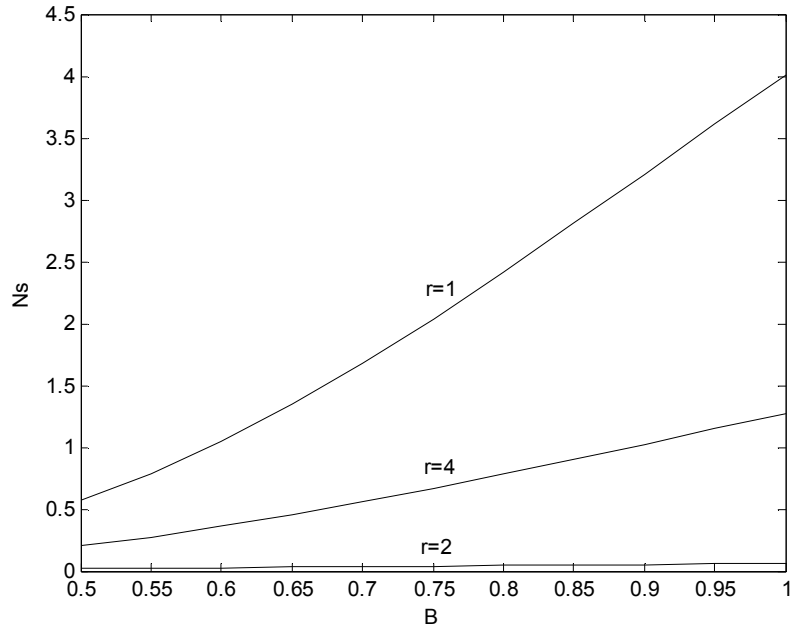
Şekil 4.17 Değişik A değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $B=1$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ ,  $\theta_0 = 0.723$ )



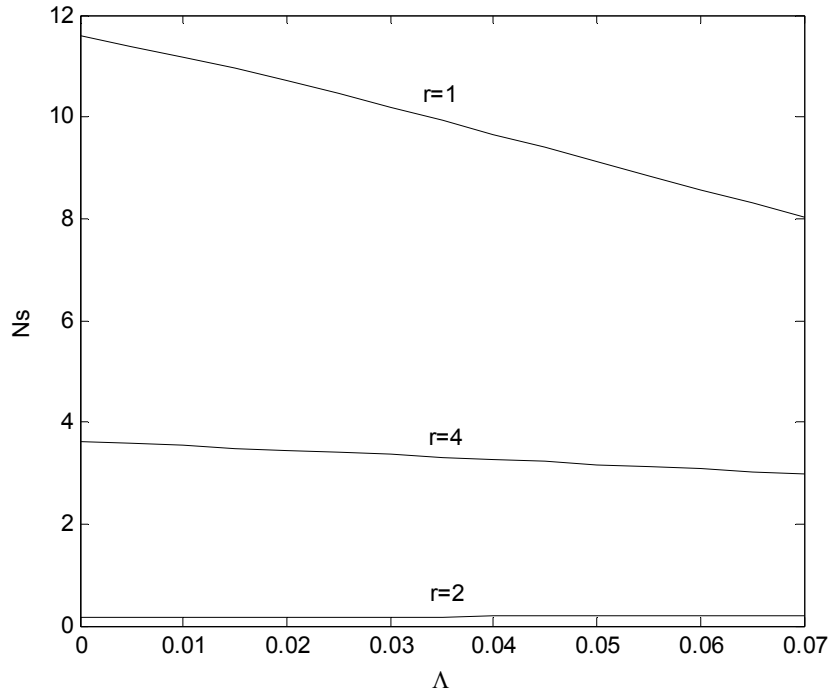
Şekil 4.18. Değişik B değerleri için sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi ( $C=-1$ ,  $A=1.5$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ ,  $\theta_0 = 0.723$ )



Şekil 4.19 Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin A'ya göre değişimi ( $C=-1$ ,  $B=1$ ,  $\mu_0=1$ ,  $\Gamma=1$ ,  $\Lambda=0.05$ ,  $\theta_0 = 0.723$ )



Şekil 4.20 Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin  $B$ 'ye göre değişimi  
 ( $C=-1, A=1.5, \mu_0=1, \Gamma=1, \Lambda=0.05, \theta_0 = 0.723$ )



Şekil 4.21 Farklı radyal bölgelerde toplam entropinin  $\Lambda$ 'ya göre değişimi  
 ( $C=-1, B=1, \mu_0=1, \Gamma=1, A=1, \theta_0 = 1.2$ )

Vogel viskozite modeli denklem (3.112)'den de rahatlıkla görülebileceği üzere hem A hem de B parametresine bağlı olarak değişmektedir. A parametresi artırıldığında viskozite artarken B parametresi artırıldığında viskozite azalmaktadır. Şekil 4.13'de radyal mesafe boyunca hız profili değişik A parametreleri için çizdirilmiştir. A artırıldığında radyal mesafe boyunca maksimum hızların büyüklüğü azalmaktadır. Bunun sebebi viskozitenin artması ile akışkandaki şekil değişim oranının azalmasıdır. Sonuçta azalan şekil değişim oranı maksimum hızın azalmasına sebep olmaktadır. Viskozite parametresinin azalması ile maksimum hızın yerinin iç boruya doğru hareket ettiği görülmektedir. Viskozitedeki B parametresi için hız değişimi incelendiğinde ise A parametresinin tersi bir etki yaptığı görülecektir. Yani B parametresi artırıldığında ise maksimum hızın arttığı görülmektedir. Sadelik açısından B parametresi ile ilgili grafikler buraya konulmamıştır. Şekil 4.14'de ise radyal mesafe boyunca değişik viskozite parametresi A değerleri için sıcaklık dağılımı gösterilmiştir. A parametresi artırıldıkça sıcaklık azalmaktadır. A parametresi arttıkça viskozite artmakta ve radyal mesafedeki akışkana olan ısı transferi azalmaktadır. Sonuçta özellikle cidarlara yakın bölgelerde sıcaklık gradyanı artmaktadır. B parametresinde ise A parametresi için elde edilen sonuçların tamamen tersi bir sonuç elde edilmektedir.

Şekil 4.15 ve 4.16'de sırası ile değişik A ve B parametreleri için ısı transferinden dolayı oluşan entropi üretimi çizdirilmiştir. Isı transferinden kaynaklanan entropi üretimi ( $Ns_1$ ) özellikle içteki borunun cidarında oldukça yüksek ancak radyal mesafenin ortalarına doğru büyük ölçüde azalmaktadır. Bunun sebebi cidar bölgelerde akışkana olan ısı transferinin artmasıdır. Şekil 4.15'de A parametresi artırıldıkça içteki borunun cidarında  $Ns_1$ 'in azaldığı görülmektedir. Şekil 4.16'de ise bunun tam tersi bir durum söz konusudur. Şekil 4.17'de sürtünmeden kaynaklanan entropi üretiminin değişik A parametreleri için değişimi gösterilmiştir. A parametresi artırıldıkça özellikle iç borunun cidarında  $Ns_2$ 'nin azaldığı görülmektedir.  $A=1.5$  için  $Ns_2$ 'nin neredeyse parabolik bir değişim gösterdiği görülmektedir. A artırıldıkça değişimin üstel (eksponansiyel) bir değişime dönüştüğü gözlenmektedir.  $A=1.5$  için radyal mesafenin ortalarına doğru entropideki azalma yavaş yavaş olurken,  $A \geq 2$  değeri için bu azalma ani bir şekilde olmaktadır. Şekil 4.18'de ise B parametresinin farklı değerleri için  $Ns_2$  nin değişimi incelenmiştir.  $Ns_2$  için A parametresi için benzeri yorumlar B parametresi içinde

geçerlidir.  $B \leq 0.7$  için  $Ns_2$  hızlı bir şekilde azalış göstermektedir. Şekil 4.19'de farklı radyal bölgelerde toplam entropi üretiminin A parametresine göre değişimi görülmektedir. Bu grafikten gözlemlendiği kadarı ile A parametresi arttıkça toplam entropinin düştüğü görülmektedir. Özellikle bu iç borunun cidarına yakın bölgelerde daha belirgindir. Ancak toplam entropinin değişimi merkezde ve dış borunun cidarında daha da azdır. Özellikle  $r=1$  de değişimin hemen hemen parabolik olduğu görülmektedir. Şekil 4.20'de ise toplam entropinin B parametresine göre değişimi verilmiştir. B parametresi arttıkça toplam entropinin de arttığı görülmektedir. Bu artış  $r=1$  de daha açıktır ve değişim parabole yakındır. Şekil 4.21 ise toplam entropinin non-Newtonyen parametresine göre değişimini ifade etmektedir. Non-Newtonyen parametre arttıkça toplam entropi azalmaktadır. Bu azalma  $r=1$  ve  $r=4$  de daha açık bir şekilde görülmektedir. Bu azalma lineer bir azalmadır.



## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yapılan çalışmada iç içe geçmiş iki boru arasındaki non-Newtonyen akışkan akışında entropi üretimi incelenmiştir. Öncelikle silindirik koordinatlarda üçünü derece akışkanlara ait momentum ve enerji denklemlerinin en genel hali çıkarılmıştır. Daha sonra bu genel hareket denklemlerinden faydalanılarak boru içerisindeki tek boyutlu akım için momentum ve enerji denklemleri elde edilmiştir. Bu denklem için iki boru arasındaki akışı ifade eden sınır şartları belirlenerek çözümlerin genel olabilmesi için boyutsuzlaştırma işlemi yapılmıştır. Sonuçta silindirik koordinatlarda tek boyutlu akışı ifade eden adi diferansiyel denklemler sistemi elde edilmiştir. Denklemlerin çözümü için bir çeşit perturbasyon metodu olan yaya (pedestrian) açılımı metodu kullanılmıştır. Hız ve sıcaklık profillerinin bulunmasında yaya açılımı yapılarak denklem Newtonyen ve non-Newtonyen kısımlar olarak ayrıştırılmıştır. Çözümlerde viskozitenin sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri için iki ayrı viskozite modeli olan Reynold viskozite modeli ve Vogel viskozite modeli için analitik çözümler üretilmiştir. Elde edilen bu hız ve sıcaklık profilleri kullanılarak entropi üretimi (entropy generation) üzerinde durulmuştur.

Yapılan çalışmalar neticesinde Reynold viskozite modeline göre non-Newtonyen parametre azaldığında maksimum hız büyüklüğünün arttığı görülmüştür. Ayrıca içteki ve dıştaki borunun cidar bölgelerinde akışkanın şekil değiştirme oranı artmaktadır. Sonuç olarak cidarlara yakın bölgelerde akışkanın şekil değiştirme oranı en fazla Newtonyen akışkanda ( $\Lambda=0$ ) olmaktadır. Vogel viskozite modeline göre ise benzer sonuçlar A ve B parametrelerine bağlı olarak elde edilmiştir. A parametresi artırıldığında viskozite artarken B parametresi artırıldığında viskozite azalmaktadır. A artırıldığında radyal mesafe boyunca maksimum hızların büyüklüğü azalmaktadır.

Diğer bir önemli sonuçta maksimum hız büyüklüğünün yeri radyal mesafenin ortasında değil de iç boruya doğru hareket etmiş olmasıdır. Non-Newtonyen parametre azaldıkça iç boruya doğru olan hareket daha fazla olmaktadır. Bunu sebebi konvektif ivmelenmedir. Yani non-Newtonyen parametre azaldıkça akışkanın konvektif ivmelenmesi artmaktadır.

Non-Newtonyen parametre ( $\Lambda$ ) azaldıkça maksimum sıcaklık artmaktadır. Akışkan içerisindeki iletim ve taşınımından dolayı olan ısı transferi konvektif ivmelenmeyi artırmaktadır. Non-Newtonyen parametre azaldıkça cidar bölgelerdeki sıcaklık gradyanı ise artmaktadır.

Viskozite parametresi ( $M$ ) artırıldıkça akışkan içerisindeki sıcaklık artmaktadır. Çünkü konvektif ivmelenme ısı transferi oranını artırmakta, böylece artan sıcaklıktan dolayı viskozite azalmaktadır.

Isı transferinden kaynaklanan entropi üretiminin ( $Ns_1$ ) cidara yakın bölgelerde maksimum değere ulaşmakta, bu iç boruya ait cidarda daha da belirgindir. Bu bölgelerdeki ısı transferindeki büyük değişim entropi üretimini de artırmaktadır. Non-Newtonyen parametrenin azalması ile entropi üretimi artmaktadır.

Sürtünmeden kaynaklanan entropi üretiminin ( $Ns_2$ ) iki boru arasındaki mesafenin tam ortasında minimum değere ulaşır oysaki bu bölgede hız maksimum değerdedir. Ancak akışkandaki şekil değişim oranı bu bölgede en azdır. Sürtünmeden kaynaklanan entropi üretimi özellikle iç borunun cidarına yakın bölgelerde yüksek değerlere ulaşır. Non-Newtonyen parametrenin artması ile entropi üretimi azalmaktadır.

Özellikle içteki borunun cidarı dikkate alındığında non-Newtonyen parametre arttığında toplam entropinin azaldığı görülmektedir.

Non-Newtonyen parametre arttıkça toplam entropinin düştüğü görülmektedir. Özellikle bu iç borunun cidarına yakın bölgelerde daha belirgindir. Ancak toplam entropinin değişimi merkezde ve dış borunun cidarında daha da azdır.

Gerek non-Newtonyen akışkan parametresinin gerekse viskozite parametresinin toplam entropi üretimine etkileri hemen hemen lineerdir.

Farklı radyal bölgelerde toplam entropi üretiminin  $A$  parametresine göre değişiminde  $A$  parametresi arttıkça toplam entropinin düştüğü görülmektedir. Özellikle bu iç borunun

cidarına yakın bölgelerinde daha belirgin olduğu gözlenmiştir. Ancak toplam entropinin değişimi merkezde ve dış borunun cidarında daha da azdır. Özellikle iç borunun cidarında değişimin hemen hemen parabolik olduğu görülmektedir. Non-Newtonyen parametre arttıkça toplam entropi azaldığı görülmüştür.

## 6. KAYNAKLAR

Bejan A., Entropy generation minimization, CRC Press, New York, 1995.

Cengel Y.A, Boles M.A, Mühendislik Yaklaşımı ve Termodinamik, Literatür Yayınları,1996

Hecht A. M., Theoretical non-Newtonian pipe-flow heat transfer, AIChE Journal 19 (1973) 197-199.

Mahmud S. and Fraser R. A., Inherent irreversibility of channel and pipe flows for non Newtonian fluids, Int. Comm. Heat Mass Transfer 29 (2002) 577-587.

Massoudi M., Christie I., Effect of variable viscosity and viscous dissipation on the flow of a third grade fluid in a pipe, Int J Non-Linear Mec 30 (1995) 687-699.

Nayfeh A.H., Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley and Sons, New York, 1981.

Pinarbasi, A., Ozalp, C., Effect of viscosity models on the stability of a non-Newtonian fluid in a channel with heat transfer, International Communications in Heat and Mass Transfer 28 (2001) 369-378.

Wang Y., Chukwu G. A., Unsteady axial laminar Couette flow of power-law fluids in a concentric annulus, Industrial and Engineering Chemistry Research 35 (1996) 2039-2047

Yurusoy M., Pakdemirli M., Approximate analytical solutions for the flow of a third grade fluid in a pipe, Int J Non-Linear Mec 37 (2002) 187-195.

Yurusoy M., Flow of a third grade fluid between concentric circular cylinders, Mathematical and Computational Applications 9 (2004) 11-17.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Mehmet KAPUCU
Doğum Yeri	Eskisehir / Sivrihisar
Doğum Tarihi	20/10/1983
Medeni Hali	BEKAR
Yabancı Dili	İNGİLİZCE
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	Eskisehir Atatürk Teknik Lisesi
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi Mak. Res. ve Konst. Öğr. (2001-2005)
Yüksek Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen bilimleri Enstitüsü, Makine Eğitimi Anabilim Dalı (2005-2008)

University of Twente, The Netherlands, Engineering Fluid Dynamics, Erasmus Programı Kapsamında Değişim Öğrencisi Olarak (Ağustos 2007-Haziran 2008)

### Yayınları (SCI ve diğer)

Muhammet Yürüsoy, Hüseyin Bayrakçeken, Mehmet Kapucu and Fatih Aksoy, Entropy analysis for third grade fluid flow with Vogel model viscosity in annular pipe, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008

M. Yürüsoy, M. Kapucu, A. Keçebaş, "Entropy Generation in Non-Newtonian Fluid Flow in Annular Pipe", 16. Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi, Kayseri, Turkey, June 2007