CS- MODÜLLER VE BAZI GENELLEMELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hatice TUFAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ağustos 2008

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CS- MODÜLLER VE BAZI GENELLEMELERİ

HATİCE TUFAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. HASAN ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞUSTOS 2008

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ' in danışmanlığında **Hatice TUFAN** tarafından hazırlanan **"CS-Modüller ve Bazı Genellemeleri"** başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca ..…/…../….. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan		
Üye		
Üye		

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
…..../……/…… tarih ve
……./…… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zehra BOZKURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

CS-MODÜLLER VE BAZI GENELLEMELERİ

Hatice TUFAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ**

Modül teorinin amacı halkaları daha iyi karakterize etmektir. Özellikle injektif modüller yardımıyla QF-halkalar karakterize edilmektedir ki QF halkalar modül teorisinde çok önemli yer tutar. CS-modüller injektif modüllerin bir genellemesidir. Bu da aklımıza CS-modüller yardımıyla halkaları karakterize edebilir miyiz sorusunu akla getirir. Bu soru literatürde son 10 yılda cevap bulmuştur. Daha sonra CS-modüller C_{11}-modüller ve zayıf CS-modüller olarak genelleştirilmiştir. En son olarak Tercan CLS-modülleri tanımlayarak, öncelikle bu modül ile diğer modüller arasındaki ilişkiyi ele almıştır. Kısaca CLS-modüller, CS-modüllerin en son genellemesi olarak literatürde yer almıştır. Tezin ilk bölümünde, konunun kavranması için gerekli tanımlar ve teoremler verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde, CS-modüller ve özelliklerinden bahsedildi. Tezin son bölümünde de CLS-modüller ve özellikleri incelendi.

2008, 37 sayfa

ABSTRACT

CS-MODULES AND SOME GENERATIONS

Hatice TUFAN

Afyon Kocatepe University

Department of Mathematics

Supervisor: **Assist. Prof. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ**

The aim of module theory is to better characterize the rings. Especially with the help of the injective modules, QF-rings; which hold an important place in the module theory; can be characterized. CS modules are the generalization of the injective modules. This makes us to think whether we can characterize the rings with the help of the CS-modules. This question got an answer in the literature in the last 10 years. Later on, the CS-modules are generalized as C-modules and weak CS-modules. Finally Tercan defined the CLS-modules and investigated the relation of CLS-modules with the the other modules. Shortly, the CLS-modules got its place in the literature as the latest generalization os CS-modules. In the first part of the thesis, the necessary definitions and theries are explained for clarifying the topic. In the second part of the thesis, the properties of the CS-modules are explained. In the last part of the thesis, the CLS-modules and its properties are investigated.

2008, 37 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında, değerli görüşlerini, yardımlarını ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM, Yrd. Doç. Dr. Tamer KOŞAN ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Hatice TUFAN

SİMGELER

R………….. Birimli Halka

${}_RM$ …………Sol(sağ) R-modül

$\leq$…………Altmodül

$\leq_e$………...Esaslı altmodül

$\leq_c$…………Komplement altmodül

$\leq_d$…………Diktoplanan altmodül

$\triangleright$…………..Tamammen değişmez altmodül

τ…………...Burulmalı modül

$\oplus$…………..Diktoplam

End(M)……..*M* modülü üzerindeki endomorfizmalar

$\subseteq$……………Tamsayılar kümesi

Çek(f)……….f homomorfizmasının çekirdeği

Soc(M)………*M* nin minimal altmodüllerinin toplamı

I. BÖLÜM

GİRİŞ

Modül teori üzerinde önemli kavramlar vardır. Bunlar C_{11}- modül ve *CLS*-modüllerdir. Bu kavramları verebilmek için öncelikle şu alt kavramlara ihtiyacımız var; esaslı alt modül, komplement alt modül, kapalı alt modül ve dik toplanan modüller.

M bir sağ R-modül ve $N \leq M_R$ olsun. M_R nin sıfırdan farklı her K alt modülü için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa N ye M_R de *esaslı alt modül*, M_R ye ise N nin *esaslı genişlemesi* denir ve $N \leq_e M_R$ biçiminde gösterilir.

M bir sağ R-modül ve $K \leq_e M_R$ olsun. K nın M_R içinde öz (proper) esaslı (essential) genişlemesi yoksa, K ya M_R de *kapalı (closed) alt modül* denir. Yani $K \leq_e L \leq M_R$ iken $K = L$ oluyorsa, K alt modülü M_R de kapalı alt modül olur.

M bir sağ R-modül ve $A \leq M_R$ olsun. $A \cap B = 0$ olması özelliğine göre maksimal olan $B \leq M_R$ ye A nın M_R deki *komplementi (complement)* denir ve $B \leq_c M_R$ ile gösterilir.

Ayrıca; M_R nin her kapalı alt modülü M_R de diktoplanan oluyorsa M_R ye *(C1)-modül ((CS) / extending modül)* denir.

M bir sağ $R-$modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M nin dik toplananı olan bir komplemente sahipse, yani M nin her bir N alt modülü için M nin bir K dik toplananı vardır ki K da M içinde N nin komplementi ise M modülüne *(C_{11})-modül* denir.

CS-modüller iyi bilinen modüllerdir. 1954-1970 yılları arasında C_{11}-modülleri M.Müller kitabında ilk olarak vermesine karşın F. Smith Patrick 1990 da bu konuyu ele aldı ve yeniden inceledi. Daha sonra F. Smith Patrick ve öğrencisi Adnan Tercan konuyu ayrıntılarıyla incelediler ve şu önemli sonuçları çıkardılar.

M bir sağ $R-$modül olsun. M bir (C_{11}) modül olması için gerek ve yeter koşul $N \cap L = 0$ olan bütün N ve L alt modülleri için $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde M nin K dik toplananı var olmasıdır. Üstelik bu durumda $N \oplus K$ da M nin esaslı alt modülüdür.

Bir M sağ $R-$modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) M bir (C_{11}) modüldür.

(2) M nin herhangi bir komplement L alt modülü için M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki K, M içinde L nin bir komplementidir.

(3) M nin herhangi bir N alt modülü için, M nin bir K dik toplananı vardır ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K$, M nin esaslı bir alt modülüdür.

(4) M nin herhangi bir komplement L alt modülü için, M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K$, M 'nin esaslı bir alt modülüdür.

(C_{11}) modüllerin herhangi dik toplamı da (C_{11}) dir. (C_1) modüllerin herhangi dik toplamı da (C_{11}) dir. Üniform modüllerin herhangi dik toplamı (C_{11}) dir.

Sonuç olarak üniform modül tanımını verelim. Her alt modülü esaslı olan modüle *üniform modül* denir.

Tercan ile Birkenmier daha önce açık kalan şu soru üzerinde düşündüler. C_{11} -modülün ne zaman alt modülü C_{11} -modüldür? Bunu incelerken de şu sonuçlara ulaştılar.

M bir C_{11}-modül ve X de M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin herhangi bir dik toplananı ile X in kesişimi, X in bir dik toplananı ise, o zaman X bir C_{11}-modüldür.

M bir C_{11}-modül olsun.

(i) Eğer M distiributive ise, o zaman M nin her alt modülü C_1 dir.

(ii) Bütün $e^2 = e \in End(M_R)$ elemanları için *X, M* nin bir alt modülü öyle ki $eX \subseteq X$ ise, o zaman X bir C_{11}-modüldür. Özellikle, M nin tamamen değişmez her alt modülü bir C_{11}-modüldür.

(iii) Eğer M SIP e sahipse, o zaman M nin her dik toplananı C_{11} e sahiptir.

M_1**,** M nin alt modülü iken, $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. O zaman M C_{11} e sahiptir ancak ve ancak M_1 ve M_2 nin her ikisi de C_{11} e sahiptir.

M bir C_{11} modül ve *X, M* nin tamamen değişmez (fully invariant) bir alt modülü olsun. O zaman $X \leq_{ess} M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır. Dahası,

(i) Eğer $Z_2(M_1)$ bir C_{11} ise M_1 de C_{11} dir.

(ii) Eğer $Z_2(M_2)$ bir C_{11} ise M_2 de C_{11} dir.

(iii) M_1, M nin tamamen değişmez bir alt modülü (örneğin, $Z_2(M) \leq M_1$) ise M_1 ve M_2 nin ikisi de C_{11}-modüldür.

(iv) Eğer $Z_2(M) \leq M_2$ ise M_1 ve M_2 nin ikisi de C_{11}-modüldür.

Bu çalışmalara bağlı olarak Adnan Tercan *CS*-modüllerin bir başka genellemesi olan *CLS*-modülleri 1995 tarihli makalesinde ele almıştır. Şimdi de *CLS*-modülleri tanıyalım. Bunun içinde önce kapalı* alt modül tanımı verelim.

M bir modül ve *N*, M nin bir altmodülü olsun. Eğer M/N tekil olmayan ise N ye M nin *kapalı* alt modülü (closed* alt modülü)* denir.

Bu tanımın önce verdiğimiz tanımlarla ilişkisi ise;

M bir sağ R-modül olsun.

(i) Her kapalı* alt modül bir kapalı alt modüldür.

(ii) Eğer M tekil olmayan ise her kapalı alt modül bir kapalı* alt modüldür.

önteoreminde gösterilmiştir.

Bu tanımdan sonra *CLS*-modülü verelim. M bir modül olsun. Eğer her kapalı* alt modülü M nin bir dik toplananı ise M modülüne *CLS-modül* denir. Bu tanımın üzerine de şu sonuçlar elde edildi.

(i) Her CS-modül bir CLS_modüldür.

(ii) Her tekil olmayan CLS-modül bir CS-modüldür.

Ayrıca bir CLS-modülün herhangi bir dik toplananı da CLS-modüldür.

Buraya kadar tarihsel gelişimiyle bahsedilen çalışmalar göz önüne alınarak şu iki problem bu tezde çalışıldı.

1. *CLS*-modüllerin alt modülü ne zaman *CLS* olur?
2. Cezmi Çelik, Abdullah Harmancı ve Patrick Smith 1995 de *CS*-modüllerin bir başka genellemesi olan *CESS*-modülleri tanımladılar ve üzerine çalıştılar.

Sonra Cezmi Çelik Turkish of Math. 1-22-1998 (69-75) yayınında *CESS*-modüllerin çeşitli modüllerini elde etti. Biz de bu *CLS*-modülleri acaba *CLSS*-modül yapabilir miyiz?

II. BÖLÜM

TANIM VE TEMEL TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı temel tanım ve teoremler verildi.

2.1 Cebirsel Yapılar

Aşağıda verilen Tanım2.1.1 ile Tanım 2.4.1 arasındaki tanım ve teoremler Anderson-Fuller ve Wishbauer' in kaynak kitaplarından alınmıştır.

Tanım 2.1.1 (Modül) R bir halka olsun. $\cdot : R \times M \to M$ çarpımı ile birlikte $(M,+)$ değişmeli grubu aşağıdaki aksiyomları sağlarsa R üzerinde bir *sol modül*dür denir.

(1) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

(2) Her $r \in R$ ve her $m, n \in M$ için $r \cdot (m+n) = r \cdot m + r \cdot n$

(3) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(r+s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$

(4) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$

Genellikle $\cdot$ yazılmaz ve sadece rm yazılır. R üzerinde bir sağ modül mr çarpımı ile benzer yolla tanımlanır. M sol R-modülü ${}_R M$ yazılımı ile gösterilir.

Tanımdan da görüleceği üzere; bir halka üzerindeki modül kavramı vektör uzayının bir genellemesidir (bir vektör uzayında skalerler bir cisim üzerinden alınırken modülde halkadan alınırlar). Bu da modül teoride vektör uzayının sağladığı bazı önemli özellikleri sağlatma amacını güder. Ne yazık ki bu her zaman olumlu sonuçlanmaz. Örneğin tüm modüller vektör uzayları gibi bir tabana sahip değildirler.

Örnek: Eğer V bir F cismi üzerinde vektör uzayı ise V vektörlerdeki toplama işlemi altında değişmeli bir gruptur. Skalerle çarpma işlemlerinden Tanım 2.1.1 in özellikleri de sağladığı gözlemlenirse kolaylıkla görülecektir ki V aynı F cismi (dolayısıyla halkası) üzerinde bir modüldür.

Örnek: Her değişmeli grup bir $\subseteq$-modüldür. ($\subseteq$ tam sayılar kümesi)

Çözüm: M bir değişmeli grup olsun. Aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım:

$$. : \subseteq \times M \to M \ , (m,a) \to ma$$

$$+ : M \times M \to M \ , \ (x,x) \to x + x \ \text{ve} \ \ (x+x,x) \to (x+x)+x$$

ile tanımlı olsun. O zaman , her $n, n_1, n_2 \in \subseteq$ ve her $m, m_1, m_2 \in M$ için,

(1) $n(m_1 + m_2) = nm_1 + nm_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{n(m_1 + m_2)} &= \underbrace{\mathrm{(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2) + \ldots + (m_1 + m_2)}}_{\mathrm{n-tan\,e}} \\
&= \underbrace{\mathrm{(m_1 + m_1 + \ldots + m_1)}}_{\mathrm{n-tan\,e}} + \underbrace{\mathrm{(m_2 + m_2 + \ldots + m_2)}}_{\mathrm{n-tan\,e}} \\
&= \mathrm{nm_1 + nm_2}
\end{aligned}$$

(2) $(n_1 + n_2)m = n_1 m + n_2 m$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{(n_1 + n_2)m} &= \underbrace{\mathrm{m + m + \ldots + m}}_{\mathrm{n_1 + n_2 - tan\,e}} \\
&= \underbrace{\mathrm{(m + m + \ldots + m)}}_{\mathrm{n_1 - tan\,e}} + \underbrace{\mathrm{(m + m + \ldots + m)}}_{\mathrm{n_2 - tan\,e}} \\
&= \mathrm{n_1 m + n_2 m}
\end{aligned}$$

(3) $(n_1 n_2)m = n_1(n_2 m)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{(n_1 n_2)m} &= \underbrace{\mathrm{m + m + \ldots + m}}_{\mathrm{n_1 n_2 - tan\,e}} \\
&= \underbrace{\underbrace{\mathrm{(m + m + \ldots + m)}}_{\mathrm{n_2 - tan\,e}} + \underbrace{\mathrm{(m + m + \ldots + m)}}_{\mathrm{n_2 - tan\,e}} + \ldots + \underbrace{\mathrm{(m + m + \ldots + m)}}_{\mathrm{n_2 - tan\,e}}}_{\mathrm{n_1 - tan\,e}} \\
&= \mathrm{n_1(n_2 m)}
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.2 (Alt Modül) R bir halka , M bir sol R-modül ve N de M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer N , M nin toplamsal alt grubu ve her $r \in R$ ve $n \in N$ için, $rn \in N$ ise N ye M nin sol $R-$*alt-modülü* ya da sadece alt modülü denir.

Açıktır ki $\{0\}$ kümesi ve M nin kendisi yine M nin alt modülleridir.

Önteorem 2.1.3 M bir sol R-modül ve $K \subseteq M$ olsun. O zaman ${}_R K$, ${}_R M$ nin bir alt modülü olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in K$ ve her $r \in R$ için, $x - y \in K$ ve $xr \in K$ olmasıdır.

Tanım 2.1.4 (Üretilmiş Alt Modül) X **,** R üzerinde bir M modülünün bir alt kümesi olsun. M nin X i kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine X ile *üretilmiş alt modül (generated alt modülü)* denir**.** Eğer X sonlu ve bir N alt modülünü üretiyorsa, o zaman N modülüne *sonlu üretilmiş alt modül (finitely generated alt modül)* denir.

Tanım 2.1.5 (Devirli Alt Modül) $m \in M$ ise, Rm kümesini $Rm = \{rm : r \in R\}$ olarak tanımlayabiliriz. Bu kümeye m ile *üretilmiş devirli (cyclic) alt modül* denir. Eğer $M = Rm$ ise, M modülüne devirlidir denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Modül) Eğer M sıfırdan farklı bir modül ve M nin alt modülleri sadece 0 ve M ise M modülüne *basit (simple)* denir.

Aşağıdaki önteorem kümeler kuramında Zorn önteoremi olarak bilinen özelliğin modüller için bir uygulamasıdır.

Önteorem 2.1.7 X bir M modülünün herhangi bir alt kümesi olsun. $N \cap X = 0$ olan M nin herhangi bir alt modülü bu özelliğe göre maksimal olan bir alt modül de kapsanır.

Tanım 2.1.8 (Maksimal Alt Modül) M bir R-modül ve N, K da M nin alt modülleri olsun. Eğer $N < K < M$ iken $N = K$ veya $K = M$ ise, N ye M nin *maksimal alt modülü* denir.

Önteorem 2.1.9 M bir sol R-modül ve $N \leq M$ olsun. O zaman M/N basittir gerek ve yeter şart N maksimaldir.

İspat : ($\Rightarrow$) M/N basit modül ve $N < K < M$ olsun. O zaman K/N modülü M/N modülünün alt modülüdür. M/N basit modül olduğundan, $K/N = M/N$ veya $K/N = 0$ olmalıdır. Eğer $K/N = 0$ ise, o zaman $K = N$ dir. Eğer $K/N = M/N$ ise, o zaman $K = M$ dır.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki, M/N basit modül değildir. O zaman orada $N \leq X$ ile M/N nin bir X/N alt modülü vardır. $N < X < M$ sağlanır. N de M nin maksimal alt modülü olduğundan, $N = X$ veya $X = M$ dir. Bu ise M/N nin basitliği ile çelişir.

Tanım 2.1.10 (Modül Homomorfizması) M ve N iki sol R-modüller olsun. Eğer $f : M \to N$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bir modül *homomorfizması* adını alır.

(1) Her $m, m' \in M$ için , $f(m + m') = f(m) + f(m')$

(2) Her $r \in R$ ve $m \in M$ için , $f(rm) = rf(m)$

Eğer f homomorfizması, bijection (birebir ve örten) ise izomorfizmasıdır.

Teorem 2.1.11 (Modüller İçin 1. İzomorfizma Teoremi) M, N R-modüller ve $f : M \to N$ bir örten modül homomorfizması olsun. O zaman f dönüşümü için

$$M / Cek(f) \cong N$$

dir.

Teorem 2.1.12 (Modüller İçin 2. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül, A, B de M nin alt modülleri ve $A \subseteq B$ olsun. O zaman

$$M / B \cong \left(M / A \right) / \left(B / A \right)$$

dır.

Teorem 2.1.13 (Modüller İçin 3. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül ve A, B de M nin alt modülleri olsun. O zaman

$$B / \left(A \cap B \right) \cong \left(A + B \right) / A$$

dır.

Tanım 2.1.14 (Annihilatör) M bir sol-modül olsun.

$$ann(M) = \{ r \in R : rm = 0 \, , \, her \;\; r \in R \;\; için \}$$

kümesine M nin annihilatörü denir. Eğer $m \in M$ ise, m nin annihilatörü $ann(m) = \{ r \in R : rm = 0 \}$ kümesidir. Ayrıca $ann(m)$ bir sol idealdir ama $ann(M)$ bir idealdir. Eğer $r \in R$ ise, o zaman $ann_l(r) = \{ s \in R : sr = 0 \}$, sol ideal ve $ann_r(r) = \{ s \in R : rs = 0 \}$, sağ ideal tanımlarına sahibiz. Bunlara sırasıyla r nin sol annihilatörü ve sağ annihilatörü denir.

Tanım 2.1.15 R üzerindeki sol modüllerin kategorisi $R-Mod$ ile gösterilir. $R-Mod$ kategorisinin nesneleri sol R-modüller, morfizmaları sol R-modül homomorfizmaları ve bileşimi de fonksiyonların bileşimleridir.

Bu bölümde tezimizle ilgili olan ve geri kalan kısımda sıkça başvuracağımız kavramları verelim.

Tanım 2.1.16 (Esaslı Alt Modül) M bir sağ R-modül ve $N \leq M_R$ olsun. M_R nin sıfırdan farklı her K alt modülü için $N \cap K \neq 0$ oluyorsa N ye M_R de *esaslı alt modül*, M_R ye ise N nin *esaslı genişlemesi* denir ve $N \leq_e M_R$ biçiminde gösterilir.

Önerme 2.1.17 M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) $N \leq_e M_R$ dir ancak ve ancak $N \cap X = 0$ olacak biçimde $X \leq M_R$ varsa $X = 0$ olmalıdır.

(2) $N \leq_e M_R$ dir ancak ve ancak her $0 \neq m \in M_R$ için öyle bir $r \in R$ vardır ki $0 \neq mr \in N$ dir.

(3) $N \leq_e M_R$ dir ancak ve ancak her $0 \neq m \in M_R$ için $N \cap mR \neq 0$ dır.

(4) $K \leq N \leq M_R$ olsun. $K \leq_e M_R$ dir ancak ve ancak $K \leq_e N \leq_e M_R$ dir.

(5) $A \leq_e B \leq M_R$ ve $C \leq_e D \leq M_R$ ise $A \cap C \leq_e B \cap D$ olur.

(6) $M_R = \oplus_{i \in I} M_i$ ve her bir $i \in I$ için $N_i \leq_e M_i$ ise $\oplus_{i \in I} N_i \leq_e M_R$ dir.
(Dung et al. , 1994)

(7) $M_R = \sum_{i \in I} M_i$ ve her bir $i \in I$ için $N_i \leq_e M_i$ ise ve $N = \sum_{i \in I} N_i = \oplus_{i \in I} N_i$ ise $N \leq_e M_R$ ve $M_R = \oplus_{i \in I} M_i$ olur. (Kasch , 1982)

Tanım 2.1.18 (Kapalı Alt Modül) M bir sağ R-modül ve $K \leq_e M_R$ olsun. K nın M_R içinde öz (proper) esaslı (essential) genişlemesi yoksa K ya M_R de *kapalı (closed) alt modül* denir. Yani $K \leq_e L \leq M_R$ iken $K = L$ oluyorsa K alt modülü M_R de kapalı alt modül olur.

Tanım 2.1.19 (Komplement Alt Modül) M bir sağ R-modül ve $A \leq M_R$ olsun. $A \cap B = 0$ olması özelliğine göre maksimal olan $B \leq M_R$ ye A nın M_R deki *komplementi (complement)* denir ve $B \leq_c M_R$ ile gösterilir.

Not: Önteorem 2.1.7 Zorn önteoreminden bir modülün komplement alt modülü her zaman vardır, yani M_R nin herhangi bir alt modülü alındığında,

$$\Re = \{N' \leq M_R : N \leq_e N'\}$$

ailesi kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı küme olur. Zorn Önteoreminden her zaman $N \leq_e N' \leq_c M_R$ olacak şekilde $N' \leq M_R$ bulunur.

Fakat aşağıdaki örnekte de görüleceği üzere bu tek olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.20 F bir cisim ve F üzerinde, $M_F = F \oplus F$ modülü düşünülsün. $x \in F$ için M_F nin ,

$$A = F \oplus 0 = \{(f,0) : f \in F\} \text{ ve } B = (x,1)F = \{(x,1)f : f \in F\}$$

alt modülleri alındığında $A \cap B = 0$ dır. Yani A nın B yi kapsayan bir komplementi vardır. Öte yandan; $0 \oplus F$ de A için M_F içinde bir komplement olur. (Goodearl, 1976)

Önerme 2.1.21 M bir sağ R-modül ve $X, Y \leq M_R$ alınsın. Y, X in M_R de ki komplementi ise $X \oplus Y \leq_e M_R$ dir. (Goodearl , 1976)

Önerme 2.1.22 M bir sağ R-modül ve $N \leq_d M_R$ ise $N \leq_c M_R$ dir.

Ancak Önerme 2.1.22 in tersi aşağıdaki örnekte de görüleceği gibi her zaman doğru olmayabilir.

Örnek 2.1.23 p herhangi bir asal sayı ve Z de tamsayılar kümesi olmak üzere, $M_Z = \dfrac{Z}{pZ} \oplus \dfrac{Z}{p^3 Z}$ modülü alınsın. M_Z nin $K = (1 + pZ + p^3 Z)$ Z alt modülü M_Z içinde komplement olmasına karşın K , M_Z de dik toplanan değildir. (Smith and Tercan, 1993)

Önerme 2.1.24 M bir sağ R-modül ve $A \leq M_R$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) A alt modülü M_R de kapalı alt modüldür.

(2) A alt modülü M_R de komplemettir.

(3) $A \leq B \leq_e M_R$ ise $\dfrac{B}{A} \leq_e \dfrac{M_R}{A}$ dır.

(Goodearl, 1976)

Önerme 2.1.25 $A \leq_c B \leq_c M_R$ ise $A \leq M_R$ olur. (Goodearl , 1976)

Önteorem 2.1.26 M bir sağ R-modül ve $A \leq M_R$ olsun. $A \leq_c M_R$ dir ancak ve ancak A her komplementinin komplementidir. (Kasch , 1982)

Tanım 2.1.27 (Üniform Modül) Her alt modülü esaslı olan modüle *üniform modül* denir.

$$\tau(M) = \{a \in M : na = 0, bazı\ 0 \neq n \in \mathrm{N}\}$$

kümesine M nin *burulmalı (torsion)alt modülü* denir.

$\tau(M) = 0$ ise M ye τ -burulmasız,

$\tau(M) = M$ ise M ye τ -burulmalı modül denir.

Tanım 2.1.19(SIP Modül) Eğer M nin iki dik toplamının arakesiti de M nin bir diktoplananı ise M modülü SIP yi sağlar.

2.2 İnjektif (Injective) Modüller

Tanım 2.2.1 (İnjektif Modül) M ve M' sağ R -modüller olmak üzere, M'_R nin her alt modülünden M_R ye tanımlanan R -modül homomorfizmalar M'_R ye genişliyorsa, M_R ye M'_R *injektif* (M'-injektif (M'-injective)) denir.

Tanım 2.2.2 R bir halka ve M bir sağ R -modül olsun.

(1) M_R modülü her sağ R -modül X için X_R -injektif oluyorsa M_R ye *injektif modül* denir.

(2) M_R modülü M_R -injektif oluyorsa M_R ye *yarı-injektif (quasi-injective) modül* denir.

(3) R halkası kendisi üzerinde sağ (sol) R -modül olarak düşünüldüğünde sağ (sol) injektif oluyorsa R ye sağ (sol) *kendi-injektif (self-injektif) halka* denir.

(4) Herhangi iki A ve B sağ (sol) R -modülleri için A modülü B -injektif ve B

modülü de A-injektif oluyorsa A ile B sağ (sol) *göreceli-injektif (relatively- injective) modül* adını alır.

Önteorem 2.2.3 M_R bir modül olsun. M_R injektif modül olması için gerek ve yeter koşul M_R nin R_R-injektif olmasıdır. (Anderson and Fuller, 1992)

Önerme 2.2.4 M_R modülü X-injektiftir ancak ve ancak her Y sağ R-modülü için $f: Y \to M_R$ homomorfizması ve $g: Y \to X$ bire-bir homomorfizması için $h \circ g = f$ olacak şekilde $h: X \to M_R$ homomorfizması vardır.

Önerme 2.2.5 M_R modülü B-injektif ise $A \leq B$ için M_R modülü aynı zamanda A-injektif ve $\frac{B}{A}$-injektifdir. (Mohamed and Müller, 1990)

Önerme 2.2.6 A ve M sağ R-modül olsun. M_R modülü A-injektiftir ancak ve ancak her $a \in A$ için M_R modülü aR-injektiftir. (Mohamed and Müller, 1990)

Önerme 2.2.7 M_R modülü $\oplus_{i\in I} A_i$-injektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için M_R modülü A_i-injektiftir. (Mohamed and Müller, 1990)

Önerme 2.2.8 X_R injektif modül ve $X_R \cong Y_R$ ise Y_R de injektif modüldür.

Önerme 2.2.10 M_1 ve M_2 sağ R-modüller olmak üzere, $M_1 \oplus M_2$ yarı-injektiftir ancak ve ancak M_i modülü M_j-injektiftir $(i, j = 1,2)$. (Mohamed and Müller, 1990)

2.3 (C1) , (C2) , (C3) -modüller ile Yarı-Sürekli (Quasi-Continuous) ve Sürekli (Continuous) Modüller

Tanım 2.3.1 M_R bir modül olsun.

(1) M_R nin her kapalı alt modülü M_R de diktoplanan oluyorsa M_R ye *(C1)-modül ((CS) / extending modül)* denir.

(2) M_R nin herhangi bir diktoplananına izomorf olan her alt modülü de M_R de diktoplanan oluyorsa M_R ye *(C2)-modül* denir.

(3) M_R nin $M_1 \cap M_2 = 0$ özelliğini sağlayan her M_1, M_2 diktoplanan alt modülü için $M_1 \oplus M_2$ de M_R de diktoplanan oluyorsa M_R ye *(C3)-modül* denir.

(4) M_R modülü (C1) ve (C2)-modül ((C3)-modül) ise M_R ye *sürekli (yarı-sürekli/π -injektif) modül* denir.

Teorem 2.3.2 M sağ R-modülü yarı-süreklidir ancak ve ancak X ve Y**,** M_R nin birbirinin komplementi olan alt modülleri ise $M_R = X \oplus Y$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ X ve Y birbirinin komplementi olan iki alt modül olsunlar. Dolayısıyla X ve Y kapalı alt modüllerdir.

M_R modülü (C1)-modül olduğundan X ve Y M_R nin diktoplananıdır ve $X \cap Y = 0$ (X ve Y kapalı alt modüllerdir) olur.

M_R modülü (C3)-modül olduğundan $X \oplus Y$ de M nin bir diktoplananıdır. Önerme 2.1.17(6) dan $X \oplus Y \underset{e}{\leq} M$ dir.

$X \oplus Y \underset{d}{\leq} M$ ve $X \oplus Y \underset{e}{\leq} M$ olduğundan $X \oplus Y = M$ olmalıdır.

($\Leftarrow$) (Mohamed and Müller, 1990) Teorem 2.8 den görülür. ✧

Tanım 2.3.3 M_1 ve M_2 sağ R-modüller olmak üzere, $M_1 \oplus M_2$ yarı-sürekli modül ise M_1 ile M_2 göreceli-injektif modül olur. (Mohamed and Müller, 1990)

Önteorem 2.3.4 M_R modülü yarı-sürekli olsun. M_R süreklidir ancak ve ancak $f(M) \leq_e M$ olacak biçimdeki bire-bir $f \in End(M_R)$ aynı zamanda örten olur. (Mohamed and Müller, 1990)

Önerme 2.3.5 Her (C2)-modül bir (C3)-modüldür. (Mohamed and Müller, 1990)

Sonuç 2.3.6 M_R modülü sürekli ise yarı-süreklidir. (Mohamed and Müller, 1990)

Tanım 2.4.1 (Tekil (Singüler) Alt Modül) M bir R-modül olsun. M nin boştan farklı alt kümesi $Z(M) = \{m \in M : ann(m) \leq_e R_R\}$ yi ele alalım. Açıktır ki $Z(M)$ alt modüldür. Eğer $Z(M) = M$ (veya $Z(M) = 0$) ise M ye sırasıyla *tekil (veya tekil olmayan) modül* denir.

III. BÖLÜM

Halka ve modül teoride C_1 modüller önemli bir yer tutmakta ve bu modüller yardımı ile modül sınıfları ve halkalar daha iyi anlaşılmaktadır. 2.3 bölümde ki tanımlardan şu hiyerarşiye sahibiz.

Injektif $\Rightarrow$ Yarı-injektif $\Rightarrow$ sürekli $\Rightarrow$ yarı-sürekli $\Rightarrow$ C_1

C_{11}- MODÜLLER

M bir sağ $R-$ modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M nin dik toplananı olan bir komplemente sahipse, yani M nin her bir N alt modülü için M nin bir K dik toplananı vardır ki K da M içinde N nin komplementi ise M modülüne *(C_{11})-modül* denir.

Tanımlardan

Injektif $\Rightarrow$ Yarı-injektif $\Rightarrow$ sürekli $\Rightarrow$ yarı-sürekli $\Rightarrow$ $C_1 \Rightarrow$ C_{11}

yazabiliriz. Özellikle, üniform modüller (her alt modülü esaslı alt modül olanlar), yarı-basit modüller (her alt modülü dik toplanan olanlar) (C_{11}) modüldür. Ayrıca herhangi bir parçalanamaz (indecomposible) ve (C_{11}) modül üniform modüldür.

Önerme 3.1 M bir sağ $R-$modül olsun. M bir (C_{11}) modüldür ancak ve ancak $N \cap L = 0$ olan bütün N ve L alt modülleri için M nin K dik toplananı vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ dır. Üstelik bu durumda $N \oplus K$ da M nin esaslı alt modülüdür.

İspat: İlk olarak kabul edelim ki M bir (C_{11}) modül olsun. N ve L de M nin $N \cap L = 0$ koşulunu sağlayan alt modülleri olsunlar. N nin komplement K alt modülünü $L \leq K$ olacak şekilde alalım. Hipotezden K da M nin dik toplananıdır.

Tersine kabul edelim ki, M modülü belirlenmiş koşulları sağlasın. M nin L komplement alt modülünü alalım (Zorn Önteoreminden her zaman var idi). O zaman M nin bir N alt modülü vardır öyle ki L , M içinde N nin komplementidir. Hipotezden, M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki $L \leq K$ ve $N \cap K = 0$ ' ı sağlar. Böylece $L = K$ dır. Bu da M nin her komplementinin M nin bir dik toplananı olduğunu gösterir. Bundan dolayı da M modülü (C_{11}) dir.✧

Önteorem 3.2 M bir sağ $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü ve K da M nin bir dik toplananı olsun. O halde K, M içinde N nin komplementidir ancak ve ancak $K \cap N = 0$ ve $K \oplus N$ de M de esaslıdır.

İspat: K nın M içinde N nin komplementi olduğunu kabul edelim. O zaman $K \cap N = 0$ dır. $0 \neq x \in M$ alalım. Eğer $x \in K$ ise o zaman $0 \neq xR = xR \cap K \subseteq xR \cap (K \oplus N)$ dır. Eğer $x \notin K$ ise o zaman $N \cap (xR + K) \neq 0$ ve bundan dolayı $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. O halde bütün $0 \neq x \in M$ için $xR \cap (K \oplus N) \neq 0$ dır. Böylece $K \oplus N$, M de esaslıdır.

Tersine kabul edelim ki, K ve N belirtilen özelliklere sahip olsun. Bu durumda M nin $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir K' alt modülü vardır. M nin $K \subset K_1$ ve $K_1 \cap N = 0$ olacak şekilde bir K_1 alt modülünü alalım. O zaman

$$K_1 = K_1 \cap M = K_1 \cap (K \oplus K') = K \oplus (K_1 \cap K')$$

dür. $0 \neq y \in (K_1 \cap K')$ alalım. Buradan bazı $n \in N$, $k \in K$, $r \in R$ için $0 \neq yr = n + k$ olur (çünkü $N \oplus K$, M de esaslıdır). Buradan $yr - k = n \in K_1 \cap N = 0$ olur ki $yr = k \in K \cap K' = 0$ dır; bu bir çelişkidir.✧

Bundan dolayı $K_1 \cap K' = 0$ ve $K = K_1$ dir. Bu ise K nın M içinde N nin komplementi olduğunu verir.

Önerme 3.3 Bir M sağ $R-$modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) M bir (C_{11}) modüldür.

(2) M nin herhangi bir komplement L alt modülü için M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki K, M içinde L nin bir komplementidir.

(3) M nin herhangi bir N alt modülü için, M nin bir K dik toplananı vardır ki $N \cap K = 0$ ve $N \oplus K$, M nin esaslı bir alt modülüdür.

(4) M nin herhangi bir komplement L alt modülü için, M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K$, M 'nin esaslı bir alt modülüdür.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) M bir (C_{11}) modüldür. (C_{11}) modülün tanımından L komplement alt modül ve K da M de dik toplanan olduğundan K, M içinde L nin bir komplementidir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Açıktır.

4)$\Rightarrow$(1) A, M nin herhangi bir alt modülü olsun.O zaman M nin bir B komplement alt modülü vardır öyle ki A da B de esaslıdır. Hipotezden, M nin K dik toplananı vardır öyle ki $B \cap K = 0$ ve $B \oplus K$ da M de esaslıdır. Böylece Önteorem2.2 den, K modülü M de B nin komplementidir. Not edelim ki $K \cap A = 0$ dır. Kabul edelim ki, K' modülü M modülünün K nın özelliklerini içeren bir alt modülü olsun. Bu yüzden $K' \cap B \neq 0$ ve böylece $K' \cap B \cap A \neq 0$ buradan da $K' \cap A \neq 0$ olur. Böylece K modülü M de A nın komplementidir.

(1)$\Leftrightarrow$ (3) ve **(2) $\Rightarrow$(4)** de Önteorem 3.2 den yazılır. ✧

Teorem 3.4 (C_{11}) modüllerin herhangi dik toplamı da (C_{11}) dir. (2,Teorem 2.4)

Sonuç 3.5 (C_1) modüllerin herhangi dik toplamı da (C_{11}) dir. (2,Corollary 2.5)

Sonuç 3.6 Üniform modüllerin herhangi dik toplamı (C_{11}) dir. (2, Corollary 2.6)

Teorem 3.7 M modülü (C_{11}) dir ancak ve ancak M nin bazı (tekil olmayan) K alt modülleri için $M = Z_2(M) \oplus K$ dır ve $Z_2(M)$ ile K birer (C_{11}) modüldürler.

İspat: $(\Leftarrow)$ Teorem 3.4 den görülür.

$(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki M modülü (C_{11}) i sağlasın. İlk olarak gösterelim ki $Z_2(M)$, M nin dik toplananıdır. $L = Z_2(M)$ alalım. Bu durumda $M = K \oplus K'$, $L \cap K = 0$ ve $L \oplus K$, M nin esaslı alt modülü olacak şekilde M nin K ve K' alt modülleri vardır. Şimdi $L = Z_2(M) = Z_2(K \oplus K') = Z_2(K) \oplus Z_2(K')$ olur. Ama $Z_2(K) = 0$ olduğu açıktır. Böylece $L = Z_2(K') \subseteq K'$ dür. Çünkü $L \oplus K$, M içinde esaslıdır, L de K içinde esaslıdır ve bundan dolayı K'/L tekildir. Böylece $L = K'$ ve L de M nin dik toplananıdır.

$M = L \oplus K$ olduğunu gösterelim. Bunun içinde gösterelim ki L bir (C_{11}) modüldür. L nin herhangi bir alt modülü N yi alalım. M modülü (C_{11}) modül olduğundan, $N \oplus K$ da M nin bir alt modülüdür. Bu durumda $M = P \oplus P'$ dür, $(N \oplus K) \cap P = 0$ ve $N \oplus K \oplus P$, M nin bir esaslı alt modülü olacak şekilde M nin P, P' alt modülleri vardır. Not edelim ki, $P \cap K = 0$ ve bundan dolayı P modülü $M/K \cong L$ içine gömülür. Böylece $P = Z_2(P)$ ve $P \leq L$ dir. Bu da bize P nin L nin bir dik toplananı olduğunu verir. Bu durumda $L = P \oplus (L \cap P'))$ ve $N \oplus P$, L nin esaslı alt modülüdür. Önerme 3.3 den, L bir (C_{11}) modüldür.

Son olarak K nın (C_{11}) modül olduğunu gösterelim. $\pi : M \to K$ kanonik projeksiyonunu tanımlayalım. K nın herhangi bir alt modülü H yi alalım. O zaman $L \cap H = 0$ dır ve M nin Q ve Q' alt modülleri vardır öyle ki

$M = Q \oplus Q'$ dür. Buradan $(L \oplus H) \cap Q = 0$ ve $L \oplus H \oplus Q$ de M nin bir esaslı alt modülüdür. Not edelim ki, $L = Z_2(M) = Z_2(Q) \oplus Z_2(Q') = Z_2(Q')$ dür. Çünkü $Q \cap L = 0$ olması bize $Z_2(Q) = 0$ olduğunu verir. Bundan dolayı $L \leq Q'$ ve $Q' = L \oplus (Q' \cap K)$ dır. Şimdi $M = Q \oplus Q' = Q \oplus L \oplus (Q' \cap K)$ olur. Böylece $L \oplus Q$, M nin dik toplananıdır. Ama kolayca kontrol edilir ki $L \oplus Q = L \oplus \pi(Q)$ dir. Buradan K nın $\pi(Q)$ alt modülü M nin bir dik toplananıdır ve bundan dolayı K nın bir dik toplananıdır. Ama $H \oplus \pi(Q) \oplus L$, M n in bir esaslı alt modülüdür. Böylece $H \oplus \pi(Q)$, K n ın bir esaslı alt modülüdür. Önerme 3.3 den K bir (C_{11}) modüldür.

R bir halka ve M bir sağ $R-$modül olsun. M modülünün socle M nin minimal alt modüllerinin toplamıdır ve $Soc(M)$ ile gösterilir. Denk olarak

$$Soc(M) = \bigcap \{L \leq M : L \leq_e M\}$$

dır. Bir yarı-basit modülün tek minimal alt modülü yine kendisi olduğundan; $Soc(M)$, M nin en geniş yarı-basit alt modülür. Ayrıca M bir yarı-basit modüldür ancak ve ancak $Soc(M) = M$ dir.

Önteorem 3.8 M (C_{11}) modüldür. Bu durumda $Soc(M_1) \leq M_1$ ve $Soc(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır.

İspat: $Soc(M) = S$ diyelim. M bir (C_{11}) modül olduğundan, $M = K \oplus K'$, $S \cap K = 0$ ve $S \oplus K \leq_e M$ olacak şekilde K ve K' alt modülleri vardır. $S = SocM = Soc(K) \oplus Soc(K')$ dür. Açıkça $SocK$=0 öyle ki $S \leq K'$ dür. Şimdi $S \oplus K$, M içinde esaslı olması ifade eder ki S, K' içinde esaslıdır ve ispat tamamlandı.

M tekil olmayan bir modül olsun. İyi bilinir ki, M nin herhangi bir alt modülü N için, M de tek bir komplement $c(N)$ vardır ki N, $c(N)$ nin esaslı bir alt modülüdür, yani

$c(N)=\{m \in M : mE \leq N; E \quad, R \text{ nin bazı esaslı sağ ideali}\}$ dir.

Teorem 3.9 Tekil olmayan bir M modülü (C_{11}) modüldür ancak ve ancak $M=M_1 \oplus M_2$ modülü M_1 alt modülü (C_{11}) modül öyle ki $Soc(M_1) \leq_e M$ ve M_2 de (C_{11}) modül öyle ki $Soc(M_2)=0$ sahip olacak şekilde bir parçalanışa sahiptir

İspat: Kabul edelim ki M bir (C_{11}) modül olsun. Önteorem 3.8 den, $Soc(M_1) \leq_e M$ ve $Soc(M_2)=0$ olacak şekilde $M=M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır. $Soc(M)=S$ olarak alalım. Açıkça $M_1=c(S)$ dir.

M_1 in (C_{11}) i sağladığını gösterelim. M_1 in herhangi bir alt modülü N yi alalım. Önerme 3.3 den, M nin bir P dik toplananı vardır öyle ki $(N \oplus M_2) \cap P=0$ ve $N \oplus M_2 \oplus P$, M nin esaslı bir alt modülüdür. Şimdi P, M_1 içine gömülür ve bundan dolayı P, $S \cap P$ esaslı socle sahiptir, (Bakınız, [1, Sonuç 9.9]). Böylece $P=c(S \cap P) \leq c(S)=M_1$ dir. Bundan dolayı P, M_1 in bir toplananı ve $N \oplus P$, M_1 in bir esaslı alt modülüdür. Önerme 3.3 den , M_1 bir (C_{11}) modüldür.

Şimdi M_2 yi dikkate alalım. $\pi : M \to M_2$ kanonik projeksiyonu tanımlayalım. M_2 nin herhangi bir alt modülü H yi alalım. Önerme 3.3 den, M modülü $(M_1 \oplus H) \cap Q=0$ ve $M_1 \oplus H \oplus Q$, M içinde esaslı olmak üzere $M=Q \oplus Q'$ parçalanışına sahiptir. Artık $S \cap Q=0$ ve böylece $S \subseteq Q'$ dır. [1, Önerme 9.19]. Böylece $M_1=c(S) \subseteq Q'$ dür. Bu da gösterir ki M_1, Q' nün dik toplananıdır. Sonuç olarak $M_1 \oplus \pi(Q)$, M 'nin bir dik toplananı ve ayrıca $\pi(Q)$,

M_2 nin bir dik toplananı ve $H \oplus \pi(Q)$, M_2 içinde esaslıdır. Önerme 3.3 den, M_2 bir (C_{11}) modüldür.

Tersi Teorem 3.4 den açıktır. ✧

Teorem 3.7 ve 3.9 un doğal bir sonucu olarak aşağıdaki soru aklımıza gelir.

M (C_{11}) i sağlayan bir modül olsun. M nin herhangi bir dik toplananı (C_{11}) i sağlar mı?

Genellik içinde, bu sorunun cevabını bilmiyoruz. Önümüzdeki sonuçları özel bir durum için vereceğiz.

Öncelikle gösterelim ki;

Önteorem 3.10 $N \cap K = 0$ olmak üzere N, M nin dik toplananı ve K da M nin injektif alt modülü olsun. O zaman $N \oplus K$, M nin dik toplananıdır.

İspat: N, M nin dik toplananı olduğundan, M nin N' alt modülü vardır öyle ki $M = N \oplus N'$ dür. $\pi : M \to N'$ kanonik projeksiyonunu alalım. O zaman $N \cap K = 0$ olduğundan $K \cong \pi(K)$ dır ve böylece $\pi(K)$ injektiftir. Bu da gösterir ki $\pi(K)$, N' 'nün dik toplananıdır. Ama $N \oplus K = N \oplus \pi(K)$ dır ve bundan dolayı $N \oplus K$, M nin bir dik toplananıdır.✧

Önerme 3.11 M, (C_{11}) 'i sağlayan bir modül olsun. M nin bir N dik toplananını alalım öyle ki M/N injektif modül olsun. O zaman N, (C_{11}) i sağlar.

İspat: N nin herhangi bir alt modülü L olsun. M nin bir N' alt modülü vardır öyle ki $M = N \oplus N'$ dür. $L \oplus N'$ alt modülünü dikkate alalım. M nin bir K dik toplananı vardır öyle ki $(L \oplus N') \cap K = 0$ ve $L \oplus N' \oplus K$, M nin esaslı bir alt modülüdür (Önerme 3.3). Önteorem 3.10 dan, $N' \oplus K$, M nin bir dik toplananıdır. Ama $N' \oplus K = N' \oplus \pi(K)$ iken $\pi : M \to N$ kanonik projeksiyonunu tanımlayalım. Böylece $\pi(K)$, N nin bir dik toplananıdır. Bununla birlikte $L \oplus \pi(K) \oplus N'$, M içinde esaslıdır. Bu da gösterir ki $L \oplus \pi(K)$, N nin bir esaslı alt modülüdür. Önerme 3.3 den, N , (C_{11}) i sağlar.

Önerme 3.12 : M bir C_{11}-modül ve X de M nin bir alt modülü olsun. Eğer M nin herhangi bir dik toplananı ile X in kesişimi, X in bir dik toplananı ise, o zaman X bir C_{11}-modüldür.

İspat: A , X in bir alt modülü olsun. O zaman M nin bir N dik toplananı vardır ki $A \cap N = 0$ ve $A \oplus N$ de M içinde esentialdır. Şu an M nin bazı K alt modülleri için $M = N \oplus K$ dır. Bundan dolayı $X \cap (A \oplus N) = A \oplus (X \cap N)$ de X içinde essentialdır. Hipotezden, $X \cap N$ de X in bir dik toplananıdır. Bu da gösterir ki, X bir C_{11}-modüldür. ✧

Sonuç 3.13 : M bir C_{11}-modül olsun.

(i) Eğer M distiributive ise, o zaman M nin her alt modülü C_1 dir.

(ii) Bütün $e^2 = e \in End(M_R)$ elemanları için X, M nin bir alt modülü öyle ki $eX \subseteq X$ ise, o zaman X bir C_{11}-modüldür. Özellikle, M nin tamamen değişmez her alt modülü bir C_{11}-modüldür.

(iii) Eğer M SIP e sahipse, o zaman M nin her dik toplananı C_{11} e sahiptir.

İspat: (i) N, M nin bir komplement alt modülü olsun. O zaman $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır öyle ki eM, N nin bir komplementidir. Bu durumda

$$N = N \cap M = N \cap (eM \oplus (1-e)M) = (N \cap eM) \oplus (N \cap (1-e)M) = N \cap (1-e)M \leq (1-e)M$$

dir. N kapalı olduğundan, $N=(1-e)M$ olur. Böylece M C_1 e sahiptir. Birkenmeier (1999, Sonuç 1.2(i)) den, M nin her alt modülü C_1 e sahiptir.

(ii) D, M nin bir dik toplananı ve $e: M \to D$ kanonik projeksiyon olsun. O zaman $eX = D \cap X$ dir. Önerme 1.5 den, X bir C_{11}-modüldür.

(iii) Bu özellik Önerme 1.5 in sonucundan doğrudan doğruya mevcuttur. ✧

Lemma 3.14: M_1, M nin alt modülü iken, $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. O zaman M C_{11} e sahiptir ancak ve ancak M_1 ve M_2 nin her ikisi de C_{11} e sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki, M C_{11} e sahiptir. Bu durumda $e \in \delta_1(End(M_r))$ vardır öyle ki $M_1 = eM$ dir (Birkenmeier 2002, Lemma 1.9 dan). $Y \leq M_2$ olsun. Buradan $c = c^2 \in End(M_R)$ vardır öyle ki, cM, $M_1 \oplus Y$ nin bir komplementidir. $e \in \delta_1(End(M_r))$ olduğundan, $b=e+c-ec$ $End(M_R)$ içinde bir idempotenttir ve $bM = M_1 \oplus cM$ dir (Birkenmeier 2001a, Önerme 1.3(ix)). Bundan dolayı $bM = bM \cap (M_1 \oplus M_2) = M_1 \oplus (bM \cap M_2)$ dir. Böylece $bM \cap M_2$, M_2 nin bir dik toplananıdır. Ayrıca, $Y \oplus bM \leq^{ess} M$ ki, bu yüzden $M_2 \cap (Y \oplus bM) = Y \oplus (M_2 \cap bM) \leq^{ess} M_2$ dir. Smith ve Tercan (1993, Önerme 2.3) dan, M_2 de C_{11} e sahiptir.

Tersi Smith ve Tercan (1993, Teorem 2.4) den sağlanır. ✧

Teorem 3.15: M bir C_{11} modül ve X, M nin tamamen değişmez (fully invariant) bir alt modülü olsun. O zaman $X \underset{ess}{\leq} M$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır. Dahası,

(i) Eğer $Z_2(M_1)$ bir C_{11} ise M_1 de C_{11} dir.

(ii) Eğer $Z_2(M_2)$ bir C_{11} ise M_2 de C_{11} dir.

(iii) M_1, M nin tamamen değişmez bir alt modülü (örneğin, $Z_2(M) \le M_1$) ise M_1 ve M_2 nin ikisi de C_{11}-modüldür.

(iv) Eğer $Z_2(M) \le M_2$ ise M_1 ve M_2 nin ikisi de C_{11}-modüldür.

İspat: Önerme 1.2 den, M FI-extendingtir. Bu yüzden $X \le^{ess} M_1$ iken, $M = M_1 \oplus M_2$ dir. Şimdi (iii) kısmı Lemma 2.1 ve Birkenmeier (2002, Önerme 1.10) dan sağlanır. $Z_2(M)$, M nin alt modülü olduğundan, $Z_2(M) = (Z_2(M) \cap M_1) \oplus (Z_2(M) \cap M_2) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$ dir. $X = Z(M)$ ile ispatın önceki bölümü kullanılarak veya Smith ve Tercan (1993, Teorem 2.7) kullanılarak, bazı $K \le M$ ler için $M = Z_2(M) \oplus K$ ve $Z_2(M)$ ve K ikisi C_{11}-modüllerdir. Böylece bazı $K_1 \le M_1$ ve $K_2 \le M_2$ için $M_1 = Z_2(M_1) \oplus K_1$ ve $M_2 = Z_2(M_2) \oplus K_2$ dir. Bu durumda $e^2 = e \in End(M_R)$ vardır öyle ki, $M_1 \oplus Z(M_2) = K_1 \oplus Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$ dir. $X + Z_2(M) \le^{ess} M_1 + Z_2(M)$ ve $X + Z_2(M) \lhd M$ olduğundan, Birkenmeier (2002, Önerme 1.10) dan $eM \lhd M$ dir. $M = eM \oplus K_2$ için (iii) kısmı uygulanırsa, eM ve K_2 nin C_{11}-modüller olduğu elde edilir. Şimdi eM üzerinde Smith ve Tercan (1993, Teorem 2.7) uygulanırsa, K_1 in C_{11} -modül olduğuna sahip oluruz. Böylece $M = Z_2(M_1) \oplus K_1 \oplus Z_2(M_2) \oplus K_2$ dir. (i) ve (ii) kısımları Smith ve Tercan (1993, Teorem 2.4) den sağlanır. (iv) kısım için, $Z_2(M) \le M_2$ ise $Z_2(M) = Z_2(M_2)$ dir. Bundan dolayı $Z_2(M_1) = 0$ C_{11} e ve $Z_2(M_2)$ de C_{11} e sahiptir. (i) ve (ii) kısımlarıyla, M_1 ve M_2 C_{11}-modüllerdir. ✧

Sonuç 3.16: $X \lhd M$ ve $Z(X_R) = 0$ ile M bir C_{11} -modül olsun. O zaman $X \le^{ess} M_1$ ve M_1 ve M_2 C_{11}-modüller iken $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

İspat: $Z(X_R) = 0$ olduğundan $Z_2(M_1) = 0$ dır. Bundan dolayı $Z_2(M) = Z_2(M_2) \le M_2$ dir. Teorem 3.15 den sonuç görülür ✧

IV. BÖLÜM

CLS-MODÜLLER

Tanım 4.1 (Kapalı* Alt Modül) M bir modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. Eğer M/N tekil olmayan ise N ye M nin *kapalı* alt modülü (closed* alt modülü)* denir.

Örnek 4.2 K bir cisim ve V de K üzerinde vektör uzayı olsun öyle ki $\dim_K V \geq 2$. $R = \begin{bmatrix} K & V \\ 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k & v \\ 0 & k \end{bmatrix} : k \in K, v \in V \right\}$ olsun, o zaman R bir değişmeli halkadır öyle ki R komplement ideal içerir ama o kapalı ideal değildir.

İspat: $E = \begin{bmatrix} 0 & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman E de R_R içinde esaslıdır. $F_V = \begin{bmatrix} 0 & Kv \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v \in V$ olsun. Kabul edelim ki $G \leq R$ öyle ki F_V de G içinde esaslıdır. Böylece, F_V de $G \cap E$ içinde esaslıdır ve bundan dolayı $F_v = G \cap E$ dır. Bazı $w \in V, 0 \neq k \in K$ için $\begin{bmatrix} k & w \\ 0 & k \end{bmatrix} \in G$ olsun. $x \in V$ öyle ki $x \notin Kv$ olsun. Böylece,

$$\begin{bmatrix} k & w \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & (1/k)x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G \cap E$$

Bu nedenle, $x \in Kv$ ve bu bir çelişkidir. Böylece $k = 0$ dır. Bundan dolayı $G \leq E$ öyle $F_v = G$ dir. Sonuç olarak her $v \in V$ için F_V de R_R içinde komplementtir. Ama $E^2 = 0$ ve böylece $E^2 \leq F_v$ dir. Bununla birlikte E de F_V içinde kapsanmaz. Böylece F_V de R nin kapalı ideali değildir.

Önümüzdeki önteorem $[8, \text{önteorem } 2.3]$ dür.

Önteorem 4.3 M bir sağ R-modül olsun.

(iii) Her kapalı* alt modül bir kapalı alt modüldür.

(iv) Eğer M tekil olmayan ise her kapalı alt modül bir kapalı* alt modüldür.

İspat: (i) $N \underset{c^*}{\leq} M$ olsun. $N \underset{c}{\leq} M$ midir?

$K \leq M$ alalım öyle ki $N \underset{e}{\leq} K$ olsun. $N \underset{e}{\leq} K$ olduğundan $K/N \leq Z(M/N) = 0$ dır. Buradan $K/N = 0$ dır. Bu ise bize $K = N$ olmasını verir.

(ii) $N \underset{c}{\leq} M$ olsun. $N \underset{c^*}{\leq} M$ mıdır?

Bir an için kabul edelim ki N, M nin kapalı* alt modülü olmasın. Yani M/N tekil olmayan olmasın. $(Z(M) \neq 0)$ Bu durumda $m \in M$ vardır ki $m \notin I$ ve $mI \leq N$ dir. Burada I esaslı sağ idealdir. $r \in R$ ve $n \in N$ alalım. Bu durumda $mr + n$ elemanını düşünelim. $K = \{r \in R | rx \in I\}$ kümesini göz önüne alalım. I esaslı sağ ideal olduğundan, $K \underset{e}{\leq} R_R$ ve açıktır ki $N \leq (mr+n)K$ dır. Buradan $N \cap (mr+n)R \neq 0$ dır. Bu da bize N nin $(mr+n)R$ de esaslı olduğunu verir. Bu ise N nin M de kapalı olması ile çelişir. ✧

Tanım 4.4 (CLS-Modül) M bir modül olsun. Eğer her kapalı* alt modülü M nin bir dik toplananı ise M modülüne *CLS-modül* denir.

Açıkça, değişmeli bir tamlık bölgesi üzerinde herhangi bir burulmalı modül bir CLS-modüldür. Ayrıca,

Sonuç 4.5 (i) Her CS-modül bir CLS_modüldür.

(ii) Her tekil olmayan CLS-modül bir CS-modüldür.

İspat: (i) M CS-modül olsun. M CLS-modül müdür?

$N \underset{c^*}{\leq} M$ olsun. Önteorem 4.3 den $N \underset{c}{\leq} M$ dir. M nin kendisi CS olduğundan $N \leq_{\oplus} M$ dir.

(ii) M CLS-modül olsun. M CS-modül müdür?

$N \underset{c}{\leq} M$ olsun. Önteorem 4.3 den $N \underset{c^*}{\leq} M$ dir. M nin kendisi CLS olduğundan $N \leq_{\oplus} M$ dır.✧

Aşağıdaki örnek izah eder ki CLS-modüller gerçekten CS-modüllerden farklıdır.

Örnek 4.6 p herhangi bir asal tamsayı ve M bir Z-modül $(Z/Zp) \oplus (Z/Zp^3)$ olsun. O zaman M bir CLS-modüldür ama CS-modül değildir.

İspat: Mademki M_Z tekildir, o zaman M bir CLS-modüldür. Şimdi $K = Z(1 + Zp, p + Zp^3)$ olsun. O zaman K da p^2 mertebeli M de bir komplementtir ki o M nin dik toplananı değildir. Böylece M_Z CS-modül değildir, Bakınız [11].✧

Aşağıdaki sonuç gösterir ki CLS-modüller dik toplananların terimleri içinde CS-modüllerle benzer davranırlar.

Önteorem 4.7 Bir CLS-modülün herhangi bir dik toplananı da CLS-modüldür.

İspat: M bir CLS-modül ve $K \leq_{\oplus} M$ olsun. K bir CLS-modül mü?

$L \underset{c^*}{\leq} K$ olsun. $L \leq_{\oplus} K$ olduğunu göstereceğiz. K, M de dik toplanan olduğundan $M = K \oplus K'$ şeklinde yazalım. Bu durumda

$\frac{M}{L}=\frac{\left(K\oplus K^{'}\right)}{L}=\frac{K}{L}\oplus\frac{\left(K^{'}+L\right)}{L}$ olur ve buradan $\frac{M/L}{\frac{\left(K^{'}+L\right)}{L}}\cong\frac{K}{L}$ dir. $\frac{K}{L}$ modülü de tekil olmayan olduğundan , $\frac{M}{K^{'}\oplus L}$ de tekil olmayandır, yani $K^{'}\oplus L\underset{c^*}{\leq}M$ dir. M nin kendisi CLS-modül olduğundan,

$K^{'}\oplus L\leq_{\oplus}M$ dir. Şimdi $L\oplus K^{'}\leq_{\oplus}M=K\oplus K$ olduğundan $L\leq_{\oplus}K$ dır. Çünkü $K^{'}\leq_{\oplus}K^{'}$ dır. Dolayısıyla $L\leq_{\oplus}K$ olmalıdır.✧

CLS-modüllerin dik toplamı genelde CLS-modül olması gerekmez.

M bir Z -modül, $Z_2=\{a/b:a,b\in Z,b\ tektir\}$ iken $Z\oplus Z_2$ olsun. Şimdi açıkça, M_Z tamamen burulmalı değil ve Z , Z_2 CLS-modüllerdir. Ama M CLS-modül değildir, (Bakınız$[7,\ \text{sayfa } 19]$).

Önerme 4.8 M nin bir CLS-modül olması için gerek ve yeter şart $M=Z_2(M)\oplus M'$ olacak şekilde M nin CS-modül olan M' alt modülünün olmasıdır. Bu durumda M', $Z_2(M)$ -injektiftir.

İspat: Kabul edelim ki M bir CLS-modüldür. Böylece, $Z_2(M)$, M nin bir dik toplananıdır öyle ki M nin bazı M' alt modülleri için $M=Z_2(M)\oplus M'$ dir.

$M=Z_2(M)\oplus M'$ olduğundan $M/Z_2(M)\cong M^{'}$ dır. Buradan da

$0=Z\left(M/Z_2(M)\right)\cong Z(M^{'})$ olur ki böylece $Z(M^{'})=0$ elde edilir.

M' tekil olmayan ve Önteorem 3.7 den bir CLS-modüldür ve bundan dolayı Sonuç 3.5 den bir CS-modüldür. Tersine; kabul edelim ki bazı M' CS-modül için $M=Z_2(M)\oplus M'$ dir. K, M nin kapalı* alt modülü olsun. O zaman $Z(M)\leq K$ ve bundan dolayı $Z_2(M)\leq K$ dır. Böylece $K=Z_2(M)\oplus(K\cap M')$

olur. Şimdi $M/K \cong M'/(K \cap M')$ öyle ki $K \cap M'$, M nin kapalı* alt modülüdür. Bundan dolayı Sonuç 3.5 den, bazı K' alt modülleri için $M' = (K \cap M') \oplus K'$ dır. O zaman $M = K \oplus K'$ olur. Bu gösterir ki M bir CLS-modüldür. İkinci taraf tamamlandı.

Teorem 4.9 Kabul edelim ki M sağ R-modülü M_1 ve M_2 CLS-modüllerinin $M_1 \oplus M_2$ nin dik toplananıdır öyle ki M_1, M_2-injektiftir. O zaman M bir CLS-modüldür.

İspat: N , M nin kapalı* alt modülü olsun. O zaman M/N tekil olmayandır. Şimdi $M_1/(N \cap M_1) \cong (M_1 + N)/N$ ifade eder ki $N \cap M_1$, M_1 in kapalı* alt modülüdür. Böylece $N \cap M_1$, M_1 in dik toplananıdır ve bundan dolayı M nin de dik toplananıdır. Bu da gösterir ki $N \cap M_1$, N nin dik toplananıdır öyle N nin bazı K alt modülleri için $N = (N \cap M_1) \oplus K$ dır. $\pi_i : M \to M_i$, $i = 1,2$ kanonik projekjını tanımlayalım. $\alpha = \pi_2 |_K$ ve $\beta = \pi_1 |_K$ iken

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M_2 \\ & M_1 & \end{tikzcd}$$

diyagramını dikkate alalım. Not edelim ki; α bir monomorfizma ve M_1, M_2-injektiftir. Bu nedenle, bir $\varphi : M_2 \to M_1$ homomorfizması vardır öyle ki $\varphi\alpha = \beta$ dir. $L = \{x + \varphi(x) : x \in M_2\}$ olsun. O zaman o kolaylıkla kontrol edilebilir ki L, M nin bir alt modülü ve $L \cong M_2$ dir. Üstelik $M = M_1 \oplus L$ dir. Eğer $k \in K$ ise, o zaman bazı $m_i \in M_i$, $i = 1,2$ için $k = m_1 + m_2$ dir. O halde $m_1 = \beta(k) = \varphi\alpha(k) = \varphi(m_2)$ ve bu ifade eder ki $k = \varphi(m_2) + m_2 \in L$ dir. Buradan da $K \subseteq L$ olur. $\dfrac{M}{N} = \dfrac{M_1}{N \cap M_1} \oplus \dfrac{L}{K}$ olduğunda L/K tekil olmayandır. K, L nin kapalı* alt modülüdür. Ama $L \cong M_2$ dir öyle ki K , L nin dik toplananıdır. Buradan N , M nin dik toplananıdır. Bu da gösterir ki M bir CLS-modüldür. ✧

n bir pozitif tamsayı ve $M_1, M_2, ..., M_n$ sağ R-modüller olsun. O zaman bu modüllere göreli injektif (relatively injective) denir, eğer bütün $1 \leq i \neq j \leq n$ için M_i , M_j -injektiftir, (Bakınız, $[5]$). O zaman aşağıdaki teoremde CLS-modüllerin sonlu dik toplananı için $[5$, Teorem $8]$ ile benzer sonuçlara sahip oluruz.

Teorem 4.10 R bir halka ve M bir sağ R -modül olsun öyle ki $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ göreceli injektif M_i ($1 \leq i \leq n$) modüllerinin sonlu dik toplamıdır. O zaman M bir CLS-modüldür ancak ve ancak her bir $1 \leq i \leq n$ için M_i ler CLS-modüllerdir.

İspat: Gerekli olan Önteorem 3.7 den açıktır. Tersi n üzerinde tümevarım ve Teorem 3.9 kullanılarak gösterilebilir. ✧

Sonuç 4.11 Kabul edelim ki M tekil olmayan sağ R -modülü M_1, M_2 CS-modüllerinin $M_1 \oplus M_2$ dik toplamıdır öyle ki M_1, M_2 -injektiftir.

İspat: Sonuç 3.5 ve Teorem 3.9 dan yapılır. ✧

Sonuç 4.12 Kabul edelim ki M sağ R -modülü M_1, M_2 CS-modüllerinin $M_1 \oplus M_2$ dik toplamıdır öyle ki M_1, M_2 -injektif ve M_2 tekil olmayandır. O zaman M bir CS-modüldür.

İspat: Açıktır ki $Z_2(M) = Z_2(M_1)$, M_1 in dik toplananıdır. Bundan dolayı, M_1 in bazı tekil olmayan M_1' alt modülleri için $M_1 = Z_2(M) \oplus M_1'$ olduğundan $M = Z_2(M) \oplus M_1' \oplus M_2$ dir. Not edelim ki; M_1', M_2 -injektif, M_1' CS-modül ve $M_1' \oplus M_2$ tekil olmayandır. Sonuç 3.11 den, $M_1' \oplus M_2$ bir CS-modüldür. Ama

$[6, \text{teorem} 1]$ den $Z_2(M)$, M_1'-injektiftir ve bundan dolayı $Z_2(M)$, $M_1' \oplus M_2$-injektiftir. Tekrar $[6, \text{teorem} 1]$ den, M bir CS-modüldür. ✧

Sonuç 4.13 Kabul edelim M_1 ve M_2 CS-modüller iken $M = M_1 \oplus M_2$ dir öyle ki M_1, M_2-injektiftir. O zaman M bir CS-modüldür ancak ve ancak $Z_2(M)$ bir CS-modüldür.

İspat: Gerekli olan $[6, \text{ Teorem } 1]$ den açıktır. Tersine, kabul edelim ki $Z_2(M) = Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$ bir CS-modüldür. M_1 in M_1' ve M_2 nin M_2' alt modülleri vardır öyle ki $M_1 = Z_2(M_1) \oplus M_1^{'}$ ve $M_2 = Z_2(M_2) \oplus M_2^{'}$ dir. Buradan $M = [Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)] \oplus (M_1^{'} \oplus M_2^{'})$ olur. $[6, \text{ Teorem } 1]$ ve M_1, M_2-injektif olmasın durumundan, biliyoruz ki $Z_2(M_1) \oplus Z_2(M_2)$, $M_1^{'} \oplus M_2^{'}$-injektiftir. Aynı zamanda $M_1^{'} \oplus M_2^{'}$, tekil olmayan bir modül oluyor, Sonuç 3.11 den bir CS-modüldür. Buradan da $[6, \text{Teorem} 1]$ den M bir CS-modüldür. ✧

Anımsanır ki herhangi bir CS-modül M de aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) M nin her yarı-basit alt modülü M nin bir dik toplananı içinde esaslıdır.

(ii) M nin her alt modülü bir komplemente sahiptir ki o M nin bir dik toplananıdır.

Bir modül (i) özelliğini ((ii)özelliğini) sağlarsa zayıf (weak) CS-modül ((C_{11}) ile modül) denir, (Bakınız, $[9,11]$)

Sonuçta bazı örneklerle CLS-modüllerce zayıf CS-modüller arasında ilişki olmadığını göstereceğiz.

Örnek 4.14 R Örnek 3.2 deki halka olsun. O zaman R_R bileşimi bozulmaz (indecomposable) modüldür. R_R öz olmayan kapalı* alt modüllere sahip olduğunda R_R bir CLS-modüldür ancak ne zayıf CS-modüldür ne de $((C_{11})$ ile modüldür.

Örnek 4.15 $Z_2 = \{a/b : a, b \in Z, b \ tektir\}$ olmak üzere $(Z \oplus Z_2)_Z$ modüldür. O zaman M_Z bir CLS-modül değildir. Ama M_Z $[9, \text{Sonuç } 1.17]$ den zayıf CS-modüldür.

Örnek 4.16 $M_Z = Z \oplus Z \oplus ...$ olsun. O zaman M (C_{11})-modüldür ama bir CLS-modül değildir.

İspat: $[11, \text{Sonuç } 5.1]$ den, M_Z (C_{11}) e uyar. Şimdi kabul edelim ki $\varphi : M \to Q$ bir epimorfizmadır. $K = \ker \varphi$ olsun. Böylece $M/K \cong Q$ ki bu tekil olmayandır. Bundan dolayı K, M nin bir kapalı* alt modülüdür. Eğer K, M nin dik toplananı olsaydı, o zaman M nin bazı L alt modülleri için $M = K \oplus L$ ye sahip olabilirdik. Buradan $L \cong Q$ dur ki bir çelişkidir. Bu da gösterir ki M_Z bir CLS-modül değildir. ✧

KAYNAKLAR

1. A. Tercan , *On CLS-Modules* , Rocky Mountain Journal of Math.,Volume 25,Number 4 (1995)

2. P:F:Smith and A.Tercan , *Generalizations of CS-modules* ,Comm.Algebra 21 (1993),1809 1847

3. P:F:Smith , *CS-modules and weak CS-modules* , in Non-commutative ring theory, Lecture Notes in Math. 1448 (1990) , 99-115

4. F. W. Anderson and K.R. Fuller, *Rings and categories of modules*,Springer Verlag, New York, 1974

5. A.W. Chatters and C.R. Hajarvanis, *Ring in which every complement right ideal is a direct summand*, Quart J. Math. Oxfort, Ser. (2) 28(1977), 61-80

6. A.W. Chatters and S.H. Khuri, *Endomorphism rings of modules over nonsingular CS-rings*, J. London Math. Soc. 21 (1980), 434-444

7. K.R. Goodearl, *Ring theory*, Marcel-Dekker, (1976)

8. A. Harmancı and P.F. Smith, *Finite direct sums of CS-modules*, Houston J. Math. 19 (1993), 523-532

9. M.A. Kamal and B.J. Muller, *Extending modules over commutative domains*, Osaka J. Math. 25(1988), 531-538

10. S.H. Mohamed and B.J. Muller, *Continuous and discrete modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series 147, Cambridge University Press, 1990

11. F.L.Sandomierski,*Nonsingular rings*,Proc.Amer.Math.Soc. 19(1968),225-230

12. P.F. Smith and A. Tercan, *Continuous and quasi-continuous modules*, Houston J. Math. 18(1992), 339-348

13. V. Camillo and M.F. Yousif, *CS-modules with acc or dcc on essential submodules*, preprint

14. A.W. Chatters, *A characterization of right Noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxfort (2) 33 (1982),65-69

15. R. Gordon and J.C. Robson, *Krull dimension*, Amer. Math. Soc. Memoirs 133 (1973)

16. M. Harada, *On modules with extending property*, Osaka J. Math. 19 (1982), 203-215

17. M. Harada and K. Oshiro, *on extending property of direct sums of uniform modules*, Osaka

18. D.V. Huynh, N.V. Dung and P.F. Smith, *A characterization of rings with Krull dimension*, J. Algebra, to appear

19. D.V. Huynh, N.V. Dung and R. Wisbauer, *A characterization of modules with finite uniform dimension*, Arch. Math., to appear

20. A.V. Jategaonkar, *Localication in Noetherian rings*, London Math. Soc. Lecture Note Series 98 (Cambridge Universty Pres, 1986)

21. M.A. Kamal and B.J. Muller, *The structure of extending modules over Noetherian rings*, ibid., 539-55

22. M.A. Kamal and B.J. Muller, *Torsion free extending modules*, ibid., 825-832

23. I. Kaplansky, *Modules over Dedekind rings and valuation rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 327-340

24. K. Oshiro, *Continous modules and quasi-*continous *modules*, Osaka J. Math. 20 (1983), 337-372

25. B.L. Osofsky and P.F. Smith, *Cyclic modules whose quatients have complements direct summands*, J. Algebra, to appear.

26. P.F. Smith,D.V. Huynh and N.V. Dung, *A characterization of Noetherian modules*, Quart. J. Math. Oxford.

27. P.F. Smith, *CS-modules and weak CS-modules, in noncommutative ring theory,* Springer Leacture notes in Math. 99-155,1990

28. P.F. Smith, *Modules with many direct summands*, Osaka J. Math., to appear.(1990),253-264

29. Gary F. Birkenmeier and A. Tercan, *Some complement of a submodule is a summand,* Communications in Algebra, 35: 597-611, 2007

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler:

Ad Soyad : Hatice TUFAN

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 04.06.1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi 1996-2000

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi

Yüksek Lisans: Afyon Kocatepe Üniversitesi

İletişim Bilgileri:

Adres: Mareşal Fevzi Çakmak Mah. 134 Sok.
No:30 Hızırkent Sit. A-6 Blok K:3 D:6
AFYONKARAHİSAR

Email: ben_3526@hotmail.com , ben3526@gmail.com