**T.C**
**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

# FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

**Bünyamin ELTURAN**

**Tez Danışmanı**
**Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

**Yozgat 2018**

**T.C**
**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

# FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

**Bünyamin ELTURAN**

**Tez Danışmanı**
**Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

**Yozgat 2018**

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315014 numaralı öğrencisi Bünyamin ELTURAN'ın hazırladığı "**Fourier serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi üzerine**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 31/07/2018 Salı günü saat 14:00'te yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

**Başkan** : Doç.Dr. Muammer KULA

**Jüri Üyesi (Danışman)** : Doç.Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

**Jüri Üyesi** : Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 31../08../2018 tarih ve 31... sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

02../09./2018

**Prof. Dr. Fuat KÖKSAL**
**Müdür**

# İÇİNDEKİLER

**FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE**

**Bünyamin ELTURAN**

**Yozgat Bozok Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**2018; Sayfa: 34**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU**

# ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı Fourier serilerinin mutlak Euler toplanabilmesini incelemektir. Birinci bölümde toplanabilme teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde Fourier serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Bu teoremleri ispatlamak için kullanılan lemmalar verildi. Dördüncü bölümde Fourier serilerinin eşlenik serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi. Beşinci bölümde Fourier serilerinin diferensiyellenebilir serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi.

**Anahtar Kelimeler**: Fourier serisi, Mutlak Euler toplanabilme, Sınırlı salınımlılık, Esas sınırlılık, Fubini teoremi.

**ON THE ABSOLUTE EULER SUMMABILITY OF FOURIER SERIES**

**Bünyamin ELTURAN**

**Yozgat Bozok University**
**Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**
**Master of Science Thesis**

**2018; Page: 34**

**Thesis Supervisor: Associate Professor Doctor Abdullah SONMEZOGLU**

## ABSTRACT

The aim of this study which compose of five parts, is to investigate absolute Euler summability of Fourier series.

In the first chapter, information about the historical development of the theory of summability is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems used in this study are given.

In the third chapter, the proof of theorems with respect to absolute Euler summability of Fourier series is investigated. Using lemmas to prove this theorem are given. In the fourth chapter, the proof of a theorem with respect to absolute Euler summability of conjugate series of Fourier series is investigated.

In the fifth chapter, the proof of a theorem with respect to absolute Euler summability of differentiated series of Fourier series is investigated.

**Keywords:** Fourier series, Absolute Euler summability, Bounded variation, Essentially bounded, Fubini theorem.

# TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU' na ve Dr. Hüseyin KAMACI' ya teşekkür ederim.

# SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\{\boldsymbol{s_n}\}$ : Reel veya kompleks sayılar dizisi

$(\boldsymbol{a_{nv}})$ : Satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris

$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{\alpha})$ : $\alpha$. mertebeden Euler dönüşümü

$\boldsymbol{a_n}$ : Fourier katsayısı

$\boldsymbol{b_n}$ : Fourier katsayısı

$\boldsymbol{BV}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ : [0,1] aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı

$\boldsymbol{s_n}=\boldsymbol{O}(\mathbf{1})$ : $\{s_n\}$ dizisi sınırlı

$\boldsymbol{s_n}=\boldsymbol{o}(\mathbf{1})$ : $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0$

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\sim\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a})$ : $\lim\limits_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=1$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^+)$ : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}^-)$ : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=[a,b]$ aralığında Lebesque anlamda integrallenebilen fonksiyonların sınıfı

$\Delta\boldsymbol{a_n}=a_n-a_{n+1}$

$|\boldsymbol{E_\alpha}|$ : Mutlak Euler toplanabilme

# 1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve uygulamalı bilimlerde önemli uygulama alanlarına sahip olan toplanabilme metodu bir yakınsaklık metodudur. Serilerin yakınsaklığının incelenmesi çok eski olmakla beraber bu yakınsaklık konusu ile ilgilenen Leonard Euler (1707-1783) oldu. Eulerin yaşadığı dönemde serilerin ıraksak olması fazla dikkate alınmadı. Genel olarak yakınsak olmayan seriler gerçek dünya düşüncesine göre mantıksız bulundu ve bu nedenle ıraksak olan serilerin incelenmemesi daha mantıklı olacaktı.

Euler, $\boldsymbol{f(1)=s}$ ve küçük(modül olarak küçük) $\boldsymbol{z}$ değerleri için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $\boldsymbol{f(z)}$ değerine yakınsaması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ıraksak serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şekline dönüştüren toplanabilme yöntemini geliştirdi. Bu yolla $|z|<1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

yakınsaması vardır. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = [\frac{1}{1+z}]_{z=1} = \frac{1}{2}$ dır. Bununla birlikte $z \neq 1$ için

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

ve

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = \frac{1+z}{1+z+z^2}$$

olduğundan

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

dır ve bunun sonucu olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \left[\frac{1+z}{1+z+z^2}\right]_{z=1} = \frac{2}{3}$$

dır. Bu şekilde birilerinin Eulerin yorumuyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisine neredeyse herhangi bir değer karşılık getirebileceği görünmektedir.

Bu açıklamalar ve örneklerden sonra toplanabilme metodunda asıl amaç ıraksak bir seriyi veya diziyi yakınsak seri veya diziye dönüştürmektir. Toplanabilme metoduyla genellikle sınırlı ancak ıraksak olan diziler yakınsak diziye dönüştürülebilir. Ancak burada "toplanabilme metodu her ıraksak seriyi veya diziyi yakınsak seriye veya diziye dönüştürür" anlamı çıkarılmamalıdır.

Mutlak genelleştirilmiş toplanabilme metodu ele alınırken serilerin yakınsak olmasını sağlayan bazı toplanabilme çarpanlarına ihtiyaç duyulacağından teoremlerin hipotezinde bu çarpanlara yer vermek oldukça önemlidir. Diğer taraftan bir teoreme çok hipotez koymanın teoremi zayıflattığı da unutulmamalıdır.

Literatürde öncelikle özel trigonometrik seri olarak bilinen Fourier serileri ile bu serilerin conjugate (eşlenik) serilerinin $0 < \alpha < 1$ olmak üzere iyi bilinen toplanabilme metodu olan $|E_\alpha|$ toplanabilme metodu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Daha sonra Fourier serilerinin diferensiyellenebilir serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada, Fourier serilerinin ve bu serilerin conjugate ve diferensiyellenebilir serilerinin $|E_\alpha|$ toplanabilmesi ile ilgili literatürde yapılan teoremlerin ispatı incelendi.

Mutlak toplanabilme başlangıçta $(C, 1)$ Cesáro aritmetik ortalama , daha sonra ise Nörlund, Riesz, $(C, \alpha)$, $(E, \alpha)$ ve $(H, \mu)$ Hausdorff metotları yardımıyla geliştirildi.

Bu metotların aralarındaki kapsama bağıntılarından yararlanarak serilerin mutlak genelleştirilmiş Cesa'ro toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Euler toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Riesz toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilme kavramları ele alındı ve bu kavramlarla ilgili teoremlerin ispatı literatürde yer aldı.

# 2.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.** Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olsun. Ayrıca $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisi yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya $\{s_n\}$ dizisinin $\{t_n\}$ dönüşüm dizisi

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v$$

olarak tanımlanmak üzere $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya $\{s_n\}$ dizisine $s$ değerine $A$-limitlenebilir (toplanabilir) denir [1].

**Tanım 2.2.** Kısmı toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olan bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin Euler dönüşümü, $0 < \alpha < 1$ için

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

ile tanımlanır [2].

**Tanım 2.3.** $f(x)$ , $(-\pi, \pi)$ aralığında $L$ (Lebesgue anlamında) integrallenebilen $2\pi$ periyotlu periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v cosvx + b_v sinvx) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v(x) \qquad (2.1)$$

ile tanımlanır. Ayrıca (2.1) Fourier serisinin eşlenik serisi ise

$$\sum_{v=1}^{\infty} (a_v sinvx - b_v cosvx) \qquad (2.2)$$

ile tanımlanır [3].

**Teorem 2.4.** $F: [a,b] \to R$ monoton ve pozitif bir fonksiyon olsun. $G: [a,b] \to R$ integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b F(t)G(t)dt = F(a^+) \int_a^x G(t)dt + F(b^-) \int_x^b G(t)dt$$

olacak şekilde $x \epsilon (a,b)$ vardır [2].

**Tanım 2.5**. Ölçümü sıfır olan cümle dışında bir fonksiyon sınırlı ise bu fonksiyona esas sınırlıdır denir [2].

**Tanım 2.6.**

$[a, b]$ nin her bir $P$=$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| < \infty$$

ise $\phi$' ye $[a, b]$ de sınırlı salınımlı denir.

**Lemma 2.7.** $(a_n)$ negatif olmayan reel sayıların azalan bir dizisi, $(b_n)$ de herhangi bir reel terimli dizi olsun. $m$ ve $n$, $n > m$ şartını sağlayan doğal sayılar ise

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \leq a_m$$

dir.

**İspat:** $B_S = \sum_{k=m}^{n} b_k$ ve $M = maks\{|B_m|, |B_{m+1}|, \ldots, |B_n|\}$ olsun. Abel formülünden

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1})$$

dır. Böylece,

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k b_k \right| \leq |a_n B_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |B_k (a_k - a_{k+1})| \leq MaksB_m \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1})$$
$$= M a_m$$

# 3. FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ

Çalışma boyunca kabul edeceğiz ki $f(x)$, $2\pi$ periyotlu periyodik fonksiyon ve Lebesque anlamında integrallenebilirdir.

$f(x)$ fonksiyonunun (-$\pi, \pi$) deki Fourier Serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

dır. Burada

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnxdx$$

Fourier katsayılarıdır.

$x,\ f(x)$' in süreklilik noktası ise

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

dir.

$x, f(x)$' in süreklilik noktası değilse

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

dır.

O halde

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

$$= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \tag{3.1}$$

olsun.(3.1) serisinin eşlenik serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\,cosnx - a_n sinnx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \qquad (3.2)$$

ve (3.1) serisinin diferensiyellenebilir serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\,cosnx - a_n sinnx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nB_n(x) \qquad (3.3)$$

dır.

$$\phi(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S}{2}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}$$

olsun. $s$, Fourier serisinin toplamı

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cosnx + b_n sinnx) = \mathrm{s}$$

şeklinde yazılabilir.

N.Tripathy [4], $(0,\pi)$ aralığında $\phi(t)$ nin sınırlı salınımlı olma şartının (3.1) serisinin$|E_\alpha|$ mutlak Euler toplanabilmsesini garantilemeyeceğini göstermiştir.

**Tanım 3.1.**

Kısmi toplamlar dizisi $(S_n)$ olan bir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

serisi verilsin.

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

Euler dönüşümü verilsin. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| \quad < \infty \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3.4}$$

ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

serisine mutlak Euler toplanabilirdir veya $|E_\alpha|$toplanabilirdir denir [2].

**Lemma 3.2.**

$$\tau_n = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v a_v = n(t_n - t_{n-1})$$

dır [5].

**İspat:**

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$t_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$t_n - t_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} s_v - \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \left[ \binom{n-1}{v} + \binom{n-1}{v-1} \right] \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$- \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v-1} [(1-\alpha)-1] s_v$$

$$+ \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v-1} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$- \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v} \alpha^{v+1} (1-\alpha)^{n-v-1} s_v \ + \sum_{v=0}^{n} \binom{n-1}{v-1} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$- \sum_{v=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-v-1)!} \alpha^{v+1} (1-\alpha)^{n-v-1} s_v + \sum_{v=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-v)!\,(v-1)!} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$t_n - t_{n-1} = - \sum_{v=0}^{n} \frac{n!}{(n-v-1)!\,v!} \alpha^{v+1} (1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$+ \ \sum_{v=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-v)!\,(v-1)!} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

olup

$s_0 = 0$ olmak üzere

$$n(t_n - t_{n-1}) = - \sum_{v=0}^{n} \frac{n!}{(n-v-1)!\,v!} \alpha^{v+1} (1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$+ \sum_{v=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-v)!\,(v-1)!} \alpha^{v} (1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$n(t_n - t_{n-1}) = -\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v+1} (v+1)\alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$+\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} s_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} v\, \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} s_v - \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v+1} (v+1)\alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1} s_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta\left\{\binom{n}{v} a^{v}(1-\alpha)^{n-v} v\right\} \sum_{j=1}^{v} a_j + n\alpha^n S_n$$

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$$

olduğundan

$$\Delta\left\{\binom{n}{v} a^{v}(1-\alpha)^{n-v} v\right\}$$

$$= \binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v} - \binom{n}{v+1} (v+1)a^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}$$

$$S_v = \sum_{j=0}^{v} a_j \Rightarrow S_0 = 0 \Rightarrow S_v = \sum_{j=1}^{v} a_j$$

olur. Buradan

$$\sum_{v=1}^{n} \Delta\left\{\binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v} S_v\right\}$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v} S_v$$

$$-\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v+1} (v+1)a^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1} S_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \left\{\binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v} - \binom{n}{v+1} (v+1)a^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}\right\} S_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \Delta\left\{\binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v}\right\} S_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta\left\{\binom{n}{v} v a^{v}(1-\alpha)^{n-v}\right\} S_v + n a^{n} S_n$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v a_v$$

elde edilir.

$$t_n - t_{n-1} = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v a_v$$

dır. Burada

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} s_v$$

dır.

Bir başka yolla

Abel kısmi toplama formülünden

$$\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v a_v$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} \Delta\left\{\binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v\right\} \sum_{j=1}^{v} a_j$$

$$+ \ n\,\alpha^{n} S_n$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v S_v - \sum_{v=1}^{n-1} \binom{n}{v+1} \alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}(v+1) S_v \ + \mathrm{n}\alpha^{n} S_n$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v} v S_v - \sum_{v=1}^{n-1} \binom{n}{v+1} \alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}(v+1) S_v$$

$$= n\sum_{v=1}^{n}\binom{n-1}{v-1}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v}S_v - n\sum_{v=1}^{n-1}\binom{n-1}{v}\alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}S_v$$

$$= \ n\sum_{v=1}^{n}\left\{\binom{n}{v}-\binom{n}{v}\right\}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v}S_v - n\sum_{v=1}^{n-1}\binom{n-1}{v}\alpha^{v+1}(1-\alpha)^{n-v-1}S_v$$

$$= n\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v}S_v - n\sum_{v=1}^{n-1}\binom{n-1}{v}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v-1}S_v\,(1-\ \alpha+\ \alpha)$$

$$= n\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v}S_v - n\sum_{v=1}^{n-1}\binom{n-1}{v}\alpha^{v}(1-\alpha)^{n-v-1}S_v$$

$$= n(t_n - t_{n-1})$$

elde edilir. (3.1) ifadesi için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n - t_{n-1}| < \ \infty$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\tau_n}{n}\right| < \ \infty \tag{3.5}$$

ifadesine denk olur. Bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n - t_{n-1}| < \ \infty$$

olması için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\tau_n}{n}\right| < \ \infty$$

olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 3.4' ün ikinci kısmı ispatlamak için L.S Bosanquet ve H. Kestleman [6] 'e atfedilen aşağıdaki lemma gereklidir.

**Lemma 3.3.** Kabul edelim ki $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $b - a \leq \infty$ olmak üzere $f_n(x)$, $(a, b)$ aralığında ölçülebilir olsun. Bu durumda $(a, b)$ aralığında toplanabilen her $h(x)$ fonksiyonu için $f_n(x)h(x)$ fonksiyonlarının $(a, b)$ aralığında toplanabilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b h_n(x) f_x(x) \right| dx < \infty$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

serisinin $(a, b)$ aralığında esas sınırlı olmasıdır.

**Teorem 3.4.** g(t) = $\phi(t)\log\left(\frac{1}{t}\right)$, 0$\leq t \leq \delta < 1$ de

sınırlı salınımlı ise bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

serisi $|E_\alpha|$ toplanabilirdir.

0$< \eta < 1$ için $g(t)$ nin yerini $g_\eta$(t) alamaz [7].

**İspat:**

$$G_n(u) = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v \cos(vu)$$

olsun. Bu durumda

$$\tau_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(u)\, G_n(u) du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi(u)\, G_n(u)du + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi(u)\, G_n(u)du \tag{3.6}$$

$$= \frac{2}{\pi}(I_n' + I_n'')$$

dır. Şimdi

$$G_n(u) = \frac{d}{du}\left(\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}\sin vu\right)$$

$$= I_m\frac{d}{du}\left(1-\alpha+\alpha e^{iu}\right)^n \tag{3.7}$$

$$= I_m\left\{n\alpha i e^{iu}\left(1-\alpha+\alpha e^{iu}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\left(\left(1-\alpha+\alpha e^{iu}\right)^{n-1} = (1-\alpha+\alpha\cos u + i\alpha\sin u)^{n-1}\ olduğundan\right)$$

$$= n\alpha\rho^{n-1}(u)I_m\left\{ie^{iu+i(n-1)\theta(u)}\right\}$$

$$= n\alpha\rho^{n-1}(u)\cos\big(u+(n-1)\theta(u)\big)$$

Buradan

$$\rho = \sqrt{(1-\alpha+\alpha\cos u)^2 + (\alpha\sin u)^2}$$

$$= \sqrt{(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\cos u + \alpha^2}$$

$$= \sqrt{1-2\alpha+\alpha^2+2\alpha(1-\alpha)\left(1-2sin^2\frac{u}{2}\right)+\alpha^2}$$

$$\rho(u) = \sqrt{1-4\alpha(1-\alpha)sin^2\frac{u}{2}}$$

$$\theta(u) = \tan^{-1}\frac{\alpha\sin u}{1-\alpha+\alpha\cos u}$$

$$\left(1-\alpha+\alpha e^{iu}\right)^{n-1} = \rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta}$$

$$= \rho^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta]$$

dır. Buradan

$$I_m\left\{\alpha i e^{iu} n\rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta}\right\}$$

$$I_m\left\{\alpha i n\rho^{n-1} e^{i[u+(n-1)\theta]}\right\}$$

$$I_m\{\alpha i n\rho^{n-1}(\cos[u+(n-1)\theta]+i\sin[u+(n-1)\theta])\}$$

$$=\alpha n\rho^{n-1}\cos[u+(n-1)\theta]$$

dir.

$$I_n''=\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\phi(u)G_n\,(u)du$$

$$|I_n''|\leq\int_{\delta}^{\pi}|\phi(u)|n\alpha\rho^{n-1}du$$

$\rho(u)\leq e^{-cu^2}$ $(0\leq u\leq\pi)$ olduğu açıktır. Burada c pozitif bir sayıdır. Bundan dolayı

$$\rho^{n-1}\leq\rho^n\Rightarrow\int_{\delta}^{\pi}|\phi(u)|\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\leq\int_{\delta}^{\pi}|\phi(u)|\sum_{n=1}^{\infty}e^{-ncu^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|I_n''|}{n}=O\left(\int_{\delta}^{\pi}|\phi(u)|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}(u)\right)du\right)$$

$$=O\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-cn\delta^2}\right)\tag{3.8}$$

Buradan kök testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-cn\delta^2}$ serisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|I_n''|}{n}<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|I_n''|}{n}=O(1)$$

dır.

$$E_n(u) = \int_0^u \left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1} G_n(t)dtI_n' = \int_0^\delta g(u)\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1} G_n(u)du$$

olsun. Bu durumda

$$= g(\delta)E_n(\delta) - \int_0^\delta E_n(\delta)\,dg(u)$$

dır. Gerçekten

$$I_n'' = \int_0^\delta \phi(u)G_n\,(u)du$$

$$= \int_0^\delta \frac{g(u)}{\log\frac{1}{u}} G_n\,(u)du$$

$$= \int_0^\delta g(u)\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-1} G_n\,(u)du$$

Kısmi integrasyon gereği

$$= g(u)\int_0^u \left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1} G_n\,(t)dt\,\Big|_0^\delta - \int_0^\delta\int_0^u \left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1} G_n\,(t)dtdg(u)$$

$$= g(\delta)E_n(\delta) - \int_0^\delta E_n(u)\,dg(u)$$

dır.

Bu yüzden eğer $0 \le u \le \delta$ için düzgün olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_n(u)|}{n} < \infty \tag{3.9}$$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|I_n'|}{n} < \infty \tag{3.10}$$

dır.

$$H_n(u) = \int_0^u G_{(n)}\, t dt$$

$$= \int_0^u \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v \cos vt\, dt$$

$$= \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} \sin vu$$

$$= \rho^n(u) \sin n\theta(u)$$

olsun. Bu durumda

$$E_n(u) = \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1} H_n(u) - \int_0^u \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t) dt \tag{3.11}$$

dır. $N$, $Nu^4 > 1$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olsun. Bu durumda

$0 < u \leq \delta$ için düzgün olarak

$$\left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(u)}{n}$$

$$\geq \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1} \left( \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{p^n(u) \sin n\theta(u)}{n} \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{e^{-cnu^2}}{n} \right) \tag{3.12}$$

$$= O\left( \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) + O\left( \sum_{n=1} \frac{e^{-c\sqrt{n}}}{n} \right)$$

$$= O(1)$$

Şimdi

$$\int_0^u \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt$$

$$= J_n' + J_n'' \qquad (3.13)$$

yazalım. Burada

$$J_n' = \begin{cases} \int_0^u \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt, & \left(u \le \frac{1}{n}\right) \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt, & \left(u > \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

$$J_n' = \begin{cases} 0 \quad , & \left(u > \frac{1}{n}\right) \\ \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt, & \left(u \le \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

dır.

$|\sin vt| < kvt$ olacak şekilde k$>$ 0 olduğundan

$\sin vt = O(vt)$ olduğundan $|\sin vt| < kvt$ olacak şekilde $k > 0$ vardır.

$$H_n t = O\left(t\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}v\right)$$

$$= O(nt)$$

elde ederiz. Bundan dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|J_n'|}{n}$$

$$= O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} dt\right) \tag{3.14}$$

$$= O\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nlog^2 n}\right)$$

$$= O(1)$$

dir. Gerçekten

$$\int_0^{1/n} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{-2} dt = \int_0^{1/n} \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{(\ln t)^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2 \ln t}{t(\ln t)^4} = \frac{-2}{t(\ln t)^3}$$

$0 < t < \frac{1}{n}$ için $f'(t) > 0$ dır. $f(t)$ fonksiyonu $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ de artandır.

$$\int_0^{1/n} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{-2} dt = \int_0^{1/n} \frac{dt}{(\ln t)^2} = f\left(\frac{1^-}{t}\right) \int_x^{1/n} dt$$

$$= \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{n}\right)^2} \int_x^{1/n} dt = -\frac{1}{(\ln n)^2} \left(\frac{1}{n} - x\right)$$

$$\left| \int_0^{1/n} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} dt \right| \le \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow \int_0^{1/n} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} dt = O\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)$$

Her iki tarafın toplamından $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ serisi elde edilir.

Gerçekten bu seri için $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ azalan olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ serisi ile $\sum_{p=0}^{\infty} 2^p\, a_{2^p}$ serisi aynı karakterlidir.

$$\sum_{p=0}^{\infty} 2^p \frac{1}{2^p (ln)^2 2^p} = \sum_{p=0}^{\infty} 2^p \frac{1}{p^2 (ln2)^2}$$

$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$ harmonik serisi yakınsaktır. O halde seri yakınsaktır.

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{v} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-\alpha} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğu açıktır. Gerçekten, ortalama değer teoreminden $\frac{1}{n} < x < u$ olmak üzere

$$\int_{1/n}^{u} \frac{1}{t}\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt = n\left(\log \frac{1}{n}\right)^{-2} \int_{1/n}^{x} H_n(t)dt$$

$$= \frac{n}{(\log n)^2} \int_{1/n}^{x} \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} \sin vt \, dt$$

$$= \frac{n}{(\log n)^2} \sum_{v=1}^{n} \frac{\binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} \cos vt}{v} \Bigg|_{1/n}^{x}$$

$x = \xi_n$ olsun.

$$= \frac{n}{(\log n)^2} \sum_{v=1}^{n} \frac{\binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}}{v} \left(\cos v\xi_n - \cos \frac{v}{n}\right)$$

$$\left| \int_{1/n}^{u} \frac{1}{t}\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2} H_n(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{n}{(\log n)^2} \sum_{v=1}^{n} \frac{\binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}}{v}$$

dır. Diğer taraftan

$$(\alpha z + 1 - \alpha)^n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} (\alpha z)^v (1-\alpha)^{n-v}$$

$$(\alpha z+1-\alpha)^n=\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}z^v$$

$$\int_0^1(\alpha z+1-\alpha)^n\,dz=\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v+1}$$

$$\frac{(\alpha z+1-\alpha)^{n+1}}{\alpha(n+1)}\Big|_0^1=\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v+1}$$

$$\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v+1}=\frac{1}{\alpha(v+1)}-\frac{(1-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

$$\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v+1}<\frac{1}{\alpha(n+1)}<\frac{1}{\alpha n}$$

$$\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v+1}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Biliyoruz ki $a_n=O(0)\Leftrightarrow|a_n|\le k$ olacak şekilde $k>0$ vardır. Buradan

$$\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}v}{v(v+1)}=O\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \frac{v}{v+1}<1\Rightarrow\sum_{v=0}^{n}\frac{\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}}{v}=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ve bundan dolayı

$\frac{1}{n}<\xi_n\le u$ olmak üzere

$$J_n''=n(\log n)^{-2}\int_{1/n}^{\xi_n}\left(\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}\alpha^v(1-\alpha)^{n-v}\sin vt\right)dt$$

$$=O\left(\frac{1}{log^2 n}\right)$$

dır. Gerçekten

$$\left|\int_{1/n}^{u}\frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}H_n(t)dt\right|\leq\frac{n}{(\log n)^2}\,O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow J_n'' = \int_{1/n}^{u}\frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}H_n(t)dt = O\left(\frac{1}{log^2 n}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\int_{1/n}^{u}\frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}H_n(t)dt = O\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{log^2 n}\right)$$

dır. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|J_n''|}{n} = O\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^2n}\right)$$

ve $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nln^2n}$ serisi yakınsak olduğu için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|J_n''|}{n} = O(1) \tag{3.15}$$

sonucu çıkar. (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), ve (3.15) den (3.9) sağlanır ve dolayısıyla (3.10)' un sağlandığını görürüz. Teorem 1'in birinci kısmı (3.6), (3.8) ve (3.10) dan sağlanır.

(3.8), $g(t)$ ve $g_\eta(t)$ yer değiştirdiğinde etkilenmez.

$$E_n^\eta(u) = \int_0^u\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta}G_n(t)dt$$

olsun. Bu durumda

$$I_n' = g_\eta(\delta)E_n^\eta - \int_0^\delta E_n^\eta(u)dg_n(u) \tag{3.16}$$

$$E_n^{\eta}(\delta) = \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\eta} H_n(\delta) - \int_0^{\delta} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta-1} H_n(t)dt$$

elde ederiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(\delta)}{n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-cn\delta^2}}{n}\right) = O(1)$$

olduğundan ve (3.14), (3.15) $\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}$ ile $\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta-1}$ in yerine geldiğinde geçerli kalır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|E_n^{\eta}(\delta)\right|}{n} < \infty \qquad (3.17)$$

Lemma 3.3, (3.16) ve (3.17) dan (3.10)'un gerek şartı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|E_n^{\eta}(u)\right|}{n} \qquad (3.18)$$

serisinin $0 \leq u \leq \delta$ için sınırlı olmasının sağlanmasıdır.

Şimdi

$$E_n^{\eta}(u) = \left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\eta} H_n(u) - \eta \int_0^{u} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta-1} H_n(t)dt$$

ve (3.13), (3.14) ve (3.15) den $\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}$ ile $\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta-1}$ yer değiştirerek

$0 \leq u \leq \delta$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\int_0^{u} \frac{1}{t}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\eta-1} H_n(t)dt\right| < \infty$$

elde edilir.

([4] , sayfa 24 den)

u→0 iken

$$\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-\eta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|H_n(u)|}{n}\to\infty$$

olduğundan (3.18) esas sınırlı değildir. Bu da teoremin ikinci kısmını ispatlar.

**Teorem 3.5.** Eğer

$$\int_0^{\delta}\log\frac{1}{u}|d\phi(u)|<\infty$$

ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,(x)$$

$|E_\alpha|$ toplanabilirdir [7].

**İspat :** Teorem 3.5'i Teorem 3.4' ten elde edeceğiz.

Teorem 3.5 in şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\phi(u)$, $(0,\delta)$ aralığında sınırlı salınımlıdır. Dolayısıyla $t\to 0$ iken $\phi(u)$, bir limite gitmelidir. Gerekirse $s$ değerini değiştirerek bu limitin 0 olduğunu kabul edebiliriz.( Not edilmelidir ki $s$ nın değerinin değiştirilmesiyle Teorem 3.4' ün hipotezi etkilenmez.) Şimdi

$$\int_0^{\delta}|dg(u)|\le\int_0^{\delta}\log\frac{1}{u}|d\phi(u)|\;+\int_0^{\delta}\frac{1}{u}|\phi(u)|\,du \tag{3.19}$$

dır. (3.19)' un sağındaki ilk terim hipotezden sonludur.

$$g(t)=\phi(t)\log\frac{1}{t}\;\Rightarrow g(u)=\phi(u)\log\frac{1}{u}$$

(3.19) ifadesini açarsak

$$\int_0^{\delta}|dg(u)|\;=\int_0^{\delta}\left|\log\frac{1}{u}d\phi(u)\;-\frac{1}{u}\phi(u)du\right|\le\int_0^{\delta}\log\frac{1}{u}|d\phi(u)|\;+\int_0^{\delta}\frac{1}{u}|\phi(u)|\,du$$

olur. $u \to 0$ iken $\emptyset(u) \to 0$ olduğundan

$$|\phi(u)| \leq \int_0^u |d\phi(t)|$$

dır öyle ki (3.19)' un sağındaki ikinci terimin sonlu olması için

$$\frac{|\phi(u)|}{u} < \int_0^u \frac{|d\phi(u)|}{u} du \implies$$

$$\int_0^u \frac{|d\phi(u)|}{u} du \leq \int_0^\delta \frac{1}{u} \int_0^u |d\phi(t)|\, du \implies$$

$$\int_0^u \frac{|d\phi(u)|}{u} du \leq \int_0^\delta \int_0^u \frac{|d\phi(t)|}{u} du \implies$$

Fubini teoreminden integrasyon sırasını değiştirerek $0 \leq u \leq \delta$ ve $0 \leq t \leq u$ olmak üzere

$$\int_0^\delta \frac{|\phi(u)|du}{u} \leq \int_0^\delta \int_t^\delta \frac{du}{u} |d\phi(t)| \implies$$

$$\int_0^\delta \frac{|\phi(u)|du}{u} \leq \int_0^\delta \int_t^\delta \frac{du|d\phi(t)|}{u} \implies$$

$$\leq \int_0^\delta \ln u \Big|_t^\delta |d\phi(t)|$$

$$\leq \int_0^\delta \ln \frac{\delta}{t} |d\phi(t)| \implies$$

$$\int_0^\delta \frac{|\phi(u)|du}{u} \leq \int_0^\delta \ln \frac{\delta}{u} |d\phi(u)|$$

Hipotezden

$$\int_{0}^{\delta} \ln\frac{\delta}{u}|d\phi(u)| < +\infty$$

dır. O halde eşitsizliğin sağındaki ifade $+\infty$ u geçmez. Böylece istenen sonuç elde edilir. Çünkü

$$\int_{0}^{\delta}|dg(u)| \leq \int_{0}^{\delta} \log\frac{1}{u}|d\phi(u)| + \int_{0}^{\delta} \log\frac{\delta}{u}|d\phi(u)| < \infty$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

Whittaker [8], eğer $\phi(t)/t \in L(0,\delta)$ ise (3.1) serisinin $|E_\alpha|$ toplanabilir olduğunu ispatlamıştır.

Şimdi aşağıdaki teorem ispatlanacaktır.

**Teorem 3.5.** $\phi(t)/t^\eta \in L(0,\pi)$ şartı, $\eta < 2$ iken (3.1) serisinin $|E_\alpha|$ toplanabilir olduğunu garanti etmez[7].

**İspat :**

$$\tau_n = \int_{0}^{\pi} \phi(u)G_n(u)du \tag{3.20}$$

olduğundan Lemma 3.3' den (3.1) serisinin $|E_\alpha|$ toplanabilir olması için gerek ve yeter şart $0 \leq u \leq \pi$

için

$u^\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n(u)|}{n}$ nın esas sınırlı veya (3.7) den

$$u^\eta \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}(u)\left|\cos\left(u + (n-1)\theta(u)\right)\right| \tag{3.21}$$

nın $0 \leq u \leq \pi$ için esas sınırlı olmasıdır. Gerçekten

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_n|}{n} < \infty$ olması $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(u)G_n(u)du\right|}{n} < \infty$ olması demektir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(u)G_n(u)du\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\int_0^{\pi} \phi(u)G_n(u)du\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\int_0^{\pi} \frac{\phi(u)u^{\eta}G_n(u)du}{u^{\eta}}\right|$$

Kabulden $\frac{\phi(t)}{t^{\eta}} \in L(0,\delta)$ iken $\int_0^{\delta}\left|\frac{\phi(t)}{t^{\eta}}\right| < \infty$ olduğundan gösterilmelidir ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(u)G_n(u)du\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}u^{\eta}|G_n(u)| = u^{\eta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n(u)|}{n}$$

en sağdaki seri esas sınırlıdır. $M = \left[{}^{1}\!/_{u}\right]$ ve $N = \left[{}^{1}\!/_{u^2}\right]$ olsun. Bu durumda

$$u^{\eta}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u)\left|\cos\left(u + (n-1)\theta(u)\right)\right|$$

$$\geq u^{\eta}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u)\left|cos^2\left(u + (n-1)\theta(u)\right)\right|$$

$cos^2\left(u + (n-1)\theta(u)\right) = 1 + \cos\left(2u + 2(n-1)\theta(u)\right)$ olduğundan

$$u^{\eta}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u)\left|cos^2\left(u + (n-1)\theta(u)\right)\right|$$

$$= u^{\eta}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u)\left[\frac{1 + \cos\left(2u + 2(n-1)\theta(u)\right)}{2}\right]$$

$$= \frac{u^{\eta}}{2}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u) + \frac{u^{\eta}}{2}\sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u)\cos\left(2u + 2(n-1)\theta(u)\right)$$

$$= S_1 + S_2$$

dır. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq \eta \leq 2$ olduğunu kabul edelim.

Böylece $\rho^{n-1}$ fonksiyonu azalan olduğundan

$$S_2 = O\left\{u^\eta \rho^{M-1}(u) \left| \begin{matrix} max \\ M \leq n \leq N \end{matrix} \sum_{n=M}^{N} \cos\big(2u + 2(n-1)\theta(u)\big) \right.\right\}$$

$$= O\left\{u^\eta e^{-cMu^2}(u) \left| \begin{matrix} max \\ M \leq n \leq N \end{matrix} \sum_{n=M}^{N} \cos\big(2u + 2(n-1)\theta(u)\big) \right.\right\}$$

$$= O\left\{1 \left| \begin{matrix} max \\ M \leq n \leq N \end{matrix} \sum_{n=M}^{N} \cos\big(2u + 2(n-1)\theta(u)\big) \right.\right\}$$

$$= O\left\{\frac{1}{\sin\theta(u)}\right\}$$

$$= O(1)$$

dır.$\rho^2(u) \geq e^{-c_1 u^2}$ olacak şekilde pozitif bir $c_1$ sabiti vardır. Bundan dolayı $n \leq {}^{1}/_{u^2}$ için $\rho^{n-1} \geq c_2$ olacak şekilde en az bir $c_2 > 0$ vardır. Bu yüzden u→$0^+$ iken

$$S_1 = \frac{u^\eta}{2} \sum_{n=M}^{N} \rho^{n-1}(u) \geq \frac{u^\eta}{2} \sum_{n=M}^{N} c_2$$

$$S_1 \geq \frac{u^\eta}{2}(N-M)c_2 \rightarrow +\infty$$

dır. Çünkü u $\rightarrow 0^+ \Rightarrow u^\eta \rightarrow 0$ olduğundan $S_1 \geq 0 \Rightarrow S_1 \rightarrow \infty$ olur.

Bu yüzden (3.21) esas sınırlı değildir.

Böyle olmakla beraber aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 3.6.** Eğer $\phi(t)/t^2 \in L(0,\delta)$ ise (3.1) serisi eşlenik seriler için $|E_\alpha|$ toplanabilirdir [7].

**İspat :** (3.20) den

$$u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |G_n(u)| < \infty \tag{3.22}$$

ise $0 \leq u \leq \pi$ için (3.1) serisi $|E_\alpha|$ toplanabilirdir sonucu çıkar.

Şimdi (3.22)' in sol tarafı düzgün olarak $0 \leq u \leq \pi$ için $O(1)$ e eşittir. Gerçekten

$$|G_n(u)| = \left|n\alpha\rho^{n-1}(u)\cos\big(u + (n-1)\theta(u)\big)\right|$$

$$\leq \alpha n e^{-cnu^2} \Rightarrow$$

$$\alpha u^2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}(u)\left|\cos\big(u + (n-1)\theta(u)\big)\right|$$

$$\leq \alpha u^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cnu^2} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

$$= O\left(u^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cnu^2}\right)$$

$$= O\left(u^2 \int_1^{\infty} e^{-cyu^2} dy\right)$$

$$= O\left(u^2 \frac{e^{-cyu^2}}{-cu} \Big|_1^{\infty}\right)$$

$$= O\left(0 + \frac{e^{-cu^2}}{c}\right)$$

$$= O(1)$$

dır. Dolayısıyla (3.22) sağlanır.

# 4. FOURİER SERİLERİNİN EŞLENİK(CONJUGATE) SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ

Bu bölümde eşlenik (conjugate) seriler için aşağıdaki teoremin ispatı incelenecektir.

**Teorem 4.1.** Eğer $\psi(t)$=0 ve

$$\int_0^{\delta} \log\frac{1}{u}|d\phi(u)| < \infty$$

ise (3.2) eşlenik serisi $|E_\alpha|$ toplanabilirdir [7].

**İspat :**

$$F_n(u) = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}\, v \sin vu$$

olsun. Bu durumda

$$\tau_n = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}\, vB_v(x)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(u)F_n(u)du \qquad (4.1)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\delta} \psi(u)F_n(u)du \int_{\delta}^{\pi} \psi(u)F_n(u)du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}(X_n' + X_n'')$$

dir. Biliyoruz ki

$$F_n(u) = -\alpha n i \rho^{n-1}(u)\sin\big(u + (n-1)\theta(u)\big)$$

dır. Gerçekten

$$F_n(u) = \frac{d}{du}\left[\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} \cos vu\right]$$

$$= \frac{d}{du} Re\left\{\sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v}\, e^{ivu}\right\}$$

$$= \frac{d}{du} Re \left\{ \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \left(\alpha e^{iu}\right)^{v} (1-\alpha)^{n-v} \right\}$$

$$= \frac{d}{du} Re\left\{1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right\}^{n}$$

$$= Re \frac{d}{du}\left\{1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right\}^{n}$$

$$= Re\left\{in\alpha\left(1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right)\right\}^{n-1}$$

$$= Re\left\{in\alpha\left(1 - \alpha + \alpha(\cos u + i \sin u)\right)\right\}^{n-1}$$

$$\rho = \sqrt{(1 - \alpha + \alpha \cos u)^2 + (\alpha \sin u)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\alpha \sin u}{1 - \alpha + \alpha \cos u}$$

$$= Re\{in\alpha[\rho^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta)]\}$$

$$= -\alpha n i \rho^{n-1} \sin(n-1)\theta(u)$$

dır. Bu yüzden

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_n''|}{n}$$

$$= \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)c\delta^2} \right) \tag{4.2}$$

$$= 0(1)$$

dır. Şimdi

$$X_n' = \left\{ -\psi(u) \int_u^{\delta} F_n(t)dt \right\} \begin{matrix} \delta \\ 0 \end{matrix} + \int_0^{\delta} \left( \int_u^{\delta} F_n(t)dt \right) d\psi(u)$$

$$= \int_0^{\delta} \left( \int_u^{\delta} F_n(t)dt \right) d\psi(u)$$

dır öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\int_{u}^{\delta}F_n(t)dt\right| = 0\left(\frac{1}{u}\right)$$

ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|X_n'|}{n} < \infty \tag{4.3}$$

olur.

$$\int_{u}^{\delta}F_n(t)dt = \rho^n(u)\cos n\theta(u) - \rho^n(u)\sin n\theta(\delta)$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\int_{u}^{\delta}F_n(t)dt\right| = O\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|e^{-ncu^2}|}{n}\right)$$

$$= O\left(\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-cu^2y}}{y}dy\right)$$

$$= O\left(\int_{1}^{1/u}\frac{e^{-cu^2y}}{y}dy\right) + O\left(\int_{1/u}^{\infty}\frac{e^{-cu^2y}}{y}dy\right)$$

$$\int_{1/u}^{\infty}\frac{e^{-cu^2y}}{y}dy < \int_{1/u}^{\infty}e^{-cu^2y}dy$$

$$< \frac{e^{-cu^2y}}{-cu^2}\bigg|_{1/u}^{\infty} = 0 + \frac{e^{-cu}}{cu^2}$$

$$= \frac{e^{-cu}}{cu^2} = O\left(\frac{u}{u^2}\right) = O\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$e^{-cu} < ku \Rightarrow e^{-cu} = O\left(\frac{1}{u}\right)$$

dir.

Dolayısıyla (4.3) sağlanır ve (4.1), (4.2) ve (4.3) ten teorem sonuçlanır.

## 5. FOURİER SERİLERİNİN DİFERENSİYELLENEBİLİR SERİLERİNİN MUTLAK EULER TOPLANABİLMESİ

Son olarak diferansiyellenebilir seriler üzerine aşağıdaki teoremin ispatı incelenecektir.

**Teorem 5.1.** Eğer $\psi(+0) = 0$ ve

$$\int_0^\delta \frac{1}{u^2} |d\psi(t)| < \infty \tag{5.1}$$

ise (3.3) serisi $|E_\alpha|$ toplanabilirdir.

Herhangi bir $\eta < 2$ için

$$\int_0^\delta \frac{1}{u^\eta} |d\psi(u)| du < \infty \tag{5.2}$$

olmak üzere

$$\int_0^\delta \frac{1}{u^2} |d\psi(t)| < \infty \text{ ile } \int_0^\delta \frac{1}{u^\eta} |d\psi(u)| < \infty$$

yer değiştiremez [7].

**İspat:**

Biliyoruz ki

$$\tau_n = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v^2 B_n(x)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(u) \frac{d}{du} G_n(u)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\delta \psi(u) \frac{d}{du} + \int_\delta^\pi \psi(u) \frac{d}{du} \right) G_n(u)$$

$$= \frac{2}{\pi}(Y_n' + Y_n'')$$

dır. Buradan

$$\frac{d}{du}G_n(u) = -n(n-1)\alpha^2\rho^{n-2}(u)\sin\big(2u + (2n-2)\theta(u)\big)$$
$$- n\alpha\rho^{n-1}(u)\sin\big(u + (n-1)\theta(u)\big)$$
$$= O\big(n^2 e^{-ncu^2}\big)$$

dır. Gerçekten

$$B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, cosnx + b_n sinnx)$$

$$\psi(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}$$

olmak üzere

$$B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\cos nx\, dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\sin nx\, dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin n(t-x)\, dt$$

$t - x = u$ denirse

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \sin nu \, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \sin nu \, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+u) \sin nu \, du + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+u) \sin nu \, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(x-t) \sin n(-t) \, (-dt) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+u) \sin nu \, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t) \sin n(-t) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+u) \sin nu \, du$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t) \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \sin nt \, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \sin nt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(\mathrm{t}) \sin nt \, dt$$

bulunur. Buradan

$$B_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(t) \sin nt$$

olduğundan

$$\tau_n = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} \, v^2 B_n(x)$$

$$\tau_n = \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(u) \sin vu \, du$$

$$\tau_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(u) \sum_{v=1}^{n} \binom{n}{v} \alpha^v (1-\alpha)^{n-v} v^2 \sin vu \, du$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(u) \frac{d}{du} G_n(u) du$$

$$G_n(u) = \mathrm{Im} \frac{d}{du} \{1 - \alpha + \alpha e^{iu}\}^n$$

$$= \mathrm{Im} \left\{ i\alpha n e^{iu} \left(1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right)^{n-1} \right\}$$

olup

$$G_n'(u) = \mathrm{Im} \left\{ i\alpha n e^{iu} \left(1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right)^{n-1} \right\}'$$

$$= i\alpha n \left[ i e^{iu} \left(1 - \alpha + i\alpha e^{iu}\right)^{n-1} + \alpha i e^{2iu} (n-1) \left(1 - \alpha + \alpha e^{iu}\right)^{n-2} \right]$$

$$= i\alpha n \left[ i e^{iu} \rho^{n-1} e^{i(n-1)\theta(u)} + i\alpha(n-1) e^{2iu} \rho^{n-2} e^{2(n-2)\theta(u)} \right]$$

$$= -\alpha n \rho^{n-1} \sin[u + (n-1)\theta(u)] - \alpha^2 n \, (n-1) \rho^{n-2} \cos[2u + (2n-2)\theta(u)]$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Y_n''|}{n} = 0 \left( \int_\delta^\pi |\psi(u)| \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ncu^2} \right) du \right)$$

$$= 0 \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ncu^2} \right) \qquad (5.3)$$

$$= 0(1)$$

dır. Yine biliyoruz ki

$$Y_n' = \psi(\delta)G_n(\delta) - \int_0^{\delta} G_n(u)d\psi(u)$$

dır. (3.21) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n(\delta)|}{n} = 0\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nc\delta^2}}{n}\right) \tag{5.4}$$

$$= 0(1)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n(u)|}{n} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1}(u)\big|\cos\big(u + (n-1)\theta(u)\big)\big|$$

$$= 0\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ncu^2}\right)$$

$$= 0\left(\int_1^{\infty} e^{-cu^2y}dy\right)$$

$$= 0\left(\frac{1}{u^2}\right)$$

dır. Bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Y_n'|}{n} = 0(1) \tag{5.5}$$

dır. (5.3) ve (5.5) dan (3.5) sağlanır, böylece Teoremin birinci kısmı ispatlanır.

(5.1) nın yerine (5.2) yazılırsa, (5.3) ve (5.4) etkilenmez. Teorem 3.4' ün ispatından $u^{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G_n(u)|}{n}$ esas sınırlı olmayacağından toplanabilir bir $a(x)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|\int_0^{\delta} u^{\eta}\, a(u)G_n(u)du\right| = \infty$$

dır.

$\psi(u) = \int_0^u u^\eta \, a(u)du$ olsun. Bu durumda $\psi(+0) = 0$ dir. Buradan

$$\tau_n \geq \frac{2}{\pi}|Y_n'| - \frac{2}{\pi}|Y_n''|$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\delta G_n(u)d\psi(u)\right| - \frac{2}{\pi}|\psi(\delta)G_n(\delta)| - \frac{2}{\pi}|Y_n''|$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_n|}{n} = \infty$ elde ederiz ki bu teoremin ikinci kısmını ispatlar.

# SONUÇ

Bu çalışmada Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik ve diferensiyellenebilir serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi incelendi. Bu toplanabilme metodu ile ilgili literatürde yer alan teoremlerin ispatını incelemek için kullanılan lemmaların ifadesi ve ispatı incelendi. Çalışmada verilen temel tanım ve teoremlerin çalışmanın esasını oluşturan teoremlerin ispatındaki rolü tartışıldı. Kompleks fonksiyonlar teorisinde önemli bir formül olarak bilinen De Moivre formülünün çalışmadaki katkıları belirlendi. Esas sınırlılık kavramının ve Fubini teoreminin mutlak Euler toplanabilme teorisindeki etkileri gözlemlendi. Sınırlı ve sıfır dizisi kavramlarının çalışma boyunca ele alınan teoremlerde önemli rolleri tartışıldı. Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik ve diferensiyellenebilir serilerinin yakınsaklık şartları için teoremlere eklenecek toplanabilme çarpanları olarak bilinen hipotezler belirlendi. Çalışmada ortalama değer teoreminin farklı durumlarının uygulamalarda ve teoremlerin ispatındaki önemi gözlemlendi. İspatları incelenen teoremler yardımıyla literatürde olmayan Fourier serileri ile bu serilerin eşlenik ve diferensiyellenebilir serilerinin mutlak Euler toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı yapılabilir.

# KAYNAKLAR


1. Petersen, G. M., Regular matrix transformations, Cambridge, 1966.
2. Hardy, G. H., Divergent series, Oxford, 1949.
3. Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge, 1959.
4. Tripaty, N., On the absolute Hausdorff summability of Fourier series, Proc. London Math. Soc., 44 , 15-25, 1969.
5. Knopp, K. and Lorentz, G. G., Beitrage zur absoluten Limitierung, Arc. Math. 2, 10-16, 1949-1950.
6. Bosanquet, L. S. and Kestleman, H., The absolute convergence of a series of integrals, Proc. London Math. Soc., (2), 45, 88-97, 1939.
7. Kwee, B., The absolute Euler summability of Fourier series, J. Austra. Math. Soc. 13, 129–140,1972.
8. Whittaker, J. M., The absolute summability of Fourier series, Proc. Edinburg Math. Soc., 2, 1-5, 1930.

# ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Kayseri'de doğan Bünyamin ELTURAN ilköğretimini Battalgazi ilköğretim okulu lise öğrenimi ise Mustafa Eminoğlu Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında tamamlamıştır.

2016 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

**İletişim Bilgileri:**

**Adres:** Fatih Mahallesi Dündar Taşer Caddesi Sönmez Sokak 4/ 8
No:38350 Melikgazi/KAYSERİ

**Telefon:** 0507 839 38 10 / 0 352 247 44 16

**E-posta:** belturan38@gmail.com