T.C
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

ORTOGONAL SERİLERİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

İmran AKGÜN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2018

T.C
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

ORTOGONAL SERİLERİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

İmran AKGÜN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Yozgat 2018

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315007 numaralı öğrencisi İmran AKGÜN'ün hazırladığı **"Ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi üzerine"** başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 31/07/2018 Salı günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Muammer KULA

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç.Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 31.../07.../2018 tarih ve 31... sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

2.../9.../2018

Prof. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ORTOGONAL SERİLERİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

İmran AKGÜN

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2018; Sayfa: 30

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın amacı ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesini incelemektir. Birinci bölümde toplanabilme teorisinin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı veridi. Bu teoremleri ispatlamak için kullanılan lemma verildi. Dördüncü bölümde ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili teoremlerin ispatı incelendi. Beşinci bölümde literatürde olmayan Fourier serilerinin mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ile ilgili bir teorem ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Fourier serisi, Hausdorff toplanabilme, Euler toplanabilme, Sınırlı salınımlılık, Regülerlik, Moment sabiti.

ON ABSOLUTE GENERALİZED HAUSDORFF SUMMABİLİTY OF ORTHOGONAL SERİES

İmran AKGÜN

Yozgat Bozok University
Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2018; Page: 30

Thesis Supervisor: Associate Professor Doctor Abdullah SONMEZOGLU

ABSTRACT

The aim of this study which compose of five parts, is to investigate absolute generalized Hausdorff summability of orthogonal series. In the first chapter, information about the historical development of the theory of summability is given. In the second chapter, the basic definitions and theorems used in this study are given. In the third chapter ,the proofs of theorems with respect to absolute generalized Nörlund summability of orthogonal series are investigated. Using lemmas to prove these theorems are given. In the fourth chapter ,the proofs of theorems with respect to absolute generalized Hausdorff summability of orthogonal series are investigated. In the fifth section, a theorem with respect to absolute generalized Nörlund summability of Fourier series that is no in literatüre is proved.

Keywords: Fourier series, Hausdorff summability, Euler summability, Bounded variation, Regularity, Moment constant.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde yardımlarını gördüğüm danışmanım Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU' na ve ayrıca kardeşim Samet AKGÜN' e teşekkür ederim.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\{s_n\}$: Reel veya kompleks sayılar dizisi

(a_{nv}) : Satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris

μ_n : Moment sabiti

(H, μ) : Hausdorff dönüşümü

(C, α) : $\alpha.$ mertebeden Cesa'ro dönüşümü

(E, α) : $\alpha.$ mertebeden Euler dönüşümü

a_n : Fourier katsayısı

b_n : Fourier katsayısı

$BV[0,1]$: [0,1] aralığında tanımlı sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı

$\Delta\mu_v = \mu_v - \mu_{v+1}$: μ_v nin simetrik farkı

$s_n = O(1)$: $\{s_n\}$ dizisi sınırlı

$s_n = o(1)$: $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$

$p(x) \sim q(x) \quad (x \to a)$: $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = 1$

$f(a^+)$: $\lim_{x\to a^+} f(x)$

$p * q$: p ile q nun konvolüsyonu (evrişimi)

$L^2(a,b)$: (a,b) aralığında 2.mertebeden integrallenebilen fonksiyonların sınıfı

(N,p,q) : Genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme

$|N,p,q|$: Mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme

$h.h.h.y$: hemen hemen her yerde

$|\boldsymbol{M}, \boldsymbol{U_n}, \gamma|_{\boldsymbol{\beta}}$ **:** β.dereceden mutlak Hausdorff toplanabilme

$\boldsymbol{K}$ **:** Her durumda aynı olması gerekmeyen pozitif sayı

$\boldsymbol{\nabla a_n = a_n - a_{n-1}}$

$\boldsymbol{s_n^{(1)} = \sum_{v=0}^{n} s_v}$

1. GİRİŞ

Bir yakınsaklık türü olarak toplanabilme teorisi fonksiyonel analiz ve uygulamalı bilimlerde önemli uygulama alanlarına sahiptir. Serilerin yakınsaklığının incelenmesi çok eski tarihlere dayanmaktadır. Bu yakınsaklık konusu ile ilgilenen Leonard Euler (1707-1783) olmakla beraber serilerin yakınsak olmaması bu dönemde fazla ele alınmadı. Yakınsak olmayan seriler görsele dayalı dünya düşüncesine göre mantıksız bulundu ve bu nedenle ıraksak olan serilerin incelenmemesi mantıklı olacaktı.

Euler, $f(1) = s$ ve küçük(modül olarak küçük) z değerleri için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisinin $f(z)$ değerine yakınsaması halinde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ıraksak serisini $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şekline dönüştüren toplanabilme yöntemini geliştirdi. Bu yolla $|z| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

yakınsaması vardır. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = [\frac{1}{1+z}]_{z=1} = \frac{1}{2}$ dır. Bununla birlikte $z \neq 1$ için

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

ve

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = \frac{1+z}{1+z+z^2}$$

olduğundan

$$\frac{1+z}{1+z+z^2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \cdots$$

dır ve bunun sonucu olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \left[\frac{1+z}{1+z+z^2}\right]_{z=1} = \frac{2}{3}$$

dır. Bu şekilde birinin Eulerin yorumuyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisine neredeyse herhangi bir değer karşılık getirebileceği görünmektedir.

Bu açıklamalar ve örneklerden sonra toplanabilme metodunda esas amaç ıraksak yani yakınsak olmayan bir seriyi belli bir değere yakınsatmaktır. Toplanabilme metoduyla genellikle sınırlı ancak ıraksak olan seriler yakınsak seriye dönüştürülebilir. Ancak burada ‘’toplanabilme metodu her ıraksak seriyi yakınsak seriye dönüştürür’’ sonucu çıkarılmamalıdır.

Mutlak genelleştirilmiş toplanabilme metodu ele alınırken serilerin yakınsak olmasını sağlayan bazı toplanabilme çarpanlarına ihtiyaç duyulacağından teoremlerin hipotezinde bu çarpanlara yer vermek oldukça önemli olmaktadır. Ancak burada unutulmamalıdır ki bir teoreme çok hipotez koymak teoremi zayıflatır.

Bazı yazarlar tarafından ortogonal seriler teorisinde mutlak toplanabilme olarak adlandırılan ilginç bir konu ele alındı.

Örneğin, Tandori [1], Leindler [2-5], Okuyama ve Tsuchikwa [6], Okuyama [7,8], Szalay [9], Billard [10], Grepagevskaya [11], Sperakov ve Kudrajatsev [12]'nın çalışmaları mevcuttur. 2002'de Okuyama [8], genelleştirilmiş Nörlund ortalamalarını kullanarak hemen hemen her yerde mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilir olma koşulu altında bir ortogonal serinin katsayılarına göre yeterli koşulları veren iki teorem ispatlandı.

Borwien [13] tarafından verilen mutlak toplanabilmenin bir tanımının bir genellemesi, [14] de Borwien'in "mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilirlik" isimli çalışmasında verilir. Yukarda bahsedilen makalelerin sonuçlarının bazılarını genelleştiren ([15-17]) tarafından bir takım sonuçlar ispatlandıktan sonra, burada ortogonal bir serinin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilir olması şartı altında yeterli herhangi bir koşul bulmaya çalışılmış ve bu tezin asıl amacını oluşturmuştur.

Bu çalışmada, ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili literatürde yer alan teoremlerin ispatı incelendi. Bu teoremlerin ispatını incelerken genelleştirilmiş Hausdorff metodunun özel bir durumu olan genelleştirilmiş mutlak Nörlund toplanabilme ile ilgili hemen hemen her yerde toplanabilme teoremlerinin ispatı incelendi. Son olarak mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme metodunun özel bir ortogonal seri olan Fourier serilerine uygulaması olan ve literatürde olmayan bir teoremin ispatı yapıldı.

Mutlak toplanabilme başlangıçta $(C,1)$ Cesa'ro aritmetik ortalama , daha sonra ise Nörlund, Riesz, (C,α), (H,μ) metotları yardımıyla geliştirildi.

Bu metotların aralarındaki kapsama bağıntılarından yararlanarak serilerin mutlak genelleştirilmiş Cesa’ro toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme, hemen hemen her yerde mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Riesz toplanabilme, mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilme kavramları ele alındı ve bu kavramlarla ilgili teoremlerin ispatı literatürde yer aldı.

.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. F reel veya kompleks sayıların kümesi $v = 0,1,2,...$ için $a_{nv} \in F$ olmak üzere $A = (a_{nv})$ sonsuz matris ve $\{s_n\}$ dizisi F de bir dizi olsun. $\{s_n\}$ dizisinden $\{t_n\}$ dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v \qquad (n = 0,1,2,...)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\{t_n\}$ dizisine $\{s_n\}$ dizisinin A- dönüşüm dizisi denir. Bu dönüşümün var olabilmesi her n için $\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v$ serisinin yakınsaklığına bağlıdır [18].

Tanım 2.2. Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olsun. Ayrıca $A = (a_{nv})$ sonsuz matrisi yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya $\{s_n\}$ dizisinin $\{t_n\}$ dönüşüm dizisi

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v$$

olarak tanımlanmak üzere $\lim_{n\to\infty} t_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya $\{s_n\}$ dizisine s değerine A-limitlenebilir (toplanabilir) denir [18].

Teorem 2.3. $\{\mu_n\}$ dizisine karşılık gelen $\{s_n\}$ dizisinin Hausdorff dönüşümü

$$t_n = \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \Delta^{n-v}\mu_v s_v$$

ile tanımlanır [19].

Tanım 2.4. $f(x)$, $(-\pi,\pi)$ aralığında L (Lebesgue anlamında) integrallenebilen 2π periyotlu periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{v=1}^{\infty}(a_v cosvx + b_v sinvx) = \sum_{v=0}^{\infty} A_v\,(x) \qquad (2.1)$$

ile tanımlanır. Ayrıca (2.1) Fourier serisinin eşlenik serisi ise

$$\sum_{v=1}^{\infty}(a_v sinvx - b_v cosvx) \qquad (2.2)$$

ile tanımlanır [20].

Tanım 2.5 . $p = (p_n)$, $q = (q_n)$ diziler p ve q nun konvolüsyonu

$$r_n = (p * q)_n = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v}\, q_v = \sum_{v=0}^{n} p_v\, q_{n-v}$$

ile tanımlanır.

Her n için $r_n = (p * q)_n \neq 0$ olduğunda kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi için Nörlund dönüşümü dizisi

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{r_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m s_m$$

ile tanımlanan $\{t_n^{p,q}\}$ dizisidir.

Eğer $\lim_{n\to\infty} t_n^{p,q} = t$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi veya $\{s_n\}$ dizisi t değerine genelleştirilmiş Nörlund anlamında toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in (N, p, q)$ ile gösterilir [21].

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in |N, p, q|$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$ (a, b) de ortogonal sistem olsun.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 \text{ ve } \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = \|\varphi_i\|^2 = \|\varphi_i\| = 1$$

ise $\{\varphi_n(x)\}$, $\{\varphi_n(x)\}$ de ortonormal sistem olur [21].

Tanım 2.7 : $l^2(a, b) = \{ f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \}$

Tanım 2.8. Ölçümü sıfır olan cümle dışında bir önerme doğru ise hemen hemen her yerde doğrudur. Yani ,

$\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = 0$ ise hemen hemen her yerde $f = g$ dir.

Teorem 2.9. (Toplamın sırasını değiştirme kuralı)

$$\sum_{v=0}^{n} a_v \sum_{j=0}^{v} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{v=j}^{n} a_v$$

dır.

Teorem 2.10. (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği):

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2}$$

veya

$$\int_a^b |fg|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2\right)^{1/2}$$

dır.

Teorem 2.11. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \epsilon l_p, g \epsilon l_p$ ise

$$\int_a^b |fg|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}$$

dır.

3. ORTOGONAL SERİLERİN MUTLAK GENELLEŞTİRLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Kısmi toplamlar dizisi { S_n }olan sonsuz bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. p , terimleri reel sayılar olan $\{p_n\}$ dizisini belirtsin. Verilen iki p ve q dizileri için $(p_* \mathrm{q})_n$ konvolüsyonu,

$$(p_* \mathrm{q})_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \, q_{n-m} = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \, q_m$$

olarak tanımlanır.

Her n için $(p * \mathrm{q})_n \neq 0$ olduğunda, $\{S_n\}$ dizisinin genelleştirilmiş Nörlund dönüşümü

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{(p_* q)_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} q_m s_m$$

tanımlanarak elde edilen $\{t_n^{p,q}\}$ dizisidir.

Eğer, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| t_n^{p,q} - t_{n-1}^{p,q} \right|$ serisi yakınsak ise, bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi mutlak (N, p, q) toplanabilirdir ve kısaca $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in |N, \mathrm{p}, \mathrm{q}|$ ile gösterilir.

Toplanabilmenin |N, p, q| metodu Tanaka [22] tarafından tanımlandı.

$\{\varphi_n(x)\}, (a,b)$ aralığında tanımlı bir ortonormal sistem olsun. $f(x) \in \ell^2(a,b)$ ve

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3.1}$$

olduğunu varsayalım, burada

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \qquad (n = 0,1,2,...)$$

dır.

[8]'de,

$$R_n := (p_* q)_n, \qquad R_n^j := \sum_{m=j}^{n} p_{n-m} q_m$$

yazılır burada,

$R_n^{n+1} = 0, R_n^0 = R_n$, 'dir ve aşağıdaki iki teorem ispatlanacaktır.

Bu bölümü oluşturan esas teoremi ifade etmeden önce teoremin ispatında kullanılacak aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır.

Lemma 3.1. (Beppo Levi teoremi)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0, \infty)$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu taktirde ,

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu$$

dır.

İspat: $g_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ olacağından monotan yakınsaklık teoreminden ,

$$\begin{aligned}
\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu &= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 + f_2 + \cdots + f_n) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\right) d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\mu
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.2. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2\left|c_j\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

serisi yakınsak ise, bu taktirde, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ ortogonal serisi hemen hemen her yerde $|N,p,q|$toplanabilirdir. [6]

İspat: $\{s_n\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(\mathrm{x})$ in kısmi toplamlar dizisi olmak üzere, toplamın sırasını değiştirme kuralını kullanarak ,

$t_n^{p,q}(x), \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ serisinin (N, p_n, q_n) ortalaması olsun. Bu durumda,

$$t_n^{p,q}(x)=\frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k\sum_{j=0}^{k} c_j\varphi_j(x)$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k\sum_{j=0}^{k} c_j\varphi_j(x)$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)\sum_{k=j}^{n} p_{n-k}q_k$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{j=0}^{n} R_n^j c_j\varphi_j(x)$$

Burada

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$$

dır.

O halde,

$$t_n^{p,q}(x)-t_{n-1}^{p,q}(x)=\frac{1}{R_n}\sum_{j=0}^{n}R_n^j c_j\varphi_j(x)-\frac{1}{R_{n-1}}\sum_{j=0}^{n-1}R_{n-1}^j c_j\varphi_j(x)$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n}R_n^j c_j\varphi_j(x)-\frac{1}{R_{n-1}}\sum_{j=1}^{n-1}R_{n-1}^j c_j\varphi_j(x)$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{j=1}^{n}R_n^j c_j\varphi_j(x)-\frac{1}{R_{n-1}}\sum_{j=1}^{n}R_{n-1}c_j\varphi_j(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)c_j\varphi_j(x)$$

elde edilir. Schwarz eşitsizliğini ve ortogonalliği kullanırsak, buradan,

$$\int_a^b\left|\Delta t_n^{p,q}(x)\right|dx\le(b-a)^{1/2}\left\{\int_a^b\left|\Delta t_n^{p,q}(x)\right|^2dx\right\}^{1/2}$$

$$=(b-a)^{1/2}\int_a^b|t_n-t_{n-1}|^2$$

$$\le(b-a)^{1/2}\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)|c_j||\varphi_j(x)|\right]^2dx$$

$$\le(b-a)^{1/2}\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2|c_j|^2\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(x)|^2\right]dx$$

$$\le(b-a)^{1/2}\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2|c_j|^2\right]dx$$

$$\le(b-a)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2|c_j|^2$$

$$=(b-a)^{1/2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2|c_j|\right\}^{1/2}$$

dır.

Böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \left|\Delta t_n^{p,q}(x)\right| dx \le (b-a)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \left|c_j\right|^2\right\}^{1/2}$$

elde edilir. Sağ taraftaki serinin yakınsaklık kabulü ve Beppo-Levi Lemması kullanılarak ve karşılaştırma teoreminden yararlanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. $\{\Omega(n)\}$ pozitif terimli dizisi için $\frac{\Omega(n)}{n}$ artmayan bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ serisi yakınsak olsun. $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ negatif olmayan diziler olmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2 \Omega(n)\omega(n)$$

serisi yakınsak ise bu durumda,

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ ortogonal serisi hemen hemen her yerde $|N,p,q|$ dur, burada $w(n)$ ise

$$\omega(\mathrm{j}) := \mathrm{j}^{-1}\sum_{n=j}^{\infty} n^2\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2$$

olarak tanımlanır [6].

İspat: Schwarz eşitsizliğinden , toplamın sırasını değiştirme kuralından ve teoremin hipotezlerini kullanarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \left|\Delta t_n^{p,q}(x)\right| dx \le A\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \left|c_j\right|^2\right\}^2$$

$$\le A\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \left|c_j\right|^2\right\}$$

$$\le A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}\; n\Omega(n)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \left|c_j\right|^2$$

$$\leq A \sum_{j=1}^{\infty} \left| c_j \right|^2 \sum_{n=j}^{\infty} n\Omega(n) \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2$$

$$\leq A \sum_{J=1}^{\infty} \left| c_j \right|^2 \sum_{j=j}^{\infty} \frac{n^2\ \Omega(n))}{n} \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2$$

$$\leq A \sum_{J=1}^{\infty} \left| c_j \right|^2 \sum_{J=1}^{\infty} \frac{n^2\Omega(j)}{j} \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2$$

$$\leq A \sum_{j=1}^{\infty} \left| c_j \right|^2 \frac{\Omega(j)}{J} \sum_{n=j}^{\infty} n^2 \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2$$

$$\leq\ A \sum_{J=1}^{\infty} \left| c_j \right|^2 \Omega(j) w(j) < \infty$$

elde edilir. Böylece , Teorem 3.2’nin ispatındaki aynı teknikler kullanılarak teoremin ispatı tamamlanır.

4. ORTOGONAL SERİLERİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ HAUSDORFF TOPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Bu bölümde, ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi üzerine iki teoremin ispatı incelenecektir. Bu teoremler, mutlak Hausdorff toplanabilme altında, bir ortogonal serinin katsayılarına göre bazı yeterli koşullar verir. Bunlara ilave olarak, bilinen birkaç sonucun, elde edilen yeni sonuçların doğal birer sonuçlar olduğu da doğrulanacaktır. Bu bölümü oluşturan teoremin ispatında 3. bölümde kullanılan lemmadan faydalanılacaktır. Ayrıca kullanılacak ispat tekniği de 3. bölümdeki ispat tekniğine benzer olacaktır.

Aşağıdaki tanım Borwein [14] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 4.1

$M := (a_{nk})$ $(n, k = 0,1, \dots)$ bir matris olsun. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi ve onun kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ için

$$\sigma_n = M(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$$

ve

$$U_n = 1 - u_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k$$

olsun.

$\mathrm{k} = 1,2, \dots$ için $u_k > 0$ olmak üzere γ bir reel sayı ve $\beta > 0$ olduğunu varsayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\gamma\beta+\beta-1} u_n^{1-\beta} \left|\sigma_n - \sigma_{n-1}\right|^{\beta} < \infty$$

ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine mutlak $\left|\mathrm{M}, u_n, \gamma\right|_{\beta}$ toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \left|M, u_n, \gamma\right|_{\beta}$ ile gösterilir [21].

Bu çalışmanın esas amacı, (3.1) deki ortogonal serinin $|M, u_n, \gamma|_\beta, 1 \le \beta \le 2$ toplanabilirliği için Teorem 3.2 ve 3.3'ü genelleştirmektir. Esas sonuçların gösterimi için, bazı ekstra notasyonları ve ifadeleri tanıtmak gerekir. İlk olarak, $M := (a_{nk})$'nın bir normal matris olduğunu yani, diagonal (köşegen) terimleri sıfırdan farklı bir alt üçgensel matris olduğunu kabul edelim. İkinci olarak, diğer iki $\bar{M} := (\bar{a}_{nk})$ ve $\widehat{M} := (\widehat{a}_{nk})$ alt matrislerini aşağıdaki gibi ilişkilendirelim:

$$\bar{a}_{nk} := \sum_{i=j}^{n} a_{ni} \qquad (n, i = 1,2,\ldots)$$

ve

$$\widehat{a}_{00} = \bar{a}_{00} = a_{00}, \widehat{a}_{nk} = \bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n-1,k}, \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

Bu çalışma boyunca, K sabiti farklı içeriklerde farklı değerlere sahip olan ve sadece K' ya bağlı olan pozitif bir sabiti belirtir.

Beppo Levi'ye [23] ait aşağıdaki lemma fonksiyonlar teorisinde sıkça kullanılır. Bu lemma, esas sonuçları ispatlamak için kullanılacaktır.

Lemma 4.2.

Eğer $f_n(t) \in L(E)$ negatif olmayan fonksiyonlar ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(t)\,dt < \infty \tag{4.1}$$

ise bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt$$

serisi E üzerinde hemen hemen her yerde bir $f(t) \in L(E)$ fonksiyonuna yakınsaktır. Üstelik, (4.1) serisi aynı zamanda $f(t)$ fonksiyonuna $L(E)$ nin normuna göre yakınsaktır.Yani,

$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \int_E \; f_n \, dt - f \right\| \to 0$

dır.

Teorem 4.3. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1}\right)^2 \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2\right]^{\frac{\beta}{2}}$$

serisi $1 \leq \beta \leq 2$ için yakınsak ise, bu taktirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

ortogonal serisi hemen hemen her yerde $\left|M, u_n, \gamma\right|_{\beta}$ toplanabilirdir [21].

İspat: $1 \leq \beta \leq 2$ olsun. $\sigma_n(x) = M(s_n)(x)$ dönüşümü için, toplamın sırasını değiştirme kuralını kullanarak,

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \sum_{j=0}^{k} c_j \varphi_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x) \sum_{k=j}^{n} a_{nk} = \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{nj} c_j \varphi_j(x)$$

elde ederiz. Burada $\sum_{j=0}^{k} c_j \varphi_j(x)$ (3.1) serisinin k. mertebeden kısmî toplamıdır. O halde

$$\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{nj} c_j \varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,j} c_j \varphi_j(x)$$

$$= \bar{a}_{nn} c_n \varphi_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\bar{a}_{n,j} - \bar{a}_{n-1,j}\right) c_j \varphi_j(x)$$

$$= \hat{a}_{nn} c_n \varphi_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \hat{a}_{n,j} c_j \varphi_j(x)$$

dir. Son eşitliğe Hölder eşitsizliğini ve ortogonalliği kullanarak $r + s = rs$ olacak şekildeki r ve $s = \frac{2}{\beta}$ için

$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = 1 \;\rightarrow\; r + s = rs$

$rs - r = s \rightarrow r = \frac{s}{s-1}$

$r = \frac{\frac{2}{\beta}}{\frac{2}{\beta}-1} = \frac{\frac{2}{\beta}}{\frac{2-\beta}{\beta}} = \frac{2}{2-\beta}$

dır. Böylece,

$\int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|^\beta \, dx$

$= \int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|^\beta . 1 \, dx$

$= \left(\int_a^b \left(|\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|^\beta\right)^s\right)^{1/s} \left(\int_a^b 1^r \, dx\right)^{\frac{2-\beta}{2}}$

$= \left(\int_a^b |\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)|^\beta \, dx\right)^{\beta/2} (b-a)^{1-\frac{\beta}{2}}$

$= (b-a)^{1-\frac{\beta}{2}} \left[\int_a^b \left|\sum_{j=0}^n \hat{a}_{nj} c_j \varphi_j\right|^2 dx\right]^{\beta/2}$

$= (b-a)^{1-\frac{\beta}{2}} \left(\int_a^b \left|\sum_{j=0}^n \hat{a}_{nj} c_j \varphi_j\right|^2 dx\right)^{\frac{\beta}{2}}$

$= (b-a)^{1-\frac{\beta}{2}} \left(\sum_{j=0}^n \left|\hat{a}_{nj}\right|^2 \left|c_j\right|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$

elde ederiz. Böylece pozitif terimli serilerde karşılaştırma teoreminden yararlanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\gamma\beta+\beta-1} u_n^{1-\beta} \int_a^b \left|\sigma_n(x) - \sigma_{n-1}(x)\right|^\beta dx$$

$$\leq (b-a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1}\right)^2 \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2\right]^{\frac{\beta}{2}} \tag{4.2}$$

serisi, eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak olduğu kabulünden dolayı (hipotezden) yakınsaktır. Aynı zamanda $\left|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)\right|$ fonksiyonlarının negatif olmayan ve integrallenebilir olduğunu da göz önüne alırsak Lemma 4.2'ye göre,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\gamma\beta+\beta-1} u_n^{1-\beta} \left|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)\right|^{\beta}$$

serisi hemen hemen her yerde yakınsaktır. $\beta = 1$ için Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ve $\beta = 2$ için sadece ortogonalliği kullanarak iddiayı ispatlarız. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi belli ek koşullara sahip pozitif bir dizi ihtiva eden bir ortogonal serinin $\left|M, u_n, \gamma\right|_{\beta}$ toplanabilirliğine ilişkin genel bir teorem ispatlayacağız. Bu nedenle öncelikle

$$\phi^{(\beta,\gamma)}(j) := \frac{1}{j^{\frac{2}{\beta}-1}} \sum_{n=j}^{\infty} \left(n^{\frac{2}{\beta}-1} U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \left|\hat{a}_{n,j}\right| \right)^2 \tag{4.3}$$

tanımlayalım. Böylece aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.4. $1 \le \beta \le 2$ olsun ve $\{\Omega(n)\}$ pozitif bir dizisi için $\frac{\Omega(n)}{n}$ artmayan bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Omega(n)}$$

serisi yakınsak olacak şekilde $\{\Omega(n)\}$ pozitif bir dizi olsun.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \Omega^{\frac{2}{\beta}-1}(j) \phi^{(\beta,\gamma)}(j)$$

serisi yakınsak ise, bu taktirde hemen hemen her yerde,

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \in \left|M, u_n, \gamma\right|_{\beta}$ dır. Burada $\phi^{(\beta,\gamma)}(n)$, (4.3) deki gibi tanımlıdır [21].

İspat: (4.2) eşitsizliğine Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\gamma\beta+\beta-1} u_n^{1-\beta} \int_a^b \left|\sigma_n(x)-\sigma_{n-1}(x)\right|^{\beta} dx \leq$$

$$\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2 \right]^{\frac{\beta}{2}}$$

$$= K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\Omega(n))^{\frac{2-\beta}{2}}} \left[\left(n\Omega(n)\right)^{\frac{2}{\beta}-1} \left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2 \right]^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\leq K \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\Omega(n))} \right)^{\frac{2-\beta}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\Omega(n)\right)^{\frac{2}{\beta}-1} \left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2 \right]^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\leq K \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \left(n\Omega(n)\right)^{\frac{2}{\beta}-1} \left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \right\}^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\leq K \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \left(\frac{\Omega(j)}{j} \right)^{\frac{2}{\beta}-1} \sum_{n=j}^{\infty} n^{2\left(\frac{2}{\beta}-1\right)} \left(U_n^{\gamma+1-\frac{1}{\beta}} u_n^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \right\}^{\frac{\beta}{2}}$$

$$= K \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \Omega^{\frac{2}{\beta}-1}(j) \emptyset^{(\beta,\gamma)}(j) \right\}^{\frac{\beta}{2}}$$

$$= K \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_j\right|^2 \Omega^{\frac{2}{\beta}-1}(j) \phi^{(\beta,\gamma)}(j) \right\}^{\frac{\beta}{2}}$$

elde ederiz. Bu ise hipotezden sonludur çünkü,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \Omega^{\frac{2}{\beta}-1}(j) \phi^{(\beta,\gamma)}(j)$$

serisi hipotezde yakınsak idi. Böylece ispat tamamlanır.

$n = 0,1,2, \ldots$ için $u_n = 1$ ise bu taktirde Tanım (4.1) deki eşitsizlik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\beta+\beta-1} \left|\sigma_n - \sigma_{n-1}\right|^{\beta} < \infty$$

serisine denktir, ki bu seride Borwein [13] tarafından verilen mutlak toplanabilmenin tanımında yer alan tanımlanmış eşitsizliktir. Bu nedenle Teorem 4.4'ten hemen aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 4.5.

Eğer $1 \leq \beta \leq 2$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{2\left(\gamma+1-\frac{1}{\beta}\right)} \sum_{j=0}^{n} \left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \left|c_j\right|^2 \right]^{\frac{\beta}{2}}$$

serisi yakınsak ise, bu taktirde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

ortogonal serisi hemen hemen her yerde $\left|M, \gamma\right|_{\beta}$ toplanabilirdir [16].

Sonuç 4.6.

$1 \leq \beta \leq 2$ olsun ve pozitif bir $\{\Omega(n)\}$ dizisi için $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ artmayan bir dizi ve

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{n}\Omega(n)}$ serisi yakınsak olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|c_j\right|^2 \Omega^{\frac{2}{\beta}-1}(j)\, \theta^{(\beta,\gamma)}(j)$$

serisi yakınsak ise, bu taktirde hemen hemen her yerde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \in |M,\gamma|_\beta$$

dır[16]. Burada $\phi^{(\beta,\gamma)}(n)$,

$$\phi^{(\beta,\gamma)}(j) := \frac{1}{j^{\frac{2}{\beta}-1}} \sum_{n=j}^{\infty} \left(n^{\gamma+\frac{1}{\beta}} \left| \hat{a}_{n,j} \right| \right)^2$$

olarak tanımlanır.

Burada belirtelim ki, aynı zamanda Teorem 3.2 de, Teorem 4.4'ten elde edilen sonuçlardır. Bunu görmek için, Teorem 4.4'te n=0,1,2,.. için

$u_n = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 1$ ve $a_{nk} = \frac{p_{n-k} q_k}{R_n}$ almak yeterlidir.

Yani bu şekildeki özel koşullar için,

$$\hat{a}_{nk} = \bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k} = \sum_{j=k}^{n} a_{nj} - \sum_{j=k}^{n-1} a_{n-1,j}$$

$$=\frac{1}{R_n} \sum_{j=k}^{n} p_{n-j} q_j - \frac{1}{R_{n-1}} \sum_{j=k}^{n-1} p_{n-1,j}\, q_j = \frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

elde edilir ki $\left| \hat{a}_{n,k} \right|^2 = \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2$ dır ve benzer şekilde Teorem 3.2 i sağlayan

$$\phi^{(1,0)}(j) = \frac{1}{j} \sum_{n=j}^{\infty} \left[n \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right) \right]^2$$

ifadesi elde edilir.

Uyarı 4.7.

Aynı zamanda belirtelim ki; eğer u_n, γ, β'nın değerlerini yukarıdaki gibi ve

(i) $a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n}$

(ii) $a_{nk} = \frac{q_k}{Q_n}$

alırsak, [6]'in sonuçları hemen elde edilebilir ve aynı zamanda [8]'te ispatlanan sonuçlar görülebilir

5. FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Tanım 5.1.

Kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. p terimleri reel sayılar olan $\{p_n\}$ dizini belirtsin. Verilen iki p ve q dizileri için $(p * q)_n$ konvolüsyonu

$$r_n = (p * q)_n = \sum\nolimits_{m=0}^{n} p_m\, q_{n-m} = \sum\nolimits_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m$$

olarak tanımlanır. Her n için $(p * q)_n \neq 0$ olduğunda, $\{s_n\}$ dizisinin genelleştirilmiş Nörlund dönüşüm dizisi

$$t_n{}^{p,q} = \frac{1}{(p * q)_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m s_m$$

tanımlanarak elde edilen $\{t_n{}^{p,q}\}$ dizisidir. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}\right)^{\lambda-1} |t_n - t_{n-1}|^{\lambda}$$

serisi yakınsaksa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine $|N, p, q|_{\lambda}$ toplanabilirdir denir [24].

Teorem 5.2. $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ dizileri $\{\Delta p_{n-v} q_v\}$ dizisi sınırlı olacak şekilde sırasıyla artan ve azalan pozitif diziler olsun.

$\{r_n\}$ dizisi de $n \to \infty$ iken $r_n \to \infty$ ve $\{\nabla r_n\}$ artan olacak şekilde bir artan dizi olsun. Ayrıca da

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n |s_n|}{\nabla r_n}\right)^{\lambda} < \infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n |s_n{}^{(1)}|}{\nabla r_n}\right)^{\lambda} < \infty$

3) $\sum_{n=v+1}^{\infty} (p_{n-v})^{1-\lambda} = O\left(\frac{q_v{}^{2\lambda-1}}{(r_v - r_{v-1})^{\lambda}}\right)$

şartları sağlansın. Bu durumda

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

serisi $\lambda \geq 1$ için $|N, p, q|_{\lambda}$ toplanabilirdir.

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ serisinin kısmı toplamlar dizisi $\{s_n\}$ olsun.

$$t_n - t_{n-1} = \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right) + \frac{p_{n-v-1}}{r_n} q_v s_v$$

$$= \sum_{v=0}^{n} \left(\frac{p_{n-v}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_n} - \frac{p_{n-v-1}}{r_{n-1}}\right) q_v s_v$$

$$= \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n} (p_{n-v} - p_{n-v-1})\, q_v s_v + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right) \sum_{v=0}^{n} p_{n-v-1}\, q_v s_v$$

$$= \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n-1} \Delta(p_{n-v} - p_{n-v-1})\, q_v \sum_{j=0}^{v} s_j + \frac{p_0 q_n s_n}{r_n}$$

$$+ \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right) \sum_{v=0}^{n-1} \Delta(p_{n-v-1} q_v) \sum_{j=0}^{v} s_j$$

$$= \frac{1}{r_n} \sum_{v=0}^{n-2} \Delta(p_{n-v} - p_{n-v-1})\, q_v {s_v}^{(1)} + \frac{\Delta(p_1 - p_0) q_{n-1} {s_{n-1}}^{(1)}}{r_n} + \frac{p_0 q_n s_n}{r_n}$$

$$+ \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right) \sum_{v=0}^{n-2} \Delta(p_{n-v-1} q_v) {s_v}^{(1)} + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}}\right) \Delta(p_1 q_{n-1}) {s_{n-1}}^{(1)}$$

yazılabilir.

İlk olarak , $n \to \infty$ iken $r_n \to \infty$ ve (1) hipotezinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}\right)^{\lambda-1} \left|\frac{p_0 q_n s_n}{r_n}\right|^{\lambda} \le K \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q_n |s_n|}{\nabla r_n}\right)^{\lambda} < \infty$$

dır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}\right)^{\lambda-1} \left|\frac{\Delta(p_1 - p_0) q_{n-1} {s_{n-1}}^{(1)}}{r_n}\right|^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}\right)^{\lambda-1} \left|\frac{(p_1 - p_0) q_{n-1} {s_{n-1}}^{(1)} - p_0 q_n {s_{n-1}}^{(1)}}{r_n}\right|^{\lambda}$$

olup $\{\nabla r_n\}$ artan olduğundan ve (2) hipotezinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}\right)^{\lambda-1} \left|\frac{(p_1 - p_0) q_{n-1} {s_{n-1}}^{(1)}}{r_n}\right|^{\lambda}$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(r_n - r_{n-1})^{\lambda}} \left|\frac{(p_1 - p_0) q_{n-1} {s_{n-1}}^{(1)}}{r_n}\right|^{\lambda}$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(p_1 - p_0) q_n {s_n}^{(1)}}{r_{n+1} - r_n}\right|^{\lambda}$$

$$\leq K \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q_n s_n{}^{(1)}}{\nabla r_n} \right|^{\lambda} < \infty$$

elde edilir.

$\{q_n\}$ azalan ,$\{\nabla r_n\}$ artan olduğundan ve (2) hipotezinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}} \right)^{\lambda-1} \left| \frac{p_0 q_n s_{n-1}{}^{(1)}}{r_n} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{q_{n-1} s_{n-1}{}^{(1)}}{r_n - r_{n-1}} \right|^{\lambda} < K \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q_n s_n{}^{(1)}}{r_{n+1} - r_n} \right|^{\lambda}$$

$$< K \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q_n s_n{}^{(1)}}{\nabla r_n} \right|^{\lambda} < \infty$$

elde edilir.

Benzer şekilde teoremin hipotezlerinden yararlanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}} \right)^{\lambda-1} \left| \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} \right) \Delta(p_1 q_{n-1}) s_{n-1}{}^{(1)} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K p_1{}^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_n - r_{n-1})}{r_n r_{n-1}{}^{\lambda}} q_{n-1}{}^{\lambda} \left| s_{n-1}{}^{(1)} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_n - r_{n-1})}{r_n r_{n-1}{}^{\lambda}} q_{n-1}{}^{\lambda} \left| s_{n-1}{}^{(1)} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{q_n s_n{}^{(1)}}{\nabla r_n} \right|^{\lambda} < \infty$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $\{\Delta p_{n-v} q_v\}$ dizisi sınırlı olduğundan, (3) hipotezinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{r_n - r_{n-1}} \right)^{\lambda-1} \left| \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} \right) \sum_{v=0}^{n-2} \Delta(p_{n-v-1} q_v) s_v{}^{(1)} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_n r_{n-1}{}^{\lambda}} \left| \sum_{v=0}^{n-2} (p_{n-v-1} q_v)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} (p_{n-v-1} q_v)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} s_v{}^{(1)} \right|^{\lambda}$$

$$\leq K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{r_{n-1}}^{\lambda-1}}\sum\nolimits_{v=0}^{n-2}(p_{n-v-1}q_v)^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}\left(\sum\nolimits_{v=0}^{n-2}p_{n-v-1}q_v\right)^{\lambda-1}$$

$$\leq K\sum_{n=1}^{\infty}\sum\nolimits_{v=0}^{n-2}(p_{n-v-1}q_v)^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty}(q_v)^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}\sum\nolimits_{n=v+1}^{\infty}(p_{n-v-1})^{1-\lambda}$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}O\left(\frac{q_v{}^{2\lambda-1}}{(r_v-r_{v-1})^{\lambda}}\right)$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty}\frac{q_v{}^{\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}}{(r_v-r_{v-1})^{\lambda}}<\infty$$

elde edilir.

Son olarak (3) hipotezinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_n-r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}\left|\frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n-2}\Delta(p_{n-v}-p_{n-v-1})q_v s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n(r_n-r_{n-1})^{\lambda-1}}\left|\frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n-2}s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n(r_n-r_{n-1})^{\lambda-1}}\sum_{v=0}^{n-2}(p_{n-v}-p_{n-v-1})^{1-\lambda}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}\left(\sum_{v=0}^{n-2}q_v\Delta p_{n-v}\right)^{\lambda-1}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n(r_n-r_{n-1})^{\lambda-1}}\sum_{v=0}^{n-2}(\Delta p_{n-v})^{1-\lambda}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}(r_n-r_{n-1}-p_0q_n)^{\lambda-1}$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}\sum_{v=0}^{n-2}(p_{n-v}-p_{n-v-1})^{1-\lambda}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{(p_{n-v}-p_{n-v-1})^{1-\lambda}}{r_n}$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty}q_v{}^{1-\lambda}\left|s_v{}^{(1)}\right|^{\lambda}\sum_{n=v+1}^{\infty}(\Delta p_{n-v})^{1-\lambda}$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty} {q_v}^{1-\lambda}\left|{s_v}^{(1)}\right|^{\lambda} O\left(\frac{{q_v}^{2\lambda-1}}{(r_v-r_{v-1})^{\lambda}}\right)$$

$$\leq K\sum_{v=0}^{\infty} \frac{{q_v}^{\lambda}\left|{s_v}^{(1)}\right|^{\lambda}}{(r_v-r_{v-1})^{\lambda}} < \infty$$

elde edilir.

Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{r_n-r_{n-1}}\right)^{\lambda-1}|t_n-t_{n-1}|^{\lambda} < \infty$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

SONUÇ

Bu çalışmada ortogonal serilerin mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesi ile ilgili literatürde yer alan teoremlerin ispatı ve bu teoremler arasındaki ilişkiler tartışıldı. Ayrıca bu metodun özel bir durumu olan mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilme metodu ile ilgili hemen hemen her yerde kavramı ile oluşturulan teoremlerin ispatları incelendi. Bu teoremlerin ispatını yapmak için oldukça önemli bir role sahip olan Beppo Levi lemmasının ispatı incelendi. Beppo Levi teoreminin hemen hemen her yerde toplanabilme üzerindeki etkileri tartışıldı. Çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlerin ,ispatı incelenen teoremlerin ispatında nasıl kullanıldığı gözlemlendi. Çalışmada adı geçen diziler ve fark dizileri üzerindeki artan ve azalan olma şartlarının ispatlarda kolaylık sağladığı ve istenen sonuca ulaşmada önemli etkileri olduğu gözlemlendi. Ortogonal serilerin kısmi toplamlar dizisi ile mutlak genelleştirilmiş Hausdorff toplanabilmesinde işlem yapmanın farklılığı gözlemlendi. Ayrıca çalışmada kullanılan yakınsaklık, hemen hemen her yerde yakınsaklık, toplamların yer değiştirmesi, ortonormallik, integrallenebilme ,Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri kavramlarının mutlak toplanabilme teorisindeki etkileri tartışıldı.

Son olarak literatürde olmayan ve ortogonal serilerin özel bir şekli olan Fourier serilerinin mutlak genelleştirilmiş Nörlund toplanabilmesi ile ilgili bir teorem ispatlandı.

KAYNAKLAR

1. Tandori, K., Über die orthogonalen Funktionen, Acta Sci. Math, 21, 292-299, 1960 .

2. Leindler, L., On the absolute Riesz summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., 46,203-209,1983.

3. Leindler, L., On the newly generalized absolute Riesz summability of orthogonal series, Anal. Math., vol. 21, no.4, pp. 285-297, 1995.

4. Leindler , L., Tandori, K., On absolute summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., vol.50, pp.99-104, 1986.

5. Leindler, L. Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, Acta Sci.Math.,vol.22, pp. 243-268, 1986.

6. Okuyama,Y., and Tsuchikura T., On the absolute Riesz summability of orthogonal series, Anal.Math., vol.7 ,pp.199-208, 1981.

7. Okuyama, Y., On the absolute Nörlund summability of the orthogonal series, Proc.Japan Acad.Ser. A., vol.54, pp113-118, 2002.

8. Okuyama, Y., On the generalized Nörlund summability of the orthogonal series,Tamkang J. Math., vol.33, no.2, pp.199-208, 1981.

9. Szalay I., On generalized absolute Cesaro summability of orthogonal series, Acta Sci. Math., vol.32, pp.51-57, 1971.

10. Billard, P., Sur la sommabilite absolute des series de fonctions orthogonales, Bull.Sci. Math.,II Ser ., vol.85, pp.29-33, 1961.

11. Grepachevskaya L.V., Absolute summability of orthogonal series,Math.Sb.(N.S), vol .65, no.107, pp.370-389,1964.

12. Spevakov, V.N. and Kudrjavcev A.B., Absolute summability of orthogonal series by Euler's method, Math,Notes, vol.21, pp29-32, 1997.

13. Borwein, D., On strang ad absolute summability , Proc .Glasg. Math. Assoc., vol. 4, pp.122-139, 1960.

14. Borwein, D., Cass , F. P. and Sayre J. E., On absolute generalized Hausdorff summability, Arch.Math.,vol.46, pp.419-427, 1986.

15. Krasniqi, X. Z., On absolute weighted mean summability of orthogonal series, Selçukj. Appl. Math., vol.12, pp.63-70, 2011.

16. Krasniqi, X. Z., On $|A, \delta|_k$-summability of orthogonal series, Math. Bohem., vol. 137, no.1, pp.17-25, 2012.

17. Krasniqi, X. Z., On absolute almost generalized Nörlund summability of orthogonal series, Kyungpook Math. J., to appear.

18. Petersen, G. M., Regular matrix transformations, Cambridge, 1966.

19. Hausdorff, F., Summationmethoden und Momentfolgen I., Math. Z., 9, 74-109, 1921.

20. Zygmund, A., Trigonometric series, Cambridge, 1959.

21. Krasniqi, X. Z., On absolute generalized Hausdorff summability orthogonal series, Miskolc Mathematical Notes, 14, 981-989, 2013.

22. Tanaka, M., On generalized Nörlund methods of summability , Bull. Aust. Math. Soc., vol.19, pp.381-402, 1978.

23. Natanson, I. P., Theory of functions of real variable (2 vol). New York: Frederick Ungar, 1955,1961.

24. Nurcombe, J. R., Limitation and ineffectivens theorems for absolute and strong generalised Nörlund summability, Analysis, 9, 357-365, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Kayseri'de doğan İmran AKGÜN ilköğretimini Fatma Zehra Dülgeroğlu ilköğretim okulu lise öğrenimi ise Talas Lisesinde tamamlamıştır. 2009 yılında kazandığı Niğde Ömer Halis DEMİR Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2014 yılında tamamlamıştır.
2015 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Adres: Bahçeli Evler Mahallesi Bahçeli Evler Cad. Emirdağ Apart. Kat:5 No:19 Talas/Kayseri

Telefon: 0 5412414485

E-posta: imran_akgn@hotmail.com