T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN HALKALARDA P-v-ASALLIK

İsmail TAŞTEKİN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Yozgat 2018

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN HALKALARDA P-v-ASALLIK

İsmail TAŞTEKİN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Yozgat 2018

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111312001 numaralı öğrencisi İsmail TAŞTEKİN'nin hazırladığı "**Yakın Halkalarda P-v-Asallık**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 06/07/2018 Cuma günü saat 11:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

Jüri Üyesi (Danışman) : Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10/7/2018 tarih ve 27 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

10/7/2018

Prof. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

YAKIN HALKALARDA P-v-ASALLIK

İsmail TAŞTEKİN

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2018; Sayfa: 38

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmayla ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, yakın halkalar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, yakın halkaların asal idealleri ve bu idealler arasındaki ilişkiler detaylı olarak incelenmiştir.

Orijinal bir çalışmadan oluşan dördüncü bölümde, 3-asallık kavramı genişletilerek, yakın halkanın bir P ideali için P-3-asal ideal ve P-3-asal yakın halka kavramları tanımlanmıştır. Ardından P-3-asallığın; P-c-asallık, c-asallık ve 3-asallık ile ilişkileri araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, yakın halkanın bir P ideali için P-(sağ, sol) birim ve P-(sağ, sol) invers tanımları verilmiştir. Daha sonra bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakın halka, P-c-asal ideal, P-3-asal ideal, P-birim, P-invers.

P-v-PRIMENESS IN NEAR RINGS

İsmail TAŞTEKİN

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2018; Page: 38

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Funda TAŞDEMİR

ABSTRACT

This thesis consists of five sections. In the first section, the literature knowledge about the study has been given. In the second section, the basic knowledges about the near rings have been given. In the third section, prime ideals in near rings and the relationships between these ideals have been examined in details.

In the fourth section, which consists of an original study, the concepts of P-3-prime ideal and P-3-prime near ring for an ideal P of a near ring have been defined by expanding the concept of 3-primeness. Then, it has been investigated that the relations between P-3-primeness and P-c-primeness, c-primeness, 3-primeness.

In the fifth section, the definitions of P-(right, left) unit and P-(right, left) inverse for an ideal P of a near ring have been given. Then, some results about these concepts have been obtained.

Keywords: Near ring, P-c-prime ideal, P-3-prime ideal, P-unit, P-inverse

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamı hazırlamamda baştan sona benden desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Desteklerini esirgemeyen, matematik bölümünün değerli öğretim üyelerinden Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV, Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili dostlarım Dr. Bilal Atilla BEZEN, İnş. Müh. Samet ÖZDEMİR, Elk. Müh. İbrahim KOCATEPE, Mat. Öğr. Hakan ŞENSES, Enver TAŞKIN ve Arş. Gör. Dr. Hüseyin KAMACI'ya, ayrıca sevgili kuzenim Selvinaz TAŞTEKİN ve değerli öğrencilerime bu çalışma boyunca vermiş oldukları büyük moral ve motivasyon için teşekkür ederim.

Bugünlerime gelmemde sayısız emekleri olan, maddi ve manevi destekleriyle her türlü imkanı sağlayan ve varlıklarıyla bana huzur veren, her zaman yanımda olan saygıdeğer anneme, babama ve çok sevgili kız kardeşime sonsuz teşekkürü borç bilirim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

N	:	Yakın halka
N_0	:	N yakın halkasının sıfır simetrik kısmı
N_c	:	N yakın halkasının sabit kısmı
$M(\mathrm{G})$	:	G ’den G ’ye tüm fonksiyonların kümesi
$M_0(\mathrm{G})$	:	$M(\mathrm{G})$ ’de sıfırı koruyan tüm fonksiyonların kümesi
$M_c(\mathrm{G})$	:	$M(\mathrm{G})$ ’de tüm sabit fonksiyonların kümesi
$Hom(N,M)$	:	N ’den M ’ye tüm yakın halka homomorfizmlerinin kümesi
0_{G}	:	G ’nin sıfır elemanı
$(0{:}\,\mathrm{G})$	:	G ’nin sıfırlayanı
$N/_I$	:	Bölüm yakın halkası
IFP	:	Araya Çarpan Alma Özelliği
U_P	:	P-birim elemanların kümesi
x_P^{-1}	:	x ‘in P-inverslerinin kümesi
x_l^{-1}	:	x ‘in P-sol inverslerinin kümesi
x_r^{-1}	:	x ‘in P-sağ inverslerinin kümesi

1. GİRİŞ

Halkaların bir genellemesi olan yakın halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson [1] tarafından atılmıştır. O, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır, bugün bu cisimler yakın cisim olarak isimlendirilmektedir.

Halkalardaki asallık kavramı yakın halkalara birçok farklı asallık tanımı ile aktarılmıştır. Bu tanımlardan her biri halkalardaki asallığın bir genellemesidir. Yakın halkalarda asal idealler çeşitli yazarlar tarafından araştırılmıştır. İlk olarak 1970 yılında, Holcombe [2] asal yakın halka kavramını tanımlamıştır. Ancak, yakın halkalarda dağılma özelliği tek yönlü olduğundan ve ilk işlem genelde değişmeli olmadığından, Holcombe [2] 0-asal (veya asal), 1-asal, 2-asal olarak isimlendirdiği asallığın üç farklı türünü tanımlamıştır.

Yakın halkaların asal idealleri üzerine ilk çalışmalar, Van der Walt [3], Laxton [4], Ramakotaiah [5], Beidleman [6] ve Ramakotaiah ve Rao [7] tarafından yapılmıştır.

N bir yakın halka ve I, N ‘nin bir ideali olsun.

a) Eğer A ve B, N ‘nin $AB \subseteq I$ olacak şekildeki idealleri ise, $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ dır.

b) Eğer $x, y \in N$ için $xNy \subseteq I$ ise $x \in I$ veya $y \in I$ dır.

Halkalar veya yarı grupların asal idealleri üzerine yapılan çalışmalarda, (a) ve (b) koşullarının denk olması, kolaylaştırıcı rol oynamaktadır. Ancak bu koşullar, yakın halkalar üzerinde denk değillerdir. Ramakotaiah ve Rao [7], (a) şartını sağlayan I idealine N yakın halkasının 0-tipinde asal ideali, (b) şartını sağlayan ideale ise 1-tipinde asal ideal adını vermişlerdir. Günümüzde bunlar, sırasıyla 0-asal ve 3-asal ideal olarak literatürde geçmektedir. Holcombe [2], 1-asal ve 2-asal ideal tanımlarını vermiştir. Groenwald [8], 1-tipinde asal ideal yerine 3-asal ideal ifadesini kullandı ki literatürde bu kullanım daha sık karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, literatürde 2-tipinde asal ideal yerine c-(tam) asal ideal ifadesi kullanılmaktadır. Reddy ve Murty [9], yakın halkaların c-(tam) asal ideallerini çalışmışlardır.

Bu asal idealler arasındaki ilişkiler, birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır ve halen bu araştırmalar devam etmektedir [2-11]. N bir yakın halka ve I, N ‘nin bir ideali olsun. Bu durumda I, 3-asal ideal ise 2-asal ideal, 1-asal ideal ise 0-asal idealdir. N sıfır simetrik iken, 2-asal ideal ise 1-asal idealdir. Ayrıca I, c-asal ideal ise 3-asal idealdir. Bunların tersleri, N yakın halkası sıfır simetrik olsa dahi doğru değildir [11].

Yakın halkalarda birim, sağ ve sol değişme, medial, komutatiflik, abelyenlik, iç çarpan özelliği gibi kavramlar uzun zamandır bilinmektedir. Manara [12], Birkenmeier ve Heatherly [13] gibi çeşitli araştırmacılar medial, sol değişmeli, sağ değişmeli ve değişmeli yakın halkalar üzerine çalışmışlardır.

2012 yılında, Dheena ve Jenila [14] ilk kez P-asallık kavramını tanımlamıştır. Kamacı [15], bir P idealini kullanarak, P-c(yarı)-asal ideal ve P-c(yarı)-asal yakın halka tanımlarını vermiştir. Ayrıca P-(sağ ,sol) birim ve P-invers gibi yakın halkalardaki bazı kavramların genelleştirmeleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Orijinal çalışmaların bulunduğu dördüncü bölümde P-3-(yarı) asal kavramı tanımlanmış ve bu asallığın diğer asallık türleri (c-asal, 3-asal, P-c-asal, P-3-asal) ile ilişkileri çalışılmıştır. Asal ideallerde olduğu gibi P-c-asallığın P-3-asallığı gerektirdiği ispatlanmıştır. Ancak, tersinin farklı yakın halka sınıflarında sağlandığı gösterilmiştir. Sağ değişmeli, sol değişmeli, değişmeli, IFP, sağ dağılmalı ve sol dağılmalı yakın halkalarda P-3-asallığın, P-c-asallığa denk olduğu ispatlanmıştır. Yine benzer şartlar altında P-3-yarı asal ve P-c-yarı asal idealliğin denk olduğu gösterilmiştir. Yakın halkanın bir IFP ideali için P-3-asal ve P-c-asal ideallik arasındaki ilişkiler bulunmuştur

Son olarak beşinci bölümde orijinal olarak, bir P ideali kullanılarak genelleştirilmeleri verilen P-birim ve P-invers kümeleri arasındaki ilişkiler ile bu kümelerin, başka bir I ideali ile verilen I-birim ve I-invers kümeleri arasındaki ilişkiyi veren önermeler ispatlanmıştır.

2.TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer bölümlerinde ortak olarak kullanılan tanım ve teoremler verilecektir. ‘Near rings’ [16] kitabı, bu bölüm için temel kaynak olarak alınmıştır.

2.1. Yakın Halkalar

Halkaların bir genellemesi olan yakın halkalara ilk adım, 1905 yılında Dickson tarafından atılmıştır. Dickson, tek yönlü dağılma özelliğine sahip cisimlerin varlığını ispatlamıştır. Bugün bu cisimler yakın cisim olarak adlandırılmaktadır.

Yakın halkalar, halkalardan farklı olarak, ilk işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve tek taraflı dağılma özelliğinin sağlandığı, genelleştirilmiş halkalardır.

Yakın halkalar açık olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.1. [16] N cümlesi üzerinde “$+$” ve “$\cdot$” ile gösterilen iki ikili işlem alalım. Eğer,

a) $(N, +)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup,

b) $(N,\cdot)$ yarı grup,

c) $\forall x, y, z \in N$ için,

i) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ veya ii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

dağılma özelliklerinden en az birisi sağlanıyorsa, $(N, +,\cdot)$ üçlüsüne bir yakın halka denir.

Eğer (a), (b) ve (i) şartı sağlanıyorsa, N ’ye sağ yakın halka, (a), (b) ve (ii) şartı sağlanıyorsa, N ’ye sol yakın halka denir.

Bu tez çalışmasındaki yakın halkalar sağ yakın halkayı ifade edecektir. Elde edilen sonuçlar sol yakın halkalar için de benzer olarak sağlanmaktadır.

Aşağıda bazı yakın halka örnekleri verilmiştir.

Örnek 2.1.2. $(\mathrm{G}, +)$ herhangi bir grup olsun.

$$M(\mathrm{G}) = \{f : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{G} \mid f\ bir\ fonksiyon\}$$

ile tanımlanan cümle, fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında bir yakın halkadır.

Örnek 2.1.3. $(\mathrm{G}, +)$ herhangi bir grup ve "0_{G}" bu grubun birim elemanı olmak üzere fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında aşağıda verilenler birer yakın halkadır.

a) $M_{\mathbf{0}}(\mathrm{G}) = \{f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \mid f(0_{\mathrm{G}}) = 0_{\mathrm{G}}\}$

b) $M_c(\mathrm{G}) = \{f\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G} \mid f\ sabit\}$

Örnek 2.1.4. $(N, +)$ bir grup ve bu grubun ikinci işlemi, $\forall x, y \in N$ için;

$$xy = \begin{cases} x, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda, N yakın halkadır. Bu yakın halka literatürde aşikar yakın halka olarak verilmektedir.

Örnek 2.1.5. Her grup için bir yakın halka elde edilebilir. Gerçekten, $(N, +)$ grubu üzerinde ikinci işlem, $\forall x, y \in N$ için,

$$x \cdot y = 0$$

ile tanımlanırsa, $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır.

Özellikler 2.1.6. [16] N, yakın halka olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur.

a) $\forall x \in N$ için, $0x = 0$ dır.

b) $\forall x, y \in N$ için, $(-x)y = -xy$ dir.

İspat: a) $\forall x \in N$ için,

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$$

dır ve böylece $0x = 0$ elde edilir.

b) $\forall x, y \in N$ için, (a) kullanılarak,

$$(-x)y = (0 - x)y = 0y - xy = 0 - xy = -xy$$

elde edilir.

Not: Bir N yakın halkasında, her zaman, $\forall x, y \in N$ için,

$$x0 = 0 \text{ ve } x(-y) = -xy$$

sağlanmayabilir. Örnek 2.1.2 'de tanımlanan $M(\mathrm{G})$ yakın halkası göz önüne alınırsa, $f, g \in M(\mathrm{G})$ için,

$$f \circ 0 = 0$$

olması f fonksiyonun orijinden geçmesiyle mümkündür. Benzer olarak

$$f \circ (-g) = -(f \circ \mathrm{g})$$

olması f fonksiyonunun tek fonksiyon olması ile mümkündür.

Tanım 2.1.7. [16] N bir yakın halka olsun.

a) $N_0 = \{n \in N \mid n0 = 0\}$ cümlesine N yakın halkasının sıfır simetrik kısmı,

b) $N_c = \{n \in N \mid n0 = n\} = \{n \in N \mid \forall n' \in N \; için \; nn' = n\}$ cümlesine N yakın halkasının sabit kısmı denir.

N_0 ve N_c birer yakın halka olup, $N = N_0$ ise N yakın halkasına 0-simetrik yakın halka ve $N = N_c$ ise N yakın halkasına sabit yakın halka denir.

2.2. Yakın Halkaların Alt Yapıları

Tanım 2.2.1. [16] N yakın halka ve $(M, +)$, $(N, +)$ 'nın alt grubu olsun. Eğer, $\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 m_2 \in M$ ise, M 'ye N 'nin bir alt yakın halkası denir.

Tanım 2.2.2. N ve M iki yakın halka ve $h: N \to M$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in N$ için,

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

ve

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

şartları sağlanıyorsa, h fonksiyonuna yakın halka homomorfizmi denir.

Bunlarla beraber, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm ve otomorfizm kavramları için, yakın halka teorisinde farklı bir tanım yoktur.

Tanım 2.2.3. [16] N bir yakın halka ve I, N 'nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, eğer,

a) $IN \subseteq I$

b) $\forall x, y \in N$ ve $\forall i \in I$ için, $x(y+i) - xy \in I$

şartları sağlanıyorsa, I 'ya N yakın halkasının bir ideali denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir. Eğer, sadece a) şartı sağlanıyorsa I, N 'nin bir sağ ideali, sadece b) şartı sağlanıyorsa I, N 'nin bir sol ideali adını alır ve sırasıyla $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ ile gösterilir.

Not: a) N bir yakın halka ve $I \lhd N$ ise, $N/_I$ bölüm yakın halkası, bölüm halkasında olduğu gibi,

$$N/_I = \{n + I \mid n \in N\}$$

şeklinde tanımlanır.

b) $\{0\}$ ve N, N yakın halkasının idealleridir. Bunlara N 'nin aşikar idealleri denir.

Tanım 2.2.4. [16] A ve B, N yakın halkasının iki alt kümesi olmak üzere,

$$(A:B)_N = \{n \in N \mid nB \subseteq A\}$$

ile tanımlanır. Özel olarak $(0:B)_N = \{n \in N \mid nB = 0\}$ kümesine B kümesinin sıfırlayanı denir. Kısalık açısından $(0:B)_N = (0:B)$ ve $(0:\{x\})_N = (0:x)$ ile gösterilir.

Lemma 2.2.5. [16] A, N 'nin bir ideali ve B, N 'nin bir alt cümlesi ise $(A:B)$, N 'nin bir sol idealidir.

İspat: A, N 'nin bir ideali ve B, N 'nin bir alt cümlesi olsun. Bu durumda,

$$(A:B) = \{n \in N \mid nB \subseteq \mathrm{A}\}$$

dir.

$i)$ $\forall x, y \in (A:B)$ için,

$$(x - y)B = xB - yB \subseteq A$$

olduğundan,

$$x - y \in (A:B)$$

dir. Dolayısıyla $(A:B)$, N 'nin alt grubudur.

$ii)$ $\forall x \in (A:B)$ ve $\forall n \in N$ için A ideal olduğundan,

$$(n + x - n)B = nB + xB - nB \subseteq A$$

yani

$$n + x - n \in (A: B)$$

dir. Dolayısıyla $(A: B)$, N 'nin normal alt grubudur.

$iii)$ $\forall x \in (A: B)$ ve $\forall n, m \in N$ için A ideal olduğundan,

$$(n(m + x) - nm)B = [n(mB + xB) - nmB] \subseteq A$$

yani

$$n(m + x) - nm \in (A: B)$$

dir. Dolayısıyla $(A: B)$, N 'nin bir sol idealidir.

Tanım 2.2.6. [13] $(N, +, \cdot)$ bir yakın halka olsun.

a) $\forall a, b, c \in N$ için $abc = acb$ ise N 'ye sağ değişmeli,

b) $\forall a, b, c \in N$ için $abc = bac$ ise N 'ye sol değişmeli,

c) $\forall a, b, c, d \in N$ için $abcd = acbd$ ise N 'ye medial yakın halka denir.

Sonraki bölümlerde üzerinde sıklıkla durulacak olan diğer özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.7. [17],[18] $(N, +, \cdot)$ bir yakın halka olsun.

a) $\forall a, b, c \in N$ için $abc = acbc$ ise N yakın halkasına sağ (iç) dağılmalı(RSD),

b) $\forall a, b, c \in N$ için $abc = abac$ ise N yakın halkasına sol (iç) dağılmalı(LSD),

c) $\forall a \in N$ için $aN = Na$ ise N yakın halkasına alt değişmeli yakın halka denir.

Örnek 2.2.8. Çarpma işlemi aşağıdaki tablo ile verilen $(N, +, .)$ Klein-4-grubu alınsın [16];

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	a	a
b	0	b	b	b
c	0	c	c	c

Bu durumda, $(N,+,\cdot)$ sağ değişmeli bir yakın halkadır.

Örnek 2.2.9. $N=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki tablolar ile verilen bir yakın halkadır [16].

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

.	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	0	2	0	0	0	0
3	0	3	2	1	4	5	6	7
4	0	4	2	6	4	0	6	2
5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	4	4	0	6	2
7	0	7	0	7	0	5	0	5

$(N,+,\cdot)$ yakın halkası için $643 \neq 463$ olduğundan N sol değişmeli bir yakın halka değildir. Üstelik, N sol dağılmalı da değildir. Diğer taraftan, $M=\{0,2,5,7\}$, N 'nin bir alt yakın halkasıdır. M, aynı zamanda sol değişmeli ve sol dağılmalı yakın halkadır.

Tanım 2.2.10 [16] $(\Gamma,+)$ bir grup ve N bir yakın halka olmak üzere,

$$\mu : N \times \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$(n,\gamma) \rightarrow n\gamma$$

ile verilsin. $\forall x,y \in N$ ve $\forall \gamma \in \Gamma$ için;

$$(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma$$

ve

$$(xy)\gamma = x(y\gamma)$$

şartları sağlanıyorsa (Γ,μ) ikilisine bir N-grup yani N üzerinde yakın modül denir.

Tanım 2.2.11. N bir yakın-halka ve Γ bir N-grup olsun. Γ 'nın

$$NA \subseteq A$$

şartını sağlayan bir A alt grubuna Γ 'nın bir N-alt grubu denir ve $A \leq_N \Gamma$ ile gösterilir.

3. YAKIN HALKALARDA ASALLIK KAVRAMI

Yakın halkalar, halkalardan farklı olarak ilk işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve tek taraflı dağılma özelliğinin sağlandığı, genelleştirilmiş halkalardır. Bu nedenlerden dolayı halkalarda tanımlanan asal ideal tanımı yakın halkalarda farklı türlerde karşımıza çıkmaktadır. Bu asallık türleri halkalarda denk olmasına rağmen yakın halkalarda denk değildir [7-11]. Yakın halkaların asal idealleri ile ilgili ilk çalışmalar, Van der Walt [3], Laxton [4], Ramakotaiah [5], Beidleman [6] ve Ramakotaiah ve Rao [7] tarafından yapılmıştır. Ramakotaiah ve Rao [7] 0-tipinde asal ideali ve 1-tipinde asal ideali tanımlamıştır. Bunlar literatürde sırasıyla 0-asal ve 3-asal ideal olarak literatürde geçmektedir. Holcombe [2], yakın halkalar için üç farklı asallık kavramı üzerinde çalışmış ve bunları 0-asal, 1-asal ve 2-asal olarak adlandırmıştır. İlk olarak Ramakotaiah ve Rao [7] tarafından 2-tipinde asal ideal olarak tanımlanan bir başka asallık türü de c-(tam)asal olarak literatürde yerini almıştır.

3.1. Yakın Halkaların Asal İdealleri

Tanım 3.1.1. [2,8] N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olmak üzere;

a) $\forall A, B \lhd N$ için $AB \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa, I idealine 0-asal,

b) $\forall A, B \lhd_l N$ için $AB \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa, I idealine 1-asal,

c) $\forall A, B \leq_N N$ için $AB \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ oluyorsa, I idealine 2-asal,

d) $\forall x, y \in N$ için $xNy \subseteq I$ olduğunda $x \in I$ veya $y \in I$ oluyorsa, I idealine 3-asal,

e) $\forall x, y \in N$ için $xy \in I$ olduğunda $x \in I$ veya $y \in I$ oluyorsa, I idealine c-(tam)asal,

f) $\forall a, x, y \in N$ için $anx - any \in I$ olacak şekildeki $\forall n \in N$ için $a \in I$ veya $x - y \in I$ ise I ‘ya e-asal ideal denir.

Tanım 3.1.2. [19] Eğer N yakın halkasının sıfır ideali k=0,1,2,3,c,e olmak üzere k-asal ideal ise, N yakın halkasına k-asal yakın halka denir.

$I \lhd N$ ve k=0,1,2,3,c,e olsun. I ‘nın k-asal ideal olması için gerek ve yeter şart N/I ‘nın k-asal yakın halka olmasıdır.

Örnek 3.1.3. [16] N sabit yakın halka olmak üzere $(N, +)$ ‘nın her normal alt grubu bir asal idealdir. O halde her sabit yakın halka, bir asal yakın halkadır.

Örnek 3.1.4. N, Klein-4 grubu üzerinde, $\forall x, y \in N$ için ikinci işlemi

$$xy = \begin{cases} x, & y = 3 \\ 0, & y \neq 3 \end{cases}$$

ile tanımlanan bir yakın halkadır. N ‘nin bütün sol idealleri, $\{0\}$ ve N ‘dir. $N^2 \neq 0$ olduğundan $\{0\}$, N ‘nin 1-asal idealidir. Aynı zamanda N, 1-asal yakın halkadır.

Örnek 3.1.5. [11] N yakın halkası S_3 simetrik grubu üzerinde ikinci işlemi aşağıdaki tablo ile verilen bir yakın halka olsun.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1
3	1	1	3	3	1	1
4	0	0	4	4	0	0
5	0	0	5	5	0	0

N ’nin idealleri aşikar idealler ve $I = \{0,4,5\}$ dır. N ‘nin N-alt grupları $I = \{0,1\}$ ve aşikar N-alt gruplardır. Ayrıca, $I^2 = I$ olup N, 2-asal yakın halkadır.

Yakın halkaların c-asal idealleri üzerine yapılan çalışmalar, 1979 yılına kadar uzanır. İlk olarak bu kavram “2-tipinde asal ideal” adıyla tanımlanmıştır [7].

Örnek 3.1.6. [11] $(N, +)$, mertebesi ≥ 3 olan bir grup ve N üzerinde tanımlı çarpma işlemi $\forall x, y \in N$ için,

$$xy = \begin{cases} x, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda, N yakın halkasının sıfır ideali düşünülür ve çarpma işleminin tanımı göz önüne alınırsa, $xy = 0$ olacak şekilde $\forall x, y \in N$ için, $x = 0$ veya $y = 0$ olduğu görülür. Buradan N, c-asal yakın halkadır.

Örnek 3.1.7. [8] $N = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ aşağıdaki tablolarda toplama ve çarpma işlemleri ile verilen bir yakın halka olmak üzere,

$+$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	0	5	6	7	4
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	0	1	2	7	4	5	6
4	4	7	6	5	0	3	2	1
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	5	4	7	2	1	0	3
7	7	6	5	4	3	2	1	0

$.$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0
2	0	2	0	2	0	2	2	0
3	0	3	0	3	0	3	3	0
4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	4	5	4	5	4	5	5	4
6	4	6	4	6	4	6	6	4
7	4	7	4	7	4	7	7	4

$I = \{0,1,2,3\} \lhd N$ ve $x, y \notin I$ için $xNy \nsubseteq I$ olduğundan I, N ‘nin 3-asal idealidir. Üstelik $\{0,2\} \lhd I$ ve $\forall x, y \in I$ ve $x, y \notin \{0,2\}$ için $xIy \nsubseteq \{0,2\}$ olup $\{0,2\}$, I ‘nın 3-asal idealidir.

Bundan sonraki kısımda asal idealler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Lemma 3.1.8. [20] N yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda I, 1-asal ise 0-asaldır.

Lemma 3.1.9. [11] N sıfır simetrik yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, 2-asal ideal ise I, 1-asaldır.

Önerme 3.1.10. [11] N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, 3-asal ise I, 2-asaldır.

Sonuç 3.1.11. [11] $N = N_0$ yakın halka ve $I \trianglelefteq N$ olsun. I, 3-asal ideal ise I, 2-asal ve dolayısı ile 0-asal idealdir.

Tanım 3.1.12. [2,8] N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olmak üzere;

a) $\forall A \trianglelefteq N$ için $A^2 \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ oluyorsa I idealine 0-yarı asal ideal,

b) $\forall A \trianglelefteq_l N$ için $A^2 \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ oluyorsa I idealine 1-yarı asal ideal,

c) $\forall A \leq_N N$ için $A^2 \subseteq I$ olduğunda $A \subseteq I$ oluyorsa I idealine 2-yarı asal ideal,

d) $\forall x \in N$ için $xNx \subseteq I$ olduğunda $x \in I$ oluyorsa I idealine 3-yarı asal ideal,

e) $\forall x \in N$ için $x^2 \in I$ olduğunda $x \in I$ oluyorsa I idealine c-(tam)yarı asal ideal denir.

Tanım 3.1.13. [3] N yakın halkasının sıfır ideali k=0,1,2,3,c olmak üzere k-yarı asal ideal olduğunda, N yakın halkasına k-yarı asal yakın halka denir.

$I \lhd N$ ve k=0,1,2,3,c olsun. Bu durumda, I ‘nın k-yarı asal ideal olması için gerek ve yeter şart N/I ‘nın k-yarı asal yakın halka olmasıdır.

Önerme 3.1.14. [16] k=0,1,2,3,c için $I \lhd N$ k-asal ideal olsun. Bu durumda I, k-yarı asal idealdir.

İspat: Bu önermeyi c-asallık için ispatlayalım. Diğerleri için de ispatın benzer şekilde olduğu görülür. I, c-asal ideal olsun ve $\forall x \in N$ için $x^2 \in I$ olsun. $x \in I$ olduğunu gösterelim. Özel olarak $y = x$ seçilirse,

$$xx \in I$$

olur ve I, c-asal olduğundan,

$$x \in I$$

dır. Dolayısıyla I, c-yarı asaldır.

Örnek 3.1.15. Örnek 2.2.9 ‘daki N yakın halkasının $I = \{0,2\}$ idealini ele alalım. $4 \notin I$ ve $5 \notin I$ iken,

$$4.5 = 0 \in I$$

dır. Bu durumda I, c-asal ideal değildir. Fakat $x \in N$ ve $x \notin I$ için

$$xx \notin I$$

olduğundan I, c-yarı asal idealdir.

Lemma 3.1.16. [20] Eğer N sıfır simetrik bir yakın halka ve $I \lhd N$ ise $NI \subseteq I$ dır.

İspat: Gerçekten $I \lhd_l N$ ve N sıfır simetrik olduğundan $n \in N$ ve $i \in I$ için,

$$ni = n(0 + i) - n0 \in I$$

olup,

$$NI \subseteq I$$

dır.

Lemma 3.1.17. N sol değişmeli bir yakın halka ise sıfır simetriktir.

İspat: N sol değişmeli yakın halka olsun. $\forall n \in N$ için,

$$n0 = n00 = 0n0 = 0$$

dır. Böylece N, sıfır simetrik yakın halkadır.

Lemma 3.1.18. [21] N sıfır simetrik yakın halka ve I, N 'nin c-yarı asal ideali olsun. Bu durumda $x, y \in N$ için $xy \in I$ olması $yx \in I$ ve $xNy \subseteq I$ olmasını gerektirir.

İspat: Kabul edelim ki; I, N 'nin bir c-yarı asal ideali ve $x, y \in N$ için $xy \in I$ olsun. N sıfır-simetrik yakın halka olduğundan Lemma 3.1.16 'dan $NI \subseteq I$ dir. Bu durumda,

$$(yx)^2 = yxyx \in NIN \subseteq I$$

dir. Ayrıca I bir c-yarı asal ideal olduğundan $yx \in I$ dir. Buradan $\forall n \in N$ için $yx \in I$ olduğundan,

$$(xny)^2 = xnyxny \in NIN \subseteq I$$

olup I 'nın c-yarı asal ideal olmasından,

$$xny \in I$$

dir.

Lemma 3.1.19. [14] N sıfır simetrik yakın halka, I, N 'nin c-yarı asal ideali ve A, N 'nin boştan farklı bir alt cümlesi olmak üzere $(I: A)$ N 'nin bir idealidir.

İspat: Lemma 2.2.5 'ten $(I: A)$, N 'nin bir sol idealidir. Bu durumda $(I: A)$ 'nın sağ ideal olduğunu gösterelim. $x \in (I: A)$ olsun. Buradan $xA \subseteq I$ yani $\forall a \in A$ için $xa \in I$ dır. Dolayısıyla Lemma 3.1.18 'den $ax \in I$ dir. $n \in N$ olsun.

$$(xna)^2 = xn(ax)na \in NIN \subseteq I$$

ve I bir c-yarı asal ideal olduğundan $\forall a \in A$ için $xna \in I$ dir. Bu durumda $xnA \subseteq I$ dir. Yani $xn \in (I: A)$ dir. Dolayısıyla $(I: A)$, N 'nin bir idealidir.

3.2. 3-Asal İdeal ve c-Asal İdeal Arasındaki İlişkiler

Bundan önceki bölümde tanımlanan asal idealler arasında çeşitli ilişkiler mevcuttur. Bundan sonraki kısımda literatürde de geniş yer tutan 3-asal idealler ile c-asal idealler arasındaki ilişkiler verilecektir.

Önerme 3.2.1. [10] N yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, c-asal ideal ise bu durumda I, 3-asal idealdir.

İspat: I, c-asal ideal olsun. $\forall x, y \in N$ için,

$$xNy \subseteq I$$

iken $x \in I$ veya $y \in I$ olduğunu göstermeliyiz. $xNy \subseteq I$ olsun. Bu durumda,

$$xxy \in I$$

olur. I, c-asal olduğundan,

$$xx \in I$$

veya

$$y \in I$$

olur. Üstelik her c-asal ideal aynı zamanda c-yarı asal ideal oluğundan,

$$x \in I$$

veya

$$y \in I$$

dır. Böylece I, 3-asal idealdir.

Önerme 3.2.2. [22] N, sağ değişmeli yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda I ‘nın 3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki N sağ değişmeli yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Önerme 3.2.1 ‘den I, c-asal ideal ise I, 3-asal idealdir. Diğer taraftan, $x, y \in N$ için $xy \in I$ ve I, 3-asal ideal olsun. Bu durumda, N sağ değişmeli ve I ideal olduğundan,

$$\begin{aligned} xNyN &= xyNN \\ &\subseteq IN \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

olur. Buradan I, 3-asal ideal olduğundan ya $x \in I$ ya da $yN \subseteq I$ olur. Eğer $yN \subseteq I$ ise,

$$yNy \subseteq I$$

dır ve yine I, 3-asal ideal olduğundan $y \in I$ dır. Böylece I, c-asal idealdir.

Örnek 3.2.3. [23] $\mathbb{Z}_6$ üzerinde “ .” işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	5	3	1	5
2	0	2	4	0	2	4
3	3	3	3	3	3	3
4	0	4	2	0	4	2
5	3	5	1	3	5	1

$\mathbb{Z}_6$ sağ değişmeli bir yakın halkadır. Bu yakın halka üzerinde $I = \{0,2,4\}$ ideali alınsın. Bu durumda $x, y \notin \{0,2,4\}$ için $xy \notin \{0,2,4\}$ olduğundan I, c-asal idealdir. Aynı zamanda $x, y \notin \{0,2,4\}$ için $xNy \notin \{0,2,4\}$ olduğundan I, 3-asal idealdir.

Önerme 3.2.4. [22] N, sol değişmeli yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda, I 'nın 3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki N sol değişmeli yakın halka, $x, y \in N$ için $xy \in I$ ve I 3-asal ideal olsun. Bu durumda, Lemma 3.1.16 ve Lemma 3.1.17 'den

$$\begin{aligned} xNy &\subseteq Nxy \\ &\subseteq NI \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

dır. I, 3-asal ideal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ olup I, c-asal idealdir. Diğer taraftan, I, c-asal ideal iken Önerme 3.2.1 'den 3-asal idealdir.

Örnek 3.2.5. [16] $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	a	a
b	0	a	b	c
c	a	0	c	b

N, sol değişmeli yakın halkadır ve $I = \{0, a\}$, N 'nin bir idealidir. $x, y \notin I$ için $xy \notin I$ olduğundan I, c-asal ideal ve ayrıca $x, y \notin I$ için $xNy \notin I$ olduğundan I, 3-asal idealdir.

Önerme 3.2.6. [13] N, sıfır simetrik medial yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, 3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki N medial yakın halka, I 3-asal ideal ve $xy \in I$ olacak şekilde $x, y \in N$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.1.16 ‘dan

$$NxNy = N^2xy \subseteq NI \subseteq I$$

dır. I, 3-asal olduğundan ya $Nx \subseteq I$ veya $y \in I$ olur. Eğer $Nx \subseteq I$ ise, Lemma 3.1.16 ‘dan

$$xNx \subseteq I$$

olup, I, 3-asal ideal olduğundan $x \in I$ olur. Böylece I, c-asal idealdir. Tersi ise Önerme 3.2.1 ‘den açıktır.

Önerme 3.2.7. [17] N sıfır simetrik sol dağılmalı yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda I ‘nın 3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki N sıfır simetrik sol dağılmalı yakın halka ve $x, y \in N$ için $xy \in I$ olsun. Önerme 3.2.1 ‘den bir c-asal ideal aynı zamanda bir 3-asal idealdir. Tersini gösterelim. I, 3-asal ideal olsun. Bu durumda, $n \in N$ için, N sol dağılmalı olduğundan ve Lemma 3.1.16 ‘dan,

$$xny = xnxy \in I$$

dır. Buradan,

$$xNy \subseteq I$$

dır. I, 3-asal ideal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Böylece I, c-asal idealdir.

Önerme 3.2.8. [17] N, sağ dağılmalı yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda I ‘nın 3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki N sağ dağılmalı yakın halka ve $xy \in I$ olacak şekilde $x, y \in N$ olsun. I, 3-asal ideal olsun. Bu durumda, $n \in N$ için,

$$xny = xyny \in I$$

dır. Böylece,

$$xNy \subseteq I$$

dır. I, 3-asal ideal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Buradan I, c-asal idealdir. Diğer taraftan, Önerme 3.2.1 'den c-asal ideal aynı zamanda 3-asal idealdir.

Önerme 3.2.9. [17] N sıfır simetrik sol sağılmalı yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda I 'nın c-yarı asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın 3-yarı asal ideal olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2.7 'nin ispatında özel olarak $y = x$ alınırsa ispat kolaylıkla görülür.

Önerme 3.2.10. [17] N sağ dağılmalı yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. Bu durumda, I 'nın c-yarı asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın 3-yarı asal ideal olmasıdır.

İspat: Önerme 3.2.8 'in ipatında $y = x$ alınırsa ispat kolaylıkla görülür.

3.3. IFP İdealler ve Asal idealler

Tanım 3.3.1. [7] $x, y \in N$ için $xy = 0$ olması $\forall n \in N$ için $xny = 0$ olmasını gerektiriyorsa N yakın halkasına araya çarpan alma özelliğini sağlıyor veya IFP yakın halka denir. Eğer $I \lhd N$ ve N/I bir IFP yakın halka ise I 'ya N 'nin IFP ideali denir [21].

Yakın halkalarda IFP kavramı literatürdeki diğer kavramlarla yakın ilişki içerisindedir. Bu tez çalışmasının konusu olan asallık kavramının IFP ile ilişkisi önermelerle verilecektir.

Önerme 3.3.2. [21] N bir yakın halka ve I, N 'nin IFP ideali olsun. Eğer I, 3-(yarı) asal ideal ise bu durumda I c-(yarı) asal dır.

İspat: I, 3-asal ideal ve $x, y \in N$ için $xy \in I$ olsun. I, IFP ideal olduğundan $xNy \subseteq I$ dır. I, 3-asal ideal olduğundan $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Böylece I, c-asal idealdir. ($x = y$ alınırsa c-yarı asallık için de ispat benzer şekilde görülür).

Önerme 3.3.3. [21] N sıfır simetrik bir yakın halka ve I, N 'nin c-yarı asal ideali olsun. Bu durumda I, IFP idealdir.

İspat: Varsayalım ki I c-yarı asal ideal ve $x, y \in N$ için $xy \in I$ olsun. N sıfır simetrik yakın halka olduğundan Lemma 3.1.16 'dan $NI \subseteq I$ dır.

$$(yx)^2 = yxyx \in NIN \subseteq I$$

ve I, c-yarı asal ideal olduğundan,

$$yx \in I$$

olur. $\forall n \in N$ için,

$$(xny)^2 = xnyxny \in NIN \subseteq I$$

dır. Buradan, I c-yarı asal olduğundan $xny \in I$ dır. Böylece I bir IFP idealdir.

Sonuç 3.3.4. [21] N sıfır simetrik bir yakın halka ve I, N yakın halkasının c-asal ideali olsun. Bu durumda I, IFP idealdir.

İspat: Eğer I, N 'nin bir c-asal ideali ise bu durumda Önerme 3.1.14 'ten I, c-yarı asal idealdir. Böylece ispat, Önerme 3.3.3 'ten açıktır.

c-(yarı) asal idealler ile IFP idealler arasındaki ek bir şart gerekmeden elde edilen ilişki 3-asal idealler ile IFP idealler arasında görülmez. Yani IFP olup 3-asal olmayan birçok ideal vardır [24]. Ancak aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.3.5. [21] N sıfır simetrik medial yakın halka ve I, N yakın halkasının bir 3-asal ideali olsun. Bu durumda I, IFP idealdir.

İspat: N medial bir yakın halka ve I, N 'nin 3-asal ideali olsun. Önerme 3.2.6 'dan I, c-asal idealdir. Sonuç 3.3.4 'ten I 'nın IFP ideal olduğu açıktır.

Önerme 3.3.6. [21] I, N yakın halkasının bir IFP ideali ise $(I\colon I)$, N 'nin bir idealidir ve üstelik $(I\colon I)$, N 'nin IFP idealidir.

İspat: I bir IFP ideal olduğundan $(I\colon I)$, N 'nin bir idealidir [16]. $x, y \in N$ için $xy \in (I\colon I)$ olduğunda $\forall n \in N$ için $xny \in (I\colon I)$ olduğunu gösterelim. $xy \in (I\colon I)$ ise $\forall i \in I$ için,

$$xyi \in I$$

ve I, IFP ideal ideal olduğundan, $\forall i \in I$ için

$$xnyi \in I$$

dır. Buradan $(xny)I \subseteq I$ dır ve böylece $xny \in (I\colon I)$ olduğu görülür.

Önerme 3.3.7. [21] N bir IFP yakın halka olsun. O halde $\forall x \in N$ için $(0: x)$, N ‘nin bir IFP idealidir.

İspat: N, IFP yakın halka olduğundan $\forall x \in N$ için $(0: x) \lhd N$ dir [16]. $a, b \in N$ için $ab \in (0: x)$ olsun. Bu durumda,

$$abx = 0$$

dır. N, IFP yakın halka olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$an(bx) = 0$$

dır. Buradan $\forall n \in N$ için $anb \in (0: x)$ olup böylece $(0: x)$, N ‘nin bir IFP idealidir.

Sonuç 3.3.8. [21] I, N yakın halkasının ideali olsun.

a) N, sağ değişmeli yakın halka ise I, IFP idealdir.

b) N, sol değişmeli yakın halka ise I, IFP idealdir.

c) N, sağ dağılmalı yakın halka ise I, IFP idealdir.

d) N, sol dağılmalı ve sıfır simetrik yakın halka ise I, IFP idealdir.

İspat: $x, y \in N$ için $xy \in I$ olsun. $\forall n \in N$ için,

a) $xny = xyn \in IN \subseteq I$,

b) $xny = nxy \in NI \subseteq I$ $(N = N_0)$,

c) $xny = xyny \in IN \subseteq I$,

d) $xny = xnxy \in NI \subseteq I$ $(N = N_0)$.

4. YAKIN HALKALARDA P-v-ASALLIK KAVRAMI

4.1. Yakın Halkaların P-c-Asal İdealleri

Tanım 4.1.1. [14] $A, B, C \lhd N$ olmak üzere $P \lhd N$ için $BC + P \subseteq A$ olması $B \subseteq A$ veya $C \subseteq A$ olmasını gerektiriyorsa, N 'nin A idealine P-asal ideal denir.

Eğer $P = 0$ ise bu taktirde N 'nin bir P-asal ideali aynı zamanda N 'nin bir asal idealidir. Eğer I, N 'nin bir asal ideali ise, bu durumda N 'nin tüm P idealleri için I bir P-asal idealdir. Fakat tersi genelde doğru değildir. Bu durum, aşağıdaki önerme ve örnek ile verilmiştir.

Önerme 4.1.2. N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I asal ideal ise $\forall P \lhd N$ için I, P-asaldır.

İspat: I, N 'nin bir asal ideal ise bu durumda, $B, C \lhd N$ için $BC \subseteq I$ iken $B \subseteq I$ veya $C \subseteq I$ dır. $BC + P \subseteq I$ olsun.

$$BC \subseteq BC + P$$

olup,

$$BC \subseteq I$$

dır. I asal ideal olduğundan $B \subseteq I$ veya $C \subseteq I$ dır. Böylece I, P-asaldır.

Örnek 4.1.3 $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu verilsin ve N üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
c	0	a	b	c

Bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın halkadır. N 'nin idealleri $\{0\}$, $\{0, a\}$, $\{0, b\}$ ve N dir. $\{0, a\}\{0, b\} \subseteq \{0\}$ iken $\{0, a\} \nsubseteq \{0\}$ ve $\{0, b\} \nsubseteq \{0\}$ olduğundan N 'nin $\{0\}$ ideali bir asal ideal değildir. Fakat $P = \{0, b\}$ için $\{0\}$ ideali bir P-asal idealdir.

Tanım 4.1.4. [15] N yakın halka ve $I, P \lhd N$ olsun. Eğer $x, y \in N$ için $xy + P \subseteq I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ oluyorsa, I 'ya P-c-asal ideal denir.

Eğer $x \in N$ için $x^2 + P \subseteq I$ iken $x \in I$ oluyorsa, I 'ya P-c-yarı asal ideal denir.

$P = 0$ ise P-c-asal (P-c-yarı asal) ideal aynı zamanda bir c-asal (c-yarı asal) idealdir.

Önerme 4.1.5. N bir yakın halka ve $I, P \lhd N$ olsun. Eğer I, P-c-asal ideal ise I, P-c-yarı asal idealdir.

İspat: I, P-c-asal ideal olsun. $x \in N$ için $x^2 + P \subseteq I$ iken $x \in I$ olduğunu gösterelim. I, P-c-asal ideal olduğundan, $\forall x, y \in N$ için $xy + P \subseteq I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Özel olarak, $x = y$ seçilirse,

$$xx + P \subseteq I$$

ve buradan,

$$x \in I$$

dır. Böylece I, P-c-yarı asal ideal olur.

Bu önermenin tersinin genelde doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.1.6. Örnek 2.2.9 'dan $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ yakın halkası için $I = \{0,2\}$ ve $P = \{0\}$ ideallerini ele alalım. $4 \notin \{0,2\}$ ve $5 \notin \{0,2\}$ için $4.5 + \{0\} \subseteq \{0,2\}$ dir ve dolayısıyla I, P-c-asal ideal değildir. Fakat $0,2 \neq x \in N$ için $xx + \{0\} \nsubseteq \{0,2\}$ olduğundan I, P-c-yarı asal idealdir.

Önerme 4.1.7. [15] N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, c-asal ideal ise $\forall P \lhd N$ için I, P-c-asal idealdir.

İspat: I, c-asal ideal olsun. Bu durumda $\forall x, y \in N$ için $xy \in I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ dır. $\forall P \lhd N$ için $xy + P \subseteq I$ olsun.

$$xy \in xy + P \subseteq I$$

olduğundan,

$$xy \in I$$

olur. I, c-asal olduğundan,

$$x \in I$$

veya

$$y \in I$$

dır. Böylece I, P-c-asal idealdir.

Örnek 4.1.8 ile Önerme 4.1.7 ‘nin tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 4.1.8. $N = \{0,1,2,3\}$ Klein-4 grubu üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	0
3	1	1	1	3

N yakın halkası üzerinde $I = \{0,1\} \lhd N$ alalım. Bu durumda, $2 \notin I$ fakat $2.2 = 0 \in I$ olduğundan I c-asal ve c-yarı asal ideal değildir. Fakat $P = \{0,2\} \lhd N$ için I, P-c-asal ve P-c-yarı asal idealdir.

Sonuç 4.1.9. N bir yakın-halka ve $I, P \lhd N$ olsun. I, c-asal ideal ise I, P-c-yarı asal idealdir.

İspat: Önerme 4.1.7 ‘den I, c-asal ideal ise I, P-c-asal idealdir. Önerme 4.1.5 ‘dan I, P-c-asal ideal ise I, P-c-yarı asal idealdir.

Tanım 4.1.10. [15] N bir yakın halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer P, P-c-asal ideal ise bu taktirde N ’ye bir P-c-asal yakın halka denir. Eğer P, P-c-yarı asal ideal ise bu taktirde N ’ye bir P-c-yarı asal yakın halka denir.

4.2. Yakın Halkaların P-3-Asal İdealleri

Bu bölümde, ilk kez P-3-(yarı)asal ideal kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 4.2.1. N yakın halka, $I, P \lhd N$ olsun. $\forall x, y \in N$ için $xNy + P \subseteq I$ olması $x \in I$ veya $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa, N ’nin I idealine P-3-asal ideal denir.

Eğer $P = \{0\}$ ideali alınırsa I, P-3-asal ideali aynı zamanda 3-asal ideal olur.

Önerme 4.2.2. N bir yakın halka, $I \lhd N$ olsun. I, 3-asal ideal ise $\forall P \lhd N$ için I, P-3-asal idealdir.

İspat: I, 3-asal ideal olsun. $\forall x, y \in N$ için $xNy + P \subseteq I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ olduğunu göstermeliyiz.

$$xNy \subseteq xNy + P$$

ve

$$xNy + P \subseteq I$$

olduğundan,

$$xNy \subseteq I$$

dır. I, 3-asal ideal olduğundan,

$$x \in I$$

veya

$$y \in I$$

dir. Böylece I, P-3-asal idealdir.

Örnek 4.2.3 ile Önerme 4.2.2 ‘nin tersinin genelde sağlanmadığı gösterilmiştir.

Örnek 4.2.3. $N = \{0,1,2,3\}$ Klein-4 grubu üzerinde çarpma işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2
3	1	1	1	3

N yakın halkası üzerinde $I = \{0,1\} \lhd N$ alalım. $P = \{0,2\} \lhd N$ için I, P-3-asal idealdir. Örneğin, $2 \notin I$ fakat

$$2N2 + P \nsubseteq I$$

dir. Fakat, $2 \notin I$ iken

$$2N2 = 0 \in I$$

olduğundan I, 3-asal ideal değildir.

Tanım 4.2.4. N bir yakın halka ve $I, P \lhd N$ olsun. $\forall x \in N$ için $xNx + P \subseteq I$ olması $x \in I$ olmasını gerektiriyorsa, N ’nin I idealine P-3-yarı asal ideal denir.

Eğer $P = \{0\}$ ideali alınırsa I, P-3-yarı asal ideali aynı zamanda 3-yarı asal ideal olur.

Önerme 4.2.5. N bir yakın halka ve $I \lhd N$ olsun. I, P-3-asal ideal ise $\forall P \lhd N$ için I, P-3-yarı asal idealdir.

İspat: I, P-3-asal ideal olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in N$ için $xNy + P \subseteq I$ iken $x \in I$ veya $y \in I$ dır. Özel olarak $x = y$ alınırsa,

$$xNx + P \subseteq I$$

olur. I, P-3-asal ideal olduğundan,

$$x \in I$$

dır. Böylece I, P-3-yarı asal ideal olur.

Aşağıdaki örnek, Önerme 4.2.5 ‘in tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.6. Örnek 3.2.3 ‘teki $\mathbb{Z}_6$ yakın halkasını ele alalım. $I = \{0\}$ ve $P = \{0\}$, N ‘nin iki ideali olmak üzere $2N3 + \{0\} \subseteq \{0\}$ iken $2 \notin \{0\}$ ve $3 \notin \{0\}$ olduğundan I, P-3-asal değildir. Ancak her $0 \neq x \in N$ için,

$$xNx + \{0\} \nsubseteq \{0\}$$

olduğundan I, P-3-yarı asal idealdir.

Tanım 4.2.7. N bir yakın halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer P, P-3-asal ideal ise bu taktirde N ’ye bir P-3-asal yakın halka denir. Eğer P, P-3-yarı asal ideal ise bu taktirde N ’ye bir P-3-yarı asal yakın halka denir.

4.3. P-3-Asal ve P-c-Asal İdeal Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, her P-c-asal idealin P-3-asal ideal olduğu ve bu durumun tersinin her zaman sağlanmayıp, farklı yakın halka sınıflarında sağlandığı önermelerle verilecektir.

Önerme 4.3.1. N bir yakın halka ve $I, P \lhd N$ olsun. I, P-c-asal ideal ise I, P-3-asal idealdir.

İspat: I, P-c asal ideal olsun. I ‘nın P-3-asal ideal olduğunu göstermek için, $x, y \in N$ için,

$$xNy + P \subseteq I$$

iken $x \in I$ veya $y \in I$ olduğunu göstermeliyiz. $xNy + P \subseteq I$ olsun. Bu durumda, $x \in N$ için,

$$xxy + P \subseteq I$$

dır. I, P-c-asal ideal olduğundan,

$$xx \in I$$

veya

$$y \in I$$

dır. Buradan I, P-c-asal ideal ise I, P-c-yarıasal ideal olduğundan,

$$x \in I$$

dır. Böylece I, P-3-asal idealdir.

Önerme 4.3.1 'den de görüldüğü gibi her P-c-asal ideal aynı zamanda P-3-asal idealdir. Fakat bu durumun tersi genelde doğru değildir. Bu kısımdan itibaren bazı şartlar altında (sağ değişmeli, sol değişmeli, değişmeli, sağ dağılmalı, sol dağılmalı, IFP) P-3-asal idealin aynı zamanda P-c-asal ideal olduğu verilecektir.

Önerme 4.3.2. N, sağ değişmeli yakın halka, $I, P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I 'nın P-3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın P-c-asal ideal olmasıdır.

İspat: I, P-c-asal ideal iken Önerme 4.3.1 'den I, P-3-asal idealdir. Diğer taraftan I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğu gösterilmelidir. Bunun yerine dengi olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmasın ve $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ olsun. $xNy + P \subseteq I$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 4.1.7 'den I, P-c-asal ideal olmadığından I, c-asal ideal de değildir. Bu durumda $x \notin I$, $y \notin I$ için $xy \in I$ dır. N sağ değişmeli yakın halka ve $I \lhd N$ olduğundan,

$$\begin{aligned} xNy + P &= xyN + P \\ &\subseteq IN + P \\ &\subseteq I + P \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

dır. Dolayısı ile I, P-3-asal ideal değildir.

Örnek 4.3.3. Örnek 3.2.3 'teki $\mathbb{Z}_6$ yakın halkasını ele alalım. Bu yakın halka aynı zamanda sağ değişmeli bir yakın halkadır. $\mathbb{Z}_6$ 'nın $P \subseteq I$ şartını sağlayacak şekilde $P = \{0,3\}$ ve $I = \{0,3\}$ ideallerini ele alalım. Bu durumda I, hem P-c-asal ideal hem de P-3-asal idealdir.

Önerme 4.3.4. N, sol değişmeli yakın halka, $I, P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I' nın P-3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın P-c-asal ideal olmasıdır.

İspat: Önerme 4.3.1 'den I, P-c-asal ideal iken I 'nın P-3-asal ideal olduğu açıktır. Tersini göstermek için, I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğu gösterilmelidir. Buna denk olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığı gösterilirse ispat tamamlanır. I, P-c-asal ideal olmasın ve $x, y \in N$ için $x \notin I$, $y \notin I$ olsun. I 'nın P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken $xNy + P \subseteq I$ olduğunu göstermeliyiz. Önerme 4.1.7 'den I, P-c asal ideal olmadığından I, c-asal ideal de değildir. Bu durumda $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken $xy \in I$ dır. N sol değişmeli yakın halka olduğundan, Lemma 3.1.16 ve Lemma 3.1.7 'den

$$\begin{aligned} xNy + P &= Nxy + P \\ &\subseteq NI + P \\ &\subseteq I + P \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

olur. Böylece, I, P-3-asal ideal değildir.

Örnek 4.3.5. $N = \{0, a, b, c\}$ Klein-4 grubu ikinci işlemi aşağıdaki tablo ile verilen bir yakın halka olsun.

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
b	0	0	b	b
c	0	0	b	b

Bu yakın halka aynı zamanda sol değişmelidir. $I = \{0, a\} \lhd N$ olmak üzere $P \subseteq I$ olacak şekilde $P = \{0\}$, N 'nin bir idealidir. Bu durumda I, P-c-asal ideal ve aynı zamanda P-3-asal idealdir.

Önerme 4.3.6. N sağ dağılmalı yakın halka, $I, P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I, P-3-asal idealdir ancak ve ancak I, P-c-asal idealdir.

İspat: I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğunu göstermek yerine buna denk olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmasın ve $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ olsun. I 'nın P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. Önerme 4.1.7 'den I, P-c-asal ideal olmadığından I, c-asal ideal de değildir. Bu durumda, $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken $xy \in I$ dır. N sağ dağılmalı yakın halka ve $xy \in I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} xNy + P &= xyNy + P \\ &\subseteq INN + P \\ &\subseteq IN + P \\ &\subseteq I + P \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

dır. Böylece I, P-3-asal ideal değildir. Tersine, Önerme 4.3.1 'den I, P-c-asal ideal iken I 'nın P-3-asal ideal olduğu açıktır.

Önerme 4.3.7. N sıfır simetrik sol dağılmalı yakın halka, $I, P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I 'nın P-3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I 'nın P-c-asal ideal olmasıdır.

İspat: I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğu göstermek yerine dengi olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmasın ve $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ olsun. I 'nın P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. Önerme 4.1.7 'den I, P-c-asal ideal olmadığından I, c-asal ideal de değildir. Bu durumda, $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken

$$xy \in I$$

dır. N sol dağılmalı yakın halka ve Lemma 3.1.16 'dan,

$$\begin{aligned} xNy + P &= xNxy + P \\ &\subseteq NI + P \\ &\subseteq I + P \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

dır. Böylece I, P-3-asal ideal değildir. Diğer taraftan, Önerme 4.3.1 ‘den I, P-c-asal ideal iken I ‘nın P-3-asal ideal olduğu açıktır.

Örnek 4.3.8. Örnek 4.3.5 ‘te $N = \{0, a, b, c\}$ ile verilen yakın halka sıfır simetrik sol dağılmalı bir yakın halkadır. $I = \{0, a\} \lhd N$ ve $P = \{0\} \lhd N$ için görülür ki I, P-c-asal ve aynı zamanda P-3-asal idealdir.

Önerme 4.3.9. N değişmeli yakın halka, $I, P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I ‘nın P-3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın P-c-asal ideal olmasıdır.

İspat: I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğunu göstermek yerine, bunun dengi olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmasın. $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ olsun. Önerme 4.1.7 ‘den I, P-c-asal ideal olmadığından I, c-asal ideal de değildir. Bu durumda, $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken

$$xy \in I$$

dır. N değişmeli bir yakın halka ve $xy \in I$ olduğundan,

$$\begin{aligned} xNy + P &= xyN + P \\ &\subseteq IN + P \\ &\subseteq I + P \\ &\subseteq I \end{aligned}$$

dır. Böylece I, P-3-asal ideal değildir. Diğer taraftan, Önerme 4.3.1 ‘den I, P-c-asal ideal iken I ‘nın P-3-asal ideal olduğu açıktır.

Önerme 4.3.10. N bir yakın halka, $I \lhd N$ IFP ideal, $P \lhd N$ ve $P \subseteq I$ olsun. I ‘nın, P-3-asal ideal olması için gerek ve yeter şart I ‘nın P-c-asal ideal olmasıdır.

İspat: I, P-c-asal ideal iken I ‘nın P-3-asal ideal olduğu Önerme 4.3.1 ‘den açıkça görülür. Diğer taraftan, I, P-3-asal ideal iken P-c-asal ideal olduğu gösterilmelidir. Bunun için dengi olan I, P-c-asal ideal değil iken P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmasın ve $x, y \in N$ için $x \notin I$ ve $y \notin I$ olsun. I ‘nın P-3-asal ideal olmadığını gösterelim. I, P-c-asal ideal olmadığında c-asal ideal de olmadığı Önerme 4.1.7 ‘den açıkça görülür. Buradan, $x \notin I$ ve $y \notin I$ iken

$$xy \in I$$

dır. I, IFP ideal olduğundan $\forall n \in N$ için $xny \in I$ dır. Bu durumda,

$$xNy \subseteq I$$

dır. Aynı zamanda $P \subseteq I$ olduğundan,

$$xNy + P \subseteq I$$

dır ve böylece I, P-3-asal ideal değildir.

5. YAKIN HALKALARDA BAZI GENELLEŞTİRMELER

5.1. P-birim ve P-invers Kavramları

Tanım 5.1.1. [15] N bir yakın halka, $P \lhd N$ ve $e \in N$ olsun. Eğer $\forall n \in N$ için $n - ne \in P$ ise e 'ye P-sağ birim, $n - en \in P$ ise e 'ye P-sol birim, e elemanı hem P-sağ birim hem de P-sol birim ise e 'ye N yakın halkasında bir P-birim denir. N 'nin P-birim elemanlarını içeren küme U_P ile gösterilir.

Eğer $P = 0$ ise, bu taktirde N 'nin P-birimi aynı zamanda N 'nin birimidir. Eğer e bir birim eleman ise bu durumda N 'nin tüm P idealleri için e bir P-birim elemandır. Fakat genelde N 'nin bir P-birim elemanı N 'nin birim elemanı olmak zorunda değildir.

Örnek 5.1.2. Örnek 3.2.3 'teki $\mathbb{Z}_6$ yakın halkasını ele alalım. $P_1 = \{0,3\} \lhd \mathbb{Z}_6$ olsun. Bu durumda $e = 4 \in \mathbb{Z}_6$ için $1 \neq 4.1$ olduğundan $e = 4$ sol birim değildir. Fakat $\forall n \in N$ için $n - 4n \in P_1$ olduğundan $e = 4$ bir P_1-sol birimdir. Ayrıca $e = 4$ sağ birim ve aynı zamanda bir P_1-sağ birimdir. Dolayısıyla, 4 birim değil, fakat bir P_1-birimdir. Ayrıca P_1-birimlerin cümlesi $U_{P_1} = \{1,4\}$ dir.

Diğer taraftan, $P_2 = \{0,2,4\} \lhd \mathbb{Z}_6$ ise bu taktirde P_2-sağ birimlerin cümlesi $\mathbb{Z}_6$ ve P_2-sol birimlerin cümlesi $\emptyset$ 'dir. Dolayısıyla P_2-birimlerin cümlesi $\emptyset$ 'dir.

Teorem 5.1.3. [15] $(N, +,\cdot)$ bir yakın halka ve $P \lhd N$ olsun. $U_P \neq \emptyset$ ise bu durumda U_P, $(N,\cdot)$ 'nın bir alt yarı grubudur.

Sonuç 5.1.4. [15] N bir yakın halka ve $P, I \lhd N$ olsun. P-birimlerin cümlesi U_P ve I-birimlerin cümlesi U_I olmak üzere;

a) Eğer $P \subseteq I$ ise, bu durumda $U_P \subseteq U_I$ dır.

b) Eğer $P = N$ ise, bu durumda $U_P = N$ dir.

İspat: a) Tanım 5.1.1 **'den** $x \in U_P$ ise, bu taktirde $\forall n \in N$ için,

$$xn - n \in P$$

ve

$$nx - n \in P$$

dir. $P \subseteq I$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$xn - n \in I$$

ve

$$nx - n \in I$$

dir. Dolayısıyla $x \in U_I$ dır. O halde $U_P \subseteq U_I$ dır.

b) Eğer $P = N$ ise $\forall x \in N$ için $xn - n \in N$ ve $nx - n \in N$ olduğundan,

$$U_{P=N} = N$$

dir.

Tanım 5.1.5. [15] N bir yakın halka ve $P \lhd N$olsun. $x \in N$ için,

$$x_r^{-1} = \{y \in N |\ xy \in U_P\}$$

kümesine x 'in P-sağ inverslerinin kümesi,

$$x_l^{-1} = \{y \in N |\ yx \in U_P\}$$

kümesine x 'in P-sol inverslerinin kümesi denir.

$$x_P^{-1} = x_r^{-1} \cap x_l^{-1}$$

kümesine de x 'in P-inverslerinin kümesi denir.

Örnek 5.1.6. Örnek 3.2.3 'te verilen $N = (\mathbb{Z}_6, +, .)$ yakın halkasında $P = \{0,3\}$ idealini ele alalım. Bu durumda $0_r^{-1} = \emptyset = 0_l^{-1}$, $1_r^{-1} = \{1,4\} = 1_l^{-1}$, $2_r^{-1} = \{2,5\} = 2_l^{-1}$, $3_r^{-1} = \emptyset = 3_l^{-1}$, $4_r^{-1} = \{1,4\} = 4_l^{-1}$ ve $5_r^{-1} = \{2,5\} = 5_l^{-1}$ olduğundan $1_P^{-1} = 4_P^{-1} = \{1,4\}$ ve $2_P^{-1} = 5_P^{-1} = \{2,5\}$ dir.

5.2. *P*-birim ve *P*-invers İlişkileri

Bu bölümde, Bölüm 5.1 'de verilen kavramlarla ilgili bazı orijinal sonuçlar verilecektir.

Önerme 5.2.1. N bir yakın halka ve $I, P \lhd N$ için $P \cap I = \{0\}$ olsun. Eğer N, birimi e olan bir yakın halka ise $U_P \cap U_I = \{e\}$ dir. Aksi takdirde boş kümedir.

İspat: $x \in U_P \cap U_I$ olsun. Bu durumda, $x \in U_P$ dir. Tanım 5.1.1 'den $x \in U_P$ ise $\forall n \in N$ için,

$$n - nx \in P$$

ve

$$n - xn \in P$$

dir. $x \in U_I$ olduğundan $\forall n \in N$ için,

$$n - nx \in I$$

ve

$$n - xn \in I$$

dır. Buradan,

$$n - nx \in P \cap I$$

ve

$$n - xn \in P \cap I$$

dır. $P \cap I = \{0\}$ olduğundan,

$$n = xn$$

ve

$$n = nx$$

dır. Eğer, N birimli ise x, N-nin birim elemanıdır ve $U_P \cap U_I = \{e\}$ dır. Aksi takdirde $U_P \cap U_I = \emptyset$ dir.

Önerme 5.2.2. N bir yakın halka ve $I, P \lhd N$ olsun. $P \subseteq I$ ise $x_P^{-1} \subseteq x_I^{-1}$ dır.

İspat: $a \in x_P^{-1}$ olsun. Tanım 5.1.5 'ten $a \in x_r^{-1} \cap x_l^{-1}$ dir. Buradan,

$$a \in x_r^{-1}$$

ve

$$a \in x_l^{-1}$$

dir. $a \in x_r^{-1}$ ise

$$xa \in U_P$$

dir. Aynı zamanda, $a \in x_l^{-1}$ ise

$$ax \in U_P$$

dir. Sonuç 5.1.4 'ten $P \subseteq I$ olduğundan $U_P \subseteq U_I$ dır. Buradan,

$$xa \in U_I$$

ve

$$ax \in U_I$$

dır. Böylece, $a \in x_r^{-1}$ ve $a \in x_l^{-1}$ olup

$$a \in x_r^{-1} \cap x_l^{-1}$$

ve buradan,

$$a \in x_I^{-1}$$

dır. Dolayısıyla $x_P^{-1} \subseteq x_I^{-1}$ dır.

Önerme 5.2.3. N bir yakın halka ve $P \lhd N$ olsun. $P = N$ ise $x_P^{-1} = N$ dir.

İspat : $x_P^{-1} \subseteq N$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $n \in N$ olsun. $n \in x_P^{-1}$ olduğunu gösterelim.

$$x_P^{-1} = x_r^{-1} \cap x_l^{-1}$$

olduğundan,

$$n \in x_r^{-1}$$

ve

$$n \in x_l^{-1}$$

olduğunu, yani

$$xn \in U_P$$

ve

$$nx \in U_P$$

olduğunu göstermeliyiz. Sonuç 5.1.4 'ten $P = N$ ise $U_P = N$ dir. Dolayısıyla, $xn \in U_P$ yani $xn \in N$ olduğundan ve $nx \in U_P$ yani $nx \in N$ olacağından $x_P^{-1} = N$ olur.

Önerme 5.2.4. N bir yakın halka, $P \lhd N$ ve U_P, P-birimlerin kümesi olsun. $x \in U_P$ ise $U_P \subseteq x_P^{-1}$ dir.

İspat: $x \in U_P$ olsun. Teorem 5.1.3'ten $(U_P,.)$ bir yarı grup olduğundan,

$$xx \in U_P$$

dir. Buradan,

$$x \in x_P^{-1}$$

dir. Böylece,

$$U_P \subseteq x_P^{-1}$$

olur.

SONUÇ

Bu tezde ilk olarak; yakın halka kavramı ve temel özellikleri verilmiştir. Ardından yakın halkalarda asallık kavramı ve asal ideal türleri incelenmiştir. Ayrıca yakın halkalarda 3-asallık kavramının genelleştirilmesi olan P-3-asal ideal, P-3-yarı asal ideal, P-3-asal yakın halka kavramları tanımlanmış ve farklı asallık tipleri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son bölümde ise, yakın halkanın bir P ideali kullanılarak yakın halkanın P-(sağ-sol) birim, P-invers kümeleri verilmiş ve bu kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Dickson, L. E., Definitions of a Group and a Field by Independent Postulates, Transactions of the American Mathematical Society, 6, 198-204, 1905.

2. Holcombe, W. L. M., Primitive Near-rings, Ph. D. Dissertation, University of Leeds, 1970.

3. Van Der Walt, A. P. J., Prime ideals and nil radicals in near-rings, Archiv der Mathematik, 15, 408-414, 1964.

4. Laxton, R. R., Prime ideals and the ideal radical of a distributitively generated near-ring, Mathematische Zeitschrift, 83, 8-17, 1964.

5. Ramakotaiah, D., Radicals for near-rings, Mathematische Zeitschrift, 97, 45-56, 1967.

6. Beidleman, J., Strictly prime distributively generated near-rings, Mathematische Zeitschrift, 100, 97-105, 1967.

7. Ramakotaiah, D., Rao, G. K., IFP Near-rings, Journal of the Australian Mathematical (Series A), 27, 365-370, 1979.

8. Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings, Communications in Algebra, 19, 2667-2675, 1991.

9. Reddy, Y. V., Murty, C. V. L. N., Semi-symmetric ideals in near-rings, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 16, 17-21, 1985.

10. Atagün, A. O., Yakın-Halkalarda Özel Asal İdeallerin Karakterizasyonu ve İnşası Üzerine, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, 69, 2006.

11. Booth, G. L., Groenewald, N. J., Different Prime Ideals in Near-rings II, Rings and Radicals (B. J. Gardner, Liu Shaoxue, R. Weigandt (eds.)), Shijiazhaung 1994, Pitman Res, Notes Math., Longman, 346, 131-139, 1996.

12. Manara, S. P., On Medial Near-rings, North-Holland Mathematics Studies, 137, 199-209, 1987.

13. Birkenmeier, G. F., Heatherly, H., Medial Near-rings, Monatshefte für Mathematik, 107, 89-110, 1989.

14. Dheena, P., Jenila, C., P-Strongly Regular Near-rings, Journal of the Korean Mathematical Society, 27, 501-506, 2012.

15. Kamacı, H., Yakın-Halkalarda P-regülerlik ve P-v-asallık, Yüksek Lisans Tezi, Bozok Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yozgat, 48, 2014.

16. Pilz, G., Near-rings, 2nd Ed., Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland, 1983.

17. Birkenmeier, G. F., Heatherly, H., Left self distributive near-rings, Journal of the Australian Mathematical, 49, 273-296, 1990.

18. Nandakumar, P., On Weakly π-subcommutative Near-rings, The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, 32, 131-136, 2009.

19. Booth, G. L., Groenewald, N. J., v-prime and v-semiprime near-rings, Mathematica Japonica, 43, 425-430, 1996.

20. Taşdemir, F., Asal Yakın-Halkalar ve Asal Yakın-Halka Modüllerinin Karekterizasyonu Üzerine, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, 65, 2013.

21. Atagün, A. O., IFP Idelas in Near-rings, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic, 39, 17-21, 2010.

22. Atagün, A. O., Groenewald, N. J., Priminess in near-rings with multiplicative semi-group satisfying 'the three identities', Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications, 2, 137-45, 2009.

23. Atagün, A. O., Aygün, E., Altındiş, H., S-special near-rings, Journal of Institute of Mathematics and Computer Sciences (Mathematics Series), 19, 205-210, 2006.

24. Birkenmeier, G., Heatherly, H. E., Lee E., Prime ideals in near rings, Result in Mathematics, 24, 27-48, 1993

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Yozgat'ta doğan İsmail TAŞTEKİN, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Oral İlköğretim Okulu ve Yozgat Lisesi'nde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Yozgat Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir.

2012 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR danışmanlığında hazırladığı "Yakın Halkalarda *P*-v-Asallık" başlıklı teziyle 2018 yılında mezun olmuştur.

İletişim Bilgileri

Adres : Aydınlıkevler Mah. Burak Sitesi D-blok Kat:3 No:6 Sorgun/YOZGAT

Telefon: (544) 354 74 95

E-posta: ismail.tastekin.s@gmail.com