**T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Ayşe YILDIRIM

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yusuf PANDIR**

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİNİN İNCELENMESİ

Ayşe YILDIRIM

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Bu tez çalışması Yozgat Bozok Üniversitesi Proje Koordinasyon Araştırma ve Uygulama Merkezi'nin 2013FBE/T69 nolu proje desteği ile yapılmıştır.

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans/Doktora Programı 70111312002 numaralı öğrencisi Ayşe YILDIRIM'nın hazırladığı "**Kesirli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Yarı Analitik Yöntemlerinin İncelenmesi**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 29/01/2019 Salı günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yusuf Pandır

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..07../..02../..19 tarih ve ..7... sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

07../02../2019

T.C. YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ 1992

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KESİRLİ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YARI ANALİTİK YÖNTEMLERİN İNCELENMESİ

Ayşe YILDIRIM

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 46

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin elde edilmesini sağlayan genelleştirilmiş tanh yöntemi ve deneme denklem yöntemi ele alınmıştır. Genelleştirilmiş tanh yöntemi sırasıyla zaman-uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage, zaman-uzay kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili, zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV ve zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemlerine uygulanmıştır. Ayrıca yarı analitik bir yöntem olan deneme denklem yöntemi zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemine uygulanmıştır. Bu iki yöntemden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve literatürde yer almayan farklı hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş tanh yöntemi, Deneme Denklem yöntemi, Lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler, Hiperbolik fonksiyon çözümleri, Trigonometrik fonksiyon çözümleri.

INVESTIGATION OF FRACTIONAL PARTİAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WİTH SEMİ ANALYTIC METHODS

Ayşe YILDIRIM

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 46

Thesis Supervisor: Assos. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this thesis, generalized tanh method and trial equation method which provide semi-analytical solutions of fractional partial differential equations are discussed. The generalized Tanh method was applied to time-space fractional non-linear Foam Drainage, time-space fractional potential Kadomtsev-Petviashvili, time-space fractional non-linear KdV and time fraction reaction-diffusion equations, respectively. In addition, the trial equation method which is a semi-analytical method, was applied to the time-space fractional non-linear KdV equation. The results obtained from these two methods were compared and different traveling wave solutions were obtained.

Keywords: Extended tanh method, Trial equation method, Nonlinear partial differential equations with fractional order, Hyperbolic function solutions, Trigonemetric function solutions.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her evresinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR' a, teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans yapmamı teşvik eden, maddi ve manevi desteğini daima yanımda hissettiğim babam Osman YILDIRIM ve annem Handan YILDIRIM'e çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler, birçok uygulama alanı olan denklemlerdir. Bu uygulama alanları; mühendislik, biyoloji, fizik, sistem tanımlama, kontrol teorisi, finans ve fraksiyonel (kesirli) dinamikler ve sinyal işleme olarak söylenebilir. Son zamanlarda yapılan birçok araştırmada bu tarz denklemlerin sık kullanımı nedeniyle bu denklemlerin çözümlerini elde etmek odak noktası haline gelmiştir. Bu sebeple, kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sınıflandırılması için çeşitli yarı analitik yöntemler önerilmiştir.

Kesirli mertebeden türev tanımı ilk kez 17. yüzyılda Leibniz ve L'Hospital tarafından yapılmıştır [1]. Diğer matematikçiler Riemann, Abel ve Liouville daha sonra kesirli mertebeden türev kavramı üzerine çalışmalar yapmışlardır. Detaylı olarak kesirli mertebeden türevin tanımı ilk kez P. S. Laplace tarafından belirtilmiştir [2]. Genelleştirilmiş Gama fonksiyonu kullanılarak, kesirli mertebeden türev tanımı 1819 yılında S. F. Lacroix tarafından verilmiştir [3]. Bugün hâla kullanılan Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev tanımı Lacroix'in elde ettiği sonuçlar ile aynıdır. Daha sonra kesirli mertebeden türevin iki farklı tanımı Liouville tarafından verilmiştir [4]. Caputo farklı bir kesirli mertebeden türev tanımını ifade etmiştir [5]. Caputo'nun ifade ettiği kesirli mertebeden türev tanımı; Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla ilişkilendirilerek, klasik anlamda kesirli mertebeden türevlerin başlangıcıdır. Anton Karl Grünwald ve Aleksey Vasilievich Letnikov tarafından Grünwald-Letnikov türevi olarak adlandırılan yeni bir kesirli mertebeden türev tanımı verilmiştir [6]. Son zamanlarda ise genel Mittag-Leffler fonksiyonunu bir çekirdek olarak kullanan kesirli mertebeden bir türev tanımı Abdon Atangana ve Dumitru Baleanu tarafından verilmiştir [7]. 2014 yılında ise "conformable kesirli türev" olarak adlandırılan yeni bir türev tanımı R. Khalil ve ark. tarafından verilmiştir [8]. Klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesiyle tüm yukarıda ifade edilen kesirli mertebeden türev ve integral tanımları elde edilmiştir.

Son zamanlarda gerçekleştirilen çalışmalarada araştırmacılar kesirli kısmi türevli denklemlerin analitik ve yarı analitik çözümleri ile nümerik çözümlerinin elde edilmesi üzerine incelenmelerde bulunmuşlardır. Bu çözümlerin elde edilmesine olanak sağlayan yeni ve farklı yöntemlerin geliştirilmesi ve uygulanması büyük önem arz etmektedir. Literatür incelemesi yapıldığında, kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik ve yarı analitik çözümlerinin bulunması üzerine birçok araştırma yapıldığı gözlenmiştir.

Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler birçok alanda örneğin; kontrol teorisi, finans, sinyal işleme, sistem tanımlama, optik, mekanik mühendisliği, viskoelastisite, elektromanyetik, termodinamik alanlarında karşılaşılan problemleri ifade etmek için kullanılır. Ayrıca bu alanlardaki fiziksel olayların yorumlanması ve aydınlatılmasına bu tarz denklemlerin katkısı vardır.

Genel olarak, kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümünü veren herhangi bir yöntem bulunmamaktadır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesine olanak sağlayan Adomian ayrıştırma yöntemi [9], Homotopy pertürbasyon yöntemi [10], sonlu elemanlar yöntemi [11], diferansiyel dönüşüm yöntemi [12] ve değişim iterasyon yöntemi [13] gibi yöntemler önerilerek incelenmiştir.

Son yıllarda farklı kesirli mertebeden türev tanımları kullanılarak oluşturulan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini bulmak için birçok yöntem önerilmiştir. Lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümünün elde edilmesini sağlayan kesirsel alt denklemi verilen yeni bir yöntemi Zhang ve Zheng [14, 15] tanımladılar. Bu önerilen yöntem Jumarie tarafından verilen modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevine dayanmaktadır [16]. Zhang'nın önerdiği yöntemi geliştiren Guo ve ark. [17] ve Lu [18] bu geliştirdikleri yöntemi bazı lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulayarak yeni tam çözümlerini elde ettiler. Daha sonra Lu [19] ilk kez integral yöntemini bu tarz denklemlere uygulayıp farklı tam çözümler elde etmiştir. Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinde Jakobi eliptik fonksiyonları ilk kez Zhenya Y. tarafından bulunmuştur [20]. Hareketli dalga çözümleri veren üstel fonksiyon yöntemi [21] ve genelleştirilmiş üstel fonksiyon yöntemleri [22] sırasıyla Zheng ve Zhang ve ark. tarafından verilmiştir. Daha sonra Pandir ve ark. [23] genişletilmiş deneme denklem yöntemini kullanarak, bazı kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı tam çözümlerini buldular. Pandir ve

Gurefe [24] kesirli kısmi türevli genelleştirilmiş Zakharov-Kuznetsov denkleminin yeni tam çözümlerini elde etmek için genişletilmiş deneme denklem yönteminin yeni bir versiyonunu önerdiler. Ayrıca Zheng [25] $\left(G'/G\right)$-açılım yöntemini matematiksel fizikte yer alan bazı kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabileceği gösterdi.

Literatür incelemesi yapıldığında tanh yöntemleri [26-31] ile deneme denklem yönteminin [32-35] kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanmadığı görülmüştür. Bu sebeble tanh yöntemlerden genelleştirilmiş tanh yöntemini ve deneme denklem yöntemini kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulayıp, yarı analitik çözümlerinin elde edileceği düşünülmüştür. Ayrıca bu iki yöntemin karşılaştırılması yapılarak, hangisinin daha genel çözümler verebileceği belirlenmiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, tanh yönteminin bir genelleştirilmiş hali olan genelleştirilmiş tanh yöntemi [36] ile deneme denklem yöntemi [37-39] lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerini bulmak için uygulanmıştır. İlk önce genelleştirilmiş tanh yöntemi incelenmiştir. Daha sonra bu yöntemin kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga dönüşümlerinin elde edilmesine olanak sağlayan hali düzenlenmiştir. Aynı düşünceyle deneme denklem yöntemi kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanması için yeniden düzenlenmiştir. Bu düzenlenen yöntemlerin daha önce literatüre sunulan yöntemlerden farklı ve yeni çözümler vermesi hedeflenmiştir.

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde; genelleştirilmiş tanh yöntemi zaman-uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage, zaman-uzay kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili, zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV ve zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemlerine uygulanmıştır. Bu problemler için yeni ve farklı tekil, karanlık ve tekil-karanlık (soliton) hareketli dalga fonksiyon çözümleri bulunmuştur. Ayrıca zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemine deneme denklem yöntemi uygulanarak tekil periyodik (soliton) ve tekil (soliton) hareketli dalga fonksiyon çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen bu farklı soliton çözüm fonksiyonlarının davranışlarını anlamlandırmak için Mathematica paket programı yardımıyla üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Bu tez çalışmasının sonuç ve tartışma bölümünde genelleştirilmiş tanh yöntemi ile deneme denklem yöntemleri yardımıyla bazı lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni ve farklı hareketli dalga çözümlerinin elde edildiği, elde edilen çözümler incelendiğinde uygulanan yöntemlerin lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek için uygun ve etkin oldukları ifade edilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerde yer alan türev ve integral kavramlarının tanımları ve bunlara ait özellikler ifade edilmiştir. Kesirli bir diferansiyel denklem, kesirli türevleri içeren bir denklemi; kesirli bir integral denklemi ise kesirli integralleri barındıran bir integral denklemidir.

Tanım 1.1: $\alpha > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun t'ye göre α ıncı mertebeden Grünwald-Letkikov kesirli türevi

$$D_t^{\alpha} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = x-a}} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \tag{1.1}$$

olarak ifade edilmektedir [40].

Tanım 1.2: $m-1 \leq \alpha < m,\ m \in Z^{+},$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun α ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_x^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilir [40].

Tanım 1.3: $m-1 \le \alpha < m,\ m \in Z^{+},$ olmak üzere

$$ {}^{C}D_t^{\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau)d\tau, \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanan türeve $f(t)$ fonksiyonunun α ıncı mertebeden Caputo kesirli mertebeden türevi denir.

Tanım 1.4: $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha < n,$ ve $t > c$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun α ıncı mertebeden Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali

$$ J^{\varepsilon}\left[f(t)\right] = {}_cD_t^{-\alpha}\left[f(t)\right] = \frac{d^{-\alpha} f}{dt^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\,d\tau, \tag{1.4}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5: α ıncı mertebeden modifiye edilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ D_t^{\alpha}\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t (t-\zeta)^{-\alpha}\left(f(\zeta)-f(0)\right)d\zeta, & 0<\alpha<1 \\ \left(f^{(n)}(t)\right)^{(\alpha-n)} & ,\quad n \le \alpha < n+1 \end{cases} \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır [16].

Tanım 1.6: α ıncı mertebeden modifiye edilmiş Riemann-Liouville kesirli türevi ile ilgili özellikler aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. $c,\ c_1,\ c_2$ ler keyfi sabit olmak üzere

a) $$D_t^{\alpha} t^{r} = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} t^{r-\alpha}, \quad r > 0 \tag{1.6}$$

b) $$D_t^{\alpha}\left(c\, f(t)\right) = c.D_t^{\alpha}\left(f(t)\right), \tag{1.7}$$

c) $$D_t^{\alpha}\left\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\right\} = c_1.D_t^{\alpha} f(t) + c_2.D_t^{\alpha} g(t), \tag{1.8}$$

Tanım 1.7: u bilinmeyen bir fonksiyon, D^{α} u'nun α ıncı mertebeden kesirli kısmi türevi ve Φ'de u'nun bir polinomu olmak üzere en genel lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklem

$$\Phi\left(u,\, D_t^{\alpha}u,\, D_x^{\beta}u,\, D_t^{2\alpha}u,\, D_t^{\alpha}D_x^{\beta}u,\, D_x^{2\beta}u,\cdots\right)=0,\quad 0<\alpha \quad \beta\le 1 \tag{1.9}$$

olarak ifade edilir.

1.2. Solitonlar

İlk kez 1834 yılında Scott Russell tarafından gözlemlenen soliton bir su dalgası şeklindedir. Gözlemlenen bu su dalgasının lineer olmayan bir özellik taşıdığı ifade edilmiştir. Bir solitonun dalga olarak ifadesi; genliği ℓ, derinliği h ve g yer çekim ivmeli bir ortamdaki hızı $v=\sqrt{g\left(\ell+h\right)}$ olarak belirtilmiştir. Bu özelliklerinden dolayı lineer olmayan dinamiklerin açıklanmasında solitonlar önemli bir yere sahiptir. Daha sonraki yıllarda ilk kez D. J. Korteweg ve G. De Vries isimli bilim adamları KdV denklemi olarak ifade edilen denklemin $u\left(x,t\right)=\ell\,\mathrm{Sech}^2\left(\eta\left(x-vt\right)\right)$ şeklinde bir çözümünün soliton özelliğe sahip olduğunu ifade etmişlerdir. Buradaki çözüm fonksiyonu bir dalganın x konumunda ve t zamanında derinliği gösterdiğini söylemişlerdir. KdV denklemi sığ sularda oluşan dalgaların devamlı olarak yayıldığını ifade eden bir model olarak literatürdeki yerini almıştır. Ayrıca solitonlar şekil, hız ve enerjileri değişmeden yayılan, karşılıklı olarak çarpıştıklarında veya bir etkileşime maruz kaldıklarında özellikleri değişmeden korunan dalga çeşididir. Lineer olmayan ve sürekli olarak hız değişimine sahip olan birçok fiziksel olayın meydana getirdiği karmaşık sistemlerin çözümlerinde solitonlarla karşılaşılır. Örneğin akışkanlar mekaniğinde, sinir sisteminde nöronların gönderdiği sinyallerde, parçacık fiziğinde, haberleşmede optik ışınlarının ilerlemesinde ve biyolojik sistemlerde çözüm olarak karşımıza solitonlar çıkmaktadır. İleri teknolojinin birçok alanında karşılaşılan problemler özelikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bu denklemlerin çözümlerinde genellikle solitonlar ile karşılaşılır.

2. YARI ANALİTİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde literatürde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler için kullanılan tanh yöntemleri tanıtılmıştır. Bu yöntemin yeni bir versiyonu olan genelleştirilmiş tanh yönteminin ifadesi verilmiştir.

Ayrıca bu bölümde yarı analitik bir yöntem olan deneme denklem yöntemi kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler için ifade edilmiştir. Bu yöntemin uygulanmasıyla yarı analitik yöntemler arasında bir karşılaştırılma yapılması sağlanmıştır.

2.1. Tanh Yöntemleri

Kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler için literatürde var olan tanh yöntemlerinin esasları bu kısımda tanıtılmıştır. Bağımsız değişkenler $x, y, z, \cdots, t$ (zaman) olmak üzere bir lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denkleminin en genel halini

$$\Psi\left(\varphi, D_t^{\alpha}\varphi, D_x^{\beta}\varphi, D_t^{\alpha}D_t^{\alpha}\varphi, D_t^{\alpha}D_x^{\beta}\varphi, D_x^{\beta}D_x^{\beta}\varphi, \cdots\right) = 0, \quad 0 < \alpha,\ \beta < 1 \qquad (2.1.1)$$

şeklinde ele alalım. Burada φ bilinmeyen fonksiyonu, α ve β ’da φ fonksiyonunun kesirli mertebeden türevlerini göstermektedir. En genel lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemin hareketli dalga çözümlerini bulmak için ε ve δ sabitler olmak üzere,

$$\omega = \frac{\varepsilon x^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{\delta t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \qquad (2.1.2)$$

hareketli dalga dönüşümü şeklinde kullanılır. Bu dönüşümde δ , hareketli dalganın hızını göstermektedir. Yani bilinmeyen fonksiyon bu dönüşüm ile $\varphi(x,t) = \varphi(\omega)$ olarak ifade edilecektir. (2.1.1) denklemine tanımlanan bu hareketli dalga dönüşümü uygulanıp gerekli kesirli kısmi türevler alındıktan sonra denklemde yerine yazıldığında,

$$\psi\left(\varphi,\varphi',\varphi'',\varphi''',\cdots\right)=0 \tag{2.1.3}$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2.1.3) denkleminde yer alan fonksiyon ve ona ilişkin türevler ω'ya bağlıdır. Eğer (2.1.3) denklemi integre edilebiliyorsa integre edilip, sadelik için integrasyon sabiti de sıfır olarak seçilebilir. Böylece (2.1.3) denklemi daha sade bir hale getirilmiş olur. (2.1.3) denkleminin genel çözümünü bulmak için sonlu seri çözümünden faydalanılır. Tanh yöntemlerinin temelinde de sonlu seri kullanılır. Literatür incelemesi yapıldığında 3 farklı tanh yönteminin yer aldığı görülmüştür. Bunlar sırasıyla klasik tanh yöntemi, geliştirilmiş tanh yöntemi ve genelleştirilmiş tanh yöntemidir.

Klasik tanh yöntemine göre; (2.1.3) denkleminin çözüm fonksiyonu $Y=\tanh\left(\mu\omega\right)$ olmak üzere

$$\varphi\left(\omega\right)=\sum_{i=0}^{S}a_iY^i\left(\omega\right) \tag{2.1.4}$$

şeklindedir. Buradaki S belirlenmesi gereken pozitif bir tamsayıyı göstermektedir.

Geliştirilmiş tanh yöntemine göre (2.1.3) denkleminin çözüm fonksiyonu ise $Y=\tanh\left(\mu\omega\right)$ olmak üzere

$$\varphi\left(\omega\right)=a_0+\sum_{i=1}^{S}a_iY^i\left(\omega\right)+b_iY^{i-1}\left(\omega\right)\sqrt{\gamma\left(1+\frac{Y^2\left(\omega\right)}{\rho}\right)} \tag{2.1.5}$$

olarak ifade edilmektedir. $a_0, a_i, b_i, \gamma, \rho$ bilinmeyen katsayıları sabitleri ve S de pozitif bir tamsayıyı göstermektedir. Bu yöntemlere bakıldığı zaman çözüm fonksiyonu her ne kadar değişmiş gibi görünse de esasında pek fazla değişiklik olmadığı görülebilir. Çözüm fonksiyonlarında daha farklı fonksiyonların yer alması esas olmalıdır.

Genelleştirilmiş tanh yönteminde ise (2.1.3) denkleminin çözüm fonksiyonu $Y=\tanh(\mu\omega)$ olmak üzere

$$\varphi(\omega)=a_0+\sum_{i=1}^{S} a_i Y^{i}(\omega)+b_i Y^{-i}(\omega) \tag{2.1.6}$$

şeklinde belirtilmiştir. Burada yer alan S bulunması gereken bir pozitif bir tamsayıyı ve $a_0, a_i, b_i, (i=1,2,\cdots)$ katsayıları hesaplanarak elde edilecek sabitleri ifade etmektedir. Çözüm fonksiyonun da yer alan $Y=\tanh(\mu\omega)$ fonksiyonunun ilgili türevleri

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\omega}=\mu\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY},\\ \frac{d^2}{d\omega^2}=-2\mu^2\left(1-Y^2\right)\frac{d}{dY}+\mu^2\left(1-Y^2\right)^2\frac{d^2}{dY^2},\\ \frac{d^3}{d\omega^3}=2\mu^3\left(1-Y^2\right)\left(3Y^2-1\right)\frac{d}{dY}-6\mu^3 Y\left(1-Y^2\right)^2\frac{d^2}{dY^2}+\mu^3\left(1-Y^2\right)^3\frac{d^3}{dY^3}\end{gathered} \tag{2.1.7}$$

olarak hesaplanır. (2.1.6) çözüm fonksiyonunda yer alan S sayısı; (2.1.3) adi diferansiyel denleminde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile lineer olmayan en yüksek dereceden terim arasında kurulan denge (balans) ile belirlenir. Hesaplanan balans terimi (2.1.6) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır. (2.1.3) diferansiyel denkleminde bulunan ilgili türevler (2.1.7) ifadesindeki gibi alınır ve (2.1.3) de yerine yazılır. Böylece oluşan kuvvet fonksiyonu Y fonksiyonuna bağlı olup, bu fonksiyonu bir sıfır fonksiyonu olarak ele alırsak, bu fonksiyonda oluşan $Y^{\pm i}$ fonksiyonlarının terimlerin eşit katsayılar sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel denklem sistemi ilgili yöntemler ile Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde, hesaplanması gereken $a_0, a_i, b_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ ve $\varepsilon,\ \delta$ katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılar (2.1.6) çözümünde yerlerine yazılarak $\varphi(\omega)$ şeklinde tanh fonksiyon veya onun ile ilişkili fonksiyonları içeren çözümler elde edilir. Daha sonra ω yürüyen dalga dönüşümü yerine yazıldığında lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri elde edilir.

2.2. Deneme Denklem Yöntemi

Bu bölümde Ma ve Fuchssteiner [41] tarafından lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için önerdikleri son derecce faydalı bir yöntemi irdeleyeceğiz. Bu araştırmacıların temel fikri verilen bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonlarını nasıl genişletebiliriz şeklinde oldu. Bu düşünceyle birçok araştırmacı farklı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümlerini elde ettiler. Liu deneme denklem yöntemini bu düşünceler sayesinde önerdi ve bu yöntemi bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlere uyguladı. Örneğin u ya bağlı bir diferansiyel denklem ele alındığında, bu denklemin her zaman çözülebilen $\left(u'\right)^2 = F\left(u\right)$ denkleminin bir kesin çözümü olduğunu varsayalım. Bu sebeple temel amacımız $F\left(u\right)$ fonksiyonunu bulmaktır. Liu $F\left(u\right)$ fonksiyonunun polinom veya rasyonel fonksiyon olma durumunda birçok lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümünü elde etmiştir. Ancak bazı homojen olmayan diferansiyel denklemler için $F\left(u\right)$ polinomunu veya bir $F\left(u\right)$ rasyonel fonksiyonunu elde edemeyebiliriz. Bu sebeble, Du $F\left(u\right)$ fonksiyonunun rasyonel olmaması durumunda yeni bir deneme denklem yöntemini önererek bu tip denklemlerin çözümlerini bulmaya çalıştı. Diğer yandan Liu değişken katsayılı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için uygun olan deneme denklem yönteminin yeni bir versiyonunu önerdi. Gürefe ve ark. tarafından deneme denklem yöntemi daha da geliştirilerek genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak genelleştirilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulandı. Bu yöntemin diğer deneme denklem yöntemlerine göre daha genel ve farklı çözüm fonksiyonlarının elde edilmesine olanak sağladığı görülmüştür.

Bu kısımda kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler için literatürde var olan deneme denklem yönteminin ana hatlarını vereceğiz.

$$\Omega\left(\nu, D_t^{\alpha}\nu, D_x^{\beta}\nu, D_t^{\alpha}D_t^{\alpha}\nu, D_t^{\alpha}D_x^{\beta}\nu, D_x^{\beta}D_x^{\beta}\nu, \cdots\right)=0, \quad 0<\alpha,\ \beta<1 \quad (2.2.1)$$

şeklinde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemin en genel halini ele alalım. Burada ν bilinmeyen fonksiyonu; $x, y, \cdots, t$ bağımsız değişkenlere bağlı olmak üzere, α ve β ’da ν fonksiyonunun kesirli mertebeden türevlerini göstermektedir. (2.2.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini bulmak için χ ve ϑ sabitler olmak üzere, $\nu(x,t)=\nu(\zeta)$ hareketli dalga dönüşümü

$$\zeta=\frac{\chi x^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]}+\frac{\vartheta t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \quad (2.2.2)$$

olarak kullanılır. (2.2.2) hareketli dalga dönüşümü altında (2.2.1) denklemi

$$\Upsilon\left(\nu, \nu', \nu'', \nu''', \cdots\right)=0 \quad (2.2.3)$$

şeklinde lineer olmayan adi bir diferansiyel denkleme indirgenir. (2.2.3) denkleminde bulunan fonksiyon ve onun türevleri ζ ya bağlıdır. Bazen (2.2.3) denklemi integre edilerek, denklemin mertebesi indirgenebilir. (2.2.3) denklemin çözüm fonksiyonu için S ve a_i belirlenecek sabitler olmak üzere

$$\left(\nu'\right)^2=F\left(\nu\right)=\sum_{i=0}^{S} a_i \nu^i \quad (2.2.4)$$

şeklindeki deneme fonksiyonunu ele alalım. (2.2.4) denklemini ve onunla bağlantılı türevleri ν'' veya ν''' gibi hesapladıktan sonra (2.2.3) denkleminde yerine yazarsak, ν bağlı $F(\nu)$ polinom fonksiyonu elde edilir. Balans prosedürüne göre S ’nin değeri hesaplanır. $F(\nu)$ fonksiyonunun tüm katsayıları sıfıra eşitlenirse, bu takdirde bir cebirsel denklem sistemi bulunmuş olur. Elde edilen bu cebirsel denklem sistemi mathematica paket programıyla çözüldükten sonra $a_0, a_1, \cdots, a_S$ değerleri, χ ve ϑ

sabitleri belirlenir. Belirlenen $a_0, a_1, \cdots, a_S$ katsayı değerleri (2.2.4) te yerine yazıldığında sonra (2.2.4) denklemi

$$\pm(\zeta - \zeta_0) = \int \frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}} \tag{2.2.5}$$

integral formunda yeniden yazılır. $F(\nu)$ polinom fonksiyonunun tam diskriminant sistemine göre kökleri belirlendikten sonra (2.2.5) integrali çözülür. Böylece (2.2.1) kesirli kısmi türevli diferansiyel denkleminin tam çözümü elde edilir.

3. YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde zaman-uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage, zaman-uzay kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili, zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV ve zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemleri incelenmiş ve bu denklemlere sırasıyla genelleştirilmiş tanh yöntemi uygulanmıştır. Ayrıca zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemine deneme denklem yöntemi uygulanarak, iki yöntem ile edilen sonuçlarda karşılaştırılmıştır.

3.1. Zaman-Uzay Kesirli Lineer Olmayan Foam Drainage Denklemi

Lineer olmayan Foam Drainage denklemi kabarcıklar arasında sıvı akışının bir modelini ifade etmektedir. Zaman- uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage denkleminin [42-45] genel hali

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{2} u \frac{\partial^{2\beta} u}{\partial x^{2\beta}} + 2u^2 \frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}} + \left(\frac{\partial^{\beta} u}{\partial x^{\beta}} \right)^2, \quad t > 0, \ \ 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{3.1.1}$$

şeklindedir. Denklemde yer alan u, x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon, α ve β ise kesirli mertebeden türevleri göstermektedir.

(3.1.1) de ifade edilen denkleme genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayabilmek için hareketli dalga dönüşümü olarak adlandırılan

$$u(x,t) = \phi(\eta), \qquad \eta = \frac{Kx^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.1.2}$$

dönüşümünü uygulayalım. Burada K ve L belirlenmesi gereken sabitler olmak üzere bu dönüşüme göre denklemde yer alan türevler hesaplandığında ve (3.1.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$-L\phi' + \frac{1}{2} K^2 \phi\phi'' + 2K\phi^2\phi' + K^2 (\phi')^2 = 0 \tag{3.1.3}$$

şeklinde 2. mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir.

(3.1.3) te ifade edilen adi diferansiyel denklemin çözümünü bulabilmek için ilk önce Bölüm 2.1 de belirtilen genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayalım.

3.1.1. Genelleştirilmiş tanh yöntemine uygulaması

Zaman-uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage denklemi için varsayılan çözüm fonksiyonu (2.1.6) ile ifade edilmiştir. (3.1.3) denklemindeki en yüksek mertebeden türev içeren $\phi\phi''$ terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan $\phi^2\phi'$ terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi sonucunda, ifade edilen çözüm fonksiyonuna göre $S=1$ olarak bulunmuştur. Elde edilen bu dengeleme terimi (2.1.6) denkleminde yerine yazıldığında (3.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonunun en genel hali $Y=\tanh(\mu\eta)$ olmak üzere

$$\phi(\eta)=c_0+c_1Y(\eta)+\frac{d_1}{Y(\eta)} \tag{3.1.4}$$

olarak yazılır. (3.1.4) ifadesinden faydalanarak (3.1.3) denkleminde yer alan ilgili terimlerin karşılıkları

$$\phi'(\eta)=c_1\mu\left(1-Y^2(\eta)\right)-\frac{\mu d_1\left(1-Y^2(\eta)\right)}{Y^2(\eta)}, \tag{3.1.5}$$

$$\phi''(\eta)=-2c_1\mu^2Y(\eta)\left(1-Y^2(\eta)\right)+\frac{2\mu^2d_1\left(1-Y^2(\eta)\right)}{Y(\eta)}+\frac{2\mu^2d_1\left(1-Y^2(\eta)\right)^2}{Y^3(\eta)} \tag{3.1.6}$$

olarak bulunur. Bulunan ilgili türevler ve çözüm fonksiyonu (3.1.3) denkleminde yerine yazıldığında ve $Y^{\pm i}\ (i=0,1,2,\cdots)$ ait tüm katsayıları sıfıra eşitleyerek bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Oluşan bu denklem sistemi uygun yöntemler kullanılarak, Mathematica yardımı ile çözüldüğünde c_0,c_1,d_1,L,K katsayıları elde edilir. Ayrıca η dönüşümüne göre aşağıda belirtilen literatürde bulunmayan çözüm fonksiyonları (3.1.1) denklemi için bulunmuştur.

Durum 1:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = K\mu, \quad d_1 = K\mu, \quad L = 4K^3\mu^2 \tag{3.1.7}$$

bulunan katsayılar için (3.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u_1(\eta_1) = c_0 + c_1 Y(\eta_1) + \frac{d_1}{Y(\eta_1)}, \quad \eta_1 = \frac{Kx^\beta}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{Lt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.1.8}$$

şeklindedir. $A_1 = K\mu$ ve $\eta_1 = K\left(\frac{x^\beta}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{4K^2\mu^2 t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere, (3.1.1) denkleminin yeni tam çözümü

$$u_1(x,t) = A_1\left(\tanh(\eta_1) + \coth(\eta_1)\right) \tag{3.1.9}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$c_0 = c_1 = 0, \quad d_1 = K\mu, \quad L = K^3\mu^2 \tag{3.1.10}$$

elde edilen katsayılar için (3.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u_2(\eta_2) = \frac{d_1}{Y(\eta_2)}, \quad \eta_2 = \frac{Kx^\beta}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{Lt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.1.11}$$

şeklindedir. $\eta_2 = K\left(\frac{x^\beta}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{K^2\mu^2 t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.1.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$u_2(x,t) = A_1 \coth(\eta_2) \tag{3.1.12}$$

olarak bulunur.

Durum 3:

$$c_0 = d_1 = 0, \quad c_1 = K\mu, \quad L = K^3\mu^2 \tag{3.1.13}$$

belirlenen katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_3(\eta_2) = c_1 Y(\eta_2) \tag{3.1.14}$$

şeklindedir. (3.1.1) denkleminin soliton çözümü

$$u_3(x,t) = A_1 \tanh(\eta_1) \tag{3.1.15}$$

olarak elde edilir.

Elde edilen sonuçlar Gepreel'in [43] ve Mirzazadeh'in [45] sonuçları ile karşılaştırıldığında, Durum (2) ve Durum (3) te elde ettiğimiz sonuçlar ile benzerdir. Ancak Durum (1) de elde edilen çözümün incelediğimiz denklemin literatürde olmayan yeni bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz.

3.2. Zaman-Uzay Kesirli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili Denklemi

Bu kısımda

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\right) + \frac{3}{2}\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{1}{4}\frac{\partial^{4\alpha} v}{\partial x^\alpha} + \frac{3}{4}\frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial y^{2\alpha}} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.2.1}$$

şeklinde ifade edilen lineer olmayan zaman-uzay kesirli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denklemine [46,47] önerilen yöntem uygulanacaktır. Burada v denklemi sağlayan x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyonu, α ise v fonksiyonun kesirli mertebeden türevini ifade etmektedir. Zaman-uzay kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili denklemi, hareketli dalgaların davranışlarını anlayabileceğimiz lineer olmayan kesirli mertebeden bir denklemdir.

Önerilen genelleştirilmiş tanh yöntemini (3.2.1) denklemine uygulayabilmek için hareketli dalga dönüşümünü

$$v(x,y,t) = v(\xi), \qquad \xi = \frac{Mx^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} + \frac{Ny^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} + \frac{Pt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.2.2}$$

ele alalım. M, N ve P belirlenmesi gereken keyfi sabitler olmak üzere, lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştüren bu dönüşüme göre denklemdeki hesaplanması gereken türevler alındığında, $v = v(\xi)$ ve $\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = v'$ olmak üzere ve ξ 'ye göre bir kez integre edildikten sonra

$$\left(\frac{3}{2}N^2 + PM\right)v' + \frac{M^4}{4}v''' + \frac{3}{4}M^3(v')^2 = 0 \tag{3.2.3}$$

şeklinde 3. mertebeden lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem bulunur. (3.2.3) de ifade edilen lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümünü elde edebilmek için bölüm 2.1 de önerilen genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayalım.

3.2.1. Genelleştirilmiş tanh yöntemine uygulaması

Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre zaman-uzay kesirli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denklemine (2.1.6) da ifade edilen çözüm fonksiyonunu ele alalım. Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre, önerilen çözüm fonksiyonu için balans prosedürü uygulandığında, (3.2.3) denklemindeki en yüksek mertebeden türev terimi v''' ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimi $(v')^2$ arasında kurulan balans işlemi neticesinde $S = 1$ olarak elde edilir. Elde edilen bu balans terimi (2.1.6) ifadesinde yerine yazıldığında (3.2.1) denkleminin en genel çözüm fonksiyonu $Y = \tanh(\mu\xi)$ olmak üzere,

$$v(\xi) = c_0 + c_1 Y(\xi) + \frac{d_1}{Y(\xi)} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir. Çözüm fonksiyonu olan (3.2.4) ifadesinden yararlanarak (3.2.3) lineer olmayan denkleminde bulunan terimlerinin türev karşılıkları

$$v'(\xi) = c_1\mu\left(1 - Y^2(\xi)\right) - \frac{\mu d_1\left(1 - Y^2(\xi)\right)}{Y^2(\xi)}, \tag{3.2.5}$$

$$v''(\xi) = -2c_1\mu^2 Y(\xi)\left(1 - Y^2(\xi)\right) + \frac{2\mu^2 d_1\left(1 - Y^2(\xi)\right)}{Y(\xi)} + \frac{2\mu^2 d_1\left(1 - Y^2(\xi)\right)^2}{Y^3(\xi)}, \tag{3.2.6}$$

$$v'''(\xi) = 4c_1\mu^3 Y^2(\xi)\left(1-Y^2(\xi)\right) - 2c_1\mu^3\left(1-Y^2(\xi)\right)^2 - 4d_1\mu^3\left(1-Y^2(\xi)\right)$$
$$-\frac{10d_1\mu^3\left(1-Y^2(\xi)\right)^2}{Y^2(\xi)} - \frac{6d_1\mu^3\left(1-Y^2(\xi)\right)^3}{Y^4(\xi)} \tag{3.2.7}$$

şeklinde hesaplanır. Elde edilen bu türevler ve çözüm fonksiyonu (3.2.3) lineer olmayan diferensiyel denklemde yerine yazıldığında $Y^{\pm i}(\xi)\left(i = 0,1,2,\cdots\right)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom fonksiyonu bulunur. Eğer bu polinoma ait tüm bileşen katsayıları sıfıra eşitlenir ise cebirsel bir denklem sistemi meydana getirilir. Meydana gelen bu cebirsel sistem uygun görülen yöntemler ile paket program kullanılarak çözüldüğünde c_0, c_1, d_1, M, N, P katsayıları elde edilir. Uygulanan ξ dönüşümüne ait aşağıdaki durumlar (3.2.1) denklemi için elde edilmiştir.

Durum 1:

$$c_0 = c_0, \quad c_1 = d_1 = 2M\mu, \quad P = -\frac{3N^2}{4M} - 4M^3\mu^2 \tag{3.2.8}$$

elde edilen katsayılar için (3.2.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$v_1(\xi_1) = c_0 + c_1 Y(\xi_1) + \frac{d_1}{Y(\xi_1)}, \quad \xi_1 = \frac{Mx^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} + \frac{Ny^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} + \frac{Pt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.2.9}$$

şeklindedir. $B_1 = 2M\mu$ ve $\xi_1 = \frac{Mx^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} + \frac{Ny^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} - \frac{\left(3N^2 + 16M^4\mu^2\right)t^\alpha}{4M\Gamma[1+\alpha]}$ olmak üzere, (3.2.1) denkleminin yeni tam çözümü

$$v_1(x,y,t) = c_0 + B_1\left(\tanh(\xi_1) + \coth(\xi_1)\right) \tag{3.2.10}$$

olarak bulunur.

Durum 2:

$$c_0 = c_0, \quad c_1 = 0, \quad d_1 = 2M\mu, \quad P = -\frac{3N^2}{4M} - M^3\mu^2 \tag{3.2.11}$$

belirlenen katsayılar için (3.2.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$v_2\left(\xi_2\right)=c_0+\frac{d_1}{Y(\xi_2)}, \quad \xi_2=\frac{Mx^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}+\frac{Ny^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}+\frac{Pt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \qquad (3.2.12)$$

şeklindedir. $\xi_2=\frac{Mx^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}+\frac{Ny^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}-\frac{\left(3N^2+4M^4\mu^2\right)t^\alpha}{4M\Gamma[1+\alpha]}$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.2.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$v_2(x,y,t)=c_0+B_1\coth\left(\xi_2\right) \qquad (3.2.13)$$

olarak elde edilir.

Durum 3:

$$c_0=c_0, \quad c_1=2M\mu, \quad d_1=0, \quad P=-\frac{3N^2}{4M}-M^3\mu^2 \qquad (3.2.14)$$

bulunan katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_3\left(\xi_2\right)=c_0+c_1Y\left(\xi_2\right) \qquad (3.2.15)$$

şeklindedir. (3.2.1) denkleminin soliton çözümü

$$v_3(x,y,t)=c_0+B_1\tanh\left(\xi_2\right) \qquad (3.2.16)$$

olarak elde edilir.

Zaman-uzay kesirli Potansiyel Kadomtsev-Petviashvili (pKP) denkleminin genelleştirilmiş tanh yöntemine göre elde edilen sonuçlar Alzaidy'in [46] ve Mohyud-Din'in [47], sonuçları ile karşılaştırıldığında, Durum (2) ve Durum (3) de elde edilen sonuçlar ile benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Durum (1) de elde edilen çözümün ele alınan denklemin literatürde olmayan yeni bir çözümü olduğunu ifade edebiliriz.

3.3. Zaman-Uzay Kesirli Lineer Olmayan KdV Denklemi

a herhangi bir sabit olmak üzere,

$$\frac{\partial^{\alpha} w}{\partial t^{\alpha}} + aw\frac{\partial^{\beta} w}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^{3\beta} w}{\partial x^{3\beta}} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{3.3.1}$$

şeklindeki denkleme zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemi adı verilir [43]. Burada w , x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ve α ve β da w bilinmeyen fonksiyonunun kesirli mertebeden türevlerini göstermektedir. Bu denklem kuantum mekaniğinde ve akışkanlar dinamiğinde lineer olmayan dinamik sistemleri ifade etmektedir. (3.3.1) denklemine genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayabilmek için öncelikle hareketli dalga dönüşümünü

$$w(x,t) = w(\tau), \qquad \tau = \frac{Rx^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{Tt^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.3.2}$$

uygulayalım. Uygulanan bu dönüşüme göre alınması gereken ilgili türevler alındığında ve (3.3.1) denkleminde alınan türevler yerine konulduktan sonra, eşitliğin her iki tarafının τ değişkenine göre integrali alınıp ve ortaya çıkan integral sabiti sıfır olarak seçildiğinde $w = w(\tau)$ ve $\frac{\partial w}{\partial \tau} = w'$ olmak üzere, (3.3.1) denklemi

$$\frac{T}{2}w^2 + \frac{aR}{6}w^3 + \frac{R^3}{2}(w')^2 = 0 \tag{3.3.3}$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. (3.3.3) de ifade edilen lineer olmayan denkleminin yeni tam çözümünü bulabilmek için bölüm 2.1 de belirtilen genelleştrilmiş tanh yöntemini uygulayalım.

3.3.1. Genelleştrilmiş tanh yöntemine uygulaması

Zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemine genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayarak yeni tam çözüm fonksiyonlarını elde etmeye çalışalım. Bu yönteme göre (2.1.6) de ifade edilen çözüm fonksiyonunu ele alalım. Önerilen çözüm fonksiyonuna balans prosedürü uygulandığında, (3.3.3) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev terimi $(w')^2$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimi w^3 arasında kurulan balans işlemi neticesinde $S=2$ olarak bulunur. Bulunan bu balans terimi (2.1.6) ifadesinde yerine yazıldığında (3.3.1) denklemin en genel çözüm fonksiyonu $Y=\tanh(\mu\tau)$ olmak üzere,

$$w(\tau)=c_0+c_1Y(\tau)+c_2Y^2(\tau)+\frac{d_1}{Y(\tau)}+\frac{d_2}{Y^2(\tau)} \tag{3.3.4}$$

şeklindedir. (3.3.4) çözüm fonksiyonundan yararlanılarak (3.2.3) lineer olmayan denkleminde bulunan terimlerinin türev karşılıkları

$$w'(\tau)=c_1\mu\left(1-Y^2(\tau)\right)+2c_2\mu Y(\tau)\left(1-Y^2(\tau)\right)-\frac{d_1\mu\left(1-Y^2(\tau)\right)}{Y^2(\tau)}-\frac{2d_2\mu\left(1-Y^2(\tau)\right)}{Y^3(\tau)} \tag{3.3.5}$$

olarak bulunur. Hesaplanan türev ve çözüm fonksiyonu (3.3.3) lineer olmayan diferensiyel denklemde yerine yazıldığında $Y^{\pm i}(\tau)\left(i=0,1,2,\cdots\right)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom fonksiyonu elde edilir. Bu polinom fonksiyonuna ait tüm bileşen katsayıları sıfıra eşitlenip, bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Oluşan bu cebirsel sisteme uygun yöntemler uygulanıp, paket program yardımıyla çözüldüğünde elde edilmesi gereken c_0,c_1,c_2,d_1,d_2,R,T katsayıları bulunur. Ayrıca uygulanan τ dönüşümü ile aşağıdaki çözümler (3.3.1) denklemi için bulunmuştur.

Durum 1:

$$d_1=d_2=c_1=0,\quad c_0=\frac{12R^2\mu^2}{a},\quad c_2=\frac{-12R^2\mu^2}{a},\quad T=-4R^3\mu^2 \tag{3.3.6}$$

bulunan katsayılar için (3.3.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$w_1(\tau_1)=c_0+c_2Y^2(\tau_1),\quad \tau_1=\frac{Rx^\beta}{\Gamma[1+\beta]}+\frac{Tt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.3.7}$$

şeklindedir. $C_1=\dfrac{12R^2\mu^2}{a}$, $\tau_1=R\left(\dfrac{x^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]}-\dfrac{4R^2\mu^2t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.3.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$w_1(x,t)=C_1\left(1-\tanh^2\left(\tau_1\right)\right) \tag{3.3.8}$$

olarak bulunur. (3.3.8) ifadesi daha sade bir halde yazdıldığında tek soliton çözümü

$$w_1(x,t)=C_1\,\mathrm{sech}^2\left(\tau_1\right) \tag{3.3.9}$$

elde edilir.

Durum 2:

$$d_1=c_1=c_2=0,\quad c_0=\frac{12R^2\mu^2}{a},\quad d_2=\frac{-12R^2\mu^2}{a},\quad T=-4R^3\mu^2 \tag{3.3.10}$$

elde edilen katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_2\left(\tau_1\right)=c_0+\frac{d_2}{Y^2\left(\tau_1\right)} \tag{3.3.11}$$

şeklindedir. (3.3.1) denkleminin yarı analitik çözümü

$$w_2(x,t)=C_1\left(1-\coth^2\left(\tau_1\right)\right) \tag{3.3.12}$$

şeklinde bulunur. (3.3.12) ifadesi sadeleştirildiğinde karanlık soliton çözümü

$$w_2(x,t)=-C_1\,\mathrm{cosech}^2\left(\tau_1\right) \tag{3.3.13}$$

elde edilir.

Durum 3:

$$c_1=d_1=0,\quad c_0=\frac{24R^2\mu^2}{a},\quad c_2=d_2=\frac{-12R^2\mu^2}{a},\quad T=-16R^3\mu^2 \tag{3.3.14}$$

belirlenen katsayıları için (3.3.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$w_3\left(\tau_2\right)=c_0+c_2Y^2\left(\tau_1\right)+\frac{d_2}{Y^2\left(\tau_1\right)},\quad \tau_2=\frac{Rx^\beta}{\Gamma[1+\beta]}+\frac{Tt^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.3.15}$$

şeklindedir. $\tau_2=R\left(\frac{x^\beta}{\Gamma[1+\beta]}-\frac{16R^2\mu^2t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.3.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$w_3(x,t)=C_1\left(2-\left(\tanh^2\left(\tau_2\right)+\coth^2\left(\tau_2\right)\right)\right) \tag{3.3.16}$$

olarak elde edilir. (3.3.16) ifadesi düzenlendiğinde soliton çözümü

$$w_3(x,t)=C_1\left(\operatorname{sech}^2\left(\tau_2\right)-\operatorname{cosech}^2\left(\tau_2\right)\right) \tag{3.3.17}$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz sonuçlar; Gepreel'in [43] elde ettiği sonuçlar ile karşılaştırıldığında, Durum (1) ve Durum (2) de elde edilenler ile benzerdir. Durum (3) de elde edilen çözümün literatürde olmayan yeni bir çözüm olduğunu belirtebiliriz.

3.3.2. Deneme denklem yöntemine uygulaması

Bölüm 2.2 de önerdiğimiz deneme denklem yöntemi zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV denklemine uygulanmıştır. Bu yönteme göre (3.3.1) denklemi için önerilen çözüm fonksiyonu (2.2.4) ifadesinde olduğu gibidir. (3.3.3) denkleminde yer alan terimler içerisinden en yüksek mertebeden türev içeren $\left(w'\right)^2$ terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan w^3 terimine göre balans işlemiyle hesaplanan balans terimi $S=3$ olarak bulunmuştur. Bu durumda (3.3.3) denklemin çözümü için gerekli deneme fonksiyonu

$$\left(w'\right)^2=F\left(w\right)=a_0+a_1w+a_2w^2+a_3w^3 \tag{3.3.18}$$

şeklindedir. Deneme denklem yönteminin çözüm prosedürü kullanıldığında aşağıdaki gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&3a_0R^3 = 0,\\
&3a_1R^3 = 0,\\
&3a_2R^3 + 3T = 0,\\
&3a_3R^3 + aK = 0
\end{aligned} \tag{3.3.19}
$$

Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Durum 1:

$$a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = a_2,\ a_3 = a_3,\ T = -a_2R^3,\ R = R,\ a = -3a_3R^2 \tag{3.3.20}$$

şeklinde katsayılar bulunur. Elde edilen bu sonuçlar (2.2.5) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\pm(\tau - \tau_0) = \int \frac{dw}{\sqrt{a_2w^2 + a_3w^3}} \tag{3.3.21}$$

elde edilir. (3.3.21) ifadesi integre edildiğinde (3.3.1) denkleminin tam çözümü

$$w_1(x,t) = -\frac{a_2}{a_3}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a_2}}{2}(\tau - \tau_0)\right) \tag{3.3.22}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.22) ifadesi için gerekli düzenlemeler ve dönüşümler yapılırsa denklemin tam çözümü bulunur. Bunun için $D_1 = -\frac{a_2}{a_3}$, $\tau_0 = 0$, $E_1 = \frac{R\sqrt{a_2}}{2}$ olarak seçilirse

$$w_1(x,t) = D_1\operatorname{sech}^2\left(E_1\left(\frac{x^\beta}{\Gamma[1+\beta]} - \frac{a_2R^2t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}\right)\right) \tag{3.3.23}$$

elde edilir. Deneme denklem yönteminden elde edilen (3.3.23) tam çözümü genelleştirilmiş tanh yöntemiyle elde edilen (3.3.9) tam çözümü ile benzer olduğu görülmüştür.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = 0,\ \ a_2 = \frac{-T}{R^3},\ \ a_3 = -\frac{a}{3R^2},\quad R = R,\ \ T = T \tag{3.3.24}$$

şeklinde hesaplanan katsayılar elde edilir. Bulunan bu sonuçlar (2.2.5) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\pm\left(\tau - \tau_0\right) = \int \frac{dw}{\sqrt{\frac{-T}{R^3}w^2 - \frac{a}{3R^2}w^3}} \tag{3.3.25}$$

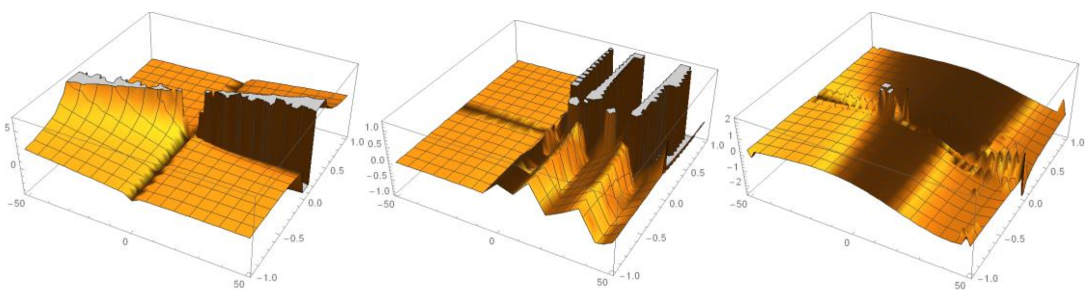
olarak bulunur. (3.3.25) ifadesi integre edildiğinde (3.3.1) denkleminin tam çözümü

$$w_2(x,t) = -\frac{3T}{aR}\sec^2\left(\frac{\sqrt{T}}{2R\sqrt{R}}\left(\tau - \tau_0\right)\right) \tag{3.3.26}$$

şeklinde elde edilir. (3.3.26) ifadesi için gerekli düzenlemeler ve dönüşümler yapılırsa denklemin tam çözümü bulunur. Bunun için $D_2 = -\frac{3T}{aR}$, $\tau_0 = 0$, $E_2 = \frac{T}{2R\sqrt{R}}$ olarak alınırsa

$$w_2(x,t) = D_2 \sec^2\left(E_2\left(\frac{Rx^{\beta}}{\Gamma[1+\beta]} + \frac{Tt^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]}\right)\right) \tag{3.3.27}$$

elde edilir.



Şekil 3.1. (3.3.23) çözüm fonksiyonunun, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

3.4. Zaman Kesirli Reaksiyon-Difüzyon Denklemi

α kesirli mertebeden türevi göstermek üzere,

$$\frac{\partial^{\alpha} q}{\partial t^{\alpha}} - q_{xx} - q + q^{2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.4.1}$$

şeklindeki denkleme zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemi [48] adı verilir. Lineer olmayan kesirli mertebeden reaksiyon difüzyon denklemi, iki boyutlu bir habitatta dağılmış diploid birey popülasyonunu tanımlar. Burada q , x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ve α da q bilinmeyen fonksiyonunun kesirli mertebeden türevlerini göstermektedir. Bu denklem mühendislik bilimlerindeki bazı sistemlerin davranışlarını temsil eder. (3.4.1) denklemine genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayabilmek için öncelikle hareketli dalga dönüşümünü

$$q(x,t) = q(\theta), \qquad \theta = hx - \frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.4.2}$$

uygulayalım. Uygulanan bu dönüşüme göre ilgili türevler alındığında ve (3.4.1) denkleminde hesaplanan türevler yerine yazıldığında, $q = q(\theta)$ ve $\frac{\partial q}{\partial \theta} = q'$ olmak üzere, (3.4.1) denklemi

$$-\lambda q' - h^{2} q'' - q + q^{2} = 0 \tag{3.4.3}$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.4.3) de ifade edilen lineer olmayan denklemin yeni tam çözümünü elde edebilmek için Bölüm 2.1 de belirtilen genelleştrilmiş tanh yöntemini uygulayalım.

3.4.1. Genelleştrilmiş tanh yöntemine uygulaması

Zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemine genelleştirilmiş tanh yöntemini uygulayarak yeni tam çözüm fonksiyonlarını elde etmeye çalışacağız. Önerilen bu yönteme (2.1.6) de ifade edilen çözüm fonksiyonunu ele alalım. Önerilen çözüm fonksiyonuna göre, balans prosedürü uygulandığında, (3.4.3) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev terimi q'' ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimi q^2 arasında kurulan balans işlemi neticesinde $S=2$ olarak bulunur. Elde edilen bu balans terimi (2.1.6) ifadesinde yerine yazıldığında (3.4.1) denkleminin en genel çözüm fonksiyonu $Y=\tanh(\mu\theta)$ olmak üzere,

$$q(\theta)=c_0+c_1Y(\theta)+c_2Y^2(\theta)+\frac{d_1}{Y(\theta)}+\frac{d_2}{Y^2(\theta)} \qquad (3.4.4)$$

olarak yazılır. Çözüm fonksiyonu olan (3.4.4) ifadesinden yararlanarak (3.2.3) lineer olmayan denkleminde bulunan terimlerin türev karşılıkları

$$q'(\theta)=c_1\mu\left(1-Y^2(\theta)\right)+2c_2\mu Y(\theta)\left(1-Y^2(\theta)\right)-\frac{d_1\mu\left(1-Y^2(\theta)\right)}{Y^2(\theta)}-\frac{2d_2\mu\left(1-Y^2(\theta)\right)}{Y^3(\theta)}, \qquad (3.4.5)$$

$$q''(\theta)=-2c_1\mu^2Y(\theta)\left(1-Y^2(\theta)\right)-4c_2\mu^2Y^2(\theta)\left(1-Y^2(\theta)\right)+2c_2\mu^2\left(1-Y^2(\theta)\right)^2$$
$$+\frac{2d_1\mu^2\left(1-Y^2(\theta)\right)}{Y(\theta)}+\frac{2d_1\mu^2\left(1-Y^2(\theta)\right)^2}{Y^3(\theta)}+\frac{4d_2\mu^2\left(1-Y^2(\theta)\right)}{Y^2(\theta)}+\frac{6d_2\mu^2\left(1-Y^2(\theta)\right)^2}{Y^4(\theta)} \qquad (3.4.6)$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan türev ve çözüm fonksiyonu (3.4.3) lineer olmayan diferensiyel denklemde yerine yazıldığında $Y^{\pm i}(\theta)\left(i=0,1,2,\cdots\right)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom fonksiyonu bulunur. Polinom fonksiyonuna ait tüm bileşen katsayıları sıfıra eşitlersek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu cebirsel sisteme uygun yöntemler uygulayarak ve paket program yardımıyla sistemin çözülmesiyle bulunması gereken $c_0,c_1,c_2,d_1,d_2,h,\lambda$ katsayıları elde edilir. (3.3.1) denklemine θ dönüşümü uygulandığında aşağıdaki çözümler elde edilmiştir.

Durum 1:

$$c_1=c_2=0,\quad c_0=d_2=\frac{1}{4},\quad d_1=\pm\frac{1}{2},\quad h=-\frac{1}{2\sqrt{6}\mu},\quad \lambda=\pm\frac{5}{12\mu} \qquad (3.4.7)$$

elde edilen katsayılar için (3.4.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$q_1(\theta_1) = c_0 + \frac{d_1}{Y(\theta_1)} + \frac{d_2}{Y^2(\theta_1)}, \quad \theta_1 = hx - \frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.4.8}$$

şeklindedir. $D_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = \frac{-1}{2\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{6}} \mp \frac{5t^{\alpha}}{6\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.4.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$q_1(\theta_1) = D_1\left(\frac{1}{2} \pm \coth(\theta_1) + \frac{1}{2}\coth^2(\theta_1)\right) \tag{3.4.9}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$d_1 = d_2 = 0, \quad c_0 = c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = \pm\frac{1}{2}, \quad h = -\frac{1}{2\sqrt{6}\mu}, \quad \lambda = \pm\frac{5}{12\mu} \tag{3.4.10}$$

bulunan katsayıları için (3.4.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$q_2(\theta_1) = c_0 + c_1 Y(\theta_1) + c_2 Y^2(\theta_1) \tag{3.4.11}$$

şeklindedir. (3.4.1) denkleminin yarı analitik çözümü

$$q_2(\theta_1) = D_1\left(\frac{1}{2} \pm \tanh(\theta_1) + \frac{1}{2}\tanh^2(\theta_1)\right) \tag{3.4.12}$$

olarak bulunur.

Durum 3:

$$c_1 = d_1 = \pm\frac{1}{4}, \quad c_2 = d_2 = \frac{1}{16}, \quad c_0 = \frac{3}{8}, \quad h = -\frac{1}{4\sqrt{6}\mu}, \quad \lambda = \pm\frac{5}{24\mu} \tag{3.4.13}$$

hesaplanan katsayıları için (3.4.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$q_3\left(\theta_2\right)=c_0+c_1Y\left(\theta_2\right)+c_2Y^2\left(\theta_2\right)+\frac{d_1}{Y\left(\theta_2\right)}+\frac{d_2}{Y^2\left(\theta_2\right)},\quad \theta_2=hx-\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \qquad (3.4.14)$$

şeklindedir. $D_2=\frac{1}{4},\quad \theta_2=\frac{-1}{4\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\mp\frac{5t^{\alpha}}{6\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.4.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$q_3(\theta_2)=D_2\left(\frac{3}{2}\pm\tanh\left(\theta_2\right)+\frac{1}{4}\tanh^2\left(\theta_2\right)\pm\coth\left(\theta_2\right)+\frac{1}{4}\coth^2\left(\theta_2\right)\right)$$
(3.4.15)

elde edilir.

Durum 4:

$$c_1=d_1=\frac{1}{4},\quad c_2=d_2=-\frac{1}{16},\quad c_0=\frac{5}{8},\quad h=\frac{i}{4\sqrt{6}\mu},\quad \lambda=\frac{5i}{24\mu} \qquad (3.4.16)$$

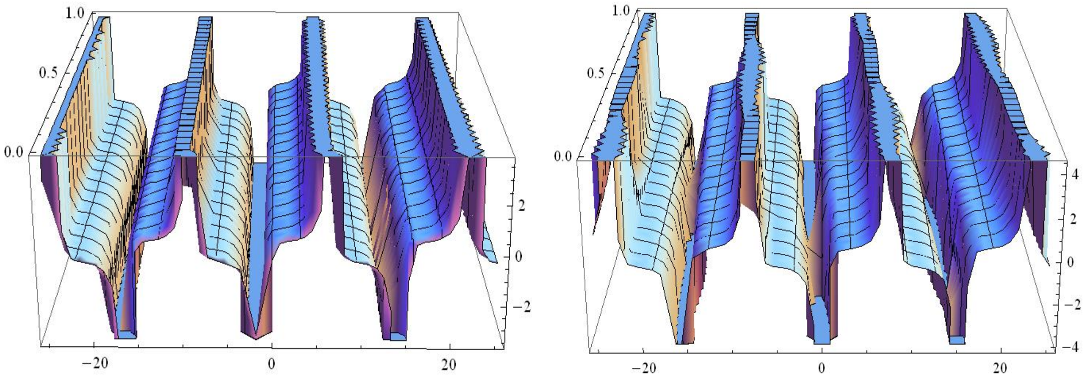
elde edilen katsayıları için (3.4.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$q_4\left(\theta_3\right)=c_0+c_1Y\left(\theta_3\right)+c_2Y^2\left(\theta_3\right)+\frac{d_1}{Y\left(\theta_3\right)}+\frac{d_2}{Y^2\left(\theta_3\right)},\quad \theta_3=hx-\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma[1+\alpha]} \qquad (3.4.17)$$

şeklindedir. $\theta_3=\frac{i}{4\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}-\frac{5t^{\alpha}}{6\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.4.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$q_4(\theta_3)=D_2\left(\frac{5}{2}+i\tan\left(\theta_3\right)+\frac{i}{4}\tan^2\left(\theta_3\right)+i\cot\left(\theta_3\right)-\frac{i}{4}\cot^2\left(\theta_3\right)\right)$$
(3.4.18)

olarak bulunur.



Şekil 3.1. (3.4.18) çözüm fonksiyonunun $\mu = 0.5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.05$ ile $\alpha = 0.95$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi

Durum 5:

$$d_1 = d_2 = 0, \quad c_0 = \frac{3}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}, \quad h = \frac{i}{2\sqrt{6}\mu}, \quad \lambda = \frac{5i}{12\mu} \tag{3.4.19}$$

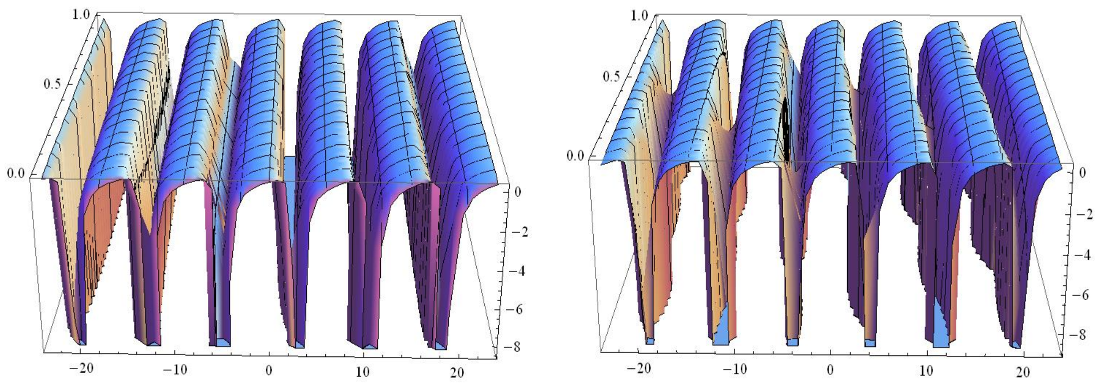
hesaplanan katsayılar için (3.4.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$q_5(\theta_4) = c_0 + c_1 Y(\theta_4) + c_2 Y^2(\theta_4), \quad \theta_4 = hx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \tag{3.4.20}$$

şeklindedir. $\theta_4 = \frac{i}{2\mu}\left(\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{5t^\alpha}{6\Gamma[1+\alpha]}\right)$ olmak üzere ilgili dönüşümler altında (3.4.1) denkleminin hareketli dalga dönüşüm çözümü

$$q_5(\theta_4) = D_1\left(\frac{3}{2} + i\tan(\theta_4) - \frac{i}{2}\tan^2(\theta_4)\right) \tag{3.4.21}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 3.2. (3.4.21) çözüm fonksiyonunun $\mu = 0.5$ ve sırasıyla $\alpha = 0.05$ ile $\alpha = 0.95$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi

Şekil 3.1. ve Şekil 3.2. de (3.4.18) ve (3.4.21) çözüm fonksiyonlarının ilgili değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi sunulmuştur.

4 SONUÇ

Bu tez çalışmasında kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin bulunmasına olanak sağlayan ve literatürde var olan genelleştirilmiş tanh yöntemi ve deneme denklem yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntemlerin kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlere uyarlaması yapılarak ilk kez bu iki farklı yöntem uygulanmıştır. Önerilen yöntemler lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin elde edilebilmesinde kullanılmıştır. Bu yöntemler, sırasıyla zaman-uzay kesirli lineer olmayan Foam Drainage, zaman-uzay kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili, zaman-uzay kesirli lineer olmayan KdV ve zaman kesirli reaksiyon-difüzyon denklemlerine uygulanmıştır. Uygulanan denklemlerin elde edilen çözümleri incelendiğinde; önerilen yöntemlerden genelleştirilmiş tanh yöntemine ait çözümlerin deneme denklem yöntemine göre daha farklı ve yeni olduğu kanatine ulaşılmıştır. Literatürdeki diğer benzer yöntemlerle bu tez çalışmasında önerilen yöntemler karşılaştırıldığında ise bu yöntemlerin diğer yöntemlerden farklı çözüm fonksiyonlarının elde edilmesine olanak sağladığı görülmüştür. Burada elde edilen çözüm fonksiyonlarında yer alan keyfi parametre değerleri için üç boyutlu grafikler çizilerek, çözümlerin nasıl bir fiziksel davranışa sahip olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanmasında Mathematica paket programı kullanılarak uygun kodların oluşturulması sağlanmıştır. Ayrıca deneme denklem yönteminin farklı versiyonlarının da bu tarz denklemlerin hareketli dalga çözümlerinin bulunmasına olanak sağlayacağı kanaatine varılmıştır. Bulunan sonuçlar değerlendirildiğinde önerilen yöntemlerin kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yarı analitik çözümlerinin bulunmasında etkin olduğu görülmüştür. Literatürde yer almayan yeni ve farklı hareketli dalga çözümleri her dört denklem için de elde edilmiştir. Önerdiğimiz her iki yöntem de lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin değişik formlarına uygulanabileceğini ve farklı sonuçların elde edilebileceğini söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Weilbeer, M., Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, PhD Thesis, Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universitat Braunschweig, Germany, 2005.

2. Laplace, P. S., Théorie Analytique des Probabilités, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris, 1820.

3. Lacroix, S. F., Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Imprimeur-Libraire pour les sciences, Paris, 1819.

4. Liouville, J., M´emoire sur Quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et Sur un Nouveau Genre de Calcul Pour Résoudre Ces Questions, J. L Ecole Roy. Polytéchn., 13, 1-69, 1832.

5. Caputo, M., Linear Models of Dissipation whose Q is Almost Frequency Independent, II. Geophys. J. Royal Astr. Soc., 13, 529-539, 1967.

6. Oldham, K., Spanier, J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

7. Atangana, A., Baleanu, D., New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model, Thermal Science, 20(2), 763-769, 2016.

8. Khalil, R., Horani, Al M., Yousef, A., Sababheh, M., A New Definition of Fractional Derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70, 2014.

9. Yang, X. J., Zhang, Y. D., A New Adomian Decomposition Procedure Scheme for Solving Local Fractional Volterra Integral Equation, Adv. Inf. Tech. Manag. 1(4), 158-161, 2012.

10. Ganji, D.D., Sadighi, A., He's Homotopy-Perturbation Method to Nonlinear Coupled Systems of Reaction Diffusion Equations, Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simul., 7(4), 413-420, 2006.

11. Huang, Q., et. al., A Finite Element Solution for the Fractional Advection–Dispersion Equation, Adv. Water Resour., 31, 1578-1589, 2008.

12. Odibat, Z., Momani, S., Generalized Differential Transform Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order, Appl. Math. Lett., 21(2), 194-199, 2008.

13. Wu, G.C., Lee, E. W. M., Fractional Variational Iteration Method and Its Application, Phys. Lett. A, 374(25), 2506-2509, 2010.

14. Zhang, S., Zhang, H. Q., Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to Nonlinear Fractional PDEs, Phys. Lett. A, 375, 1069-1073, 2011.

15. Zheng, B., Wen, C., Exact solutions for fractional partial differential equations by a new fractional sub-equation method, Adv. Diff. Eq. 2013, 199, 2013.

16. Jumarie, G., Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor series of Non Differentiable Functions Further Results, Comput. Math. Appl., 51, 1367-1376, 2006.

17. Guo, S., et. al., The Improved Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Fluid Mechanics, Phys. Lett. A, 376, 407-411, 2012.

18. Lu, B., Bäcklund Transformation of Fractional Riccati Equation and Its Aplications to Nonlinear Fractional Partial Differential Equations, Phys. Lett. A, 376, 2045-2048, 2012.

19. Lu, B., The First Integral Method for Some Time Fractional Differential Equations, J. Math. Anal. Appl., 395, 684-693, 2012.

20. Bin, Z., Qinghua, F., The Jacobi Elliptic Equation Method for Solving Fractional Partial Differential Equations, Abst. Appl. Anal., 2014, Article ID 249071, 9 pages, 2014.

21. Zheng, B., Exp-Function Method for Solving Fractional Partial Differential Equations, The Sci. World J., 2013, 465723, 2013.

22. Zhang, S., Zong, Q. A., Liu, D, Gao, Q., A Generalized Exp-Function Method for Fractional Riccati Differential Equations, Commun. Frac. Calculus, 1**,** 48-51, 2010.

23. Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., The Extended Trial Equation Method for Some Time-Fractional Differential Equations, Disc. Dyn. Nat. Soc., 2013, Article ID 491359, 13 pages, 2013.

24. Pandir, Y., Gurefe, Y., New Exact Solutions of the Generalized Fractional Zakharov-Kuznetsov Equations, Life Sci. J.**,** 10(2), 2701-2705, 2013.

25. Zheng, B., $\left(G'/G\right)$-Expansion Method for Solving Fractional Partial Differential Equations in the Theory of Mathematical Physics, Commun. Theor. Phys. 58, 623-630, 2012.

26. Wazwaz, A.M., The Tanh Method for Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations, Appl. Math. Comput., 154, 713-723, 2004.

27. Wazwaz, A.M., The Tanh Method Solitons and Periodic Solutions for the Dodd–Bullough–Mikhailov and the Tzitzeica–Dodd–Bullough Equations, Chaos, Solitons & Fractals, 25, 55-63, 2005.

28. Wazwaz, A.M., The tanh Method for Generalized Forms of Nonlinear Heat Conduction and Burgers–Fisher Equations, Appl. Math. Comput., 169, 321-338, 2005.

29. Krisnangkura, M., et al., Analytic study of the generalized Burger's–Huxley equation by hyperbolic tangent method, Applied Mathematics and Computation, 218(22), 10843-10847, 2012.

30. El-Wakil, S.A., Abdou, M.A., Modified Extended Tanh Function Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations, Chaos, Solitons & Fractals, 31, 1256-1264, 2007.

31. Abdou, M.A., The Extended Tanh Method and its Applications for Solving Nonlinear Physical Models, Applied Mathematics and Computation, 190, 988-996, 2007.

32. Bulut, H., Baskonus, H.M., Pandir, Y., The Modified Trial Equation Method for Fractional Wave Equation and Time Fractional Generalized Burgers Equation, Abstract Appl. Anal., 2013, 636802, 2013.

33. Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., New Exact Solutions of the Time-Fractional Nonlinear Dispersive KdV Equation, Int. J. Model. Opt., 3(4), 349-352, 2013.

34. Gepreel, K. A., Extended Trial Equation Method for Nonlinear Coupled Schrodinger Boussinesq Partial Differential Equations, J. Egyptian Math. Soc., 24(3), 381-391, 2016.

35. Tandogan, Y. A., Bildik, N., Exact Solutions of the Time-Fractional Fisher Equation by Using Modified Trial Equation Method, AIP Conference Proceedings, 1738(1), 290018, 2016.

36. Tian, B., Gao, Y. T., Extending the Generalized Tanh Method to the Generalized Hamiltonian Equations: New Soliton-like Solutions, Applied Mathematics Letters, 10(6), 125-127, 1997.

37. Liu, C. S., Trial Equation Method and its Applications to Nonlinear Evolution Equations, Acta Phys. Sin.,54(6), 2505-2509, 2005.

38. Liu, C. S., Trial Equation Method to Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Its Applications, Communications in Theoretical Physics, 45(2), 219-223, 2006.

39. Liu, C. S., Trial Equation Method Based on Symmetry and Applications to Nonlinear Equations Arising in Mathematical Physics, Foundations of Physics, 41(5), 793-804, 2011.

40. Podlubny, I., Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego California, 1999.

41. Ma, W. X., Fuchssteiner, B., Explicit and Exact Solutions to a Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation, International Journal of Non-Linear Mechanics, 31(3), 329-338, 1996.

42. Weaire, D., et al., The Fluid Dynamics of Flow, J. Phys.: Condens. Matter, 15**,** 65-73, 2003.

43. Gepreel, K. A., Omran, S., Exact Solutions for Nonlinear Partial Fractional Differential Equations, Chin. Phys. B, 21(11), 110204, 2012.

44. Zhang,Y., Feng, Q., Fractional Riccati Equation Rational Expansion Method For Fractional Differential Equations, Appl. Math. Inf. Sci., 7(4), 1575-1584, 2013.

45. Mirzazadeh, M., et al., Solitons and Periodic Solutions to a Couple of Fractional Nonlinear Evolution Equations, Pramana- J. Phys., 82(3), 465-476, 2014.

46. Alzaidy, J. F., The Fractional Sub-Equation Method and Exact Analytical Solutions for Some Nonlinear Fractional PDEs, American Journal of Mathematical Analysis, 1(1), 14-19, 2013.

47. Mohyud-Din, S. T., Fractional sub-equation method to space–time fractional Calogero-Degasperis and potential Kadomtsev-Petviashvili equations, Journal of Taibah University for Science, 11(2), 258-263, 2017.

48. Khan NA, Khan NU, Ara A, Jamil M, (2012) Approximate analytical solutions of fractional reaction-diffusion equations. J. King Saud Univ. Sci. 24: 111–118.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Ankara'da doğan Ayşe Yıldırım, ilköğretimini Nuh Eski Yapan İlköğretim okulunda tamamladı. Ortaöğretimini Rauf Denktaş Lisesinde okudu. 2007 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında başarıyla tamamladı. 2013 yılında Yüksek Lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' nda başladı. Halen Nene Hatun Fen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

İletişim Bilgileri

Telefon: (505) 4860688

E-posta: ikrah_007@hotmail.com

Yayınlar

1. Yusuf Pandır, Ayse Yıldırım, New exact solutions of the space-time fractional potential Kadomtsev-Petviashvili (pKP) equation, AIP Conference Proceedings, 1648(1), 370016, 2015. **(Conference Proceedings Citation Index-Science)**
2. Yusuf Pandir, Ayse Yıldırım, Analytical approach for the fractional differential equations by using the extended tanh method, Waves in Random and Complex Media, 28(3), 399-410, 2018. **(SCI)**

Bildiriler

1. Yusuf Pandir, Ayse Yıldırım, New exact solutions of the space time fractional potential Kadomtsev Petviashvili (pKP) equation, 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Greece, September 22–28 2014. (Oral Presentation)