T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK GRUPLARIN VE TOPOLOJİK HALKALARIN ESNEK ALT YAPILARI

Cenker KOÇAY

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK GRUPLARIN VE TOPOLOJİK HALKALARIN ESNEK ALT YAPILARI

Cenker KOÇAY

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2019

	YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ **TEZ ONAY FORMU**

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315010 numaralı öğrencisi Cenker KOÇAY'ın hazırladığı **"Topolojik Grupların ve Topolojik Halkaların Esnek Alt Yapıları"** başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 21/06/2019 cuma günü saat 14:30'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN

Jüri Üyesi (Danışman) :Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Jüri Üyesi : Dr.Öğr.Üyesi Funda BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .27../.06../19. tarih ve .30 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

……/……/……

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

ÖZET ………………………………………………………………………………… **iii**

ABSTRACT ………………………………………………………………….....….. **iv**

TEŞEKKÜR…………………………………………………………………….……. ..**v**

1. GİRİŞ ……………………………………..…………………………….….…......**1**

2. GENEL BİLGİLER ……………………………………………………..…... **3**

3. ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİ …………………………………………....**7**

4. TOPOLOJİK GRUPLARIN VE TOPOLOJİK HALKALARIN ESNEK ALT YAPILARI…………………………..………………………….….……. . **11**

4.1. Bir Topolojik Uzayın Esnek Alt Uzayı ……………….……….................11

4.2. Bir topolojik Grubun Esnek Alt Grubu …………….......……………..….. 15

4.3. Bir Topolojik Halkanın Esnek Alt Halkası………………......……..........18

SONUÇ………..…………………………………………….....…………..…... **20**

KAYNAKLAR……………………………………………….……………….**21**

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………….....…………...…...**23**

TOPOLOJİK GRUPLARIN VE TOPOLOJİK HALKALARIN ESNEK ALT YAPILARI

Cenker KOÇAY

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 28

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

ÖZET

Bu tez çalışmasında öncelikle esnek nokta tanımı verilmiştir. Esnek nokta tanımı, topolojik uzaylarda tanımlanmış bazı özellikleri yeniden tanımlamada kolaylık sağlamaktadır. Daha önceki esnek topoloji tanımlarında uzayın noktaları kavramı yeterince açık ve kullanışlı değildir. Bu tanımla birlikte bir topolojik uzayda açık cümlelerin özelliklerini incelemek daha anlaşılır ve kolay hale gelmiştir. Buradan hareketle bu tezin dördüncü bölümü özgün olarak hazırlanmıştır. Kendisi esnek olmayan topolojik grup ve halkaların esnek alt yapıları tanıtılmış ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Esnek cümle, esnek grup, esnek halka, esnek topoloji, esnek nokta

TOPOLOGICAL SOFT SUBSTRUCTURES OF TOPOLOGICAL GROUPS AND TOPOLOGICAL RINGS

Cenker KOÇAY

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 28

Thesis Supervisor
Asst. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ABSTRACT

In this thesis, firstly, the notion of soft point is given. This notion enables to define some topological properties again. In the former definitions of soft topology, the elements of a topological space are not clear and useful enough. But by this definition of soft points, it is more understandable and easier to study on the open sets. Thus, the fourth chapter of this thesis is prepared orijianlly. Topological soft substructures of topological groups and topological rings which have not soft structures and their examples are given.

Keywords: Soft set, soft group,soft ring,soft topology, soft point.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamda ve öğrenim hayatım boyunca emeklerini ve desteğini esirgemeyen, bilgilerini, tecrübesini benimle her daim paylaşan katkılarını asla unutamayacağım çok değerli hocam sayın danışmanım Dr.Öğr.Üyesi Hürmet Fulya AKIZ'a ve çok değerli eşi Metin AKIZ'a sonsuz teşekkür ederim.

Gerek tez çalışmamda gerek hayatımda her daim yanımda olan, bana yol gösteren tecrübesi ve bilgileri ile bana ışık tutan ve hayatımda çok büyük bir yeri olan sayın hocam Doç.Dr. Akın Osman ATAGÜN ve çok değerli eşi Ebru ATAGÜN hocama çok teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bana yardımcı olan çok kıymetli hocam sayın Arş.Gör. Hüseyin KAMACI 'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca çok değerli hocam sayın Dr.Öğr.Üyesi Funda BABAARSLAN'a ve çok kıymetli hocam olan bölüm başkanımız sayın Doç.Dr. Murat BABAARSLAN'a çok teşekkür ederim.

Tez çalışmamın sunumuna katılan Aksaray Üniversitesinden gelme inceliği gösteren sayın Dr.Öğr.Üyesi Tunçar ŞAHAN hocama çok teşekkür ederim

Hayatım boyunca ellerini üstümden hiçbir zaman eksik etmeyen, beni büyüten, okutan ve her daim yanımda olan sevincimle sevinen üzüntümle üzülen sonsuz sevgileri ile yanımda olduğunu bildiğim aileme sonsuz teşekkürü borç bilirim.

1.GİRİŞ

Matematikte kullanılan geleneksel yöntemler hesaplama, karşılaştırma ve muhakeme yapmada çoğu zaman kesin ve belirleyicidir. Fakat Ekonomi, Mühendislik, Doğa Bilimleri, sosyoloji gibi pek çok alanda kesin olmayan karmaşık problemler mevcuttur. Bu tür problemlerde bilinen klasik yöntemleri kullanmak başarısızlıkla sonuçlanabilir. Bu sebeple her geçen gün yeni teoriler üzerine çalışmalar artmıştır. Bu teorilerden birisi de kesin olmayan problemlerin çözülmesinde farklı bir yöntem olan esnek cümle teorisidir [1-3].

Maji ve arkadaşları [1], bilinen cümle teorisini esnek cümleler üzerine inşa etmiştir. İki esnek cümlenin eşitliği, alt esnek cümle, esnek tümleyen, esnek boş cümle gibi temel kavramlar ile bu cümleler üzerinde kesişim, birleşim, “ve”, “veya” gibi mantıksal işlemler tanıtılmış ve örnekler ile güçlendirilmiştir[1-4]. Sonrasında bir çok bilim adamı bu yapı üzerinde çeşitli ve faydalı işlemler tanıtmıştır [3-5].

Esnek cümleler kavramının cebire uygulanması ise ilk olarak Aktaş ve Çağman [6] tarafından esnek grup yapısının tanıtılmasıyla başlamıştır. Daha sonraki zamanlarda cebirsel yapıların esnek durumları araştırılmaya devam edilmiştir [7-11]. Ayrıca cebirsel yapılar üzerinde esnek işlemler de tanımlanmıştır [12]. Cebirsel bir yapının esnek alt yapılarını tanımlama fikri ise Atagün ve Sezgin [7] tarafından ortaya atılmıştır. Halka, cisim ve modüllerin esnek alt yapılarını araştırmış ve bunlarla ilgili özellikler vermişlerdir.

Cebirsel bir yapı üzerinde bir topolojinin varlığı, yeni tanımlara ve faydalı sonuçlara ışık tutmuştur [13-15]. Bir esnek cümle üzerinde bir topolojinin tanımlanması ise ilk olarak 2011 yılında Çağman ve arkadaşları [16] tarafından yapılmıştır. Esnek açık cümle, esnek kapalı cümle, esnek alt uzay, esnek iç, esnek kapanış, esnek yığılma noktası tanıtılmış ve bunlarla ilgili özellikler verilmiştir. Esnek Hausdorff uzay kavramı da çalışılmıştır [22]. Esnek topoloji kavramı daha sonraki zamanlarda farklı tanımlarıyla karşımıza çıkmıştır [18-22]. Bu topolojilerde genel olarak esnek topoloji, alt esnek cümleler üzerinden tanımlanmıştır. Fakat bir topolojik uzayın noktaları kavramı, topolojik tanımların yapılması açısından son derece önemli ve gereklidir. Alışılmış topolojinin tanımlanması, eğrisel irtibatlılık ve dizilerde yakınsaklık gibi konular, uzayın noktalarına ihtiyaç duyduğundan esnek topolojide bu kavramların tanıtılması oldukça zor olmuştur. Bu sorunu ortadan kaldırmak için esnek tek nokta cümle tanımı yapılmıştır [23,24]. Buradan hareketle yeni bir topoloji yapısı ile alışılmış esnek topolojiyi tanımı yapılmıştır [25]. Bu yöntemde esnek topolojide uzayın noktaları vardır ve bunlar her biri tek bir eleman içeren esnek cümlelerdir.

Bu tezde [7] deki yolla, topolojik bir grup ve halkanın esnek tek nokta cümleler yardımıyla esnek alt yapılarını araştırılmıştır. Bunun için öncelikle bir alt uzay üzerinden esnek alt uzay topolojisi tanıtılmıştır. Bu uzaydaki esnek açık ve esnek kapalı cümle tanımları yapılmıştır. Daha sonra bir topolojik grubun esnek alt grubu ile bir topolojik halkanın esnek alt halkası tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.([13,14]) G bir grup ve τ da G üzerinde bir topoloji olsun. Eğer G grubundaki

$$m: G \times G \to G, (a, b) \to ab \tag{2.1}$$

işlemi ile

$$n: G \to G, a \to a^{-1} \tag{2.2}$$

ters fonksiyonu sürekli ise (G, m, τ) üçlüsüne bir topolojik grup denir ve böyle bir topolojik grup kısaca G ile gösterilir. Burada $G \times G$ çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir.

Örnek 2.2 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ çarpımsal grupu alışılmış topolojiye göre topolojik gruptur. Çünkü $\mathbb{R}$ deki bir (a, b) açık aralığı için

$$\delta^{-1}(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* | a < xy^{-1} < b\}$$

$\mathbb{R}^2$ de açık bir cümle olup

$$\delta: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, (a, b) \to ab^{-1}$$

fark fonksiyonu süreklidir.

Tanım 2.3. ([13,14]) $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyor ise $(R, +, \cdot)$ yapısına bir halka denir.

1. $(R, +)$ değişmeli bir grup,
2. $(R, \cdot)$ yarı grup, (2.3)
3. $Her\ a, b \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$

Eğer halka işlemleri sürekli olacak şekilde R üzerinde bir topoloji varsa, R ye topolojik halka denir.

Örnek 2.4. $R^* = R \setminus \{0\}$ olmak üzere $(R^*, +, \cdot)$ halkası bir topolojik halkadır.

Tanım 2.5. ([3]) X bir evrensel cümle, P(X) X'in kuvvet cümlesi, E parametreler cümlesi ve $A \subseteq E$ olsun. Bu durumda X üzerindeki bir (F,A) esnek cümlesi, $x \notin A$ için $F_A(x) = \varnothing$ olacak şekilde F_A:A→P(X) fonksiyonundan elde edilen sıralı ikililer yardımıyla şu şekilde tanımlanır:

$$(F, A) = \{x, F_A(x) | x \in E, F_A(x) \in P(X)\} \tag{2.4}$$

Örnek 2.6. Kabul edelim ki $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ cümlesi bazı arabaların cümlesi, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_{4,} x_5\}$ cümlesi ise arabaları niteleyecek olan bazı sınıfların (parametrelerin) cümlesi olsun. (i=1,2,3,4,5) sırasıyla "pahalı, güzel, beyaz, ucuz ,otomatik" özelliklerini nitelesin. Kabul edelim ki

$F(x_1) = \{h_1, h_2\}$, F(x_2)={ h_1, h_3, h_4 } ,F(x_3)={h_3, h_4, h_5} ,F(x_4)={$h_{1,} h_4$}

F(x_5)={$h_{1,}, h_2, h_4$} olsun. Burada

$F(x_1)$ in anlamı pahalı, bunun fonksiyonel değeri ise " pahalı araba",

$F(x_2)$ in anlamı güzel , bunun fonksiyonel değeri ise '' güzel araba "

$F(x_3)$ in anlamı beyaz, bunun fonksiyonel değeri ise'' beyaz araba"

$F(x_4)$ in anlamı ucuz, bunun fonksiyonel değeri ise'' ucuz araba "

$F(x_5)$ in anlamı otomatik, bunun fonksiyonel değeri ise'' otomatik araba "dir.

Tanım 2.7. ([3]) (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki esnek cümle olsun. Eğer $Her x \in A$ için $F(x) \subseteq G(x)$ oluyor ise $(F, A) ya$ (G, B) nin esnek alt cümlesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. ([3]) (F, A) ve (G, B) aynı X cümlesi üzerinde iki esnek cümle olsun. Bu durumda $C = A \cup B$ ve $\forall x \in A \cup B$ için

$$H(x)=\begin{cases} F(x), x\in A\backslash B \\ G(x), x\in B\backslash A \\ F(x)\cup G(x), x\in A\cap B \end{cases} \tag{2.5}$$

Olmak üzere (H,C) esnek cümlesine (F,A) ve (G,B)' nin *genişletilmiş birleşimi* denir ve $(F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B)=H_{A\cup B}$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. ([3]) (F,A) ve (G,B) aynı X cümlesi üzerinde iki esnek cümle ve $A\bigcap B\neq\emptyset$ olsun. (F,A) ve (G,B) esnek cümlelerinin kısıtlanmış kesişimi, $C=A\cap B$ için $\forall x\in A\bigcap B$ için H(x)=F(x)⋒G(x) ile tanımlanır.

Tanım 2.10. ([3]) S(X) , X üzerinde esnek cümleler cümlesi $(F,A)\in S(X)$ olsun. $\forall x\in E$ için $F_A(x)=\emptyset$ ise (F,A)' ya boş esnek cümle denir ve $(F,\emptyset)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. ([3]) $(F,A)\in S(X)$ olsun. $\forall x\in A$ için $(F,A)=X$ ise F_A' ya A evrensel denir. Eğer $E=A$ ise F_E ' ye esnek evrensel cümle denir.

Tanım 2.12. ([3]) (F,A) ve (G,B) X üzerinde iki esnek cümle olsun. Eğer $\forall x\in E$ için $F_A(x)=F_B(x)$ ise (F,A) ve (G,B) esnek eşittir denir ve $(F,A)\cong(G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.13. ([3]) $(F_i,A_i)_{i\in I}$ X üzerinde esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu ailenin birleşimi $C=\bigcup_{i\in I}A_i$ ve $\forall$ $x\in C$ için $H(x)=\bigcup_{i\in I}F_i(x)$ şeklinde tanımlanır ve $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)=H_c$ ile gösterilir.

Tanım 2.14. ([3]) $(F_i,A_i)_{i\in I}$ X üzerinde esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi ve $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda $(F_i,A_i)_{i\in I}$ ailesinin kısıtlanmış kesişimi $C=\bigcap_{i\in I}A_i$ olmak üzere (H,C) esnek cümlesidir ve $\forall$ $x\in C$ için $H(x)=\bigcap_{i\in I}F_i(x)$ ile tanımlanır.

Tanım 2.15. ([3]) (F, A) X üzerinde bir esnek cümle olsun. $\{(x, F(A)^c : x \in A\}$ esnek cümlesine (F, A) nın komplementi denir ve $(F, A)^{\tilde{c}}$ ile gösterilir.

3. ÜRETİLEN ESNEK TOPOLOJİ

Tanım 3.1. ([24]) $X \neq \emptyset$ bir cümle $A \subseteq X$ ve Her $x \in X$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyona bir sabit nokta fonksiyonu denir.

$$F_x^A : \{x\} \to P(X), x \to A. \tag{3.1}$$

Bu durumda bu fonksiyondan elde edilen $\{(x, A)\}$ sıralı ikilisine de *esnek nokta* denir.

Burada dikkat edelim ki her bir esnek nokta X üzerinde bir esnek cümle olup bu esnek cümleler verilen tek bir X cümlesinden elde edilmektedir.

Tanım 3.2. ([24]) X bir cümle olmak üzere üretilen esnek boş cümle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\emptyset} = \{\{(x, \emptyset)\} \mid x \in X\} \tag{3.2}$$

Örnek 3.3. X= {a,b,c} cümlesi üzerinde esnek noktalar, X cümlesinin kuvvet cümlesi

P(x)={{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},X, Ø } olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

{(a,{a})},{(a,{a,b})},{(a,{a,c})},{(a,X)},{(a,{b})},{(a,{c})},{(a,{b,c})},{(b,{a})},

{(b,{c})},{(b,{a,c})},{(b,{b})},{(b,{a,b})},{(b,{b,c})},{(b,X)},{(c,{a})},{(c,{b})},

{(c,{a,b})},{(c,{c})},{(c,{c,b})},{(c,{a,c})},{(c,X)}, {(a, Ø)},{(b, Ø)},{(c, Ø)}}.

Burada üretilen esnek boş cümle de aşağıdaki şekildedir.

$$\tilde{\emptyset} = \{\{(a, \emptyset)\}, \{(b, \emptyset)\}, \{(c, \emptyset)\}\}$$

Örnek 3.4. $X = \{a, b, c, d, e\}$ cümlesi verilsin.

$P(X) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\},$

$\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},$

$\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\},\{b,c,d,e\},\emptyset,X\}$

Kuvvet cümlesinden elde ettiğimiz esnek noktalar aşağıdaki gibidir.

$\{\{(a,\{a\})\},\{(a,\{a,b\})\},\{(a,\{a,c\})\},\{(a,\{a,d\})\},\{(a,\{a,e\})\},\{(a,\{a,b,c\})\},$

$\{(a,\{a,b,d\})\},\{(a,\{a,b,e\})\},\{(a,\{a,c,d\})\},\{(a,\{a,c,e\})\},\{(a,\{a,d,e\})\},$

$\{(a,\{a,b,c,d\})\},\{(a,\{a,b,c,e\})\},\{(a,\{a,b,d,e\})\},\{(a,\{a,c,d,e\})\},\{(a,X)\},\{(a,\emptyset)\},$

$\{(b,\{b\})\},\{(b,\{a,b\})\},\{(b,\{b,c\})\},\{(b,\{b,d\})\},\{(b,\{b,e\})\},\{(b,\{a,b,c\})\},$

$\{(b,\{a,b,d\})\},\{(b,\{a,b,e\})\},\{(b,\{b,c,d\})\},\{(b,\{b,c,e\})\},\{(b,\{b,d,e\})\},$

$\{(b,\{a,b,c,d\})\},\{(b,\{a,b,c,e\})\},\{(b,\{a,b,d,e\})\},\{(b,\{b,c,d,e\})\},\{(b,X)\},$

$\{(b,\emptyset)\},\{(c,\{c\})\},\{(c,\{a,c\})\},\{(c,\{b,c\})\},\{(c,\{c,d\})\},\{(c,\{c,e\})\},\{(c,\{a,b,c\})\},$

$\{(c,\{a,c,d\})\},\{(c,\{a,c,e\})\},\{(c,\{b,c,d\})\},\{(c,\{b,c,e\})\},\{(c,\{c,d,e\})\},$

$\{(c,\{a,b,c,d\})\},\{(c,\{a,b,c,e\})\},\{(c,\{a,c,d,e\})\},\{(c,\{b,c,d,e\})\},\{(c,X)\},$

$\{(c,\emptyset)\},\{(d,\{d\})\},\{(d,\{a,d\})\},\{(d,\{b,d\})\},\{(d,\{c,d\})\},\{(d,\{d,e\})\},\{(d,\{a,b,d\})\},$

$\{(d,\{a,c,d\})\},\{(d,\{a,d,e\})\},\{(d,\{b,c,d\})\},\{(d,\{b,d,e\})\},\{(d,\{c,d,e\}),$

$\{(d,\{a,b,c,d\})\},\{(d,\{a,b,d,e\})\},\{(d,\{a,c,d,e\})\},\{(d,\{b,c,d,e\})\},\{(d,X)\},$

$\{(d,\emptyset)\},\{(e,\{e\})\},\{(e,\{a,e\})\},\{(e,\{b,e\})\},\{(e,\{c,e\})\},\{(e,\{d,e\})\},\{(e,\{a,b,e\})\},$

$\{(e,\{a,c,e\})\},\{(e,\{a,d,e\})\},\{(e,\{b,c,e\})\},\{(e,\{b,d,e\})\},\{(e,\{c,d,e\})\},$

$\{(e,\{a,b,c,e\})\},\{(e,\{a,b,d,e\})\},\{(e,\{a,c,d,e\})\},\{(e,\{b,c,d,e\})\},\{(e,X)\},$

$\{(e,\emptyset)\}\}.$

Burada üretilen esnek boş cümle de aşağıdaki şekildedir.

$$\tilde{\emptyset} = \{\{(a,\emptyset)\},\{(b,\emptyset)\},\{(c,\emptyset)\},\{(d,\emptyset)\},\{(e,\emptyset)\}\},$$

Şimdi ise rastgele verilen bir topolojik uzaydan bir esnek topoloji üretme yöntemini aşağıdaki şekilde gösterelim.

Tanım 3.5. ([25]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\forall$ $x \in X$ için $G \in \tau$ ve G cümlesi X' in açık komşuluğu olmak üzere;

$F_x^G : \{x\} \mapsto P(x), x \mapsto G$ sabit nokta fonksiyonları tanımlansın. Sabit nokta fonksiyonlarından elde edilen esnek noktaların cümlesi

$$\tilde{\beta} = \{\{(x,G)\} \big| x \in G, G \in \tau\} \tilde{\bigcup} \tilde{\emptyset} \tag{3.3}$$

olsun. Bu durumda $\tilde{\beta}$' daki elemanların keyfi birleşimlerinden oluşan sınıfa üretilen esnek topoloji denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\tilde{\tau} = \{\tilde{\bigcup}\{(x,G)\} \big| \{(x,G)\} \in \tilde{\beta}\} \tag{3.4}$$

Biz bu çalışmada kolaylık olması açısından yukarıdaki gibi üretilen bir topolojiyi üretilen esnek topoloji yerine yalnızca üretilen topoloji olarak adlandıracağız.

Örnek 3.6. X={a,b,c} ve τ ={$\emptyset$,X,{a},{b},{a,b}} topolojisi verilsin. Buna göre τ topolojisinden elde edilen esnek noktaların oluşturduğu sınıf aşağıdaki gibidir.

$\tilde{\beta}$={{(a, Ø)},{(a,{a})},{(a,{a,b})},{(a,X)}, {(b, Ø)},{(b,{b})},{(b,{a,b})},{(b,X)}, {(c, Ø)},{(c,X)}}.

$\tilde{\beta}$ Sınıfındaki cümlelerin esnek keyfi birleşimlerinden üretilen topoloji ise aşağıdaki şekilde elde edilir:

$\tilde{\tau} =$
$\{\{(a,\emptyset)\},\{(a,\{a\})\},\{(a,\{a,b\})\},\{(a,X)\},\{(b,\emptyset)\},\{(b,\{b\})\},\{(b,\{a,b\})\},\{(b,X)\},$
$\{(c,\emptyset)\},\{(c,X)\}$
$,\{(a,\emptyset),(b,\emptyset)\},\{(a,\emptyset),(b,\{b\})\},\{(a,\emptyset),(b,\{a,b\})\},\{(a,\emptyset),(b,X)\},$

$\{(a,\emptyset),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\emptyset),(c,X)\}$

, $\{(a,\{a\}),(b,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\{b\})\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\{a,b\})\}$,

$\{(a,\{a\}),(b,X)\}$, $\{(a,\{a\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a\}),(c,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\emptyset)\}$,

$\{(a,\{a,b\}),(b,\{b\})\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\{a,b\})\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,\{a,b\}),(c,X)\}$

, $\{(a,X),(b,\emptyset)\}$, $\{(a,X),(b,\{b\})\}$, $\{(a,X),(b,\{a,b\})\}$, $\{(a,X),(b,X)\}$,

$\{(a,X),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,X),(c,X)\}$, $\{(b,\emptyset),(c,\emptyset)\}$, $\{(b,\emptyset),(c,X)\}$, $\{(b,\{b\}),(c,\emptyset)\}$,

$\{(b,\{b\}),(c,X)\}$, $\{(b,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(b,\{a,b\}),(c,X)\}$, $\{(b,X),(c,\emptyset)\}$,

$\{(b,X),(c,X)\}$,

$\{(a,\emptyset),(b,\emptyset),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\emptyset),(b,\emptyset),(c,X)\}$, $\{(a,\emptyset),(b,\{b\}),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,\emptyset),(b,\{b\}),(c,X)\}$, $\{(a,\emptyset),(b,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\emptyset),(b,\{a,b\}),(c,X)\}$,

$\{(a,\emptyset),(b,X),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\emptyset),(b,X),(c,X)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\emptyset),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,\{a\}),(b,\emptyset),(c,X)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\{b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\{b\}),(c,X)\}$,

$\{(a,\{a\}),(b,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,\{a,b\}),(c,X)\}$, $\{(a,\{a\}),(b,X),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,\{a\}),(b,X),(c,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\emptyset),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\emptyset),(c,X)\}$,

$\{(a,\{a,b\}),(b,\{b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\{b\}),(c,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,\{a,b\}),(b,\{a,b\}),(c,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,X),(c,X)\}$, $\{(a,\{a,b\}),(b,X),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,X),(b,\emptyset),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,X),(b,\emptyset),(c,X)\}$, $\{(a,X),(b,\{b\}),(c,\emptyset)\}$,

$\{(a,X),(b,\{b\}),(c,X)\}$, $\{(a,X),(b,\{a,b\}),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,X),(b,\{a,b\}),(c,X)\}$,

$\{(a,X),(b,X),(c,\emptyset)\}$, $\{(a,X),(b,X),(c,X)\}$.

Bu bölümde bir X cümlesi üzerindeki üretilen topolojiden bahsettik. Bir sonraki bölümde ise kendisi esnek olmayan bir topolojinin esnek alt uzayını oluşturacağız.

4. TOPOLOJİK GRUPLARIN VE TOPOLOJİK HALKALARIN ESNEK ALT YAPILARI

4.1. Bir Topolojik Uzayın Esnek Alt Uzayı

Bu bölümde kendisi esnek olmayan bir topolojik uzayın esnek noktalar yardımıyla esnek alt uzayı tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. X'in A üzerindeki alt uzay topolojisi,

$$\tau_A = \{U = A \cap V / \, V \in \tau\}\,, \tag{4.1.1}$$

ile tanımlanır.

$Her\ x \in A, U \in \tau$ için;

$$F_x^U = \{x\} \longrightarrow P(X), x \mapsto U, \tag{4.1.2}$$

Burada U, x'in τ_A daki açık komşuluğudur.

Her bir F_x^U fonksiyonu $\forall x \in A, U \in \ \tau_A$ için tektir ve farklıdır ve tekbir $\{(x,U)\}$ elemanından oluşur. Herbir F_x^U fonksiyonuna x ve U çiftinin sabit nokta fonksiyonu denir. Bu kümeye

$$\{(x, F_x^U(x))\} = \{(x,U)\} \tag{4.1.3}$$

X üzerinde sabit esnek küme denir. Ayrıca $\forall x \in A$ için boş esnek küme $\{(x,\emptyset)\}$ ile tanımlanır ve boş esnek kümelerin ailesi

$$\widetilde{\emptyset} = \{\{(x,\emptyset)\}, x \in A\} \tag{4.1.4}$$

biçiminde gösterilir. Yani F_x^U sabit nokta fonksiyonu olmak üzere;

$$S = \{\{(x,U)\}: x \in A, U \in \tau_A\} \,\widetilde{\cup}\, \widetilde{\emptyset} \tag{4.1.5}$$

cümlesine tüm sabit cümlelerin ailesi denir. Bu bölümden itibaren tüm esnek cümlelerin ailesi S ile gösterilecektir.

Örnek 4.1.2 $X = \{1,2,3,4,5\}$ bir cümle, $\tau = \{X, \emptyset, \{1,3\}, \{3,5\}, \{3\}, \{1,3,5\}\}$ X üzerinde bir topoloji ve $A = \{1,3,5\}$ X cümlesinin bir alt cümlesi olsun. A üzerindeki alt uzay topolojisi

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{1,3\}, \{3\}, \{3,5\}\}$$

ile gösterilir. O halde aşağıdakiler esnek cümlelerdir.

$$\{(1,A)\}, \{(1,3\})\}, \{(3,A)\}, \{(3,\{1,3\})\}, \{(3,\{3\})\}, \{(3,\{3,5\})\}, \{(5,A)\}, \{(5,\{3,5\})\}$$

Örnek 4.1.3 $X = \{a,b,c,d,e\}$ bir cümle, $\tau = \{X, \emptyset, \{a,c\}, \{c,e\}, \{c\}, \{a,c,e\}\}$ X üzerinde bir topoloji ve $A = \{a,c,e\}$ X cümlesinin bir alt cümlesi olsun. A üzerindeki alt uzay topolojisi

$$\tau_A = \{A, \emptyset, \{a,c\}, \{c\}, \{c,e\}\}$$

ile gösterilir. O halde aşağıdakiler esnek cümlelerdir.

$$\{(a,A)\}, \{(a,c\})\}, \{(c,A)\}, \{(c,\{a,c\})\}, \{(c,\{c\})\}, \{(c,\{c,e\})\}, \{(e,A)\}, \{(e,\{c,e\})\}$$

Tanım 4.1.4 (X,τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. X in S üzerindeki esnek alt uzay topolojisi, keyfi sayıda $\{(x,U)\}$ esnek cümlelerin esnek birleşimi şeklinde tanımlanır ve

$$\widetilde{\tau_A} = \{\tilde{\cup}\, \{(x,U)\} : x \in U, U \in \tau_A\} \tag{4.1.6}$$

ile gösterilir. $\widetilde{\tau_A}$ nın her bir elemanına esnek açık cümle denir.

Örnek 4.1.5 $X = \{1,2,3,4\}$ bir cümle $\tau = \{X, \emptyset, \{1,2\}, \{4\}, \{1,2,4\}\}$ X üzerinde bir topoloji ve $A = \{2,3\}$ X cümlesinin bir alt cümlesi olsun. O halde A üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_A = \{A, \emptyset, \{2\}\}$ ve F_x^U lokal fonksiyonları tarafından türetilen esnek cümleler $\{(2,A)\}, \{(2,\emptyset)\}, \{(2,\{2\})\}, \{(3,A)\}, \{(3,\emptyset)\}$ biçiminde gösterilir. Böylece esnek alt uzay topolojisi

$$\widetilde{\tau_A} = \{\{(2,A)\}, \{(2,\emptyset)\}, \{(2,\{2\})\}, \{(3,A)\}, \{(3,\emptyset)\}, \{(2,A)\}, (3,A)\}, \{(2,A), (3,\emptyset)$$

$$\{(2,0), (3,\emptyset)\}, \{(2,\{2\}), (3,\emptyset)\}, \{(2,\{2\}), (3,A)\}, \{(2,\emptyset), (3,A)\}\}$$

Tanım 4.1.6 (X, τ) bir esnek alt uzay topolojisi $A \subseteq X$ ve $\widetilde{\tau_A}$ X in bir esnek alt uzayı olsun.

$$\widetilde{U} = \left\{\widetilde{\bigcup F_x^U (x)}\right\} \cup \{\emptyset\} \tag{4.1.7}$$

ve

$$\widetilde{K} = \left\{\widetilde{\bigcup F_x^{U^c} (x)}\right\} \cup \{\emptyset\} \tag{4.1.8}$$

cümlelerine sırasıyla açık görüntü cümlesi ve kapalı görüntü cümlesi denir.

Önerme 4.1.7 Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\widetilde{U} = \tau_A$

(ii) $\widetilde{K} = \{K \subseteq A | K^c \in \tau_A\}$

Tanım 4.1.8.

$$\widetilde{K_A} = \{\bigcup\{\widetilde{(x, U^C)}\}: x \in A, U \in \tau_A\} \tag{4.1.9}$$

ile tanımlanan, sonlu sayıda $\{(x, U^C)\}$ cümlelerinin esnek birleşimi, $\widetilde{\tau_A}$ nın esnek kapalı cümlelerinin bir ailesidir.

Tanım 4.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. Eğer;

$$\beta = \{B \subseteq X | B \in \tau\}$$

τ nun bir bazı ise $\forall x \in A$ için

$$\widetilde{\beta} = \{\bigcup\{(\widetilde{x, B} \cap A)\}: x \in B\} \tag{4.1.10}$$

$\widetilde{\tau_A}$ nın bir bazıdır.

Tanım 4.1.10. (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ S_A ve S_B cümleleri sırasıyla X üzerindeki esnek cümlelerin bir ailesi olsun. Eğer;

$x \in A \cap B$ ve U, V sırasıyla τ_A ve τ_B de X in açık komşulukları ise o halde

$$H_x^{U \cap V}(x) = F_x^U(x) \cap G_x^V(x) \tag{4.1.11}$$

sağlanır. Yani,

$$\{(x, U)\} \Cap \{(x, V)\} = \{(x, U \cap V)\} \tag{4.1.12}$$

esnek cümlelerinin iki ailesinin kesişimi

$$S_A \Cap S_B = \left\{\{(x, U \cap V)\}\middle| x \in A \cap B, U \in \tau_{A,} V \in \tau_B\right\} \qquad (4.1.13)$$

ile tanımlanır.

Önerme 4.1.11. Eğer $\widetilde{\tau_A}$ ve $\widetilde{\tau_B}$, S_A ve S_B üzerinde tanımlı iki esnek alt uzay topolojisi ise $\widetilde{\tau_A} \Cap \widetilde{\tau_B}$ de $S_A \Cap S_B$ üzerinde bir esnek alt uzay topolojisidir.

İspat. $\widetilde{\tau_A} \Cap \widetilde{\tau_B} = \{\widetilde{\cup}\, \{(x, U \cap V)\}: x \in U \cap V \; ve \; U, V \in \widetilde{\tau_A}\} \cup \widetilde{\emptyset}$

olduğundan ispat açıktır.

Tanım 4.1.12. (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$, S_A ve S_B, X üzerinde esnek cümlelerin bir ailesi olsun. Eğer $x \in A$, $y \in B$ ve U, V sırasıyla τ_A ve τ_B de x ve y nin açık komşuluğu ise sabit nokta fonksiyonundan

$$H_{(x,y)}: \{(x, y)\} \to P(X \times X) \qquad (4.1.14)$$

buradan elde edilir ki

$$H_{(x,y)}^{U \times V}(x, y) = F_x^U(x) \times G_y^V(y) \qquad (4.1.15)$$

$$\{(x, U)\} \times \{(y, V)\} = \{\big((x, y), U \times V\big)\}$$

$X \times X$ üzerinde bir esnek cümledir. Böylece S_A ve S_B nin çarpımı

$$S_A \times S_B = \{\big\{\big((x, y), U \times V\big\}\big| x \in A, y \in B, U \in T_A, V \in T_B\big\} U\widetilde{\emptyset} \qquad (4.1.16)$$

ile tanımlanır.

Önerme 4.1.13. Eğer $\widetilde{\tau_A}$ ve $\widetilde{\tau_B}$, S_A ve S_B üzerinde tanımlı iki esnek alt uzay topolojisi ise o halde $\widetilde{\tau_A} \times \widetilde{\tau_B}$, $S_A \times S_B$ üzerinde esnek alt uzay topolojisidir.

İspat. $\widetilde{\tau_A} \times \widetilde{\tau_B} = \{\widetilde{\cup}\, \{(x, y), U \times V | x \in A, y \in B, U \in T_A, V \in T_B\} U\widetilde{\emptyset}$

olduğundan ispat açıktır.

4.2 Bir Topolojik Grubun Esnek Alt Grubu

Bu bölümde kendisi esnek olmayan bir topolojik grubun esnek alt grubu tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1. (X,τ) bir topolojik grup ve A, X in bir alt grubu olsun. $\mathcal{A} \subseteq S$, A üzerindeki üretilen esnek noktaların bir ailesi ve $U, V \in \tau_A$ sırasıyla X ve Y nin açık komşulukları olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ ya X in topolojik *esnek alt grubu* denir.

(i) $\forall \{(x,U\},\{(x,V)\} \in \mathcal{A}$ için $\{(x,U)\} \Cap \{(x,V)\} \in \mathcal{A}$,

(ii) $\forall x,y \in A$ ve $\forall U,V \in \mathcal{A}$ için $x-y$ nin $F_{x-y}^{G}\,(x-y) \supseteq U \cap V$ olacak şekilde bir G açık komşuluğu vardır.

Örnek 4.2.2. R reel sayılar cümlesi ve U, R üzerindeki alışılmış topoloji olmak üzere $(R,+,U)$ bir topolojik gruptur. Z tamsayılar cümlesi R'nin alt cümlesi olduğundan $(Z,+)$ bir alt grubu dolayısıyla R nin bir topolojik alt grubudur. Burada Z üzerindeki topoloji ayrık(diskre) topolojidir. $\forall x \in Z$ için üretilen esnek noktaların bir ailesini,

$$\mathcal{A}_1 = \{\cup\{(x,\{x\})\}\}\,\widetilde{U}\widetilde{\emptyset} \tag{4.2.1}$$

olarak alalım. O halde $\mathcal{A}_1$, $(R,+,U)$ nun bir topolojik esnek alt grubudur.

Fakat $\mathcal{A}_2$ kümesini

$$\mathcal{A}_2 = \cup\{(x,\{x,x+1\})\}\}\widetilde{U}\widetilde{\emptyset} \tag{4.2.2}$$

Olarak alırsak $F(1-2) = F(-1) = \{-1{,}0\} \not\supseteq \{2\} = \{1{,}2\} \cap \{2{,}3\} = F(1) \cap F(2)$

olduğundan $\mathcal{A}_2$, R nin bir topolojik esnek alt grubu değildir.

Önerme 4.2.3 (X,τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ sırasıyla A ve B ye karşılık gelen X in topolojik esnek alt grupları ise o halde $\mathcal{A}_1 \Cap \mathcal{A}_2$ de X in bir topolojik esnek alt grubudur.

İspat.

Tanım 3.9. dan $\forall x \in A \cap B$ için $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ nin kesişimi $\mathcal{A}_1 \Cap \mathcal{A}_2 = \{\cup\{(x, U \cap V)\} | U \in \tau_A, V \in \tau_B\}$ dır. Bu durumda topolojik esnek alt grup olma şartları sağlanır.

(i) $\{(x,U)\} \Cap \{(x,V)\} \in \mathcal{A}_1 \Cap \mathcal{A}_2$,

(ii) $\forall x,y \in A$ için

$$F^{G}_{x-y}(x-y) \supseteq U \cap V \tag{4.2.3}$$

olacak şekilde $x-y$ nin bir açık komşuluğu ve

$x, y \in B$ için

$$F^{G'}_{x-y}(x-y) \supseteq U' \cap V' \tag{4.2.4}$$

Olacak şekilde $x-y$ nin bir açık komşuluğu vardır. O halde $\forall x, y \in A \cap B$ için

$$F^{G \cap G'}_{x-y}(x-y) \supseteq (U \cap V) \cap (U' \cap V') = (U \cap U') \cap (V \cap V') \tag{4.2.5}$$

dir.

Önerme 4.2.4 (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ sırasıyla A ve B ye karşılık gelen X in topolojik esnek alt grupları ise o halde $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ de X in bir topolojik esnek alt grubudur.

İspat. Tanım 3.11 den $\forall x \in A, y \in B$ için $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ nin çarpımı

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{\cup\{((x,y), U \cap V)\} | U \in \tau_A, V \in \tau_B\}. \tag{4.2.6}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda topolojik esnek alt grup olma şartları sağlanır.

(i) $\{((x,y), U\} \times \{((x,y), V)\} = \{((x,y), U \times V)\} \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$,

(ii) $\forall x, y \in A$ için $F^{G}_{x-y}(x-y) \supseteq U \cap V$ sağlayan bir G komşuluğu var olduğundan ve $\forall x', y' \in B$ için $F^{G'}_{x'-y'}(x'-y') \supseteq U' \cap V'$ sağlayan bir G' komşuluğu var olduğundan $(x-y, x'-y')$ nin bir $G \times G'$ açık komşuluğu için

$$F^{G \times G'}_{(x,x')-(y-y')}\big((x,x')-(y-y')\big) = F^{G \times G'}_{(x-y,x'-y')}(x-y, x'-y')$$

$$= F^{G}_{x-y}(x-y) \times F^{G'}_{x'-y'}(x'-y')$$

$$\supseteq (U \cap V) \times (U' \cap V')$$

$$= (U \times U') \cap (V \times V')$$

dir.

Önerme 4.2.5 X bir topolojik grup ve A, X in bir topolojik alt grubu olsun. Eğer $\mathcal{A}$, X'in topolojik esnek alt grubu ise o halde X'in her bir U açık komşuluğu için $e \in A$ birim elemanının $U \subseteq V$ olacak şekilde bir açık komşuluğu vardır.

İspat:

$\mathcal{A}$, X'in bir esnek alt grubu olduğundan, $\forall x \in A$ için

$F_x^U(x) = F_x^U(x) \cap F_x^U(x) = U \cap U \subseteq F_{x-x}^V(x - x) = F_e^V(e)$ olduğu görülür.

Önerme 4.2.6 Eğer $\mathcal{A}$, X in bir topolojik esnek alt grubu ise

$$H = \{x \in A: U \subseteq A \text{ } açık \text{ } komşuluğu \text{ } vardır \ni e, X \in U\} \qquad (4.2.7)$$

cümlesi X in bir topolojik alt grubudur.

İspat.

$x, y \in A$ olsun. $x - y \in A$ olduğunu ispatlayalım. $\mathcal{A}$ nın topolojik esnek alt grup olduğunu biliyoruz. O halde $x - y$ nin bir G açık komşuluğu vardır öyle ki x ve y nin sırasıyla her U ve V açık komşuluğu için

$$F_{x-y}^G(x - y) \supseteq U \cap V \qquad (4.2.8)$$

dır. Buradan

$$G \supseteq U \cap V \qquad (4.2.9)$$

Olduğu elde edilir. $e \in U \cap V$ olduğundan $e \in G$ dir ve aynı zamanda

$x - y$ ve e elemanları aynı açık cümlededirler. Dolayısıyla H, X in bir topolojik alt grubudur.

4.3. Bir Topolojik Halkanın Esnek Alt Halkası

Bu bölümde kendisi esnek olmayan bir topolojik halkanın esnek alt halkası tanımlanmıştır.

Tanım 4.3.1 $(X, +, \cdot, \tau)$ bir topolojik halka ve $A,\ X$ in bir alt halkası olsun. $\mathcal{A} \subseteq S$, A üzerindeki üretilen esnek noktaların bir ailesi, $U, V \in \tau_A$ sırasıyla x ve y nin açık komşulukları olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ ya X in bir $topolojik\ esnek\ alt\ halkası$ denir:

(i) $\forall \{(x, U)\}, \{(x, V)\} \in A$ için $\{(x, U)\} \Cap \{(x, V)\} \in A$,

(ii) $\forall x, y \in A, U, V \in \tau_A$ için $x - y$ nin $F_{x-y}^{G}(x - y) \supseteq U \cap V$ olacak şekilde bir G açık komşuluğu vardır,

(iii) $\forall x, y \in A, U, V \in \tau_A$ için xy nin $F_{xy}^{G}(xy) \supseteq U \cap V$ olacak şekilde bir G açık komşuluğu vardır.

Örnek 4.3.2. Örnek 4.2.2 de $\forall x, y \in Z$ için xy nin $F_{xy}^{G}(xy) \supseteq \emptyset$ olack şekilde bir G açık komşuluğu var olduğundan Z, R nin bir topolojik esnek alt halkasıdır.

Önerme 4.3.3. (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ sırasıyla A ve B ye karşılık gelen X in topolojik esnek alt halkaları ise o halde $\mathcal{A}_1 \Cap \mathcal{A}_2$ de X in bir topolojik esnek alt halkasıdır.

İspat:$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ topolojik esnek alt grup olduğundan (iii) şart sağlandığını göstermek yeterlidir.

(iii)$\forall x, y \in A$ için xy nin $F_{xy}^{G}(xy) \supseteq U \cap V$ olacak şekilde bir G komşuluğu vardır. Benzer olarak $\forall x, y \in B$ için xy nin $F_{xy}^{G'}(xy) \supseteq U' \cap V'$ olacak şekilde bir G' açık komşuluğu vardır. Buradan $\forall x, y \in A \cap B$ için

$$F_{xy}^{G \cap G'}(xy) \supseteq (U \cap V) \cap (U' \cap V') = (U \cap U') \cap (V \cap V') \qquad (4.3.1)$$

dir.

Önerme 4.3.4 (X, τ) bir topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer $\mathcal{A}_1$ ve $\mathcal{A}_2$ sırasıyla A ve B ye karşılık gelen X in topolojik esnek alt halkaları ise o halde $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ de X in bir topolojik esnek alt halkasıdır.

İspat.

$\mathcal{A}_1 \Cap \mathcal{A}_2$ bir topolojik esnek alt halka olduğundan (iii) şartının sağlandığını göstermek yeterlidir.

(iii)$\forall x, y \in A$ için $F_{xy}^{G}(xy) \supseteq U \cap V$ olacak şekilde bir G açık komşuluğu vardır. Benzer olarak $\forall x', y' \in B$ için $F_{x'y'}^{G'}(x'y') \supseteq U' \cap V'$olacak şekilde bir G' açık komşuluğu vardır. Buradan $(x-y, x'-y')$ nin $G \times G'$ açık komşuluğu için

$$F_{(x,x'),(y,y')}^{G\times G'}\big((x,x')(y,y')\big) = F_{(xy,x'y')}^{G\times G'}(xy, x'y')$$

$$= F_{xy}^{G}(x,y) \times F_{x'y'}^{G'}(x',y') \supseteq (U \cap V) \times (U' \cap V') \qquad (4.3.2)$$

$$= (U \times U') \cap (V \times V')$$

dir.

Önerme 4.3.5. Eğer $\mathcal{A}$ X in bir topolojik esnek alt halkası ise,

$H = \{x \in A : U \subseteq A$ açık komşuluğu vardır öyle ki $e, x \in U\}$ cümlesi X in bir topolojik alt halkasıdır.

İspat açıktır.

5. SONUÇ

Bu tezde esnek noktalar yardımıyla verilen yeni bir esnek topoloji tanımı kullanılmış, bu tanımla birlikte alt esnek uzaylardan bahsedilmiştir. Literatürde bulunan esnek topoloji kavramı, uzayın noktalarını tek başına kullanmaya yeterli olmayıp, alt cümleler üzerinden tanımlanmıştır. Fakat bu tanım, topolojinin bazı konularını esnek topolojiye aktarırken faydalı olamamıştır. Örneğin alışılmış esnek topolojiyi ve esnek eğrisel irtibatlılığı tanımlayabilmek için noktalara ihtiyaç vardır. Bu sebeple esnek nokta tanımı oldukça kullanışlıdır. Esnek noktalar tanımlanırken, sabit nokta fonksiyonlar yardımıyla tek elemanlı esnek cümleler oluşturulmuştur ve bu cümleler tek bir nokta olarak kabul edilmiştir. Bu yöntemle cebir ve topolojideki mevcut kavramlar esnek noktalar yardımıyla yeniden tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Molodtsov, D. , Soft set theory-First results, Comput. Math. Appl. 37 19-31,1999.
2. Saraf, S., Survey or review on soft set Theory and Development," Comp.Appl.vol.3, 2013.
3. Maji, P.K., Biswas, R. Roy, Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45 pp. 555–562, 2003.
4. Chen, D., Tsang, E.C.C., D.S. Yeung, X. Wang, The parameterization reduction of soft sets and its application Computers and Mathematics with Applications, 49, pp. 757–763,2005.
5. Sezgin, A., Atagün, A.O., On operations of soft sets, Computers & Mathematics with Applications 61 (5), 1457-1467,2011.
6. Aktas, H., Çagman, N., Soft sets and soft groups Information Sciences, 177 , pp. 2726–2735, 2007.
7. Atagün, A.O., Sezgin, A., Soft substructures of rings, fields and modules, Comput. Math. Appl., 61 (3) , pp. 592–601,2011.
8. Young, J.B., Soft BCK/BCI-algebras, Computers & Mathematics with Applications 56.5 : 1408-1413, 2008.
9. Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., Soft semirings, Computers & Mathematics with Applications 56.10 : 2621-2628, 2008.
10. SUN, Qiu-Mei; ZHANG, Zi-Long; LIU, Jing. Soft sets and soft modules. In: Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg, p.403-409, 2008.
11. Acar, U., Koyuncu, F., Tanay, B., Soft sets and soft rings, Computers & Mathematics with Applications,59 (11) :3458-3463, 2010
12. Aktas¸, H., Some algebraic applications of soft sets, Applied Soft Computing 28 : 327-331, 2015
13. Brown, R., Topology and groupoids, Booksurge PLC, 2006.
14. Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayınları, Ankara, 2011.
15. Bourbaki, N., Elements of Mathematics: General Topology, Addison–Wesley, 1966.
16. Çağman, N , Karataş S .Enginoğlu S.,Soft topology ,computer and mathematics with applications 62 , 351-358, 2011

17. Varol, B.P., Aygün, H. (2012) ,On soft Hausdorff spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics vol. 5(1), pp. 15-24.4

18. Shabir, M., Naz, M., On soft topological spaces, Computers and Mathematics with Applications, 61, 1786-1799, 2011.

19. Min, W.K. A note on soft topological spaces, Comput. Math.Appl. vol. 62, pp. 3524-3528, 2011

20. Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Comput&Applic vol. 21, pp. 113-119, 2012.

21. Zorlutuna, I., Akdağ M., Min, W.K. and Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. vol. 3, no. 2, pp. 171-185, 2012.

22. Peyghan E., Samadi B., Tayebi A , About soft topological spaces.,Journal of New Results in Science, 2: 60-75, 2013.

23. Hussain, S., Akız, H. F., Alajlan, A. I., On Soft Real Point Matrices and Their Operations, Moroccan J. of Pure and Appl. Anal., Volume 4(1), Pages 9-16, 2018.

24. Hussain, S., Akız, H. F., Alajlan, A. I., On operations of Soft Real Points, Fixed Point Teory and Applications, 2019.

25. Tükel, M., Üretilen Esnek Topoloji, Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında Hatay'ın İskenderun ilçesinde dünyaya gelen Cenker KOÇAY, ilköğretim ve lise hayatını sırasıyla Mersin Üç ocak ilköğretim okulu ile Mersin lisesinde tamamlamıştır. 2011 yılında kazandığı Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2015 yılında bitirmiştir. 2019 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimini tamamlamıştır.

İletişim Bilgileri

Adres: Yenimahalle 33184 sokak Adapark Plaza no:26 kat:9 no:18 Mezitli/Mersin

33100 MERSİN

Telefon:05398432317

E-posta: kocaycenker@gmail.com