T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

PFAFF DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE ONUN ÇÖZÜM METOTLARI

Necati ŞAHBAZ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2019

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111312016 numaralı öğrencisi Necati ŞAHBAZ'nın hazırladığı "**Pfaff Diferansiyel Denklemi ve Onun Çözüm Metotları**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 21/03/2019 Perşembe günü saat 13:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/[redacted] ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Ali DELİCEOĞLU

Jüri Üyesi (Danışman) : Prof.Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Jüri Üyesi : Dr.Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 12/04/19 tarih ve 17 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

12/04/2019

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

KYT-FRM-110/00

İÇİNDEKİLER

PFAFF DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE ONUN ÇÖZÜM METOTLARI

Necati ŞAHBAZ

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 47

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde Pfaff diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Pfaff diferansiyel denkleminin ve konuyla ilgili diğer anlamlarım tanımı verilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin integral yüzeylerin çözümünün varlığı hakkında teorem ispatlanmıştır. Pfaff diferansiyel denklemimin integral eğrilerinin bulunması metodu gösterilmiştir. Bunlara ait ayrıca örnekler verilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin skaler çarpım şeklinde yazılışı gösterilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin potansiyelli vektör alanları halinde bir çözüm formülü gösterilmiştir. Potansiyelli vektör alanları için Pfaff denkleminin çözümünün varlığı için gerek ve yeter şart verilerek ispatlanmıştır.

Pfaff diferansiyel denkleminin çözülebilmesi için integral çarpanın olabileceği gösterilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin çözümüne ait genel örnekler gösterilmiştir.

Pfaff diferansiyel denkleminde değişkenlerden birinin sabit gibi alınmasıyla Pfaff denkleminin çözüm yöntemi verilmiştir ve bu yöntem örnekte gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklem, Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler, Cauchy Problemi, Kuazi diferansiyel denklemi, Pfaff diferansiyel denklemi,

PFAFF DEFFERENTİAL EQUATİON İT'S SOLUTION METHODS

Necati ŞAHBAZ

Yozgat Bozok University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 47

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, Pfaff differential equation is discussed. The definition of Pfaff differential equation and other related meanings are given. Theorem about the existence of the solution of integral surfaces of Pfaff differential equation is proved. The method of finding integral curves of the Pfaff differential equation is shown. Examples on related to these are also given. Writing on the multiplication of the Pfaff differential equation is shown. A solution formula is shown on the potential vector fields of the Pfaff differential equation. For the existence of the solution of the Pfaff equation and potential vector are proved by necessary and sufficient conditions.

In order to solve the Pfaff differential equation, it is shown that integral multiplication can be. shown the General examples are given on the solution of the Pfaff differential equation.

The solution method on Pfaff differential equation is given by taking fixed one of the variables taken as fixed and shown some examples.

Keywords: Differential equations, first order partial derivative differential equations, Cauchy problem, Quasi differential equation, Pfaff differential equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen, üzerimde çok emeği bulunan değerli bilim insanı hocam Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e bütün katkılarından dolayı, öncelikle teşekkür ediyorum.

Bu süreçte ders aldığım, bilgilerinden istifade ettiğim saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU, Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ beyefendilere diğer tüm hocalarıma ve lisans eğitimimden bu güne beni daima akademik eğitime teşvik eden ve başarıya inandıran güdüleyen Prof. Dr. Özden KORUOĞLU ve Prof. Dr. Recep ŞAHİN hocalarıma teşekkür ediyorum.

Gerekli izin ve desteği veren çalıştığım kurumum Sorgun Belediye'sindeki bütün idareci ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Ayrıca çalışma sürecinde bana daima destek olan, sabrını ve dualarını esirgemeyen eşim Beyza ŞAHBAZ'a, çocuklarım Okan Yagız ve Zülal Ece'ye, Kıymetli babam-annem Seyit ve Alime ŞAHBAZ'a, Amcalarım ,Hacı Halil ve Salih ŞAHBAZ'a, kardeşlerim Köksal ve Sedat ŞAHBAZ'a, değerli akrabam ve arkadaşlarıma, dönem arkadaşlarıma ve bu eğitimimde güdüleyici, destekleyici Talip ŞAHİN hocama teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans eğitimime ara vermek durumunda kaldığım: Tez çalışmam sürecinde vefatıyla tarifsiz üzüntü yaşadığımız evladımız Said Alper ŞAHBAZ anısına…

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

$\vec{F}$	: $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$
$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$	: ox, oy, oz - eksenleri üzerine birim vektörlerdir.
$(\vec{F}, \vec{t})$	: $\vec{F}$ ve $\vec{t}$ vektörünün skaler çarpımı
$\frac{\partial u}{\partial x}$	: u fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türevi

1. GİRİŞ

Bu tezde birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler ve bu denklemler için Cauchy problemi ve bu problemin çözümü tanımlanmıştır. Bu tarz denklemlerin çözümüne örnekler gösterilmiştir. İki serbest değişkene bağlı Kuazi lineer denklemler ele alınmıştır ve bu denklemlere karşılık gelen karakteristik sisteminin tanımı verilmiştir. Kuazi lineer denklemlerin çözümünün varlığı için teorem verilerek ispatlanmıştır.

Pfaff diferansiyel denkleminin tanımı ve geometrik açıklamaları verilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin integral yüzeylerinin varlığı hakkında teorem verilerek ispatlanmıştır. Pfaff diferansiyel denkleminin integral eğrilerinin bulunması metotları verilmiştir. Ayrıca bu probleme ait örnekler gösterilmiştir. Pfaff diferansiyel denklemi skaler çarpım şeklinde gösterilmiştir. Potansiyelli vektör alanları için Pfaff denkleminin bir çözüm formülü gösterilmiştir.

Potansiyelli alan halinde Pfaff diferansiyel denkleminin çözümünün varlığı için gerek ve yeter şart gösterilerek ispatlanmıştır. Pfaff diferansiyel denklemini çözmek için integral çarpanının tanımı verilerek örnekleri gösterilmiştir. Genel olarak Pfaff diferansiyel denkleminin çözümü için örnekler gösterilmiştir.

Pfaff diferansiyel denkleminde değişkenlerden birinin sabit gibi alınmasıyla bu denklemin çözüm metodu verilmiştir. Bu metodun uygulanışı bir örnekte gösterilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler. Cauchy Problemi

Serbest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ değişkenlerinin aranan $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonun ve aranan fonksiyonun $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ kısmi türevlerinin arasında verildi.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0 \tag{2.1}$$

bağıntısına *birinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklem* denir. [1]

Burada $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ fonksiyonu $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ değişkenleri uzayının belirli bir G_{2n+1} bölgesinde tanımlanmış belirli fonksiyondur.

Kabul edelim ki; $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenleri uzayının belirli G_n bölgesinde sürekli kısmi türevleri var ve her bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ için

1) $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \in G_{2n+1}$ ve

2) $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$, şartları sağlansın.

Bu durumda $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonuna G_n bölgesinde (2.1) denkleminin çözümü denir. (2.1) denkleminin çözümünün bulunması problemine onun integrallenmesi denir.

Aranan fonksiyonun kendisinin ve türevlerinin lineer dahil olduğu

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} +$$

$$+ X_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) z = Y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

denklemine *lineer denklem* denir.

Özel halde bu (2.2) denkleminde

$$X_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \ , \qquad Y(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$$

olduğunda böyle denkleme *lineer homojen denklem* denir.

Sadece aranan fonksiyonun türevlerine göre lineer olan

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n , z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n , z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n , z) \qquad (2.3)$$

denklemine *Kuazi lineer denklem* denir [2].

Kabul edelim ki; (2.1) denklemi $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ türevine göre çözülebilen olsun:

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}) \ , \qquad (2.4)$$

Bu denklemin

$$\varphi\ (x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , z_n^0) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \ , \qquad (2.5)$$

şartını sağlayan $z = \varphi\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$ çözümünün bulunması problemine *Cauchy problemi* denir. Burada x_n^0 olarak verilen; sayı, $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ olarak verilen ise fonksiyondur. Bu probleme (2.1) denkleminde *Cauchy Problemi* denir.

Bu probleme geometrik açıklama vermek için serbest değişkenlerin sayısının iki olan halini ele alalım. Bu halde serbest değişkenleri x,y ile gösterelim. Bu durumda (2.1) denklemi:

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \ , \qquad (2.6)$$

şeklinde yazılır.

Bu (2.6) denkleminin $z = \varphi(x, y)$ çözümünün grafiği x,y,z değişkenlerinin uzayında bir yüzey olur. Bu yüzeye (2.6) denkleminin *İntegral Yüzeyi* denir.[4]

Dikkate alalım ki, bu $z = \varphi(x, y)$ fonksiyonun sürekli kısmi türevleri olduğunda integral yüzey regüler yüzey olur. Yani bu yüzeyin her bir noktasında bu yüzeyin teğet düzlemi olur.

Özel halde (2.6) denklemi $\frac{\partial z}{\partial x}$ türevine göre çözüldüğünde bu denklemin

$$\varphi(x^0, y) = g(y)$$

şartını sağlayan çözümünü bulmak geometrik olarak $x = x^0$ düzlemi üzerinde yerleşen $z = g(y)$ eğrisinden geçen integral yüzeyinin bulunması demektir.

Bazen (2.6) denkleminin parametrik şekilde verilen

$$x = \varphi(s)\ , \quad y = \psi(s)\ , \quad z = h(s)\ , \quad s \epsilon (\alpha, \beta) \tag{2.7}$$

eğrisinden geçen integral yüzeyinin bulunması istenir. Bu probleme *Genelleştirilmiş Cauchy Problemi* denir.

Uygun olarak (2.1) denkleminin $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ çözümünün $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ değişkenleri uzayında gösterdiği yüzeye bu denklemin İntegral Yüzeyi denir.

Örnek 2.1.1. Burada lineer homojen

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0\ ,$$

denklemini ele alalım. Burada

$$z = x^2 - y^2\ ,$$

hiperbolik paraboloidin ele aldığımız bu denklemin integral yüzeyi olduğu açıktır. Bu fonksiyon

$$z(0,y) = -y^2\ ,$$

şartını da sağlar. Yani $x = 0$ düzlemi üzerinde yerleşen $z = -y^2$ parabolasından geçen integral yüzey olduğu da görülür.

Burada keyfi diferansiyellenen $\phi(u)$ fonksiyonu için

$$z = \phi(x^2 - y^2) \ ,$$

fonksiyonu da ele aldığımız denklemin çözümü olur. Gerçekten de,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,\phi(x^2 - y^2)\ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y\,\phi'(x^2 - y^2)\ ,$$

olduğundan

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = (2xy - 2xy)\,\phi'(x^2 - y^2) \equiv 0 \ ,$$

olur.

2.2. İki Serbest Değişkene Bağlı Kuazi Lineer Denklemler Hali

Burada

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \ , \qquad (2.8)$$

denkleminin verildiğini varsayalım. Bu denklemdeki $P(x,y,z)$, $Q(x, y, z)$ katsayılarının ve denklemin sağ yanındaki $R(x,y,z)$ serbest terimin G_3 belirli bölgesinde sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar olduklarını ve bu G_3 bölgesinde

$$|P(x, y, z)| + |Q(x, y, z)| > 0 \ ,$$

şartını sağladığı varsayılır.

(2.8) denkleminin $z = \varphi(x, y)$ integral yüzeyine $(x,y,z)\in G_3$ noktasında çizilmiş(çekilmiş) teğet düzleminin denklemi

$$\varphi'_x(x,y)(X-x) + \varphi'_y(x,y)(Y-y) = Z - z\ , \tag{2.9}$$

şeklinde yazılır. Burada (x,y,z) noktasına bu düzlemin taşıyıcı noktası, $\varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y(x,y)$ sayılarına ise yönlendirici katsayılar denir.

(x, y, z)∈G_3 verilmiş noktasından geçen ve p, q yönlendirici katsayıları

$$P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q = R(x, y, z)\ , \tag{2.10}$$

denklemini sağlayan

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z\ , \tag{2.11}$$

düzlemlerini ele alalım.

(x, y, z) noktasını sabit alıp p, q yönlendirici katsayılarını (2.10) şartını sağlamakla farklı değerler verirsek (2.11) denklemi düzlemler destesi oluşturur ve (2.9) şartına esasen bu düzlemler destesinden bir düzlem z = $\varphi(x,y)$ yüzeyine (x, y, z) noktasında teğet düzlem olur.

Verilmiş (x, y, z)∈G_3 noktasından geçen ve yönlendirici vektörü

$(P(x, y, z)\ , Q(x, y, z)\ , R(x, y, z))$ vektörü olan

$$\frac{X-x}{P(x,y,z)} = \frac{Y-y}{Q(x,y,z)} = \frac{Z-z}{R(x,y,z)}\ , \tag{2.12}$$

doğru hattı (2.10) şartına esasen (2.11) düzlemler destesi üzerinde yerleşir, yani bu düzlemler destesinin kesişme hattı olur. Bu doğru hattına *Monj Ekseni* denir. [3]

Demek ki (2.10) denklemi her bir (x, y, z)∈G_3 noktasında Monj ekseni ile belirlenmiş olan bir yön belirler ve (2.11) düzlemler destesi bu yönden geçer.

Böylece (2.8) denklemini çözmek geometrik olarak öyle regüler z = $\varphi(x,y)$ yüzeyini bulmak demektir ki bu yüzeyin her bir (x, y, z) noktasında teğet düzlem bu noktanın belirlediği (2.11) düzlemler destesinin içerisinde olsun. (x, y, z) noktasından çıkan $(P(x, y, z)\ , Q(x, y, z)\ , R(x, y, z))$ vektörü $z = \varphi(x,y)$ yüzeyine (x, y, z) noktasında çizilmiş teğet düzlem üzerinde yerleştiği açıktır.

Her bir (x, y, z) noktasında teğet vektörü

$$(P(x, y, z)\ , Q(x, y, z)\ , R(x, y, z))\ ,$$

olan eğriye (2.8) denkleminin *karakteristik eğrisi* veya *karakteristikası* denir.[5]

Üç boyutlu uzayda verilmiş eğrinin her hangi bir (x, y, z) noktasında teğetinin yönlendirici vektörü (dx, dy, dz) vektörü ile belirlendiği açıktır. Burada verilmiş tanıma esasen karakteristik eğrinin her bir (x, y, z) noktasında

$$(P(x, y, z)\ , Q(x, y, z)\ , R(x, y, z))\ ,$$

ve

$$(dx, dy, dz)\ ,$$

vektörleri *Kollinear* vektörlerdir. Yani

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \quad ,$$

(2.13)

şartını sağlayan vektörlerdir.

Böylece (2.13) sistemi (2.8) denkleminin karakteristik eğrilerinin diferansiyel denklemi olur. Bu (2.13) sistemine (2.8) denkleminin *karakteristik sistemi* denir.

Aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 1. (2.13) denkleminin her bir integral yüzeyi bir parametreye bağlı karakteristik eğrilerle örtülmüştür ve tersine bir parametreye bağlı olan karakteristik eğrilerin oluşturduğu her bir regüler yüzey bu (2.13) denkleminin integral yüzeyi olur.

İspat 1. $z = \varphi(x,y)$ fonksiyonun (2.13) denkleminin G_2 bölgesinde çözümü olduğunu var sayalım. $z = \varphi(x,y)$ integral yüzeyi üzerinde yerleşen ve her bir noktasında teğet vektörü

$$\big(P(x,y,\varphi(x,y)), Q(x,y,\varphi(x,y)), R(x,y,\varphi(x,y))\big) ,$$

vektörü olan eğri inşaa edelim. Bu eğrinin x-y düzlemine projeksiyonunun(iz düşümün) diferansiyel denklemi

$$\frac{dx}{P(x,y,\varphi(x,y))} = \frac{dy}{Q(x,y,\varphi(x,y))} , \tag{2.14}$$

denklemi olur. Bu denklemi de G_2 bölgesinin her bir noktasının komşuluğunda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,\varphi(x,y))}{P(x,y,\varphi(x,y))} ,$$

veya

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y,\varphi(x,y))}{Q(x,y,\varphi(x,y))} ,$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $P(x, y, z)$ ve $Q(x, y, z)$ fonksiyonları üzerine konulmuş şartlardan her bir $(x, y) \in G_2$ noktasından (2.14) denkleminin bir tane integral eğrisinin geçtiği alınır. Bu (2.14) denkleminin genel çözümünün $y = \omega(x,c)$ şeklinde olduğunu farz edip,

$$\left.\begin{aligned} y &= \omega(x,c) \\ z &= \varphi\big(x,\omega(x,c)\big) \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

uzay eğrileri ailesini ele alalım.

Varsayımımıza göre $z = \varphi(x,y)$ fonksiyonunun (2.8) denkleminin çözümü olduğundan buradan

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \frac{Q}{P} = \frac{1}{p}\left[P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{R(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}{P(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}$$

eşitliği alınır.

Bu ise ; (2.15) uzay eğriler ailesi aynı zamanda (hem de)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} ,$$

veya (2.16)

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} ,$$

denklemini sağlar.

Buradan da (2.15) ailesinin (2.13) sisteminin çözümü olduğu görülür.

Buradan $z = \varphi(x, y)$ integral yüzeyinin bir parametreye bağlı olan (2.15) karakteristikler ailesiyle örtülmüş olduğunu gösterir.

Tersine varsayalım ki $z = \varphi(x, y)$ regüler yüzeyi karakteristik eğrilerden oluşturulmuş yüzeydir. Bu yüzey üzerinde keyfi (x, y, z) noktasını alalım. Bu durumda (2.8) denkleminin bir noktasından geçen ve $z = \varphi(x, y)$ yüzeyi üzerinde yerleşen karakteristik eğrisi vardır. (x,y,z) noktasında bu karakteristik eğriye çizilen(çekilen) (2.12) teğet doğru hattı (2.10) şartına(koşuluna) esasen (2.11) düzlemler ailesi üzerinde (ailesine dahil olur) yerleşir. Diğer yandan (x,y,z) noktasında $z = \varphi(x, y)$ yüzeyine çizilen(çekilen) teğet düzlem (2.9) denklemi ile belirlendiğinden bu düzlem (2.11) düzlemler ailesine dahil olur. Bu durumda çözümün geometrik anlamına esasen $z = \varphi(x, y)$ yüzeyi (2.8) denkleminin integral yüzeyi olur.

Böylece ele alınan teorem ispatlanmış oldu. Burada iki serbest değişkene bağlı Kuazi lineer denklemlerin geometrik açıklamaları verildi.

3. PFAFF DİFERANSİYEL DENKLEMİ VE BU DENKLEMİN ÇÖZÜM METOTLARI ÜZERİNE

3.1. Pfaff Diferansiyel Denklemin Tanımı

Kabul edelim ki x, y, z değişkenleri uzayının belirli bir bölgesinde tanımlanmış

$$P(x, y, z)\,,\ Q(x, y, z)\,,\ R(x, y, z)\ ,$$

fonksiyonlarının verildiğini ve bölgenin her bir noktasında bu fonksiyonlardan en az birinin sıfırdan(0) farklı olduğunu varsayalım. Burada her bir $(x, y, z)\in G$ noktasına $(P(x,y,z)\,,\ Q(x,y,z)\,,\ R(x,y,z))$ vektörü karşı getirelim. Bu şekilli vektörler kümesi G bölgesinde vektörler alanı oluşturur. [3]

G bölgesinde yerleşen ve keyfi noktasında teğetinin yönü alanın bu noktadaki yönü ile aynı olan (çakışan) hatlara alanın *vektör hatları* denir.

Birçok fiziksel problemlerin çözümü alanın vektör hatlarına ortogonal olan yüzeyler ailesinin bulunmasına getirilir. Keyfi regüler yüzeyin (x,y,z) noktasında çizilen(çekilen) teğeti (dx, dy, dz) vektörü ile belirlendiğinden vektörler alanına ortogonal(dik) olan yüzeyler için;

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad , \tag{3.1}$$

bağlantısı sağlanmalıdır.[4].

Böylece vektör alanın vektör hatlarına ortogonal olan yüzeyler ailesinin bulunması problemi (3.1) diferansiyel denkleminin integral yüzeylerinin bulunması problemine getirilmiş olur.

Bu (3.1) denklemine *Pfaff diferansiyel denklemi* denir.

3.2. Pfaff Diferansiyel Denkleminin İntegral Yüzeylerinin Varlığı Hakkında Teorem

Teorem 2. Burada $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ fonksiyonlarının G bölgesinde sürekli kısmi türevleri olduğunu ve bölgenin her bir noktasında en azından bu $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ fonksiyonlarının birinin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.1) denkleminin integral yüzeyinin varlığı için G bölgesinde

$$P\left(Q'_z - R'_y\right) + Q\left(R'_x - P'_z\right) + R\left(P'_y - Q'_x\right) = 0 \quad , \qquad (3.2)$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeter şarttır.

Bu (3.2) eşitliğinin G bölgesinde sağlanmadığından her bir $(x_0, y_0, z_0) \in G$ noktasından (3.1) denkleminin tek bir tane integral yüzeyi geçer.

<u>Gerekliliğin İspatı 2.</u> (3.1) denkleminin $(x_0, y_0, z_0) \in G$ noktasından geçen integral yüzeyinin var olduğunu varsayalım. Genelliği bozmadan $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ şartının sağlandığını varsayıp (x_0, y_0, z_0) noktasını belirli bir S komşuluğunda (3.1) denklemini

$$dz = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy \quad , \qquad (3.3)$$

şeklinde yazalım. Burada

$$A(x, y, z) = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)} \;,\; B(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} \quad , \qquad (3.4)$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Burada dikkate alalım ki $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ şartı sağlandığında (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen integral yüzey (x_0, y_0) noktasının yakın komşuluğunda z = z(x, y) şeklinde verilebilir. Diğer yandan iki değişkenli fonksiyonun tam diferansiyeli

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad ,$$

formülü ile tanımlandığından ve dx, dy diferansiyelleri bağlı olmadıklarından bu yüzey için

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= B(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

eşitlikleri bulunur.

Dikkate alalım ki (3.5) eşitliklerinin her biri z - ye göre kısmi türevli denklemdir. (3.5) eşitliklerinin ikisi birlikte kısmi türevli denklemler sistemidir. (3.5) denklemlerinin her birini sağlayan $z = \psi(x, y)$ yüzeyi bulunduğunda bu sisteme uyumlu sistem, $z = \psi(x, y)$ yüzeyine ise *integral yüzeyi* denir.

Böylece (3.1) denklemin her bir z = z(x,y) integral yüzeyi aynı zamanda (3.5) sisteminin integral yüzeyi olur.

Teoremin şartına göre S komşuluğunda A(x, y, z) , B(x, y, z) fonksiyonlarının sürekli kısmi türevleri vardır. Bu yüzden (3.5) eşitliklerinden x ve y' ye göre türev

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = A_y(x,y,z) + A_z(x,y,z)B(x,y,z) \ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = B_x(x,y,z) + B_z(x,y,z)A(x,y,z) \ ,$$

eşitlikleri bulunur.

Buradaki ; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ ve $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ türevleri S komşuluğunda süreklidirler. Bu yüzdende *Schwartz* teoreminden;

$$A_y + A_z B = B_x + B_z A \quad , \qquad (3.6)$$

eşitliğini sağlandığını buluruz. Burada (3.4) ifadelerini dikkate alındığında (3.2) şartının sağlandığı bulunur.

Böylece teoremin gereklilik şartı ispatlandı.

<u>Yeterliliğin İspatı 2.</u> Şimdi (3.2) şartının sağlandığını ve $(x_0, y_0, z_0) \in G$ noktasında $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ şartının sağlandığını varsayalım. Bu şartlarda (3.1) denkleminin (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen tek bir tane z = z(x, y) integral yüzeyinin olduğunu gösterelim.

Gerekliliğin ispatındaki (3.5) sisteminin (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen integral yüzeyinin aynı zamanda(hem de) (3.1) denkleminin integral yüzeyi olduğu görülür. Bu yüzden yeterliliği ispatlamak için (3.5) sisteminin uyumlu olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla (3.5) sisteminin birinci denkleminde y' yi parametre gibi alalım. Bu durumda

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z) \quad , \tag{3.7}$$

diferansiyel denkleminin

$$z(x_0) = h(y) \ , \tag{3.8}$$

şartını sağlayan çözümünü ele alalım. Burada h(y) fonksiyonu belli olmayan regüler fonksiyon olur. Teoremin şartları sağlandığında (3.7) denkleminin (3.8) şartını sağlayan çözümünün bulunması probleminin (x_0 , y_0) noktasının yakın komşuluğunda tek bir tane

$$z = \varphi\big(x, y, x_0, h(y)\big) \quad , \tag{3.9}$$

çözümü vardır.

Dikkate alalım ki $z = \varphi(x, y, x_0, u)$ fonksiyonunun tüm argümentlere nazaran sürekli kısmi türevleri vardır. Buna ilave $\varphi(x, y, x_0, u)$ fonksiyonunun y parametresine nazaran $\varphi_y(x, y, x_0, h(y))$ türevi diferansiyel denklemler kursunda gösterilir ki;

$$\frac{d}{dx}\big(\varphi_y\big) = A_z(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)))\,\varphi_y + A_y(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)))\varphi_y \tag{3.10}$$

denkleminin

$$\varphi_y\big|_{x=x_0} = 0 \quad , \tag{3.11}$$

şartını sağlayan çözümü olur ama u - argümentine nazaran $\varphi_u(x, y, x_0, h(y))$ türevi

$$\frac{d}{dx}(\varphi_u) = A_z(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)))\,\varphi_u \quad , \tag{3.12}$$

denkleminin

$$\varphi_u|_{x=x_0} = 1 \quad , \tag{3.13}$$

şartını sağlayan çözümü bulunur.

Teoremin şartlarına esasen (3.10) denklemlerinin (3.11) şartını sağlayan tek çözümü ve (3.12) denkleminin (3.13) şartını sağlayan tek çözümü vardır. Buradan da sürekli $\varphi_{yx}(x, y, x_0, h\,(y))$ ve $\varphi_{ux}(x, y, x_0, h\,(y))$ türevlerinin var oldukları ve $\varphi_u(x, y, x_0, h\,(y)) \neq 0$ şartının sağlandığı anlaşılır.

Diğer yandan (3.8) şartında

$$\varphi(x_0, y, x_0\,, h\,(y)) = h\,(y) \quad , \tag{3.14}$$

eşitliği alınır.

Bu sonuncu eşitliğin her yanından y değişkenine nazaran türev alsak

$$\varphi_y(\,x_0, y, x_0, h\,(y)) + \varphi_u(\,x_0, y, x_0, h\,(y))h'(y) = h'(y) \quad , \tag{3.15}$$

eşitliğini bulunur.

Şimdi burada h(y) fonksiyonunu öyle seçelim ki (3.9) fonksiyonu (3.5) sisteminin her ikisininde sağlasın. Bunun için (3.9) fonksiyonunu (3.5) sisteminin ikinci denkleminde z - değişkeninin yerine yazalım. Bu durumda h(y) fonksiyonuna göre;

$$\varphi_y(\,x, y, x_0, h\,(y)) + \varphi_u(\,x, y, x_0, h\,(y))h'(y) = B(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)) \;\; ,$$

denklemi bulunur. Burada $\varphi_u(x, y, x_0, h\,(y)) \neq 0$ olduğundan, bulduğumuz denklemde

$$h'(y) = \frac{B(x, y, \varphi(x, y, x_0, h\,(y)) - \varphi_y(\,x, y, x_0, h\,(y))}{\varphi_u(x, y, x_0, h\,(y))} \quad , \tag{3.16}$$

denklemi bulunur.

Bu denklemin sol yanı yalnız y - değişkenine bağlı olduğundan, sağ yanı da yalnız y değişkenine bağlı olması gerekir. Aksi halde $h(y)$ fonksiyonu bulunamaz.

Gösterelim ki; (3.2) şartı sağlandığında (3.16) denkleminin sağ yanındaki

$$H(x,y) = \frac{B(x,y,\varphi(x,y,x_0,h\,(y)) - \quad \varphi_y(\,x,y,x_0,h\,(y))}{\varphi_u(x,y,x_0,h\,(y))} \quad ,$$

fonksiyonu x - değişkenine bağlı değildir. Bu fonksiyonun x - e nazaran türevinin olduğu açıktır. Burada

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u^2}\left[(B_x + \ B_z\varphi_x - \ \varphi_{yx}\,)\varphi_u - (B - \ \varphi_y)\varphi_{ux}\right] \ ,$$

bulunur.

Burada $\varphi\,, \varphi_y, \varphi_u$ fonksiyonlarının uygun olarak (3.7), (3.10), (3.12) denklemlerinin çözümleri olduklarından

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u}\left[B_x + \ B_z A - \ A_y - A_z B\right] \ ,$$

eşitliği bulunur.

Bu yüzden (3.6) şartına esasen $H_x \ \equiv 0$ olduğu bulunur.

Böylece (3.16) denkleminin sağ yanı x- e bağlı değildir. Bu yüzden de (3.16) sağ yanında x yerine x_0 alabiliriz. Bu durumda (3.11) , (3.13) , (3.14) şartlarına esasen

$$\varphi_y\left(x_0,y,\ \varphi(x_0,y,h(y))\right) = 0 \ , \qquad \varphi_u\left(x_0,y,\ \varphi(x_0,y,h(y))\right) = 1 \ ,$$

$$B\left(x_0,y,\varphi\left(x_0,y,\varphi(x_0,y,h(y))\right)\right) = B(x_0,y,h(y)) \quad ,$$

olduğundan (3.16) denklemi

$$h' = B(x_0, y, h) \quad , \tag{3.17}$$

şeklini alır. Bu denklemin $h(y_0) = z_0$ şartını sağlayan tek bir tane $h = \psi(y, y_0 z_0)$ çözümü vardır. Bu çözüm (3.9) formülünde yerine yazılarak

$$z = \varphi\big(x, y, x_0, \psi(y, y_0, z_0)\big) \quad ,$$

yüzeyi (3.1) denkleminin (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen integral yüzeyi olur. İntegral yüzeyin tekliği onun inşaa yönteminden görülür. Teorem İspatlanır.

Bu teoremden görülür ki; (3.2) şartı sağlanmadığında (3.1) denkleminin integral yüzeyinin olmadığı görülür. Bu ise o demektir ki; (3.2) şartı sağlanmadığında alanın vektör hatlarına ortogonal(dik) olan regüler yüzey yoktur.

Ama bu durumdan alanın vektörler hattına ortogonal olan eğriler olabilir. Bu eğrilere *Pfaff diferansiyel denkleminin integral eğrileri* denir.

3.3. Pfaff Diferansiyel Denkleminin İntegral Eğrilerinin Bulunması Metodu

Aynen sabit olmayan ve sürekli kısmi türevleri olan $\phi(x, y, z)$ fonksiyonunu alıp.

$$\phi\ (x, y, z) = 0 \quad , \tag{3.18}$$

bağlantısını yazalım. (3.18) denkleminin bir regüler yüzey belirler. Bu yüzey üzerinde

(x_0, y_0, z_0) noktası alınıp bu noktanın yakın komşuluğunda (3.18) eşitliğinden x,y,z değişkenlerinden birini diğerleri ile ifade etmek olur.

Özel halde yüzeyin denklemi

$$z = \varphi(x, y) \quad , \tag{3.19}$$

Şeklinde olan hali ele alalım. (3.19) eşitliği (3.1) Pfaff denkleminde z değişkeninin yerine yazılarak

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad , \tag{3.20}$$

denklemi bulunur. Burada

$$M(x,y) = P\big(x,y,\varphi(x,y)\big) + R\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\varphi_x(x,y) \quad ,$$

$$N(x,y) = Q\big(x,y,\varphi(x,y)\big) + R\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\varphi'_y(x,y) \quad ,$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Burada $y = \omega(x,c)$ fonksiyonu (3.20) denkleminin genel çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$y = \omega(x,c) \quad ,$$

$$z = \varphi\big(x,\omega(x,c)\big) \quad ,$$

eğriler ailesi Pfaff diferansiyel denkleminin integral eğrileri olur.

3.4. Örnekler

Örnek 3.4.1. $(y + 3z^2)dx + (x + y)dy + 6xzdz = 0$ denkleminde (3.2) şartını sağladığından bu denklemin integral yüzeyini bulmak için

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{y + 3z^2}{6xz} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{x + y}{6xz} \end{aligned}\right\}$$

sistemin integral yüzeyini bulalım.

Bu sistemin birinci denkleminde y - değişkenini parametre gibi alsak bulduğumuz denklemin yani

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y + 3z^2}{6xz} \quad ,$$

denkleminin genel çözümü;

$$xy + 3xz^2 = h(y) \quad ,$$

şeklinde bulunur.

Bu eşitlikteki $h(y)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki; sistemin ikinci denkleminide sağlasın. Bu amaçla

$$h'(y) = -y \quad ,$$

denklemi seçilir. Bu denklemin genel çözümü

$$h(y) = -\frac{y^2}{2} + c \quad ,$$

şeklinde bulunur. Böylece ele aldığımız denklemin integral yüzeyleri

$$y^2 + 2xy + 6x^2z = c \quad ,$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.4.2. $ydx + (z - y)dy + xdz = 0$

denklemini sağlayan ve $2x - y - z = 1$ düzlemi üzerinde yerleşen eğrileri bulalım.

Kolaylıkla bu denklem için (3.2) şartının sağlanmadığı gösterilir. Bu yüzden ele aldığımız denklemin yalnız integral eğrileri vardır ve bu eğrileri bulmak için x, y, z değişkenleri arasında bir bağlantı verilmelidir. Bu bağlantı integral eğrilerinin

$2x - y - y = 1$ düzlemi üzerinde yerleşmesi şarttır.

Buradan alınan

$$z = 2x - y - 1 \quad ,$$

ifadesini ele aldığımızda denklemde z - değişkeni yerine yazılarak

$$(2x + y)dx + (x - 2y - 1)dy = 0 \quad ,$$

denklemi bulunur. Bu denklem

$$x = \xi + \frac{1}{5}\,, \qquad y = \eta - \frac{2}{5}\,,$$

değişimi ile

$$(2\xi + \eta)d\xi + (\xi - 2\eta)d\eta = 0\,,$$

homojen denklemi haline getirilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\xi^2 + \xi\eta - \eta^2 = c$$

şeklinde bulunur.

Buradan ele aldığımız denklemin

$$2x - y - z = 1\,,$$

düzlemi üzerinde yerleşen integral eğrileri

$$x^2 + xy - y - y^2 = c\,, \qquad (c > 0)$$

ailesi olduğu bulunur.

3.5. Pfaff Diferansiyel Denkleminin Skaler Çarpım Şeklinde Gösterilişi

Burada (3.1) Pfaff diferansiyel denkleminin $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ katsayılarını kullanarak

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\,, \tag{3.21}$$

vektörünü inşaa edelim. Burada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koordinat eksenleri üzere yönelenmiş birim vektörlerdir.

Hatırlatalım ki; her bir noktasında teğetinin yönü vektör alanının $\vec{F}$ vektörünün yönü ile çakışan hatta $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatları denir. Vektör hatlarının oluşturduğu yüzeye vektör yüzeyi denir .[3].

Birçok hallerde alanın vektör hatlarına dik olan

$$U(x, y, z) = c \quad , \quad (c = \text{const}) \tag{3.22}$$

yüzeyler ailesinin bulunmasının istendiğini söylemiştik. Pfaff diferansiyel denkleminde böyle özelliğe sahip yüzey aranır. Bu yüzeyin teğet düzlemi üzerinde yerleşen

$$\vec{t} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \quad ,$$

vektörünü ele alalım. Bu durumda (3.1) Pfaff diferansiyel denklemini veya (3.22) yüzeyler ailesinin denklemi

$$\left(\vec{F}, \vec{t}\,\right) = 0 \ , \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. Gerçekten de (F, t) skaler çarpımını açık şekilde yazdığımızda (3.23) denkleminden (3.1) Pfaff diferansiyel denklemi alınır.

Böylece bir daha not edelim ki; (3.21) vektör alanının vektör hatlarına dik olan yüzeyler ailesinin denklemi (3.1) Pfaff diferansiyel denklemidir.

3.6. Pfaff Diferansiyel Denkleminin Bir Çözüm Formülü

Burada özel halde (3.21) vektörünün oluşturduğu vektör alanı potansiyelli alan olduğundan yani (3.21) formülü ile tanımlanan $\vec{F}$ vektör alanı içinde öyle diferansiyellenen u(x,y,z) skaler fonksiyonu bulunursa;

$$\vec{F} = \text{grad}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \quad , \tag{3.24}$$

olmak üzere

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}\ , \qquad R = \frac{\partial u}{\partial z}\ , \tag{3.25}$$

eşitlikleri sağlandığında $\vec{F}$ vektörünün oluşturduğu vektör alan potansiyelli alan oluşur. Bu durumda aranan (3.22) yüzeyi potansiyel fonksiyonun seviye u(x,y,z)=c yüzeyi olur.

Böylece bu hal için aranan yüzeyler yani Pfaff diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki formülle bulunur.

$$u(x, y, z) = \int_{x_0, y_0, z_0}^{x,y,z} Pdx + Qdy + Rdz + u(x_0, y_0, z_0)\ , \tag{3.26}$$

Bu (3.26) formülündeki integral eğri hatlı integral olup (x_0, y_0, z_0) noktasının (x,y,z) noktasıyla birleştiren keyfi eğri üzere alınan integraldir. Mesela integralleme eğrisi olarak koordinat hatlarına paralel parça-parça lineer hat alınabilir. Bu hal için (3.26) integrali aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x_0, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + c\ , \tag{3.27}$$

burada c keyfi sabit sayıdır.

3.7. Potansiyelli Alan Halinde Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözümünün Varlığı İçin Gerek ve Yeter Şartın İspatı

$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ vektör alanı potansiyelli alan olduğuna üç x,y,z değişkenlerine bağlı

$$(\vec{F}, \vec{t}) = Pdx + Qdy + Rdz\ , \tag{3.28}$$

Pfaff formu adlanan bu form tam diferansiyelli form olur. Yani bir u(x,y,z) skaler değerli fonksiyon bulunur ki;

$$Pdx + Qdy + Rdz = du\ , \tag{3.29}$$

şeklinde gösterili ve uygun olarak (3.25) eşitlikleri sağlanır.

Burada (3.25) eşitliklerini kullanarak

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} \quad ,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} \quad ,$$

eşitlikleri bulunur.

Burada bu bulunduğumuz türevleri karşılaştırarak ve bu türevlerin sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayılarak (3.28) Pfaff formunun (3.29) şeklinde gösterile bilmesi için aşağıdaki üç eşitliğinin sağlanmasının gerek-şart olduğu bulunur.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z} \quad , \tag{3.30}$$

(3.30) şartının (3.28) Pfaff formunun (3.29) şeklinde gösterile bilmesi için hem de yeter - şart olduğu (3.26) formülünün kullanılmasıyla ispatlanır.

Bunu göstermek için (3.27) formülünü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(u,y_0,z_0)du+\int_{y_0}^{y} Q(x,\upsilon,z_0)d\upsilon+\int_{z_0}^{z} R(x,y,w)dw+u(x_0,y_0,z_0) \tag{3.31}$$

burada $(x_0,y_0,z_0)\epsilon G$ keyfi değişmez sağlanan nokta ve $u(x_0,y_0,z_0)$ keyfi sabit sayıdır.

(3.31) eşitliğinin her yanının mesela x değişkenine nazaran diferansiyelleyerek (türevini alarak) aşağıdaki eşitliği bulunur:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,\upsilon,z_0)d\upsilon+\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,w)dw=$$

$$= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, \upsilon, z_0) d\upsilon + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, w) dw =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + [P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0)] - [P(x, y, z) - P(x, y, z_0)] =$$

$$= P(x, y, z).$$

Benzer şekilde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x, y, z) \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) \ ,$$

eşitlikleri bulunur.

Böylece (3.30) şartı sağlandığında $\vec{F}$ vektörünün

$$\vec{F} = grad u \quad ,$$

şeklinde gösterildiği ispatlanmış olur.

(3.30) eşitliklerinin birincisinin her yanını R fonksiyonuna, ikincisinin her yanını P fonksiyonuna ve üçüncüsünün her yanını Q fonksiyonuna çarpıp taraf - tarafa topladığımızda

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 \quad ,$$

veya

$$\left(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}\right) = 0 \quad , \tag{3.32}$$

eşitliği bulunur. Bu (3.32) eşitliği (3.30) eşitliğine eşdeğerdir. Bu (3.32) eşitliği (3.2) eşitliği ile de çakıştığı görülür.

(3.32) eşitliğindeki $\mathrm{rot}\vec{F}$ vektörü, $\vec{F}$ vektör alanının burulgan vektörüdür ve aşağıdaki eşitlikle tanımlanır.

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad , \qquad (3.33)$$

Bu (3.33) eşitliği sembolik olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{F}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} = \vec{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} - \vec{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{P} & \mathrm{R} \end{vmatrix} + \vec{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{z}}\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \mathrm{x}}\right)\vec{\mathrm{j}} + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}}\right)\vec{\mathrm{k}} \quad , \qquad (3.34)$$

(3.2) ve (3.32) şartlarına (3.1) Pfaff denkleminin tam integrallenmesi şartı denir.

(3.1) Pfaff denklemi için (3.2) veya (3.32) şartı sağlanmadığında $\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{c} \quad , \quad (\mathrm{c} = \mathrm{sabit})$$

yüzeyler ailesi bulunamaz.

Gerçekten de böyle bir $u(x,y,z) = c$ yüzeyler ailesi bulunmasaydı

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz} = \mathrm{du} = 0 \quad ,$$

eşitliğinin sol yanındaki ifade (3.28) eşitliği ile tanımlanan Pfaff formu ile çakışırdı ve $u(x,y,z)$ fonksiyonu $\vec{F}$ alan vektörünün potansiyel fonksiyonu olurdu ve buradanda (3.32) eşitliğinin sağlanmadığını bulurduk. Bu çelişki (3.32) şartı sağlanmadığında (3.1) Pfaff denkleminin çözülemez olduğunu gösterir.

(3.32) şartına (3.1) Pfaff denkleminin bir

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{c} \qquad (\mathrm{c} = \mathrm{sabit})\ ,$$

bağlantısı ile integrallenme şartı denir.

3.8. Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözülebilmesi İçin İntegralleyici Çarpanın Olduğu Halde Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözülebilmesi İçin Gerek Şart

$\vec{F}$ vektör alanının potansiyelli alan olmadığı bazı hallerde öyle $\mu(x, y, z)$ skaler fonksiyonu bulmak olur ki; F alan vektörünü bu $\mu(x, y, z)$ skaler fonksiyonuna çarptığımızda $\mu\vec{F}$ vektörü potansiyelli vektör alanı oluşturur. Böyle özellikli

$\mu(x, y, z)$ skaler fonksiyon bulunduğunda

$$\mu\vec{F} = \mathrm{grad}u \quad , \tag{3.35}$$

veya

$$\mu P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \tag{3.36}$$

eşitliklerini sağlayan u(x, y, z) fonksiyonu bulunur.

Bu sonuncu (3.36) eşitliklerinin her yanının uygun değişkene nazaran kısmi türevini alarak aşağıdaki eşitlikleri bulunur:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}, \qquad \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z} ;$$

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z}, \qquad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x} ;$$

$$\frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial x}, \qquad \frac{\partial(\mu R)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \, \partial y} ;$$

bulunan bu türevleri uygun olarak karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikleri bulunur.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z} \quad ,$$

Bu sonuncu eşitliklerdeki çarpımların kısmi türevlerini alarak aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\left(P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}\right),$$

Bulunan bu eşitliklerin birincisinin her yanını R fonksiyonuna, ikincisinin her yanını P fonksiyonuna, üçüncüsünün her yanını Q fonksiyonuna çarpılıp toplandığında $\mu(x.y.z)$ integralleyici çarpanın varlığı için

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = 0 \quad ,$$

veya

$$\left(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}\right) = 0 \quad , \tag{3.32}$$

şartı bulunur.

Böylece (3.32) şartı integralleyici $\mu(x.y.z)$ çarpanının varlığı için gerek şarttır. (3.1) Pfaff Diferansiyel denklemi için bu (3.32) tam integralleme şartı sağlanmadığında $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan

$$u(x,y,z) = c \quad ,$$

yüzeyler ailesi bulunamaz.

Gerçekten de böyle bir

$$u(x,y,z) = c \quad ,$$

yüzeyler ailesi bulunsaydı bu durumda (3.1) Pfaff diferansiyel denkleminin sol yanı

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0 \quad ,$$

eşitliğinin sol yanından bir $\mu(x, y, z)$ çarpanı ile farklanırdı. Bu durumda bu $\mu(x, y, z)$ fonksiyonu (3.1) Pfaff diferansiyel denklemi için integral çarpanı olurdu.

Burada görüldü ki $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan

$$u(x, y, z) = c \qquad (c = \text{const}) \ ,$$

yüzeyler ailesinin varlığı için $\vec{F}$ alan vektörü ile $\text{rot}\vec{F}$ burulgan vektörünün biri birine dik olmaları gerekir.

$$\left(\vec{F}, \text{rot}\vec{F}\right) = 0 \quad ,$$

Not: Dikkate alalım ki bazı problemlerde $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan yüzeyler bulunması yerine $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan hatların bulunması istenebilir

Yani

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad , \qquad (3.1)$$

Pfaff denkleminin mesela

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x, y, z) = 0 \\ u_2(x, y, z) = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.37)$$

eşitliklerinin belirlediği eğrilerden geçen çözümünün bulunması istenebilir.

Bu problemi çözmek için (3.37) eşitliklerinden birini keyfi olarak alalım. Mesela

$$u_1(x, y, z) = 0 \quad , \qquad (3.38)$$

denklemini alalım. Aldığımız bu (3.38) denklemini kullanarak (3.1) Pfaff diferansiyel denkleminden değişkenlerden bir tanesini çıkaralım(yok edelim). Böylece bu yöntemle mesela z değişkenini (3.1) Pfaff denkleminden çıkararak aşağıdaki şekilde diferansiyel denklem elde edilir.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad , \qquad (3.39)$$

Bu (3.39) denklemini integralleyerek (3.38) yüzeyi üzerinde aranan hattı bulunur.

3.9. Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözülebilmesi İçin $(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}) = 0$ Şartının Yeter Şart Olduğunun İspatı

Önceki kısımda

$$(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}) = 0 \ ,$$

şartının Pfaff diferansiyel denkleminin genel olarak çözümünün varlığı için gerek şart olduğunu ispatladık.

Şimdi biz burada $(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}) = 0$ eşitliğinin vektör hatlarına dik olan yüzeyler ailesinin varlığı için yeter şart olduğunu ispatlayalım.

Dikkate alalım ki; aranan $u(x,y,z) = c$ üzerinde

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \ ,$$

denklemi aynen sağlanır. Bu o demektir ki; bu yüzeyler üzerinde eğri hatlı

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz \quad , \qquad (3.40)$$

integrali keyfi alınmış L eğrisi üzere sıfıra eşit olmalıdır. Burada L kapalı eğri olmadığı halde de (3.40) integralinin sıfıra eşit olması gerekir.

Burada $\mathrm{rot}\vec{F}$ vektörünün tüm mümkün olan burulgan vektör yüzeylerini ele alalım.

Stokes formülünden

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r} = \iint_{\mathcal{D}} (\mathrm{rot}\vec{F}, \vec{n})\, d\sigma \quad , \qquad (3.41)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $\mathcal{D}$ bölgesi C kapalı eğrisinin sınırladığı yüzey kısmıdır. $\vec{n}$ vektörü $\mathcal{D}$ yüzeyinin birim normalidir. $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ eşitliği ile tanımlanan vektördür.

Burada (3.40) integrali buruldüğu yüzey üzerinde yerleşen her bir kapalı eğri üzere sıfıra eşit olur. Çünkü yüzeyin pozitif yönde yönlendirilmiş birim $\vec{n}$ normalinin $\text{rot}\vec{F}$ vektörüne çarpımı sıfıra eşittir.

$$\left(\text{rot}\vec{F}, \vec{n}\right) = 0 \ ,$$

şimdi burulgan yüzeyler içerisinden öylesini seçelim ki bu yüzeyler üzerinde kapalı olmayan L eğrileri üzere tüm

$$\int_L \vec{F}d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz \ ,$$

integrali sıfıra eşit olsunlar. Böyle bir yüzeyi inşaa etmek için verilmiş $M(x_o, y_o, z_o)$ noktasından geçen ve $\vec{F}$ vektör alanının vektör hatlarına dik olan her hangi bir hattı seçilir.

Böyle hatlar

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \ , \tag{3.1}$$

Pfaff denkleminin $M(x_o, y_o, z_o)$ noktasından geçen keyfi

$$z = f(x, y) \quad , \tag{3.42}$$

yüzeyinin eklenmesiyle çözümü belirlenir.

Dikkate alalım ki (3.42) denklemi ile yazılan yüzeyi bir çok hallerde $z = f_1(x)$ veya $z = f_2(y)$ bazen de a sayısı sabit sayı olmak üzere $z = a$ şeklinde alırlar.

(3.1) Pfaff diferansiyel denkleminde $z = f(x, y)$ aldığımızda aşağıdaki şekilde diferansiyel denklem alınır.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad , \tag{3.43}$$

bu denklemi

$$y(x_0) = y_0 \;, \tag{3.44}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümünü bularak $M(x_o, y_o, z_o)$ noktasından geçen burulgan ℓ eğrisi $\vec{F}$ alan vektörünün vektör alanına dik olan eğri olur.

Özel halde ℓ eğrisi burulgan eğri olmadığında ℓ eğrisinin her bir noktasından geçen burulgan eğri geçirerek aranan S yüzeyini buluruz ki bu yüzey $\vec{F}$ vektörünün vektör hatlarına dik olan yüzey olur.

Gerçekten de S yüzeyi üzerinde kapalı olmayan keyfi bir L eğrisi alıp bu eğrinin sınır noktalarından burulgan eğrilerini geçirelim ve ℓ eğrisini P_1 ve P_2 noktalarında kesinceye kadar devam ettirelim. Böylece biz ℓ eğrisinin P_1 ve P_2 noktaları arasındaki kısmından ve L eğrisinden ve iki tane burulgan eğriden oluşan kapalı eğri alınır.

Bu kapalı C eğrisi üzere alınmış eğri hatlı

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz \quad , \tag{3.40}$$

integrali sıfıra eşit olur. Bu C eğrisi burulganlı S yüzeyi üzerinde yerleştiğinden bu integral ℓ eğrisinin bir parçası üzerinde alınmış ve burulgan eğrileri üzerede alınmış ki, bu kısımda da sıfıra eşit olur. Çünkü ℓ eğriside ve burulgan eğrileride $\vec{F}$ alanının vektör hatlarına diktir.

Burulgan eğrileri $\vec{F}$ alanının vektör hatlarına $(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}) = 0$ şartından ortogonal olduğu alınır.

Böylece keyfi seçilmiş kapalı olmayan L eğrisi üzere alınmış eğri hatlı

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz \quad ,$$

integrali sıfıra eşit olur. Bu ise o demektir ki S yüzeyi (3.1) Pfaff diferansiyel denkleminin M noktasından geçen integral yüzeyidir.

3.10. Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözümüne Ait Örnekler

Örnek 3.10.1. $zdx + (x - y)dy + zydz = 0$ Pfaff diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem için

$$\vec{F} = z\vec{i} - (x - y)\vec{j} + yz\vec{k} \quad ,$$

ve

$$\mathrm{rot}\vec{F} = z\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} \quad ,$$

olduğundan

$$\left(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}\right) = z^2 + x - y + yz \neq 0 \quad ,$$

olduğundan ele aldığımız Pfaff diferansiyel denklemi integrallenen değildir.

Örnek 3.10.2. $(6x + yz)dx + (xz - zy)dy + (xy + 2z)dz = 0$

denklemini ele alalım. Bu denklem için

$$\vec{F} = (6x + yz)\vec{i} + (xz - zy)\vec{j} + (xy + 2z)\vec{k} = 0 \ ,$$

olduğundan $\mathrm{rot}\vec{F} \equiv 0$ olduğu alınır.

Bu yüzden de $\vec{F}$ vektör alanı potansiyelli vektör alanıdır. Yani öyle $u =$ fonksiyonu vardırki;

$$\vec{F} = \mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \ ,$$

eşitliği sağlanır.

Aranan bu $u(x, y, z)$ fonksiyonu

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(u, y_0, z_0)du + \int_{y_0}^{y} Q(x, v, z_0)dv + \int_{z_0}^{z} R(x, y, w)dw \quad ,$$

formülü ile hesaplanarak;

$$u(x,y,z) = \int_{0}^{x} 6xdx + \int_{0}^{y} (-2y)dy + \int_{0}^{z} 2zdz + \int_{0}^{z} xydz =$$

$$= 3x^2 - y^2 + z^2 + xyz \ ,$$

bulunur. Böylece aranan integral;

$$3x^2 - y^2 + z^2 + xyz = 0 \qquad\qquad (c = const) \ ,$$

olur.

Örnek 3.10.3. $yzdx + xzdy + xyz = 0$ Pfaff diferansiyel denklemini ele alalım.

Bu denklem için

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{xyz} \ ,$$

fonksiyonu integral çarpandır.

Ele aldığımız denklemin her yanını

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{xyz} \ ,$$

fonksiyonuna çarptığımızda ele aldığımız denklem değişkenlerinde ayrılır:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+dz=0 \quad ,$$

olur. Bu denklemi integralleyerek ele aldığımız Pfaff diferansiyel denkleminin integralini

$$xye^z=c \quad ,$$

şeklinde bulunur.

3.11. Pfaff Diferansiyel Denkleminde Değişkenlerin Birinin Sabit Gibi Alınmasıyla Pfaff Diferansiyel Denkleminin Çözümü Metodu

Burada

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \quad , \qquad (3.1)$$

Pfaff diferansiyel denklemini çözmek için mesela z değişkenini (veya başka bir değişkeni) değişmez (sabit) kabul edelim. Bu durumda (3.1) Pfaff diferansiyel denklemi

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy=0 \quad , \qquad (3.45)$$

şeklini alır.

Bu (3.45) denklemine z parametre olarak dahil olur. (3.45) denklemi z parametresine bağlı diferansiyel denklemdir. Bu (3.45) denklemini çözerek bu denklemin çözümünü

$$u(x,y,z)=c(z) \quad , \qquad (3.46)$$

şeklinde buluruz.

Şimdi (3.46) eşitliğindeki $c(z)$ fonksiyonunu öyle seçelim ki (3.45) denkleminin (3.46) genel integrali (3.1) Pfaff denkleminin de çözümü olsun. Bu amaçla (3.46) eşitliğini diferansiyelleyelim. Bu diferansiyelleme işleminin sonucunda aşağıdaki eşitliği bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)\right)dz = 0 \quad , \qquad (3.47)$$

(3.1) Pfaff diferansiyel denkleminin katsayıları ile (3.47) denkleminin katsayıları orantılı olması gerekir.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)}{R} \quad , \qquad (3.48)$$

olur. Yine;

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - C'(z)}{R} \quad , \qquad (3.49)$$

denkleminden $C'(z)$ ifadesini bulunmalıdır.

Burada $(\vec{F}, \mathrm{rot}\vec{F}) = 0$ şartı sağlandığında sonuncu (3.49) denkleminin yalnız z , $C'(z)$ ve $u(x, y, z) = c(z)$ değişkenlerini sağladığı ispatlanır.

3.11.1. Bu Metodun Bir örnekte Uygulanışı

Örnek 3.11.1.1. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0$

Pfaff denklemini çözelim.

Bu denklem için;

$$\vec{F} = (2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \quad ,$$

olduğundan

$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0\vec{\imath} - 4xz\vec{\jmath} + 2x\vec{k} \quad ,$$

olur.

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1 & 1 & 2z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 2z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1 & 2z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1 & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}0 - \vec{\jmath}(0 - 4xz) + \vec{k}(0 + 2x) =$$

$$= 0\vec{\imath} + (-4xz)\vec{\jmath} + 2x\vec{k}$$

$$(\vec{F}, \text{rot}\vec{F}) = -4xz + 4xz = 0 \quad ,$$

Böylece ele aldığımız Pfaff denkleminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart sağlandığından bu Pfaff denklemi çözülebilendir.

Şimdi bu denklemi çözmek için mesela x değişkenini sabit kabul edelim. O zaman

$$dx = 0 \quad ,$$

olur. Bu yüzden ele aldığımız Pfaff denklemi;

$$dy + 2zdz = 0 \quad ,$$

şeklini alır. Bu denklemi çözerek onun genel çözümü

$$y + z^2 = c(x) \; ,$$

şeklinde bulunur.

Bulunan bu çözümü verilmiş Pfaff denkleminde uygun olarak yerine yazarak aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklemi bulunur:

$$(2x^2 + 2xc(x) + 1)dx + dc = 0 \quad ,$$

veya

$$\frac{dc(x)}{dx} = -2xc(x) - 2x^2 - 1 \ ,$$

bu denklemi aşağıdaki şekilde yazalım:

$$C' + 2xc = -(2x^2 + 1) \ \ ,$$

Bu denklem $c(x)$ değişkenine nazaran birinci mertebeli homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemi çözmek için bu denklemin her yanını e^{x^2} integral çarpanına çarpıp aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\left(e^{x^2} c(x)\right)' = -e^{x^2} 2x^2 - e^{x^2} \quad ,$$

Bu eşitliğin her yanını integralleyerek

$$e^{x^2} c(x) = -xe^{x^2} + c_1 \quad ,$$

olur.Buradan da

$$c(x) = c_1 e^{x^2} - x \quad ,$$

çözümü bulunur.

$c(x)$ için önceki bulunan

$$c(x) = y + z^2 \quad ,$$

ifadesini sonuncu eşitlik de yerine yazarak verilmiş Pfaff denkleminin genel çözümü

$$e^{x^2}(x + y + z^2) = c_1 \quad ,$$

şeklinde bulunur. Burada c_1 keyfi sabit sayıdır.

4. SONUÇ

Bu tezde Pfaff diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Pfaff diferansiyel denkleminin ve konuyla ilgili diğer anlamlarım tanımı verilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin integral yüzeylerin çözümünün varlığı hakkında teorem ispatlanmıştır. Pfaff diferansiyel denklemimin integral eğrilerinin bulunması metodu gösterilmiştir. Bunlara ait Ayrıca örnekler verilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin skaler çarpım şeklinde yazılışı gösterilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin potansiyelli vektör alanları halinde bir çözüm formülü gösterilmiştir. Potansiyelli vektör alanları için Pfaff denkleminin çözümünün varlığı için gerek ve yeter şart verilerek ispatlanmıştır.

Pfaff diferansiyel denkleminin çözülebilmesi için integral çarpanının olabileceği gösterilmiştir. Pfaff diferansiyel denkleminin çözümüne ait genel örnekler verilmiştir.

Pfaff diferansiyel denkleminde değişkenlerin birinin sabit alınmasıyla Pfaff denkleminin çözülebilmesinin yöntemi verilmiştir ve bu yöntem örnekte gösterilmiştir.

5. KAYNAKLAR

1. Aliyev G.G., “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler” Millî Eğitim Basım Evi. İSTANBUL, 1995.

2. Ahmedov G., “Adi Diferansiyel Denklemler Kursu”, Maarif, BAKÜ, 1978.

3. Sağel K.M., “Vektör Analiz” Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, ANKARA ,1999.

4. Elsgols L.E., “Calcus Of Variationus” Pergamon Press LTd. NEWYORK, 1961.

5. Stepanov V.V. “Kurs Diferausialnıch Urarnenig” Gosudarstvennoe İzdatelstro. MOSKOVA, 1953.

6. Mustafayev M.I., Ders Notları, YOZGAT, 2014.

6. ÖZGEÇMİŞ

1988 Yılında Sorgun'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimimi Sorgun'da tamamladı. Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Eylül ayında Sorgun'da Anadolu Lisesi ve Fen lisesinde matematik-geometri öğretmeni olarak derslere girmeye başladı. 2011 yılında Sorgun Belediyesinde çalışmaya başladı. 2017 yılında görevde yükselme sınavında başarılı olup Siv. Sav. Uzmanı olarak çalışmaya halen devam ediyor. Evli, 3 çocuk babası. Sorgun'da ikamet ediyor. 2013 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV danışmanlığında uygulamalı matematik alanında "Pfaff diferansiyel denklemler ve Onun çözüm metotları" tez konusuyla eğitimime devam ediyor.

İletişim Bilgileri

Adres 1: Divanlı Yolu 10. km Yozgat Bozok Üniversitesi FEF Matematik Bölümü.

66100 YOZGAT

Adres 2: Bahçelievler Mahallesi Sorgun Belediye Başkanlığı No:1

66700 Sorgun/YOZGAT

Telefon: (354) 415 12 36 dahili 1169

Cep Tel: (552) 415 44 66

E-posta: n.sahbaz66@hotmail.com