T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

DİZİSEL HAUSDORFFLUK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK

Hasan AYHAN

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

DİZİSEL HAUSDORFFLUK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK

Hasan AYHAN

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Yozgat 2019

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111316008 numaralı öğrencisi Hasan AYHAN'ın hazırladığı **"Dizisel Hausdorffluk ve Dizisel Kompaktlık"** başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 21/06/2019 cuma günü saat 13:30'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN

Jüri Üyesi (Danışman) :Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

Jüri Üyesi : Dr.Öğr.Üyesi Funda BABAARSLAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 27/06/19 tarih ve 30 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

....../....../......

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

DİZİSEL HAUSDORFFLUK VE DİZİSEL KOMPAKTLIK

Hasan AYHAN

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 31

Tez Danışmanı:Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

ÖZET

Bu tez çalışmasında öncelikle dizisel açık cümle, dizisel kapalı cümle ve dizisel uzayların tanımı verilmiştir. Daha sonra dizisel açık cümleler yardımıyla tanımlanan dizisel Hausdorff uzaylardan bahsedilmiştir. Dizisel Hausdorff uzayların özellikleri ve örnekleri incelenmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise dizisel açık cümleler yardımıyla tanımlanmış yeni bir dizisel kompaktlık kavramı verilmiştir. Topolojik uzaylarda Hausdorffluk ve kompaktlık arasındaki ilişkiye benzer ilişkilerin dizisel Hausdorffluk ve dizisel kompaktlık için de sağlandığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dizisel açık cümle, Dizisel kapalı cümle, Dizisel kompakt uzaylar, Dizisel Hausdorff uzaylar.

SEQUENTIALLY HAUSDORFFNESS AND SEQUENTIALLY COMPACTNESS

Hasan AYHAN

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 31

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ

ABSTRACT

In this thesis, firstly, the notions of sequentially open set, sequentially closed set and sequentially space are introduced. Also the term of sequentially Hausdorffness defined by means of sequentially open sets is studied. The properties and examples of sequentially Hausdorff spaces are given.

Finally, in the fourth chapter, a new definition of a sequentially compact space is given. Also the similar relationships between Hausdorffness and compactness are given for the notions of sequentially Hausdorffness and sequentially compactness.

Keywords: Sequentially open set, Sequentially closed set, Sequentially compact space, Sequentially Hausdorff space

TEŞEKKÜR

Yükseköğretim hayatım boyunca bilgi ve birikimleriyle bana ışık tutan saygıdeğer tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ ’a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca sayın Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN ve Dr. Öğr. Üyesi Tunçar ŞAHAN hocalarıma ilmi ve manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını gördüğüm kardeşlerim İsmail-Burak AYHAN ‘a, kıymetli arkadaşım Onur DEMİR ‘e ve bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan ebeveynime teşekkür ediyorum.

1. GİRİŞ

Euclid uzayında bir kümenin kapalı ve sınırlı olma kavramı, topolojik uzaylara kompaktlık ile geliştirilebilir. Her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip olan uzaylara kompakt uzaylar denir[1,4,5]. İlk olarak 1904 yılında bir Fransız Matematikçi olan M. Frechet tarafından tanıtılmış olan bu kavram, topolojide pek çok ispatta kullanılan faydalı bir özelliktir. Ayrıca topolojik bir özellik olması da kullanımında katkı sağlamaktadır [1-5].

Her dizisinin yakınsak bir alt dizisi olan bir cümleye dizisel kompakt denir. Metrik uzaylarda kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları denktir. Diziler yardımıyla topolojik uzaylarda birçok kavram yeniden tanımlanmıştır. Açık ve kapalı cümle yerine bu tanımlardan daha geniş olan dizisel açık ve dizisel kapalı cümleler, dizisel tanımların yapılmasında oldukça katkı sağlamıştır [6-10]. Dizisel irtibalılık [11,12], dizisel Hausdorff uzaylar [13,20] gibi pek çok yeni özellik tanıtılmıştır. Ayrık ve dizisel açık iki cümlenin birleşimi olarak yazılamayan cümlelere irtibatlı cümle denir. Her irtibatlı uzay dizisel irtibatlıdır. Benzer olarak, bir uzayda her nokta çifti için, her birinin diğerini içermeyen ve kesişimleri boş olan dizisel açık komşuluklar bulabiliyorsak bu uzaya dizisel Hausdorff uzay denir.

Bu tanımlardan bazıları genelleştirilerek G-yakınsaklık kavramı ile G-dizisel açık küme, G-dizisel kapalı küme, G-dizisel süreklilik, G-dizisel irtibatlılık gibi konular incelenmiştir [14-18]. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan Hausdorff topolojik gruplar içindir. Dizisel anlamda topolojik uzayları ele alan bir başka yakınsaklık teorisi de bir ideal yardımıyla tanımlanan ideal yakınsaklık, kısaca I-yakınsaklıktır. I- açık ve I- kapalı cümleler ile tanımlanan I-dizisel uzaylar ele alınabilir. Bu konuda I-dizisel Hausdorff uzay kavramı da verilmiştir[19].

Bu çalışmada öncelikle dizisel açık ve dizisel kapalı cümleler ile dizisel uzay kavramı tanıtılacaktır. Buradan hareketle tanımlanan dizisel Hausdorff kavramı üzerinde durulacaktır. Hausdorff uzaylarda sağlanan bazı özelliklerin dizisel Hausdorff uzaylarda da sağlandığı gösterilecektir. Örneğin dizisel Hausdorff bir uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir. Bilindiği gibi topolojik uzaylarda Hausdorffluk ve kompaktlık kavramları arasında pek çok kullanışlı teorem ve sonuç vardır. Fakat dizisel Hausdorffluk ile bilinen dizisel kompaktlık bu şekilde ortak işlemlere elverişli değildir. Bu sebeple çalışmanın son kısmında, dizisel açık cümleler yardımıyla yapılan yeni bir dizisel kompakt tanımı verilmiştir. Böylece topolojik uzaylardaki ilişkiler dizisel anlamda yeniden incelenmiş ve bazı önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Hausdorff Uzay

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar ve teoremler Bourbaki [1], Rotman [2], Massey [3], Brown [4] ve Mucuk [5] kaynakları kullanılarak verilmiştir.

2.1.1. Tanım X boştan farklı bir cümle ve (X,τ) topolojik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H açık cümleleri mevcut ise (X,τ) uzayına Hausdorff uzay denir.

2.1.2. Örnek $s(X) > 1$ olan bir X cümlesi için $(X, P(X))$ ayrık uzayı Hausdorff bir uzaydır.

2.1.3. Örnek $X \neq \varnothing$ bir cümle ve $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c$ sonlu $\} \cup \{\varnothing\}$ sınıfını ele alalım. (X,τ) topolojik uzayı Hausdorff uzay değildir.

2.1.4. Örnek R 'nin alışılmış topolojisi U olmak üzere (R,U) Hausdorff uzaydır.

2.1.5. Önerme Bir (X,d) metrik uzayı Hausdorff bir uzaydır.

İspat: $a, b \in X$ için $a \neq b$ ise $d(a,b) = r > 0$ 'dır. $D(a,\frac{r}{4})$ ve $D(b,\frac{r}{4})$ açık diskleri sırası ile a ve b'nin açık komşulukları olup $D(a,\frac{r}{4}) \cap D(b,\frac{r}{4}) = \varnothing$ 'dır. Aksi halde $D(a,\frac{r}{4}) \cap D(b,\frac{r}{4}) \neq \varnothing$ olsaydı en az bir tane $x \in D(a,\frac{r}{4}) \cap D(b,\frac{r}{4})$ bulunurdu.

Burada $d(x,a) < \frac{r}{4}, d(x,b) < \frac{r}{4}$ olduğundan

$$d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x)$$
$$d(a,b) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4}$$
$$d(a,b) < \frac{r}{2}$$

olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Yani (X,d) Hausdorff'tur.

2.1.6. Önerme Hausdorff bir uzayın bir alt uzayı da Hausdorff'tur.

İspat: X uzayı Hausdorff ve $A \subseteq X$ olsun. Farklı $a,b \in A$ noktaları verilsin. X uzayı Hausdorff olduğundan $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde a ve b'nin sırasıyla X'de G ve H açık komşulukları vardır. Buradan $U = G \cap A$ ve $V = H \cap A$ da sırasıyla a ve b'nin A'da açık komşulukları olup $U \cap V = \varnothing$'dır. Yani A Hausdorff bir uzaydır.

2.1.7. Önerme Topolojik uzayların Hausdorff olma özelliği topolojik bir özelliktir.

İspat: $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bir homeomorfizm ve (X,τ) Hausdorff uzayı olmak üzere $y_1, y_2 \in Y$ farklı noktaları verilsin. Bu noktalara karşılık gelen $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ farklı noktaları vardır. (X,τ) uzayı Hausdorff olduğundan $x_1, x_2 \in X$'in sırasıyla G ve H ayrık açık komşulukları vardır. Burada $f(G)$ ve $f(H)$ sırasıyla y_1 ve y_2'nin ayrık açık komşuluklarıdır. O halde (Y,σ) uzayı Hausdorff'tur.

2.1.8. Teorem (X,τ) topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

a) (X,τ) topolojik uzayı Hausdorff'tur.

b) $\Delta X = \{(x,x) \mid x \in X\}$ diyagonal cümlesi $X \times X$ in kapalı bir alt cümlesidir.

c) Diyagonal fonksiyon olarak adlandırılan $\Delta: X \longrightarrow X \times X$, $x \longmapsto (x,x)$ fonksiyonu kapalıdır.

d) Z herhangi bir topolojik uzay olmak üzere sürekli olan her $f,g: Z \to X$ fonksiyon çifti için $A(f,g) = \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ cümlesi Z de kapalıdır.

2.1.9. Teorem $f: X \to Y$ birebir ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer Y Hausdorff bir uzay ise X'de Hausdorff'tur.

2.1.10. Sonuç Hausdorff bir uzayın bir alt uzayı da Hausdorff'tur çünkü X Hausdorff ve $A \subseteq X$ ise $f : A \to X$ içine fonksiyonu birebir ve süreklidir.

2.1.11. Önerme $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A = \{(x, x^{'}) \mid f(x) = f(x^{'})\}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer f sürekli ve Y Hausdorff ise A kapalıdır.

(ii) Eğer f açık ve örten, A kapalı ise Y Hausdorff'tur.

(iii) Eğer f sürekli, açık ve örten(bölüm fonksiyonu) ise Y Hausdorff'tur $\Leftrightarrow$ A kapalıdır.

İspat: (i) $f : X \to Y$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu sürekli ve Y uzayı Hausdorff uzay olsun. $(x, x^{'}) \in A^c$ ise $f(x)$ ve $f(x')$ birbirinden farklı olup Y uzayı Hausdorff olduğundan $f(x)$ ve $f(x^{'})$'in sırasıyla U ve V açık komşulukları vardır. Burada f fonksiyonu sürekli olduğundan $G = f^{-1}(U)$ ve $H = f^{-1}(V)$ sırasıyla x ve $x^{'}$nin birer ayrık komşuluğudur. Buradan $(x, x^{'}) \in G \times H \subseteq A^c$ olup A^c açıktır. Dolayısıyla A kapalıdır.

(ii) f fonksiyonu açık ve örten, A kapalı olsun. Y'nin farklı y ve $y^{'}$ elemanları verilsin. f'nin örtenliğinden $f(x) = y$ ve $f(x^{'}) = y^{'}$ olacak şekildeki $x, x^{'} \in X$ için $(x, x^{'}) \in A^c$ 'dir. A^c 'nin açık olmasından $(x, x^{'}) \in G \cap H \subseteq A^c$ olacak şekilde $G, H \subseteq X$ açık cümleleri vardır. f açık olduğundan $f(G)$ ve $f(H)$ sırasıyla y ve $y^{'}$ nin birer ayrık komşuluğudur.

(iii) ise (i) ve (ii) nin birer sonucudur.

2.1.12. Tanım (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının sayılabilir yerel bir β_x bazı varsa bu uzaya birinci sayılabilir uzay denir.

2.1.13. Örnek Her bir $x \in R$ için $\beta_x = \{(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \mid n \in N\}$ sınıfı $x \in R$ noktasında sayılabilir yerel bir baz olduğundan R, alışılmış topolojiye göre birinci sayılabilirdir.

2.1.14. Önerme Birinci sayılabilir her uzay Hausdorfftur.

2.2. Kompakt Uzay

2.2.1. Tanım (Örtü-Açık Örtü) (X,τ) topolojik uzay ve A, X ‘in alt cümlesi olsun. $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ X’in alt cümlelerinin bir ailesi olmak üzere;

ς ’deki cümlelerin birleşimi A cümlesini içeriyorsa ς sınıfı A’yı örtüyor denir.

ς, A’nın örtüsü ve ς ’deki her bir cümle açık ise ς, A’nın açık örtüsüdür.

ς, A’nın örtüsü olsun. $\varsigma' \subseteq G$ cümlesi de A’nın örtüsü oluyorsa ς ’, ς ’nin alt örtüsüdür

2.2.2. Örnek (X,τ) topolojik uzay olmak üzere τ için baz olan her sınıf X’in bir açık örtüsüdür.

2.2.2. Örnek $\varsigma_1 = \{..., (-1,1), (0,2), (1,3), ..\}$ ve $\varsigma_2 = \{(-\infty,1), (0,\infty)\}$ R ’nin açık örtüsüdür.

ς_1 sonsuz sayıda cümle içerir. ς_2 sonlu sayıda cümle içerir.

2.2.4. Örnek R^2 ’de $m,n \in Z$ olmak üzere (m,n) merkezli ve $\frac{1}{2}$ yarıçaplı açık disklerin sınıfı R^2 ’nin açık bir örtüsü değildir. Çünkü örneğin $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ noktası bu şekilde açık diskler tarafından ihva edilmez.

2.2.5. Örnek Bir (X,d) metrik uzayında tüm $D(a,r)$ açık disklerin sınıfı X’in açık bir örtüsünü oluşturur.

2.2.6. Örnek $\forall n \in N : G_n = (-n, n)$ ve $H_n = (-2n, 2n)$ olmak üzere $\varsigma = \{G_n \mid n \in N\}$ ve $H = \{H_n \mid n \in N\}$ sınıfları R'nin birer açık örtüsüdür. Hatta H, ς 'nin bir alt örtüsüdür.

2.2.7. Örnek Her bir $n \in N$ için $G_n = (0, 1 - \frac{1}{n+1})$ ve $H_n = (0, 1 - \frac{1}{2n+1})$ olmak üzere $\varsigma = \{G_n \mid n \in N\}$ ve $H = \{H_n \mid n \in N\}$ sınıfları $A = (0,1)$ açık aralığının birer açık örtüsüdür ve $H \subseteq \varsigma$'dir.

2.2.8. Örnek Her bir $n \in R$ için $G_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\varsigma = \{G_x \mid x \in R\}$ sınıfı alışılmış topoloji için R'nin bir örtüsüdür.

2.2.9. Örnek Bir X uzayında $\{X\}$ ve $\{X, \varnothing\}$ sınıfları birer açık örtüdür.

2.2.10. Örnek Bir X cümlesinde $\{\{x\} \mid x \in X\}$ sınıfı ayrık topoloji için X'in açık bir örtüsüdür

2.2.11. Tanım ([20]) (X, τ) topolojik uzay ve A, X'in alt cümlesi olsun. Şayet A'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A'ya kompakt cümle denir.

X'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt uzay denir

2.2.12. Örnek (R, U)'da R kompakt değil çünkü $\varsigma = \{..., (-2,2), (0,4), (2,4), ...\}$ sınıfı R'nin bir açık örtüsüdür fakat ς 'nin sonlu bir alt örtüsü R'yi örtmez.

2.2.13. Örnek X sonlu sayıda noktadan oluşan bir cümle ve (X, τ) topolojik uzay olsun. τ sonlu sayıda eleman içerdiğinden (X, τ) uzayı kompakttır.

2.2.14. Tanım ([17]) X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A alt uzay topolojisine göre kompakt ise A'ya X'de kompakttır denir.

2.2.15. Teorem (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

a) A cümlesi X'de kompakttır.

b) A cümlesi τ_A alt topolojisine göre kompakttır.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$: A cümlesi X'de kompakt olsun. $\{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın τ_A açık bir örtüsü olsun. $\forall i \in \mathrm{I} : Hi \in \tau_A$ olduğundan $H_i = A \cap G_i$ olacak şekilde $G_i \in \tau$ mevcuttur. Ayrıca $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} H_i$ olduğundan $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} G_i$ 'dir. O halde $\{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın τ açık örtüsüdür.

A cümlesi X'de kompakt olduğundan bu örtünün $\{G_{i_2}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}\}$ sonlu alt örtüsü mevcuttur. $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap G_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} H_{i_k}$ yani $\{H_{i_2}, H_{i_2}, ..., H_{i_n}\}$ sınıfı $\{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ 'nin sonlu bir alt örtüsüdür. O halde A cümlesi τ_A kompakttır.

$(b) \Rightarrow (a)$: A cümlesinin τ_A kompakt olduğunu varsayalım. $\{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın τ açık bir örtüsü olsun. Bu takdirde $\{H_i = A \cap G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın τ_A açık bir örtüsüdür. A cümlesi τ_A kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $\{H_{i_1}, H_{i_2}, ..., H_{i_n}\}_n$ alt örtüsü vardır. O halde $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} H_{i_k} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$ yani $\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_k}\}$ sınıfı $\{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ örtüsünün sonlu bir alt örtüsüdür. Yani A cümlesi X'de kompakttır.

2.2.16. Örnek R 'nin alışılmış topolojisini göz önüne aldığımızda

$A = (0,1]$ aralığı kompakt değildir. Çünkü $\forall n \in N : G_n = (\frac{1}{n}, 1]$ olmak üzere $\varsigma = \{G_n \mid n \in N\}$ sınıfı A'nın bir açık örtüsüdür, fakat sonlu bir alt örtüsü yoktur.

$A = (0,1)$ aralığı kompakt değildir. Çünkü $\forall n \in N : G_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ olmak üzere $\varsigma = \{G_n \mid n \in N\}$ sınıfı A'nın bir açık örtüsüdür fakat sonlu bir alt örtüsü yoktur. Bu örneğin sonucu olarak herhangi bir (a,b) açık aralığı kompakt değildir. Çünkü bu aralık topolojik olarak $(0,1)$ açık aralığına denktir.

2.2.17. Örnek R 'nin alışılmış topolojisine göre herhangi bir $[a,b]$ kapalı aralığı kompakttır.

2.2.18. Önerme ([20]) Bir X cümlesi üzerindeki $\tau=\{G\subseteq X \mid G^c sonlu\}\cup\{\varnothing\}$ topolojisi göz önüne alınsın. Herhangi bir $A\subseteq X$ cümlesi kompakttır.

İspat: Kabul edelim ki $\varsigma=\{G_i \mid i\in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın bir açık örtüsü olsun. $G_{i_0}\in\varsigma$ için $G_{i_0}{}^c$ sonlu olduğundan $A\cap G_{i_0}{}^c$ sonlu olup $A\cap G_{i_0}{}^c=\{a_1,a_2,..,a_n\}$ 'dir. Ayrıca ς sınıfı A'nın bir örtüsü olduğundan her bir $a_k\in A\cap G_{i_0}{}^c$ için $a_k\in G_{i_k}$ olacak şekilde bir $G_{i_k}\in\tau$ vardır. Buradan $A\cap G_{i_0}{}^c\subseteq G_{i_1}\cup...\cup G_{i_n}$ ve dolayısıyla $A\subseteq G_{i_0}\cup(A\cap G_{i_0}{}^c)\subseteq G_{i_0}\cup G_{i_n}$ olup A kompakttır. Şayet A=X alınırsa X kompakt olur.

2.2.19. Önerme R üzerindeki $\tau=\{G\subseteq X \mid G^c sayılabilir\}\cup\{\varnothing\}$ topolojisine göre kompakt değildir.

İspat: $\forall n\in N: E_n=\{n,n+1,..\}$ ve $G_n=\dfrac{R}{E_n}$ olmak üzere $\varsigma=\{G_n \mid n\in N\}$ sınıfı R 'nin bir açık örtüsüdür. Bu örtünün sonlu bir alt örtüsü olmadığı için R kompakt değildir.

2.2.20. Önerme Bir X topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X uzayı kompakttır.

b) $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i=\varnothing$ olacak şekilde kapalı cümlelerin bir $\{K_i \mid i\in\mathrm{I}\}$ sınıfının $K_{i_1}\cap...\cap K_{i_n}=\varnothing$ olacak şekilde sonlu bir $\{K_{i_1}.....K_{i_n}\}$ alt sınıfı vardır.

c) Sonlu arakesit özelliğine sahip olan kapalı cümlelerin bir $\{K_i \mid i\in\mathrm{I}\}$ sınıfı için $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i=\varnothing$ 'dır.

İspat: $(a)\Rightarrow(b)$ X uzayı kompakt olmak üzere $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i=\varnothing$ olacak şekilde kapalı cümlelerin bir $\{K_i \mid i\in\mathrm{I}\}$ sınıfı verilsin. $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i=\varnothing$ 'den $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} K_i^c=X$ olduğundan $\{K_i^c \mid i\in\mathrm{I}\}$ sınıfı X'in açık örtüsüdür. Fakat X uzayı kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $\{K_i^c,..,K_{i\,n}^c\}$ alt örtüsü vardır. Burada $K_i^c \cup ... \cup K_{i\,n}^c = X$ olduğundan $K_{i_1} \cap ... \cap K_{i_n} = \varnothing$'dir.

(b) $\Rightarrow (a): \varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı X'in açık bir örtüsü olsun. Burada $X = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} G_i$ olduğundan $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} G_i^c = \varnothing$ 'dir. O halde (b)'den $G_i^c \cap ... \cap G_{i\,n}^c = \varnothing$ olacak şekilde bir $\{G_i^c,..,G_{i\,n}^c\}$ alt sınıfı vardır. O halde $\{G_{i_1},..,G_{i_n}\}$ sınıfı ς 'nin bir alt örtüsüdür. Bundan dolayı X kompakttır.

(b) $\Rightarrow (c)$ Sonlu arakesit özelliğine sahip olan kapalı cümlelerin $\{K_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı için $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i \neq \varnothing$ 'dır. Aksi halde $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i = \varnothing$ olsaydı (b)'den $K_{i_1} \cap ... \cap K_{i_n} = \varnothing$ olacak şekilde bir $\{K_{i_1}...,K_{i_n}\}$ alt sınıfı bulunurdu. Bu ise $\{K_i \mid i \in \mathrm{I}\}$sınıfının sonlu arakesit özelliğine sahip olması ile çelişir.

(c) $\Rightarrow (b): \bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i = \varnothing$ olacak şekildeki kapalı cümlelerin bir $\{K_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı verilsin. $K_{i_1} \cap ... \cap K_{i_n} = \varnothing$ olacak şekilde bir $\{K_{i_1}...,K_{i_n}\}$ alt sınıfı vardır. Aksi halde her sonlu arakesit için $\{K_{i_1} \cap K_{i_2} \cap ... \cap K_{i_n}\} \neq \varnothing$ olsaydı (c)'den $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i \neq \varnothing$ olurdu. Halbuki $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} K_i = \varnothing$'dir.

2.2.21. Teorem Kompakt bir uzayın kapalı bir alt cümlesi kompakttır.

İspat: (X,τ) topolojik uzayı kompakt, $A \subseteq X$ alt cümlesi kapalı ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın açık örtüsü olsun. A cümlesi kapalı olduğundan $A = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\} \cup \{A^c\}$ sınıfı X'in açık bir örtüsüdür. X uzayı kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $A = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\} \cup \{A^c\}$ alt örtüsü vardır. Buradan $\varsigma = \{G_{i_1},...,G_{i_n}\}$ sınıfı A'nın açık bir örtüsü ve de A cümlesi kompakttır.

2.2.22. Önerme Bir (X,τ) topolojik uzayında kompakt olan sonlu sayıdaki cümlelerin birleşimi de kompakttır.

İspat: (X,τ) topolojik uzayında $A_1,.....,A_n$ cümleleri kompakt olmak üzere $A_1 \cup ... \cup A_n = A$'nın bir $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ açık örtüsü verilsin. Bu durumda ς sınıfı her

$1 \le i \le n$ için A_i'nin açık örtüsü olup A_i kompakt olduğundan sonlu bir ς_i alt örtüsü vardır. Buradan $\varsigma' = \varsigma_1 \cup ... \cup \varsigma_n$ sınıfı A'nın sonlu bir örtüsü olur. Dolayısıyla A kompakttır.

2.2.23. Örnek R üzerinde $\tau = \{G \subseteq R \mid G^c sonlu\} \cup \{\varnothing\}$ topolojisi verilsin. R'nin her alt cümlesi τ'ya göre kompakttır. G^c sonlu olmak üzere her $G \subseteq R$ kapalı değildir. Çünkü tümleyeni açık değildir. Sonuç olarak τ'ya göre R kompakttır.

2.2.24. Önerme $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve A da X'in alt cümlesi ise $f(A)$ görüntü cümlesi Y'de kompakttır.

İspat: $\{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı $f(A)$'nın açık bir örtüsü olsun. Buradan $\{f^{-1}(H_i) \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın X'de açık bir örüntüsünü oluşturur. Fakat A cümlesi X'de kompakt olduğundan bu açık örüntünün sonlu bir $\{f^{-1}(H_i), ..., f^{-1}(H_{i_n})\}$ alt örtüsü vardır. Buradan $\{H_{i_1}, ..., H_{i_n}\}$ sınıfı f(A)'yı örter ve de $\{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfının sonlu bir alt örtüsünü oluşturur. O halde f(A) cümlesi kompakttır.

2.2.25. Teorem Kompakt bir uzayın kapalı bir alt cümlesi kompakttır.

İspat: (X, τ) topolojik uzayı kompakt, $A \subseteq X$ kapalı ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı A'nın açık bir örtüsü olsun. A cümlesi kapalı olduğundan $A = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\} \cup \{A^c\}$ sınıfı X'in bir açık örtüsüdür. X uzayı kompakt olduğundan bu örtünün sonlu bir $A' = \{G_{i_1}, ..., G_{i_n}\}$ sınıfı A'nın açık bir örtüsüdür. Yani A cümlesi kompakttır.

2.2.26. Sonuç Bir topolojik uzayda kapalı ve kompakt olan cümlelerin keyfi arakesitleri de kompakttır.

İspat: Bir (X, τ) topolojik uzayında kapalı ve kompakt cümlelerin bir sınıfı olan $\{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ verilsin. Bu sınıftan bir A_{i_0} cümlesi seçelim. A_{i_0} kompakt, $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ arakesiti kapalı ve $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i \subseteq A_{i_0}$ olduğundan $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ kompakttır.

2.2.27. Teorem Hausdorff bir topolojik uzayında kapalı ve kompakt cümlelerin bir alt cümlesi de kapalıdır.

İspat: (x,τ) Hausdorff uzay ve $A \subseteq X$ alt cümlesi kompakt olsun. Bir $x \in A^c$ verilsin. X Hausdorff olduğundan $\forall a \in A: G_a \cap H_a = \varnothing$, $a \in G_a$ ve $x \in H_a$ olacak şekilde G_a ve H_a açık cümleleri vardır. $\{G_a \mid a \in A\}$ sınıfı A'nın bir açık örtüsüdür. A kompakt olduğundan bu açık örtünün sonlu bir $\{G_{a_1},...,G_{a_n}\}$ alt örtüsü vardır. O halde $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_1}$ 'dir. $G_x = \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ ve $H_x = \bigcap_{i=1}^{n} H_{a_i}$ olmak üzere $G_x \cap H_x = \varnothing$ dır. Aksi takdirde $\exists i \in \mathrm{I} : G_{a_i} \cap H_{a_i} \neq \varnothing$ olurdu. Bu da bunların ayrık olması ile çelişir. O halde $A \cap H_x = \varnothing$ olup $x \in H_x \subseteq A^c$ 'den A^c cümlesi açık, dolayısıyla A kapalıdır.

Buna denk olarak Hausdorff bir uzayın kapalı olmayan bir alt cümlesi kompakt değildir.

2.2.28. Örnek θ, R 'de kapalı olmadığından kompakt değildir.

2.2.29. Sonuç Kompakt olan Hausdorff bir uzayda bir cümle kompakttır ancak ve ancak kapalıdır.

2.2.30. Sonuç Hausdorff bir topolojik uzayda kompakt cümlelerin keyfi arakesiti de kompakttır.

İspat: (X,τ) topolojik uzayı Hausdorff ve $\{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ 'de kompakt cümlelerin sınıfı olsun. O halde her bir A_i cümlesi kapalı olduğundan $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i = A$ 'da kapalıdır. Dolayısıyla A kapalıdır.

2.2.31. Teorem Kompakt bir uzaydan Hausdorff bir uzaya sürekli bir fonksiyon kapalıdır.

İspat: X kompakt bir uzay ve Y Hausdorff bir uzay olmak üzere $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin kapalı olduğunu göstermek için kapalı bir $K \subseteq X$ alt cümlesi verilsin. K kapalı olduğundan kompakttır. f fonksiyonu sürekli olduğundan f(K) cümlesi Y'de kompakttır. Y Hausdorf olduğundan f(K) kapalıdır. O halde $f : X \to Y$ fonksiyonu kapalıdır.

2.3. Topolojik Uzaylarda Yakınsaklık

2.3.1. Tanım X boştan farklı bir cümle olsun. f: N$\to$X fonksiyonu $\forall n \in N$: f(n)=a_n şeklinde tanımlansın. f fonksiyonuna veya $\{a_n \mid n \in N\}$ alt cümlesine X cümlesi içinde bir dizi denir. (a_n) şeklinde gösterilir.

$f : N \to X$, $f(N) = (a_n)$ şeklinde tanımlı ve g fonksiyonu N cümlesi içinde bir dizi olsun. Yani $f(N) = a_n$ cümlesi X'de $g(k) = (n_k)$ N'de bir dizi olsun.

Eğer g artan bir dizi ise yani

$\forall_i < j : n_i < n_j$ ya da $g(i) < g(j)$ ise $fog : N \to X, (fog)(i) = f(g(i)) = f(n_i) = (a_{n_i})$ şeklinde tanımlı $(fog)(N) = f(g(N)) = f(n_i) = (a_{n_i})$ dizisine (a_{n_i}) dizisinin alt dizisi denir.

2.3.2. Tanım (X, τ) topolojik uzay $a_n = (a_1, a_2, a_3, ...)$ X içinde bir dizi ve $a \in X$ olsun.

Öyle bir $n_0 \in N$ olmalı ki $n > n_0$ olduğunda $a \in X$ in her G açık komşuluğu için $a_n \in G$ olsun. Bu koşulu sağlayan $n_0 \in N$ varsa $a \in X$ noktasına (a_n) dizisinin limit noktası ve (a_n) dizisi $a \in X$ noktasına yakınsıyor denir.

Kısaca; $(a_n) \to a$ veya $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ifadelerinden biri ile gösterilir.

2.3.3. Örnek (X, τ) topolojik uzay ve $\forall n \in N : a_n = a \in X$ olacak şekilde (a_n), X'de bir dizi olsun. $(a_n) = (a, a, a, ..)$ olduğunda a 'nın her açık komşuluğu a 'yı içerir. Dolayısıyla $a_n \to a$ 'dır.

2.3.4. Örnek R 'nin alışılmış topolojisine göre $(a_n) = ((-1) + \frac{1}{n})$ dizisinin limit noktası yoktur, fakat -1 ve +1 bu dizinin yığılma noktasıdır.

2.3.5. Örnek R'nin alışılmış topolojisinde (a_n)=n dizisi hiçbir noktaya yakınsamaz. Çünkü dizinin hiçbir terimi her ε komşuluğu için $n > n_0$ olduğunda $a_n \in (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ koşulunu sağlamaz.

2.3.6. Örnek R'nin alışılmış topolojisinde, $(a_n) = \dfrac{1}{n}$ dizisi 0'a yakınsar. Çünkü 0'ın her her ε komşuluğu için $n > n_0$ olduğunda $a_n \in (0-\varepsilon, 0+\varepsilon)$ koşulunu sağlayan $n_0 \in N$ vardır.

2.3.7. Örnek R'nin alışılmış topolojisinde (a_n)=16 dizisini düşünelim. $(a_n) \to 16$'dır. Çünkü 16'nın her ε komşuluğu için $n > n_0$ olduğundan $(a_n) \in (16-\varepsilon, 16+\varepsilon)$ olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır.

2.3.8. Örnek R içindeki $(a_n) = (-\dfrac{1}{n})$ dizisini ele alalım.

1) R'nin alışılmış topolojisine göre $a \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ biçimindeki açık aralıkların tümü (a_n) dizisinin bazı terimleri dışındaki tüm terimlerini içerir. Yani (a_n) dizisi sıfıra yakınsar.

2) R'nin U^L üst limit topolojisine göre -1 noktasının $[-1, -\dfrac{1}{2})$ komşuluğunu düşünelim. Bu komşuluğun içinde dizinin sadece bir terimi varken sonsuz tane terim dışarda kalır. Bu yüzden (a_n) dizisi -1'e yakınsamaz.

3) R'nin $U^L = \{\cup(a,b] \mid a,b \in R$ ve $a < b\} \cup \{\varnothing\}$ üst limit topolojisine göre sıfır noktasının tüm komşulukları dizinin belirli bir indisten sonraki tüm terimlerini içerir. Dolayısıyla $(a_n) \to 0$ olur.

4) R'nin $\tau = \{G \subseteq R \mid G^0$ sonlu$\} \cup \{\varnothing\}$ tümleyeni sonlu topolojisine göre $\forall a \in R$ için a'nın her açık komşuluğunda dizinin belirli bir indisten sonraki terimleri bulunduğundan (a_n) dizisi her noktaya yakınsar.

2.3.9. Örnek $\forall n \in Z^+ : A_n = \{n, n+1, n+2, ..\}$ şeklinde tanımlı olsun. $A = \{A_n \mid n \in Z^+\}$ olmak üzere terimleri Z^+ da bulunan $(a_n) = (2,4,6,...)$ dizisi A tarafından doğurulan topolojisine göre her noktaya yakınsar. Şimdi bunu gösterelim;

A noktası (a_n) 'in limit noktası olduğundan a 'nın her açık komşuluğu dizinin belirli bir indisten sonraki tüm terimlerini içerir. Bu noktayı içeren en küçük açık cümle;

$A_a = \{a, a+1, a+2, ..\}$

şeklindedir.

Eğer a tek sayı ise a+1 çifttir ve dizinin a+1 noktasını içeren terimden itibaren tüm terimleri B_a içindedir.

Eğer a çift sayı ise dizinin a noktasını içeren terimden itibaren tüm terimleri B_a içindedir. O halde (a_n) dizisi yakınsaktır ve Z^+ üzerindeki her noktaya yakınsar.

2.3.10. Önerme X boştan farklı bir cümle ve X üzerinde diskre topoloji var olsun. Bu uzaydaki herhangi bir (a_n) dizisinin $a \in X$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart, dizinin belli bir indisten sonraki tüm terimlerinin a olmasıdır.

İspat: (a_n) dizisinin $a \in X$ noktasına yakınsadığını kabul edelim. Diskre topolojide $\{a\}$ cümlesi a 'nın bir açık komşuluğudur. Dolayısıyla dizinin belli bir indisten sonraki tüm terimleri a 'dır.

Öte yandan (a_n) dizisi $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a)$ şeklinde ise (a_n) dizisinin $a \in X$ noktasına yakınsadığı açıktır.

2.3.11. Önerme X sonsuz bir cümle olmak üzere X üzerinde $\tau = \{A \subseteq X \mid A^c sayılabilir\} \cup \{\emptyset\}$ tümleyeni sayılabilir topolojisi olsun. X de bir (a_n) dizisi verilsin. $(a_n) \to a$ olması için gerek ve yeter şart (a_n) dizisinin $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n_0}, a, a, ...)$ şeklinde olmasıdır.

2.3.12. Önerme Hausdorff bir uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: Bir (X,τ) Hausdorff uzayında bir (a_n) dizisinin a ve b gibi iki farklı değere yakınsadığını kabul edelim. (X,τ) Hausdorff ve $a \neq b$ olduğundan $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde a ve b'nin sırasıyla G ve H açık komşulukları vardır. Diğer yandan $(a_n) \to a$ olduğundan $n > n_1$ için $(a_n) \in G$ olacak şekilde $n_1 \in N$ ve $(a_n) \to b$ olduğunda $n > n_2$ için $(a_n) \in H$ olacak şekilde $n_2 \in N$ vardır. O halde $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olmak üzere $n > n_0$ için $(a_n) \in G \cap H$ 'dır. Bu ise $G \cap H = \emptyset$ olmasıyla çelişir. Yani $a = b$ 'dir.

3. DİZİSEL HAUSDORFF UZAYLAR

3.1. Dizisel Açık ve Dizisel Kapalı Cümleler

3.1.1. Tanım ([6,7]) X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. Eğer A daki bir noktaya yakınsayan her dizinin belirli bir indisten sonraki terimleri A da ise A'ya dizisel açık cümle denir.

3.1.2. Önerme Her açık cümle dizisel açıktır.

İspat: A açık bir cümle ve (a_n) dizisi A daki bir a elemanına yakınsayan bir dizi olsun. $(a_n) \to a$ olduğundan a nın her açık komşuluğu (a_n) 'in belli bir indisten sonraki tüm terimlerini içerir ve A açık cümle olduğundan a elemanının bir açık komşuluğudur. Dolayısıyla (a_n) 'in belli bir indisten sonraki tüm terimleri A cümlesindedir. Yani A cümlesi dizisel açıktır.

3.1.3. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde tanımlı $\tau = P(x)$ topolojisine göre her alt cümle açık olduğundan dizisel açıktır.

3.1.4. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde tanımlı $\tau = \{\varnothing, X\}$ topolojisine göre X'in kendisinden ve boştan farklı olan hiçbir alt cümlesi dizisel açık değildir.

3.1.5. Örnek $\tau = \{G \subseteq \mathrm{X} \mid G^c sayılabilir\} \cup \{\varnothing\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojidir ve X'in her alt cümlesi dizisel açıktır. Çünkü (a_n) X'de bir dizi $(a_n) \to a, a \in A$ olduğunu kabul edersek τ 'ya göre bir dizinin yakınsak olması için dizinin tüm terimleri ya da belirli bir indisten sonraki tüm terimleri a olmalıdır. Yani belirli bir indisten sonraki terimler A'da kalacaktır. Dolayısıyla τ 'ya göre her alt cümle dizisel açıktır.

3.1.6. Sonuç ([4]) Her dizisel açık cümle, açık değildir.

3.1.7. Örnek Sonsuz elemanlı X cümlesini ve üzerinde tanımlı $\tau = \{G \subseteq \mathrm{X} \mid G^c sonlu\} \cup \{\varnothing\}$ topolojisini düşünelim. Bir $A \subseteq X$ için A^c sonlu elemanlı olsun. A sonsuz elemanlı bir cümle ve (a_n) X'de bir dizi olmak üzere (a_n) dizisinin $a \in A$'ya yakınsadığını kabul edelim. O halde dizinin belli bir indisten sonraki tüm terimleri A'da kalır. Yani A dizisel açıktır. Öte yandan, A^c sonsuz elemanlı bir cümle olsun. A sonlu elemanlı ya da sonsuz elemanlı bir cümle olabilir. Bu takdirde terimleri farklı ve A^c'de bulunan bir (a_n) dizisi a noktasına yakınsadığı halde dizinin belirli bir indisten sonraki tüm terimleri A'da bulunmaz.

3.1.8. Sonuç Dizisel açık cümlelerin keyfi birleşimleri de dizisel açıktır.

İspat: $X \neq \varnothing$ ve $i \in \mathrm{I}$ olmak üzere A_i'ler de X'in dizisel açık alt cümleleri olsun. (a_n) X'de bir dizi ve $(a_n) \to a$ olmak üzere $a \in A_{i_0}$ olacak şekilde $i_0 \in \mathrm{I}$ vardır. A_{i_0} dizisel açık olduğundan dizinin belli bir indisten sonraki tüm terimlerini içerir. $a \in A_{i_0}$ ve $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i$ olduğundan $a \in \bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i$ dir. Ayrıca $\bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i$ dizisinin belli bir indisten sonraki tüm terimlerini içerir. Yani $\bigcup_{i\in \mathrm{I}} A_i$ dizisel açıktır.

3.1.9. Önerme Bir (X,τ) topolojik uzayında, $\sigma = \{G \subseteq X \mid G \text{ dizisel açık}\}$ sınıfı da bir topolojidir ve bu topoloji τ'den daha incedir.

İspat: τ, X üzerinde bir topoloji olduğunda τ'nun her elemanı X'de açıktır. σ ,X üzerinde bir topoloji olduğundan σ'nın her elemanı X'de açıktır. Yani $\tau \subseteq \sigma$ olur. Dolayısıyla σ, τ'den daha incedir.

3.1.10. Tanım ([6,7]) X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve X de bir a noktası olsun. Şayet bir A cümlesinde bir (a_n) dizisi $a \in X$'e yakınsarken $a \in A$ oluyorsa A cümlesi dizisel kapalıdır.

3.1.11. Önerme Eğer bir cümle kapalı ise dizisel kapalıdır.

İspat: A cümlesi kapalı ve (a_n) A'da $a \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Eğer $a \in A^c$ olursa A^c a'nın bir açık komşuluğu olacağından dizinin belirli indisten sonraki tüm terimlerini içerir. Bu durum (a_n)'in A'da bir dizi olmasıyla çelişir. Yani $a \in A$'dır. Dolayısıyla A dizisel kapalıdır.

3.1.12. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde tanımlanan $\tau = P(X)$ topolojisine göre her alt cümle kapalı olacağından dizisel kapalıdır.

3.1.13. Örnek Boş olmayan bi X cümlesi üzerinde tanımlanan $\tau = \{\emptyset, X\}$ topolojisine göre X'in boştan ve kendisinden farklı olan hiçbir alt cümlesi dizisel kapalı değildir.

3.1.14. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisini düşünelim. X'in bir alt cümlesi olan A sonlu ise kapalıdır. Kapalı olan her cümle dizisel kapalı olduğundan A dizisel kapalıdır. Eğer A sonsuz ise τ da terimleri farklı olan bir dizi her noktaya yakınsar. Bu durumda dizinin yakınsadığı nokta A'nın elemanı olmayabilir. Yani A sonsuz ise dizisel kapalı değildir.

3.1.15. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde $\tau = \{G \subseteq X \mid G^c$ sayılabilir $\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisine göre $A \subseteq X$ dizisel kapalıdır.

(a_n) A'da bir dizi olsun ve $a \in X$ noktasına yakınsasın. τ 'ya göre $(a_n) \to a$ ancak ve ancak (a_n) 'in belirli bir indisten sonraki tüm terimleri a 'dır. O halde $a \in A$ 'dır. Yani τ 'ya göre her alt cümle dizisel kapalıdır.

3.1.16. Sonuç ([4]) Dizisel kapalı cümlelerin keyfi kesişimi dizisel kapalıdır.

İspat: X bir topolojik uzay ve $\{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ X'in dizisel kapalı alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. (a_n) terimleri $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} A_i$ cümlesinden alınan bir dizi olmak üzere $(a_n) \to a$ ve $a \in X$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in N$ için $a_n \in \bigcap_{i\in \mathrm{I}} A_i$ olduğundan her $i \in \mathrm{I}$ için $a_n \in A_i$ 'dir. O zaman $(a_n) \to a$ ve $a \in X$ olduğunda $a \in A_i$ 'dir. Her $i \in \mathrm{I}$ için $a \in A_i$ olduğundan $a \in \bigcap_{i\in \mathrm{I}} A_i$ 'dir. Dolayısıyla $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} A_i$ dizisel kapalıdır.

3.1.17. Önerme X topolojik uzayında $A \subseteq X$ cümlesi dizisel açıktır ancak ve ancak A^c dizisel kapalıdır.

İspat: A dizisel açık olsun. A^c de bir (a_n) dizisi $a \in X$ noktasına yakınsasın. $a \in A$ olduğunu kabul edersek A dizisel açık olduğundan dizinin belirli bir indisten sonraki tüm terimlerinin A'da olması gerekir. Bu da (a_n) 'in A^c 'de bir dizi olmasıyla çelişir. Yani $a \in A^c$ 'dir. O halde A^c dizisel kapalıdır.

Öte yandan, A^c dizisel kapalı olsun. X içindeki bir (a_n) dizisi A'nın bir elemanına yakınsasın. Bu terimlerin A^c'de olduğunu kabul edersek A^c'deki yeni (a_{n_k}) dizisi de a ya yakınsar. A^c dizisel kapalı olduğundan $a \in A^c$ 'dir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır, A dizisel açıktır.

3.2. Dizisel Uzay

3.2.1. Tanım ([6,7]) X ve Y topolojik uzaylar, $f: X \to Y$ şeklinde tanımlı f fonksiyon , $a \in X$ ve (a_n) X'de bir dizi olsun.

Eğer $(a_n) \to a$ iken $(f(a_n)) \to f(a)$ ise f dizisel süreklidir.

3.2.2. Önerme Sürekli olan her fonksiyon, dizisel süreklidir.

İspat: $f: X \to Y$ fonksiyon ve $(a_n) \to a$ olsun. $f(a)$'nın bir G açık komşuluğunu düşünelim. f süreklidir yani $f^{-1}(G)$'de a'nın bir açık komşuluğudur. $(a_n) \to a$ olduğundan $n > n_0$ için $a_n \in f^{-1}(G)$ olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır. Yani $f(a_n) \in G$ ve $(f(a_n)) \to f(a)$'dır.

3.2.3. Tanım $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve *A*, *X*'in dizisel açık bir alt cümlesi olsun. Eğer $f(A)$ dizisel açık ise f bir dizisel açık fonksiyondur denir. Benzer şekilde, A X'in dizisel kapalı bir alt cümlesi için $f(A)$ dizisel kapalı ise f bir dizisel kapalı fonksiyondur denir.

3.2.4. Tanım Bir topolojik uzayda her dizisel açık cümle, açık ya da her dizisel kapalı cümle, kapalı ise bu uzaya dizisel uzay denir.

3.2.5. Önerme X uzayında her açık cümle dizisel açık ise aşağıdaki ifadeler doğrudur

a) X uzayı diziseldir.

b) $A \subseteq X$ olmak üzere A açıktır ancak ve ancak A dizisel açıktır.

c) $A \subseteq X$ olmak üzere A kapalıdır ancak ve ancak A dizsel kapalıdır.

3.2.6. Lemma X bir dizisel uzay, Y de keyfi bir topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ sürekli fonksiyon ve (x_n) terimleri X'de bulunan bir dizi olmak üzere $(x_n) \to x$ ise $(f(x_n)) \to f(x)$

İspat: f 'in sürekli olduğunu varsayalım. (x_n) terimleri X'de bulunan bir dizi olsun ve $x \in X$ noktasına yakınsasın. $N, f(x)$ 'in bir komşuluğu ise $f^{-1}(N)$ de x'in bir komşuluğudur. Buradan $i > i_0$ olduğundan $x_i \in f^{-1}(N)$ olacak şekilde $i_0 \in N$ vardır. Dolayısıyla her $i > i_0$ için $f(x_i) \in N$ 'dir yani $f(x_i) \to f(x)$

Şimdi de $f(x_i) \to f(x)$ ve $(x_i) \to X$ olduğunda f 'in sürekli olduğunu gösterelim. U, Y'in açık bir alt cümlesi olsun $x \in f^{-1}(U)$ ve $(x_i) \to x$ olduğunu varsayalım. $f(x_i) \to f(x)$ olduğunda $f(x) \in U$ 'dur. U açık bir cümle olduğu için $i > i_0$ olduğunda $f(x_i) \in U$ olacak şekilde $i_0 \in N$ vardır. Bundan dolayı $i > i_0$ için $x_i \in f^{-1}(U)$. Yani $f^{-1}(U)$ dizisel açıktır. X bir dizisel açık olduğundan f fonksiyonu süreklidir.

3.3. Dizisel Hausdorff Uzay

3.3.1. Tanım ([13]) X bir topolojik uzay ve $a, b \in X$ noktaları ayrık iki nokta olsun. X'in $a \in G$, $b \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H'nin dizisel açık alt cümleleri varsa X'e Hausdorff uzay ya da dizisel Hausdorfftur denir.

3.3.2. Örnek X boştan farklı bir cümle olsun. $\tau = P(X)$ X üzerinde bir topolojidir. Topolojik uzaylarda her açık cümle dizisel açık olduğundan τ topolojisi dizisel Hausdorff'tur.

3.3.3. Örnek Boş olmayan bir X cümlesi üzerinde τ tümleyeni sayılabilir topoloji olsun. Öyle ise her alt cümle açık olacağından $a, b \in X$ birbirinden farklı noktalar olmak üzere, $G = \{a\}$ ve $H = \{b\}$ cümleleri vardır. Dolayısıyla $G \cap H = \varnothing$ olup (X, τ) dizisel Hausdorff'tur.

3.3.4. Örnek Birinci sayılabilir her uzay dizisel Hausdorff'tur.

3.3.5. Önerme ([13]) Her Hausdorff uzay, dizisel Hausdorff'tur.

İspat: (X,τ) topolojik uzay ve $a,b \in X$ 'in farklı iki noktası olsun. X Hausdorff olduğundan $a \in G, b \in H$ ve $G \cap H = \varnothing$ olacak şekilde G ve H'nin açık cümleleri vardır. Her açık cümle dizisel açık olduğundan (X,τ) Hausdorff'tur.

3.3.6. Örnek R üzerindeki $\tau = \{G \subseteq R \mid G^c$ sayılabilir$\} \cup \{\varnothing\}$ topolojisini düşünelim. $\{a\}$ ve $\{b\}$ cümleleri sırasıyla a ve b'yi içeren ayrık cümlelerdir. Ayrıca (R,τ) 'da her alt cümle dizisel açık olduğundan $\{a\}$ ve $\{b\}$ cümleleri de dizisel açıktır. Dolayısıyla (R,τ) dizisel Hausdorff'tur. Ancak (R,τ) Hausdorff değildir. Yani her dizisel Hausdorff uzay, Hausdorff değildir.

3.3.7. Önerme ([13]) Dizisel Hausdorff bir uzayda bir dizi yakınsak ise limiti tektir.

İspat: Kabul edelim ki (X,τ) dizisel Hausdorff bir uzay ve (a_n) de X'de bir dizi olsun. (a_n) dizisi a ve b gibi iki faklı noktaya yakınsasın. $G \cap H = \varnothing, a \in G$ ve $b \in H$ olacak şekilde G ve H dizisel açık cümleleri vardır.

G'deki $(a_n) \to a$ için $n \geq n_1$ olduğunda $a_n \in G$ koşulunu sağlayan $n_1 \in N$ vardır.

H'deki $(a_n) \to b$ için $n \geq n_2$ olduğunda $a_n \in H$ koşulunu sağlayan $n_2 \in N$ vardır.

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ seçilir ise $a_n \in G \cap H$ olacak şekilde $n \geq n_0$ bulunur. Ancak $G \cap H = \varnothing$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani X'de dizinin limiti tektir.

3.3.8. Önerme (X,τ) dizisel uzay olmak üzere (X,τ) dizisel Hausdorff'tur $\Leftrightarrow$ Hausdorff'tur.

3.3.9. Önerme (X,τ) topolojik uzay olmak üzere X'in her dizisel kapalı alt cümlesi kapalı ise (X,τ) dizisel Hausdorff'tur

3.3.10. Önerme (R,τ) topolojik uzayı dizisel Hausdorff olmasına rağmen R 'nin kapalı olmayan dizisel kapalı alt cümlesi vardır.

3.3.11. Önerme (X,τ) bir dizisel Hausdorff uzay olsun. X'in bir A alt cümlesi üzerindeki τ_A alt topolojisi de dizisel Hausdorff'tur.

İspat: $a,b \in A$ olduğunu kabul edersek $a,b, \in X$ olur. X dizisel Hausdorff olduğundan $a \in G, b \in H$ olacak şekilde G ve H ayrık açık cümleleri vardır. G ve H dizisel açık cümlelerdir. $G \cap A \in \tau_A$ olacak şekilde alt topolojiye göre kesişimleri boş olan $G \cap A$ ve $H \cap A$ cümleleri mevcuttur.

$(G \cap A) \cap (H \cap A) = (G \cap H) \cap A = \varnothing$ olduğundan τ_A dizisel Hausdorff'tur.

3.3.12. Önerme ([13]) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bire bir, örten, sürekli ve dizisel açık fonksiyon olsun. Eğer (X,τ) dizisel Hausdorff ise (Y,σ) de dizisel Hausdorff'tur.

İspat: (X,τ) dizisel Hausdorff olsun. Y cümlesinden birbirinden farklı y_1 ve y_2 noktalarını alalım. f birebir ve örten olduğundan $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_2) = y_2$ olacak şekilde birbirinden farklı x_1 ve x_2 noktaları X'te mevcuttur. Ayrıca $x_1 \in G_1$ ve $x_2 \in G_2$ olacak şekilde kesişimleri boş olan G_1 ve G_2 dizisel açık cümleleri vardır. $(x_n) \to x_1$ ve $(x_n') \to x_2$ dizilerinin belirli bir indisten sonraki terimleri sırasıyla G_1 ve G_2 'dedir. f sürekli bir fonksiyon olduğundan dizisel süreklidir. O halde $f(x_n) \to f(x_1)$ ve $f(x_n') \to f(x_2)$ olur. Dolayısıyla $f(G_1)$ ve $f(G_2)$ dizisel açık cümlelerinin kesişiminin boş olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ

Bu bölümde dizisel açık örtü yardımıyla oluşturulan dizisel kompakt uzayların tanımını verilmiştir.

4.1. Dizisel Kompakt Uzay

4.1.1. Tanım ([13]) X bir topolojik uzay ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ X'in dizisel açık cümlelerinin bir ailesi olmak üzere $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} G_i$ oluyorsa G, X'in dizisel açık örtüsü olarak adlandırılır.

4.1.2. Tanım X bir topolojik uzay olmak üzere, X'in dizisel açık örtülerinin her birinin sonlu bir alt örtüsü varsa X'e dizisel kompakt uzay denir.

4.1.3. Önerme([13]) Her dizisel kompakt uzay kompakttır.

İspat:X dizisel kompakt uzay ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ X'in açık örtülerinin bir sınıfı olsun. $\forall G_i \in G$ açık cümleleri dizisel açıktır. Bu yüzden ς sınıfı X'in dizisel açık örtüsüdür. X dizisel kompakt olduğundan G'nin bir alt örtüsü vardır. Yani X kompakttır.

4.1.4. Örnek (X, d) metrik uzay olsun. O zaman X dizisel kompakt değildir. Çünkü dizisel açık cümlelerin sınıfı $D(a,1)$ her $a \in X$ için X'in dizisel açık örtüsü vardır fakat bunların her birinin sonlu alt örtüsü yoktur.

4.1.5. Örnek Her sonlu cümle dizisel kompakttır.

4.1.6. Örnek $X \neq \varnothing$ bir cümle $\tau = P(X)$ X üzerinde diskre topoloji ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A sonlu ise A dizisel kompakttır. Diğer taraftan A sonsuz ise A dizisel kompakt değildir.

4.1.7. Örnek R üzerinde alışılmış topolojiye göre R dizisel kompakt değildir. Çünkü doğal sayılarda $\varsigma = \{G_n \mid n \in N\}$ dizisel açık cümlelerin sınıfından alınan $G_n = (-n, n)$ R'nin dizisel örtüsüdür ancak alt örtüsü yoktur.

4.1.8. Önerme ([13]) Bir topolojik uzayda dizisel kompakt cümlelerin birleşimi de dizisel kompakttır.

İspat: (X,τ) bir topolojik uzay ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ X'in dizisel açık örtüsü olsun. $A_1, A_2, A_3,.., A_n$ dizisel kompakt cümlelerinin birleşimi $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .. \cup A_n$ olsun. O zaman ς, X'in dizisel açık örtüsü olduğundan $1 \le i \le n$ olmak üzere her A_i için sonlu bir ς_i örtüsü vardır. O halde $\varsigma' = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n$ olmak üzere $A \subseteq \varsigma'$ dir. Yani A dizisel kompakt.

4.1.9. Önerme X,Y topolojik uzay, $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon ve A, X'in dizisel kompakt bir alt cümlesi olsun. A'nın Y'deki görüntüsü f(A) da dizisel kompakttır.

İspat: $\{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$, $f(A)$ 'nın dizisel açık örtüsü olsun. f fonksiyonu sürekli ve A dizisel kompakt olduğundan $i \in \mathrm{I}$ için $f^{-1}(H_i)$ dizisel açıktır. $\{f^{-1}(H_i) \mid i \in \mathrm{I}\}$ A'nın bir açık örtüsüdür. A, X'in dizisel kompakt bir alt cümlesi olduğundan A'nın bir alt örtüsü $\{f^{-1}(H_{i_1}), f^{-1}(H_{i_2})..., f^{-1}(H_{i_n})\}$ 'dir. Böylece $\{H_{i_1}, H_{i_2},.., H_{i_n}\} \subseteq \{H_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ cümlesi f(A)'nın sonlu alt örtüsüdür. Yani f(A) dizisel kompakttır.

4.1.10. Teorem Dizisel kompakt uzayın kapalı alt cümleleri dizisel kompakttır.

İspat: (X,τ) dizisel kompakt uzayı, A X'in kapalı alt cümlesi ve $\varsigma = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ A'nın dizisel açık örtüsü olsun. A kapalı bir cümle olduğundan dizisel kapalıdır ve $A = \{G_i \mid i \in \mathrm{I}\} \cup \{A^c\}$ sınıfı X'in dizisel açık örtüsüdür. Yani $\varsigma' = \{G_{i_1}, G_{i_2},.., G_{i_n}\}$ A'nın dizisel açık örtüsüdür ve A dizisel kompakttır.

4.1.11. Sonuç Bir topolojik uzayda hem kapalı hem de dizisel kompakt olan cümlelerin keyfi kesişimleri dizisel kompakttır.

İspat: X bir topolojik uzay ve $\{A_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ cümlesi dizisel kompakt ve dizisel kapalı olsun. Buradan seçilen herhangi bir A_{i_0} kapalı dizisel kompakt olduğundan $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ kapalı ve $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i \subseteq A_{i_0}$ olduğundan $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ dizisel kompakttır.

4.1.12. Teorem Dizisel Hausdorff uzayının dizisel kompakt alt cümlesi kapalıdır.

İspat: (X,τ) dizisel Hausdorff uzay ve A, X'in kompakt bir alt cümlesi olsun. A^c 'nin açık olduğunu göstermemiz gerekiyor. Kabul edelim ki $x \in A^c$ olan (X,τ) dizisel Hausdorff uzay olduğundan $a \in G_a$ ve $x \in H_a$ o.ş $G_a \cap H_a = \varnothing$ olan dizisel açık cümleleri vardır. $\{G_a \mid a \in A\}$ sınıfı A'nın dizisel açık örtüsüdür. A dizisel kompakt olduğundan $\{G_a \mid a \in A\}$'nın $\{G_{a_1}, G_{a_2}, .., G_{a_n}\}$ şeklinde bir alt örtüsü vardır. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ şeklinde gösterilir. $G_x \cap H_x = \varnothing$ o.ş $G_x = \bigcup_{i=1}^{n} G_{a_i}$ ve $H_x = \bigcap_{i=1}^{n} H_{a_i}$ cümleleri vardır. $A \cap H_x = \varnothing$ olduğundan $x \in H_x \subseteq A^c$ dir. Yani A kapalıdır.

4.1.13. Örnek R 'nın alışılmış topolojisi olan U'yu düşünelim. (R,U) dizisel Hausdorff uzaydır fakat R kapalı olmadığından dizisel kompakt değildir.

4.1.14. Sonuç Dizisel kompakt ve dizisel Hausdorff olan bir uzayın kapalı alt cümleleri dizisel kompakttır.

İspat: Dizisel kompakt uzayın kapalı alt cümleleri dizisel kompakttır. Öte yandan dizisel Hausdorff uzayın kompakt alt cümlesi kapalıdır.

4.1.15. Sonuç Dizisel bir Hausdorff uzayının dizisel kompakt alt cümlelerinin keyfi kesişimleri dizisel kompakttır.

İspat: Kabul edelim ki X dizisel Hausdorff ve $A = \{A_i \subseteq X \mid i \in \mathrm{I}\}$ sınıfı dizisel kompakt olsun. $\forall i \in \mathrm{I}$ için A_i kapalıdır. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ cümlesi de kapalı olur. $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i$ cümlesi X'in kapalı bir alt cümlesi olduğundan kompakttır.

4.1.16. Teorem Dizisel kompakt uzaydan dizisel Hausdorff bir uzaya tanımlı olan bir fonksiyon kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki X dizisel kompakt uzayı, Y dizisel Hausdorff uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. K, X'in kapalı bir alt cümlesi olmak üzere, K kompakttır. f sürekli bir fonksiyon olduğundan $f(K) \subseteq Y$ cümlesi dizisel kompakttır.

Y dizisel Hausdorff ve $f(K) \subseteq Y$ dizisel kompakt olduğundan $f(K)$ kapalıdır. Yani f kapalı bir fonksiyondur.

5. SONUÇ

Toplanabilme teorisi ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutan yakınsaklık kavramı ve yakınsaklık metodlarının, topolojik uzaylara genişletilmesi de oldukça kullanışlı olmuştur. Dizilerdeki yakınsaklık yardımıyla tenımlanan dizisel açık ve dizisel kapalı kavramları, topolojik uzaylarda bir çok tanımın yeniden yapılmasına imkan vermiştir. Dizisel irtibatlılık, dizisel süreklilik, dizisel kompaktlık kavramları bu yolla yeniden ele alınmıştır. Fakat Topolojide önemli bir yer tutan ayırma aksiyomlarının dizisel anlamda incelenmediği tespit edilmiştir. Bu sebeple, bu tezde dizisel Hausdorff uzaylar ve bu uzayların özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca dizisel Hausdorffluk kavramı, daha önce yapılmış dizisel kompaktlık kavramıyla uyum sağlayamamıştır. Bu sebeple tezin son bölümünde dizisel açık cümleler yardımıyla yeni bir dizisel kompaktlık tanımı ve bunun dizisel Hausdorffluk ile ilgili olan ilişkisi incelenmiştir. Dizisel Hausdorffluk kavramının tanımlanması, diğer ayırma aksiyomlarının da dizisel anlamda incelenebileceğini akla getirmektedir. Böylece topolojik uzaylara benzer ve farklı ilişkilerin bu anlamda incelenmesi yeni ve faydalı bir çalışma konusudur.

KAYNAKLAR

1. Bourbaki, N.; Elements of Mathematics: General Topology, Addison-Wesley, 1966.

2. Rotman, J. J., An Introduction to Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York Inc., 460 pages, 1988.

3. Massey W., S., Algebraic Topology: An Introduction, Springer-Verlag New York Inc., 553 pages, 1990.

4. Brown, R., Topology and groupoids, Booksurge PLC, 2006.

5. Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yaynlar, Ankara, 2011.

6. Franklin, S. P., "Spaces in Which Sequences Suffice", Fund. Math. **57** 1965, 107-115.

7. Franklin, S. P., "Spaces in Which Sequences Suffice II", Fund. Math. **61** 1967, 51-56.

8. Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313, MR 87b:40001.

9. Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence, Pacific Journal of Mathematics, 160, 1, 43-51.

10. Iwinski, T.B., 1972. Some remarks on Toeplitz methods and continuity, Comment.Math. Prace Mat. 17, 37-43.

11. Fedeli, A. and Le Donne, A., 2002. On good connected preimages, Topology and Its Applications, 125, 489-496.

12. Császár, Á., 2003. γ-connected sets, ActaMathematica Hungarica., 101, 1-2, 273-278.

13. Akiz, H.F. and Koçak, L., Sequantially Hausdorff and Full Sequentially Hausdorff Spaces, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, Volume 68, Number 2, Pages 1724.1732, 2019.

14. Çakallı, H., Sequential de_nitions of compactness, Applied Mathematics Letters., 21, 6, 594-598, 2008.

15. Çakallı, H., On G -continuity, Computers and Mathematics with Applications, 61, 2, 313-318, 2011.

16. Çakallı, H., Sequential defnitions of connectedness, Applied Mathematics Letters., 25, 461-465, 2012.

17. Çakallı H. and Mucuk O., On Connectedness Via A Sequential Method, REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA, vol.54, pp.101-109, 2013.

18. Mucuk O., Sahan T., "On G-Sequential Continuity", FILOMAT, vol.28, pp.1181-1189, 2014.

19. Akız, H. F., I-Dizisel Hausdorff Uzaylar, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 2019.

20. Koçak, L., Topolojik Uzayların Dizisel Anlamda İncelenmesi, Yozgat Bozok Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Bursa ‘da dünyaya gelen Hasan AYHAN, orta ve lise öğrenimini sırasıyla İnönü İlköğretim Okulu ve Hasan Ali Yücel Lisesinde tamamlamıştır.

2010 yılında başladığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2016 yılında bitirmiştir.

2016 yılında yüksek lisan eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başlamıştır. Dr. Hürmet Fulya AKIZ ‘ın danışmanlığında hazırladığı “Dizisel Hausdorffluk ve Dizisel Kompaktlık” başlıklı bu teziyle yüksek lisan öğrenimini 2019 yılında tamamlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Adres: Hamitler Mahallesi, Hamidiye Caddesi, Vural sokak, No:8, Kat:2

16175 Osmangazi/Bursa

Telefon: (555) 184 3132

E-posta: hasanayhann@outlook.com