

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

**YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ (G'/G)
YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ**

Mehmet ÖKDEM

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ (G'/G)
YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet ÖKDEM

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2019



YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111313012 numaralı öğrencisi Mehmet ÖKDEM'in hazırladığı “Yeni Versiyon Genelleştirilmiş (G'/G) Yönteminin İncelenmesi ” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 01/07/2019 Pazartesi günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .11.../07.../19. tarih ve .32... sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

.11.../07.../2019

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar.....	3
1.1.1. Diferansiyel Denklemler.....	3
1.1.2. Solitonlar.....	5
2. YENİ TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	8
2.1. Yeni Versiyon Genelleştirilmiş (G'/G) Yöntemi.....	8
3. YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ (G'/G)-AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI	11
3.1. Kompleks Katsayılı Higgs Denklem Sistemi ve Uygulaması.....	11
3.2. İki Katlı Dağılım Denklemi ve Uygulaması	27
SONUÇ	38
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	45

YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ (G'/G) YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ

Mehmet ÖKDEM

Yozgat Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 54

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerinin elde edilebilmesine olanak sağlayan yeni versiyon genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi ifade edilmiştir. Bu yöntem, literatürde var olan genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi tekrardan ele alınıp geliştirilerek oluşturulmuştur. Önerilen bu yöntem; kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi ve iki katlı dağılım denklemlerine uygulanmış ve bu denklemlere ait yeni tam çözümler elde edilmiştir. Bulunan bu yeni tam çözümlerin literatürde olmayan yeni ve farklı çözümler olduğunu ifade edebiliriz. Ayrıca, elde edilen bu tam çözümlerin fiziksel davranışları iki ve üç boyutlu grafikler çizilerek gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yeni versiyon genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, Kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi, İki katlı dağılım denklemi

INVESTIGATION OF THE NEW VERSION GENERALIZED (G'/G) METHOD

Mehmet ÖKDEM

Yozgat Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2019; Page: 54

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this thesis, the new version generalized (G'/G) -expansion method which allows to obtain new exact solutions of the nonlinear partial differential equations is expressed. This method was formed by developing the generalized (G'/G) -expansion method which is exist in the literature. When the proposed method is applied to the Higgs equation system with complex coefficients and the double dispersive equations, new exact solutions for these equations have been obtained. We can state that these new exact solutions which are not in the literature are new and different. Furthermore, the behaviors of these exact solutions are shown by drawing two and three dimensional graphs.

Keywords: New version generalized (G'/G) -expansion method, Nonlinear partial differential equations, the Higgs equation system with complex coefficients, the double dispersive equation

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmamın bütün aőamalarında bana desteklerini esirgemeyen, sabırla ve özveriyle bana sürekli yardımcı olan, bilgi deneyim ve tecrübelerinden yararlandığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR' a, teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans yaptığım süreçte maddi ve manevi desteklerini daima hissettiğim annem, babam ve bu çalıőmamda beni motive eden kardeőim Kübra ÖKDEM'e çok teşekkür ederim.



ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1:	Örnek bir dalga modeli	6
Şekil 3.1:	(3.14) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{2,1}$ ve $v_{2,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	15
Şekil 3.2:	(3.15) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{2,2}$ ve $v_{2,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	15
Şekil 3.3:	(3.17) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{3,1}$ ve $v_{3,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = \mu = 1, r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterim.....	16
Şekil 3.4:	(3.32) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{10,1}$ ve $v_{10,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1$, $r = \sqrt{2}, \mu = 2i$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi	19
Şekil 3.5:	(3.33) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{10,2}$ ve $v_{10,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}, \mu = 2i$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	20
Şekil 3.6:	(3.50) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{18,1}$ ve $v_{18,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	23
Şekil 3.7:	(3.51) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{18,2}$ ve $v_{18,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	24
Şekil 3.8:	(3.53) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{19,1}$ ve $v_{19,1}$ fonksiyonlarının	

	sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	25
Şekil 3.9:	(3.54) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{19,2}$ ve $v_{19,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	26
Şekil 3.10:	(3.77) çözüm fonksiyonunun sırasıyla $\alpha = \delta = 1, \lambda = d = \omega = 2,$ $\rho = 5, \mu = -4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	32
Şekil 3.11:	(3.95) çözüm fonksiyonunun sırasıyla $\alpha = \delta = 1, \lambda = d = \omega = 2,$ $\rho = 1, \mu = -4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.....	36

1. GİRİŞ

İçinde bulunduğumuz dünya ve dünya ile birlikte tüm evren bir düzen içinde birbirine bağlı olaylarla sürekli etkileşim içindedirler. Bu düzen birbirine bağlı olan doğa yasalarıyla sağlanmaktadır. Bu yasalar matematiksel kavramlarla anlamlandırılabilirse evrendeki bu kompleks düzenin anlaşılması daha da kolay olur. Evrendeki bu yasalara göre meydana gelen olayların sonucunda gerçekleşen fiziksel problemler, bu problemlerin çözümü üzerine önerilen yöntemler ve bu yöntemlerin uygulaması ile çıkan çözümler matematiksel bir dil ile ifade edilerek anlamlı hale gelir. İşte burada söz edilen problemler ve doğa yasaları birer diferansiyel denklem ile ifade edilebilir. Genellikle uygulamalı bilimlerde ve ekonomi gibi bilimsel alanlarda oluşan bu problemler diferansiyel denklemler ile karşılık bulur. Fiziksel niceliklerle ve bu niceliklerin zamana göre değişimleri türevi, bu türevler de diferansiyel denklemleri oluşturur. En temel hali ile bir fonksiyonun türevleri arasında veya kendisi ile türevleri arasındaki bağlantıyı içeren denklemlere diferansiyel denklem adı verilir.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması doğa yasalarını anlamamız açısından çokça önemlidir. Özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri üzerine yapılan araştırmalar daha da önemli hale gelip bilim insanlarının ilgisini bu yöne çekmiştir. Bilim insanları tarafından bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü veren çok sayıda yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler bazen benzer bazen de farklı çözümlerin elde edilmesine olanak sağlar. Burada elde edilen çözümler fiziksel olayları anlamada büyük kolaylık sağlar. Birçok fiziksel olay lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinden elde edilen dalga kavramı ile aydınlatılabilir. Tek bir dalga çeşidi olan soliton lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleminin çözümlerinden elde edilir. Böylece denklemlerin hareketli dalga (soliton) modellerini çözümlerde bulmak amacıyla fazla sayıda analitik yöntem önerilmiş ve bu yöntemler birçok bilim insanı tarafından geliştirilerek literatüre kazandırılmıştır.

Son zamanlarda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin araştırma alanı çok aktif hale gelmiştir. Matematiksel ve fiziksel bilimlerin birçok alanında

ortaya çıkan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı türleri bulunmaktadır. Lineer olmayan fiziksel olayların araştırılmasındaki önemli rolüyle bu tarz denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için çok çaba harcanmıştır. Bu lineer olmayan fiziksel olaylar, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği, optik fiberler, katı hal fiziği, biyoloji, kimyasal kinematik, kimyasal fizik ve jeokimya gibi çeşitli bilimsel ve mühendislik alanlarında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmak için bir dizi güçlü ve etkili yöntem, çok çeşitli bilim insanlarının ilgisini çekmiştir.

Bu tam çözüm yöntemlerine örnek olarak; Hirota'nın bilinear dönüşüm yöntemi [1, 2], tanh fonksiyon yöntemi [3, 4], (G'/G) -açılım yöntemi [5, 6], üstel fonksiyon yöntemi [7, 8], çoklu üstel fonksiyon yöntemi [9, 10], modifiye edilmiş basit denklem yöntemi [11, 12], deneme denklem yöntemi [13-16], geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi [17,18], genişletilmiş deneme denklem yöntemi [19-21], çoklu genişletilmiş deneme denklem yöntemi [22], Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi [23, 24], Weierstrass eliptik fonksiyon açılım yöntemi [25], Bäcklund dönüşüm yöntemi [26], ilk integral yöntemi [27], F -açılım yöntemi [28-32], modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi [33, 34] ve genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi [35-38] verilebilir.

İlk kez Wang tarafından önerilen (G'/G) -açılım yöntemi [5] lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmaya olanak sağlayan direkt bir yöntemdir. Önerilen yöntemin ana fikri, $G = G(\xi)$ fonksiyonu ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyon olmak üzere, lineer olmayan evrim denklemlerinin hareketli dalga çözümlerinin (G'/G) şeklinde bir polinom tarzında ifade edilecek olmasıdır. Daha sonra önerilen bu yöntem birçok araştırmacı tarafından ele alınmış ve daha da geliştirilerek, geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi [39, 40], genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi [41-43], genişletilmiş (G'/G) -açılım yöntemi [44, 45] literatüre kazandırılmıştır.

Bu tez çalışmasında, önerilen yöntemlerden hareketle (G'/G) -açılım yöntemine farklı açılardan bakarak yeni bir yöntem sunulmuştur. Bu önerdiğimiz yöntemi yeni versiyon geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi olarak adlandırdık. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerinin bulunması için bu yöntem geliştirilmiştir. Yöntem sırasıyla kompleks katsayılı Higgs denklem sistemine ve iki katlı dağılım denkleminde uygulanmıştır. Önerilen bu yönteme göre matematiksel algoritmaların oluşturulması ve oluşturulan algoritmalarla denklemlerin çözülmesi neticesinde literatürde yer almayan yeni tam çözümler elde edilmiştir. Denklemlerin uygun algoritmaya göre çözülmesi, iki ve üç boyutlu grafiklerinin çizilmesi için Mathematica 10 paket programı kullanılmıştır.

Tezin giriş bölümünde çalışmada kullandığımız temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümünde ise yeni versiyon geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi genel hatlarıyla ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde yeni versiyon geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi kompleks katsayılı Higgs denklem sistemine ve iki katlı dağılım denkleminde uygulanmıştır. Son bölümde ise önerilen yönteme göre elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle karşılaştırılarak değerlendirilmesi yapılmıştır.

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde diferansiyel denklemler kavramı ve solitonlar ile ilgili temel kavram ve özellikler ifade edilmiştir.

1.1.1. Diferansiyel Denklemler

Doğa olaylarını açıklayan birçok yasa, olayların gerçekleştiği oranları veren ilişkilerdir. Diferansiyel kavramı sürekli değişen bir miktar ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu nedenle doğada gerçekleşen pek çok fiziksel olayın neticesinde ilişkiler matematiksel ifadelerle modellenerek bir diferansiyel denklemi ortaya çıkarır. Çeşitli mühendislik bilimleri, doğa bilimleri (fizik, kimya vb.) ve ekonomi bilimlerinde karşılaşılan problemlerin çözümlenebilmesi için; oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümüne ihtiyaç duyulur. Oluşturulan bu

diferansiyel denklemlerin çözümlerinden elde edilen çözüm fonksiyonları fiziksel olayları anlamamıza yardımcı olur. Bu nedenle diferansiyel denklemler tüm bilimsel araştırmalarda oldukça önemlidir.

Tanım 1.1: Bağımsız değişkeni x , bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken) $y = y(x)$ olarak alındığında bir adi diferansiyel denklem

$$Y(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir. Kısaca bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon bir bağımsız değişkene bağlı ise diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem, birden fazla bağımsız değişkene bağlı ise kısmi türevli diferansiyel denklem adı verilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklem ise bağımsız değişkenler x, y, t, \dots ve bilinmeyen fonksiyon $u = u(x, y, t, \dots)$ olarak alındığında

$$P(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2: Bir diferansiyel denklemin mertebesi denkleminde bulunan en yüksek türevin mertebesine, diferansiyel denklemin derecesi ise o en yüksek mertebeli türevin derecesine denir.

Diferansiyel denklemler için farklı sınıflandırmalar söz konusudur. Örneğin diferansiyel denkleminde bulunan en yüksek mertebeli türeve veya derecesine göre sınıflandırılabilir. Ayrıca diferansiyel denklemler lineerlik durumuna göre de sınıflandırılabilir. Yani türevler ve bağımlı değişkenin derecesi bir ise denkleme lineer diferansiyel denklem, derece birden fazla ise denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem adı verilir. Diferansiyel denkleminde yer alan katsayılar göre sabit katsayılı, değişken katsayılı ve kompleks katsayılı diferansiyel denklemler olarak da sınıflandırma yapılabilir.

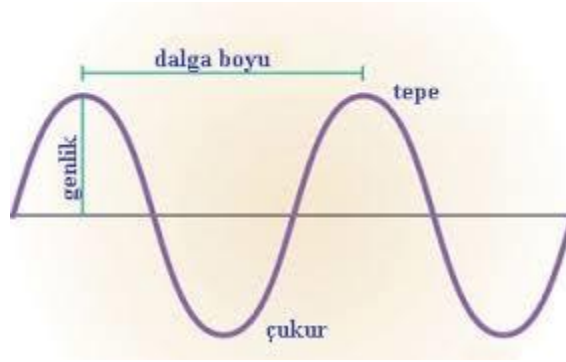
Kısmi türevli diferansiyel denklemlerde ise farklı sınıflandırmalar vardır. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevli terimler lineer ise denklem yarı lineer olarak adlandırılır. Bu tür denklemlerde eğer en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise denkleme hemen hemen lineer denir.

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde yer alan bağımsız değişkenlerin sayısı ve mertebesi denklemin çözümünde önemli rol oynar. Bu nedenle kısmi türevli diferansiyel denklemin pek çok çözümü olabileceği gibi bazen sadece tek bir çözümü bazen de hiç çözümü olmayabilir. Ayrıca bazı özel çözümler haricinde tüm çözümleri kapsayan genel çözümü bulmak da mümkün olmayabilir.

Genel çözümden hareketle keyfi fonksiyonların özel seçilmesiyle elde edilen çözümlere özel çözüm denir. Uygulamalarda daha çok kısmi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç veya sınır koşulları eklenerek özel çözümler elde edilir.

1.1.2. Solitonlar

Uygulamalı bilimlerin birçoğunda olayların izahında karşımıza dalga terimi çıkmaktadır. Aslında dalga, belli bir ortamda yayılan enerjinin taşınmasına olanak sağlayan titreşimlerdir. Sudaki yüzey dalgaları, belli ortamda ilerleyen ses dalgaları, ışık şeklinde ilerleyen parçacıklar ve deprem esnasında oluşan sarsıntılar birer dalga örnekleridir. Dalganın salınımının şiddeti genliğini, salınımın sıklığı (f) frekansını ve iki tepesi veya çukuru arasındaki uzaklık ise (λ) dalga boyunu ifade etmektedir. Dalganın hareketi maruz kaldığı titreşimlere göre periyodik veya periyodik olmayan şeklinde sınıflandırılır. Bir kemandaki nota sesi periyodik dalgalara, bir patlama sonucu meydana gelen ses de periyodik olmayan dalgalara örnek olarak verilebilir. Ayrıca duran ve hareketli dalgalar olmak üzere iki çeşidi bulunmaktadır. Duran dalgalar sabit bir pozisyonda olup ortamın hareketine ters hareket yapan dalga çeşididir. Hareketli dalgalar ise belli iki nokta arasında enerjinin taşınmasıyla hareket eden dalga çeşididir.



Şekil 1.1. Örnek bir dalga modeli

Tek dalga hareketi 1834'te İskoç mühendis John Scott Russell tarafından gözlemlenmiştir. Bu dalga hareketinin periyodik bir dalga olmadığını ve şeklini değiştirmeyip tümsek şeklinde hareket ederek yayılan bir dalga olduğunu ifade etmiştir. Bu keşiften sonra, bu doğa olayının modellenmesi için teorik bir yapı oluşturulmaya başlanmış ve 1895'de Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından Russell'in gözlemlendiği sığ su akıntılarındaki dalgalar için soliton teorisinin başlangıcı olan Korteweg de Vries (KdV) denklemi oluşturulmuştur. Bu denklemin standart biçimi

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.3)$$

şeklinindedir. KdV denklemi derinliği az olan sularda oluşan dalgaların sürekli bir biçimde yayılışını açıklayan bir model olarak ifade edilmiştir.

η , x konumunda t zamanında dalganın yerden uzaklığını göstermek üzere (1.3) denkleminin çözümünün

$$u(x, t) = \ell \operatorname{sech}^2(\eta(x - vt)), \quad v = 2\ell = 4\eta^2 \quad (1.4)$$

şeklinde olduğu ifade belirtilmiştir. Buradan oluşan dalganın lineer olmayan bir yapıya sahip olduğu ifade edilmiştir.

Solitonlar, sahip oldukları şekli, hızı ve enerjilerini koruyarak yayılan lineer olmayan dalgalardır [46]. Ayrıca herhangi bir etkileşim anından sonra ve karşılıklı çarpıştıklarında da özelliklerini koruyan dalgalardır. Solitonlar fiziksel olayların

modellenmesiyle oluşan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin açıklanmasına katkı sunarlar. Bu da solitonların lineer olmayan sistemlerin açıklamasında önemli bir role sahip olmasını sağlamıştır. Soliton teorisi uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin önemli bir dalıdır. Parçacık fiziğinde, akışkanlar mekaniğinde ve biyolojik sistemlerde karşılaşılan solitonlar teknolojinin gelişmesiyle birçok alanda uygulama alanına sahip olmuştur. Ayrıca son yıllarda özellikle sağlık bilimlerinde örneklendirilecek olursa, sinir sisteminde nöronların gönderdiği sinyallerde solitonlar gözlemlenmektedir.



2. YENİ TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, literatürde var olan geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemleri incelenmiş ve önerilen yöntemlerden birinin yeni bir versiyonu verilmiştir. Geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemleri ile ilgili birçok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapılmış ve bu yöntemler geliştirilerek lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı çözümleri elde edilmiştir [41-43].

2.1. Yeni Versiyon Geliştirilmiş (G'/G) Yöntemi

Bu bölümde, literatürde var olan geliştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin yeni bir versiyonunun ana hatları verilmiştir. x ve t bağımsız değişkenleri ifade etmek üzere bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleminin en genel hali

$$\Psi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde olsun. Hareketli dalga dönüşümü

$$\xi = kx - \lambda t \quad (2.2)$$

olmak üzere $u(x, t) = u(\xi)$ bağıntısını ele alalım. (2.1) denkleminde bu tanımlanan hareketli dalga dönüşümünü uygulayıp ve denkleminde yer alan kısmi türevler alınıp denkleminde yerine yazıldığında

$$\Psi(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2.3) denkleminde yer alan türevler ξ 'ye bağlıdır. Yeni versiyon geliştirilmiş (G'/G) yöntemine göre (2.3) denkleminin çözüm fonksiyonu $u(\xi)$, M pozitif bir tamsayı ve $\sigma = \pm 1$ olmak üzere

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{i=1}^M \left(a_i \left(\frac{G'}{G} \right)^i + b_i \left(\frac{G'}{G} \right)^{i-1} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)} + c_i \left(\frac{G'}{G} \right)^{-i} + d_i \frac{\left(\frac{G'}{G} \right)^{-i+1}}{\sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)}} \right) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlansın. Çözüm fonksiyonunda yer alan a_0, a_i, b_i, c_i, d_i ($i=1, 2, \dots, M$) katsayıları uygun yöntemlerle daha sonra belirlenecektir. Ayrıca μ daha sonra belirlenecek bir sabit olmak üzere $G = G(\xi)$ fonksiyonu

$$G'' + \mu G = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin bir çözüm fonksiyonudur. (2.5) denkleminde yer alan μ parametresi çözüm tiplerinin belirlenmesinde önemli bir role sahiptir. μ parametresinin sıfırdan küçük, eşit veya büyük olma durumuna göre çözüm tipleri farklılık göstermektedir. Buna göre;

(i) Eğer $\mu < 0$ ise, $G(\xi)$ çözüm fonksiyonu (2.5) denkleminde elde edilen, A_1 ve A_2 herhangi iki keyfi sabit sayı ve $A_1 \neq A_2$ olmak üzere

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \sqrt{-\mu} \frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \quad (2.6)$$

Şeklinde rasyonel hiperbolik fonksiyon bulunur.

(ii) Eğer $\mu > 0$ ise, $G(\xi)$ çözüm fonksiyonu (2.5) denkleminin elde edilen, A_1 ve A_2 herhangi iki keyfi sabit sayı olmak üzere

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \sqrt{\mu} \frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)} \quad (2.7)$$

şeklinde rasyonel trigonometrik fonksiyon yazılabilir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise, $G(\xi)$ çözüm fonksiyonu (2.5) denkleminin elde edilen, A_1 ve A_2 herhangi iki keyfi sabit sayı olmak üzere aşağıdaki gibi rasyonel fonksiyon yazılabilir.

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A_1}{A_1\xi + A_2} \quad (2.8)$$

(2.4) denkleminde bulunan M sayısı, (2.3) ifadesinde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile lineer olmayan en yüksek dereceden terim arasında kurulan denge (balans) prosedürü ile belirlenir. (2.5) denkleminde elde edilen $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ ifadeleri sırasıyla (2.4) çözüm fonksiyonunda ve (2.3) denkleminde yerine

yazıldığında, sonra da $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerin aynı dereceden

katsayıları birleştirildiğinde (2.3) denkleminin sağ yanı $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve

$\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerinin bir polinomuna dönüşür. Bu polinomun bütün

katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Elde edilen cebirsel denklem sistemi ilgili yöntemler kullanılarak Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde, bulunması gereken a_0, a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3, \dots, M$) ve λ, k, μ katsayıları hesaplanır. Elde edilen bu katsayılar (2.4) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak $u(\xi)$ şeklinde μ parametresinin durumuna göre yeni hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümleri elde edilir. Daha sonra ters dönüşüm uygulanarak (2.1) denkleminin tam çözümleri bulunur.

3. YENİ VERSİYON GENELLEŞTİRİLMİŞ (G'/G) AÇILIM YÖNTEMİNİN UYGULAMALARI

Bu bölümde kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi ile iki katlı dağılım denklemi genel hatlarıyla ele alınmış ve önerdiğimiz yeni versiyon genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yönteminin bu denklemlere uygulamaları yapılmıştır.

3.1. Kompleks Katsayılı Higgs Denklem Sistemi ve Uygulaması

Lineer olmayan kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi α ve β herhangi iki sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - \alpha u + \beta |u|^2 u - 2uv &= 0 \\ v_{tt} + v_{xx} - \beta (|u|^2)_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Burada v ve u sırasıyla karmaşık skaler nükleon alanı ve skaler meson alanını temsil eder. (3.1) ile verilen sistem, Higgs mekanizması olarak adlandırılıp fizik alanında büyük bir ilgi gören lineer olmayan bir modeli temsil etmektedir. Kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi; gösterge bozonları için kütle oluşum mekanizmasını ifade eden kuantum alanını tanıtan bir denklem sistemidir. Ayrıca $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ olduğunda (3.1) de ifade edilen denklem sistemi lineer olmayan Klein–Gordon denklem sistemi olarak adlandırılır [47-54].

(3.1) denklem sistemine yeni versiyon genelleştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemini uygulamak için öncelikle hareketli dalga dönüşümünü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{i\theta} u(\xi), \quad v(x, t) = v(\xi), \\ \xi &= x + \delta t, \quad \theta = px + rt \end{aligned} \quad (3.2)$$

ele alalım. (3.1) denklem sistemindeki terimlerin (3.2) ifadesinde belirtilen dönüşümlere göre türevleri alındığında bir adi diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}
(\delta^2 - 1)u'' + (p^2 - r^2 - \alpha)u + \beta u^3 - 2uv &= 0 \\
(\delta^2 + 1)v'' - 2\beta(u')^2 - 2\beta uu'' &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde elde edilir. (3.3) denklem sistemindeki ikinci denklemin ξ ye göre iki kez integrali alınıp, integrasyon sabiti sıfır seçildiğinde

$$v(\xi) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u^2(\xi) \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) ifadesinde yer alan $v(\xi)$ değeri (3.3) denklem sisteminin birinci denkleminde yerine yazıldığında

$$(\delta^4 - 1)u'' + (\delta^2 + 1)(p^2 - r^2 - \alpha)u - \beta u^3 = 0 \tag{3.5}$$

şeklinde 2. mertebeden bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. 2. bölümde (2.4) ifadesi ile önerilen çözüm fonksiyonunu (3.5) denkleminde uygulamadan önce balans prosedürü (3.5) te yer alan en yüksek mertebeden türev içeren u'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan u^3 terimleri arasında kurulur. Bu balans işlemi aşağıdaki gibi hesaplanır. $G'' + \mu G = 0$ olmak üzere, (2.4) çözüm fonksiyonu kısaca

$$u(\xi) = a_M \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^M + \dots \tag{3.6}$$

olarak alınır. Buna göre balans işlemini sağlayan terimler

$$u^3(\xi) = a_M^3 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{3M} + \dots \tag{3.7}$$

$$u''(\xi) \cong M(M+1)a_M \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{M+2} + \dots \tag{3.8}$$

şeklinde hesaplandığında elde edilen $u'' \approx u^3$ terimlerinin denkleğinden balans terimi $M = 1$ olarak bulunur. Böylece elde edilen bu balans terimi (2.4) denkleminde yerine yazıldığında (3.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + b_1 \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 \right)} + c_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{-1} + \frac{d_1}{\sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^2 \right)}} \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir. (3.9) ifadesinden yararlanarak (3.5) denkleminde bulunan u'' teriminin karşılığı

$$u''(\xi) = a_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right) + 2 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 \right) + b_1 \frac{\frac{2\sigma^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^6 + \left(\frac{3\sigma^2 \gamma + 2\sigma^2 \mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 4\sigma^2 \mu \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \sigma^2 \mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{3/2}} + c_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^{-1} + 2\mu^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{-3} \right) + d_1 \frac{\left(\frac{2\sigma^2 \mu - 3\sigma^2 \gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + \left(\frac{2\sigma^2 \mu^2 - 4\sigma^2 \gamma \mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \sigma^2 \mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{5/2}} \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan bu değerler (3.5) denkleminde yazıldığında $\left(\frac{G'}{G} \right)^k$

ve $\left(\frac{G'}{G} \right)^k \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)}$ ifadelerin aynı dereceden katsayıları birleştirilirse (3.5)

denkleminin sağ yanı $\left(\frac{G'}{G} \right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G} \right)^k \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)}$ ifadelerinin bir polinom

ifadesine dönüşür. Elde edilen bu polinomun bütün katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Elde edilen cebirsel denklem sistemi ilgili yöntem kullanılarak Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde, tespit edilmesi gereken $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, p, r, \delta$ katsayıları ile ξ dönüşümü altında aşağıda belirtilen durumlar elde edilmiştir. Belirlenen katsayılar (3.5) çözüm fonksiyonunda

yerine yazılarak $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ 'ye bağlı çözümler bulunur. μ parametresinin durumlarına

göre (3.1) denklem sisteminin aşağıda belirtilen durumlardaki çözümleri ifade edilmiştir.

1. Durum:

$$a_0 = c_1 = d_1 = 0, \quad a_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} b_1, \quad b_1 = b_1, \quad \alpha = p^2 + \frac{1}{2}(\gamma(\delta^2 - 1) - 2r^2), \quad \mu = \gamma \quad (3.11)$$

elde edilen katsayıları için (3.9) çözüm fonksiyonu

$$u_1(\xi) = a_1 \left(\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right) + b_1 \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right)^2 \right)}, \quad v_1(\xi) = v_1(\xi), \quad (3.12)$$

olarak bulunur. Farklı μ parametre değerlerine göre (3.1) denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü

$$u_2(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[i\sqrt{\mu} \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \right) + \sqrt{\left(\gamma - \mu \right) \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \right)^2} \right]$$

$$v_2(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_2^2(x, t) \quad (3.13)$$

olarak bulunur. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.13) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

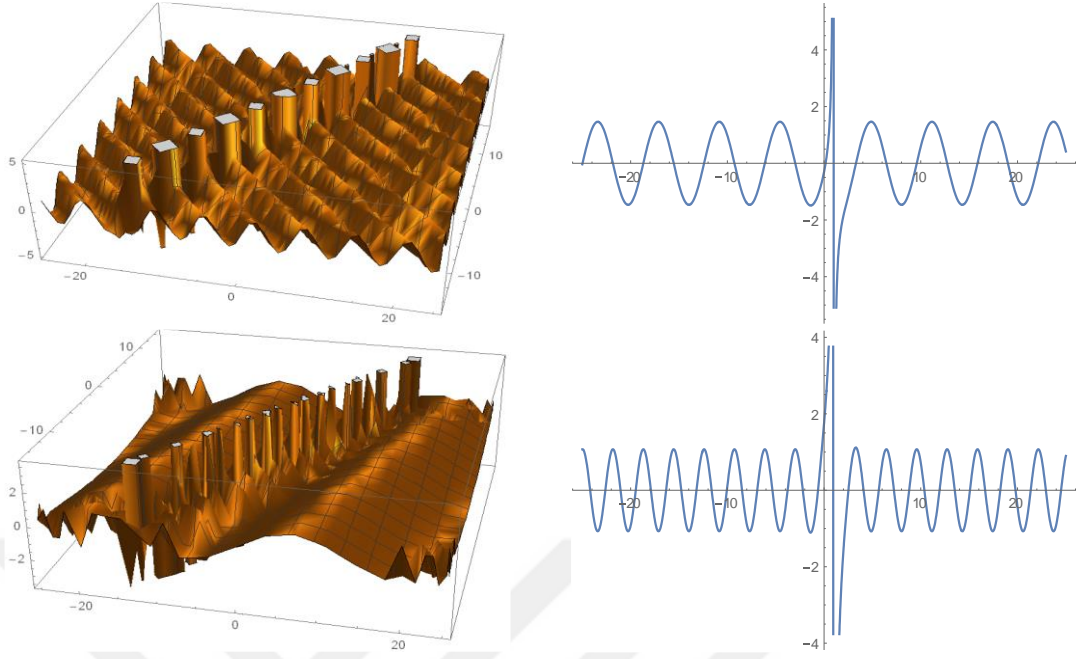
$$u_{2,1}(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[\left(i\sqrt{\mu} + \sqrt{\gamma - \mu} \right) \coth(\sqrt{-\mu}\xi) \right] \quad (3.14)$$

$$v_{2,1}(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{2,1}^2(x, t)$$

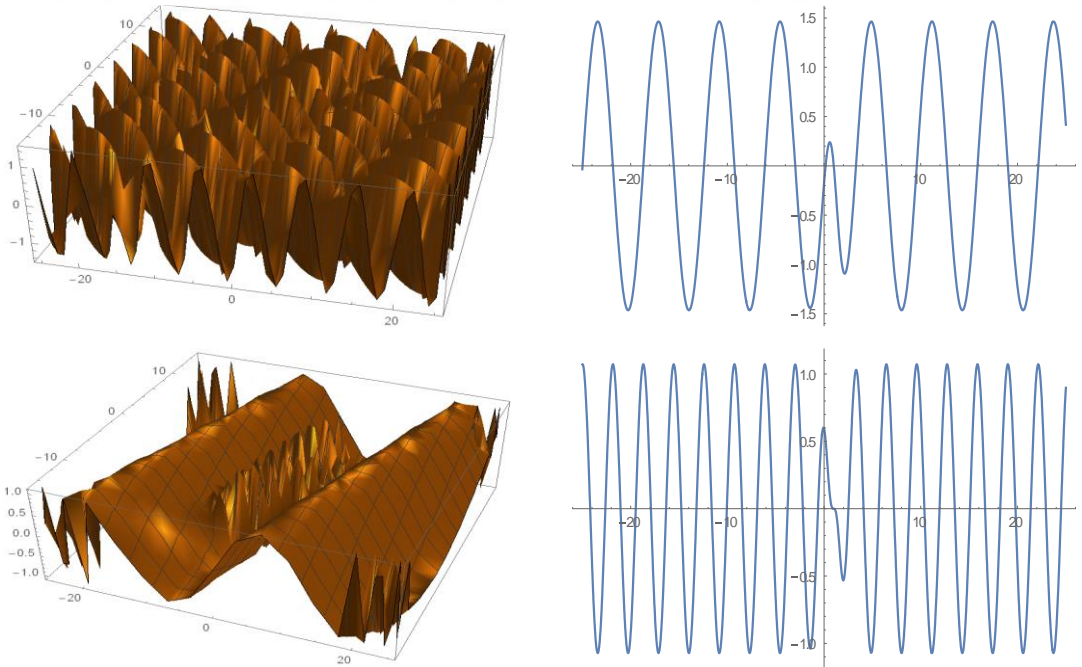
$$u_{2,2}(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[\left(i\sqrt{\mu} + \sqrt{\gamma - \mu} \right) \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) \right] \quad (3.15)$$

$$v_{2,2}(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{2,2}^2(x, t)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.1. (3.14) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{2,1}$ ve $v_{2,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi



Şekil 3.2. (3.15) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{2,2}$ ve $v_{2,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(ii) Eğer $\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümü

$$u_3(x,t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[\sqrt{\mu} \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)} \right) + \sqrt{(\gamma + \mu)} \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)} \right)^2 \right]$$

$$v_3(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_3^2(x,t) \quad (3.16)$$

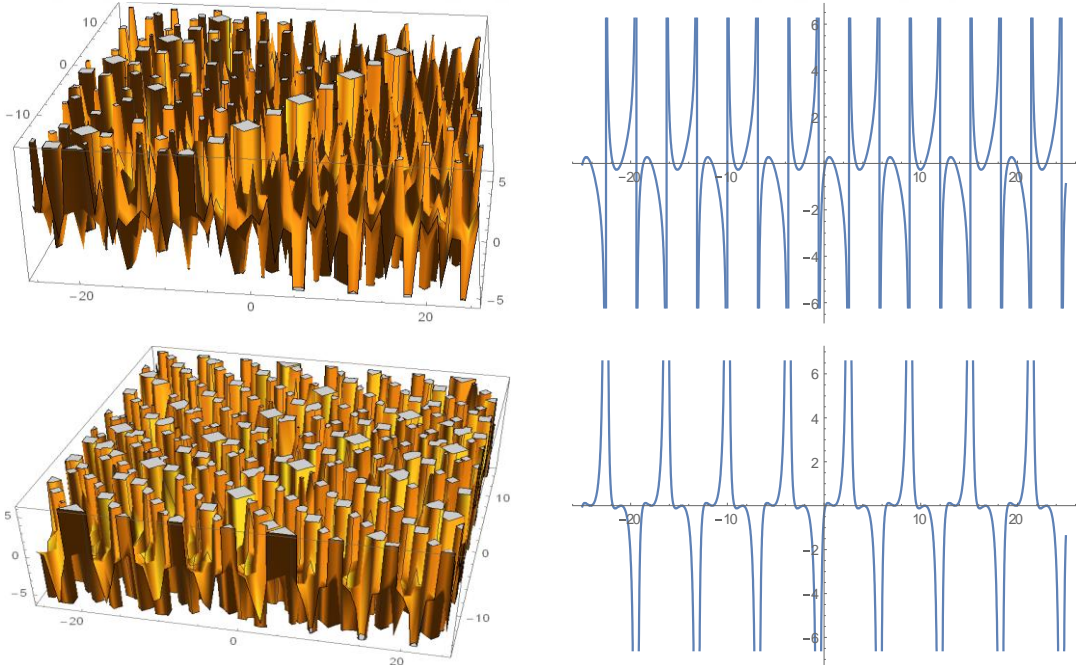
şeklinde elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.16) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_{3,1}(x,t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\gamma + \mu}) \tan(\sqrt{\mu}\xi) \right] \quad (3.17)$$

$$v_{3,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{3,1}^2(x,t)$$

$$u_{3,2}(x,t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[(-\sqrt{\mu} + \sqrt{\gamma + \mu}) \cot(\sqrt{\mu}\xi) \right] \quad (3.18)$$

$$v_{3,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{3,2}^2(x,t)$$



Şekil 3.3. (3.17) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{3,1}$ ve $v_{3,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = b_1 = 2$, $p = \mu = 1$, $r = \sqrt{2}$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$u_4(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \left[(1 + \sqrt{\gamma+1}) \frac{A_1}{A_1 \xi + A_2} \right] \quad (3.19)$$

$$v_4(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_4^2(x, t)$$

olarak bulunur.

2. Durum:

$$a_0 = a_1 = c_1 = d_1 = 0, \quad b_1 = b_1, \quad \mu = \gamma, \quad \beta = \frac{2\gamma(\delta^4 - 1)}{\sigma b_1^2}, \quad \alpha = p^2 - r^2 - \gamma(\delta^2 - 1), \quad (3.20)$$

bulunan katsayıları için (3.9) çözüm fonksiyonu

$$u_5(\xi) = b_1 \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)} \right)^2 \right)} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Farklı μ parametre değerlerine göre (3.1) denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü olmak üzere

$$u_6(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma} \right)} \frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \quad (3.22)$$

$$v_6(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_6^2(x, t)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.22) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_{6,1}(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma} \right)} \coth(\sqrt{-\mu}\xi) \quad (3.23)$$

$$v_{6,1}(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{6,1}^2(x, t)$$

$$u_{6,2}(x, t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma - \mu}{\gamma} \right)} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) \quad (3.24)$$

$$v_{6,2}(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{6,2}^2(x, t)$$

(ii) Eğer $\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümü

$$u_7(x,t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma} \right)} \frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu} \xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu} \xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu} \xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu} \xi)} \quad (3.25)$$

$$v_7(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_7^2(x,t)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.25) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_{7,1}(x,t) = -e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma} \right)} \tan(\sqrt{\mu} \xi) \quad (3.26)$$

$$v_{7,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{7,1}^2(x,t)$$

$$u_{7,2}(x,t) = e^{i\theta} b_1 \sqrt{\sigma \left(\frac{\gamma + \mu}{\gamma} \right)} \cot(\sqrt{\mu} \xi) \quad (3.27)$$

$$v_{7,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{7,2}^2(x,t)$$

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$u_8(x,t) = e^{i\theta} b_1 \frac{A_1}{A_1 \xi + A_2} \quad (3.28)$$

$$v_8(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_8^2(x,t)$$

olarak bulunur.

3. Durum:

$$a_0 = a_1 = b_1 = d_1 = 0, \quad c_1 = c_1, \quad \alpha = p^2 - r^2 - \frac{\sqrt{2\beta(1+\delta^4)}}{1+\delta^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\beta}{2(\delta^4-1)}} c_1 \quad (3.29)$$

elde edilen katsayıları için (3.9) çözüm fonksiyonu

$$u_9(\xi) = c_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{-1} \quad (3.30)$$

olarak bulunur. Farklı μ parametre değerlerine göre (3.1) denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü olmak üzere

$$u_{10}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{-i\sqrt{\mu} A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)}{\mu A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)} \quad (3.31)$$

$$v_{10}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{10}^2(x,t)$$

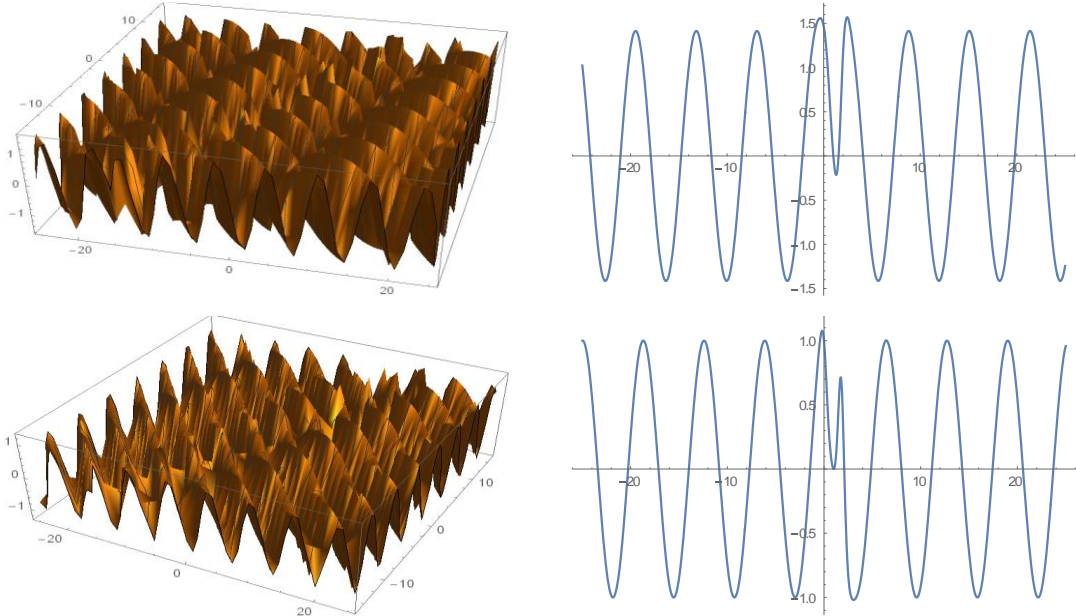
olarak elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.31) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_{10,1}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{-i\sqrt{\mu}}{\mu} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) \quad (3.32)$$

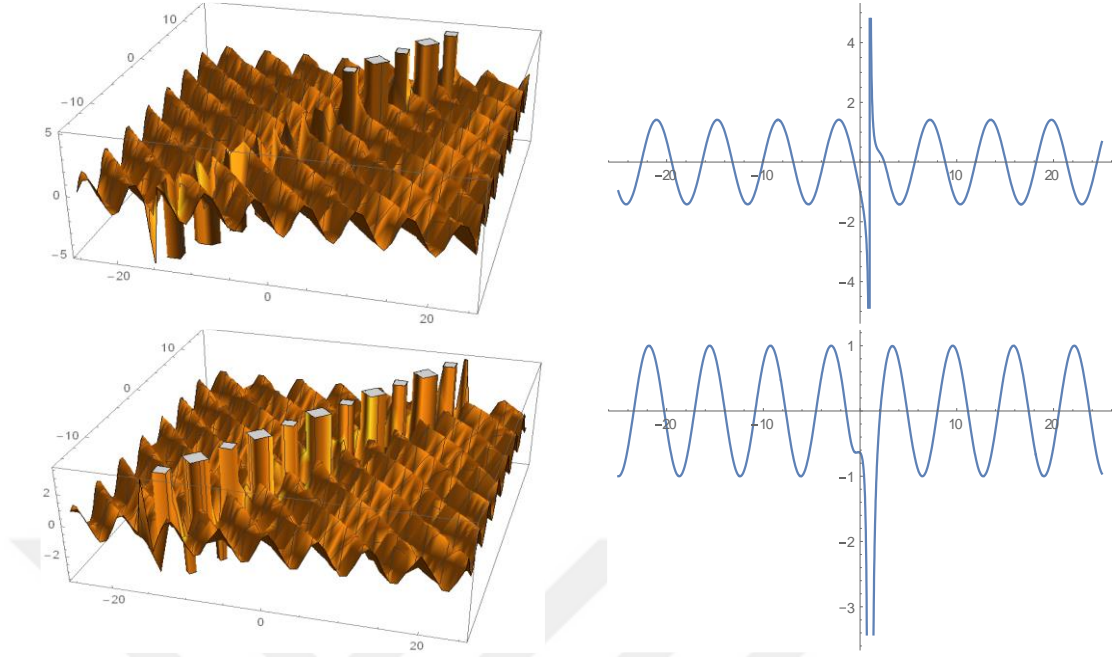
$$v_{10,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{10,1}^2(x,t)$$

$$u_{10,2}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{-i\sqrt{\mu}}{\mu} \coth(\sqrt{-\mu}\xi) \quad (3.33)$$

$$v_{10,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{10,2}^2(x,t)$$



Şekil 3.4. (3.32) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{10,1}$ ve $v_{10,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\mu = 2i$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi



Şekil 3.5. (3.33) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{10,2}$ ve $v_{10,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \delta = -1$, $\gamma = \sigma = c_1 = 2$, $p = 1, r = \sqrt{2}, \mu = 2i$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(ii) Eğer $\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümü

$$u_{11}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \frac{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)} \quad (3.34)$$

$$v_{11}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{11}^2(x,t)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.61) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$u_{11,1}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \cot(\sqrt{\mu}\xi) \quad (3.35)$$

$$v_{11,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{11,1}^2(x,t)$$

$$u_{11,2}(x,t) = e^{i\theta} c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \tan(\sqrt{\mu}\xi) \quad (3.36)$$

$$v_{11,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{11,2}^2(x,t)$$

şeklindedir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$\begin{aligned} u_{12}(x,t) &= e^{i\theta} c_1 \frac{A_1 \xi + A_2}{A_1} \\ v_{12}(x,t) &= \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{12}^2(x,t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

olarak bulunur.

4. Durum:

$$a_0 = b_1 = c_1 = d_1 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad \alpha = p^2 - r^2 + 2\mu(\delta^2 - 1), \quad \beta = \frac{2(\delta^4 - 1)}{a_1^2} \quad (3.38)$$

bulunan katsayılar için (3.9) çözüm fonksiyonu

$$u_{13}(\xi) = a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) \quad (3.39)$$

olarak bulunur. Farklı μ parametre değerlerine göre (3.1) denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü

$$\begin{aligned} u_{14}(x,t) &= e^{i\theta} i \sqrt{\mu} \frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \\ v_{14}(x,t) &= \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{14}^2(x,t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

şeklinde elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.40) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_{14,1}(x,t) &= e^{i\theta} i \sqrt{\mu} \coth(\sqrt{-\mu}\xi) \\ v_{14,1}(x,t) &= \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{14,1}^2(x,t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} u_{14,2}(x,t) &= e^{i\theta} i \sqrt{\mu} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) \\ v_{14,2}(x,t) &= \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{14,2}^2(x,t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

(ii) Eğer $\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümü

$$u_{15}(x,t) = e^{i\theta} \sqrt{\mu} \left[\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)} \right] \quad (3.43)$$

$$v_{15}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{15}^2(x,t)$$

olarak bulunur. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.43) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_{15,1}(x,t) = -e^{i\theta} \sqrt{\mu} \tan(\sqrt{\mu}\xi) \quad (3.44)$$

$$v_{15,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{15,1}^2(x,t)$$

$$u_{15,2}(x,t) = e^{i\theta} \sqrt{\mu} \cot(\sqrt{\mu}\xi) \quad (3.45)$$

$$v_{15,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{15,2}^2(x,t)$$

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü aşağıdaki gibidir.

$$u_{16}(x,t) = e^{i\theta} \frac{A_1}{A_1\xi + A_2} \quad (3.46)$$

$$v_{16}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{16}^2(x,t)$$

5. Durum:

$$a_0 = b_1 = d_1 = 0, \quad a_1 = \sqrt{\frac{2(\delta^4 - 1)}{\beta}}, \quad c_1 = c_1, \quad \alpha = p^2 - r^2 - \frac{2\sqrt{2\beta(\delta^4 + 1)}}{\delta^2 + 1}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\beta}{2(\delta^4 - 1)}} c_1 \quad (3.47)$$

elde edilen katsayıları için (3.9) çözüm fonksiyonu

$$u_{17}(\xi) = a_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right) + c_1 \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} \right)^{-1} \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Farklı μ parametre değerlerine göre (3.1) denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü olmak üzere

$$u_{18}(x,t) = e^{i\theta} \left[i \sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \left(\frac{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)} \right) - c_1 i \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\xi)} \right) \right]$$

$$v_{18}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{18}^2(x,t)$$
(3.49)

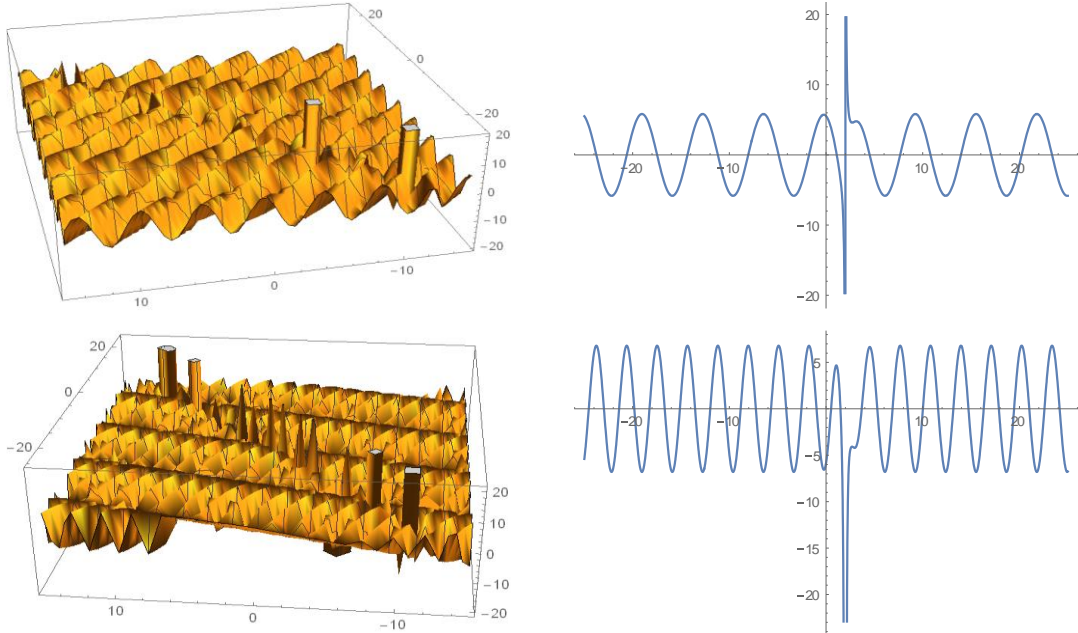
olarak elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.49) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_{18,1}(x,t) = e^{i\theta} \left[i \sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) - c_1 i \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \coth(\sqrt{-\mu}\xi) \right]$$

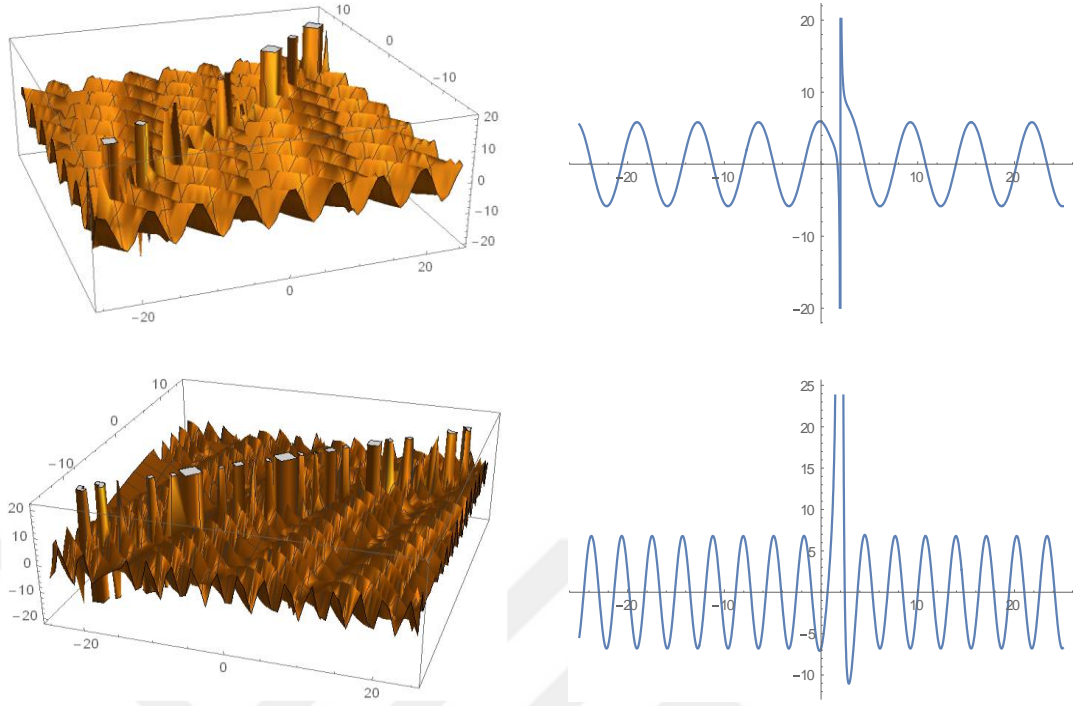
$$v_{18,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{18,1}^2(x,t)$$
(3.50)

$$u_{18,2}(x,t) = e^{i\theta} \left[i \sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \coth(\sqrt{-\mu}\xi) - c_1 i \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \tanh(\sqrt{-\mu}\xi) \right]$$

$$v_{18,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{18,2}^2(x,t)$$
(3.51)



Şekil 3.6. (3.50) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{18,1}$ ve $v_{18,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi



Şekil 3.7. (3.51) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{18,2}$ ve $v_{18,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(ii) Eğer $\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümü

$$u_{19}(x,t) = e^{i\theta} \left[\sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)} \right) + c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \left(\frac{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\xi)}{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\xi) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\xi)} \right) \right]$$

$$v_{19}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{19}^2(x,t)$$
(3.52)

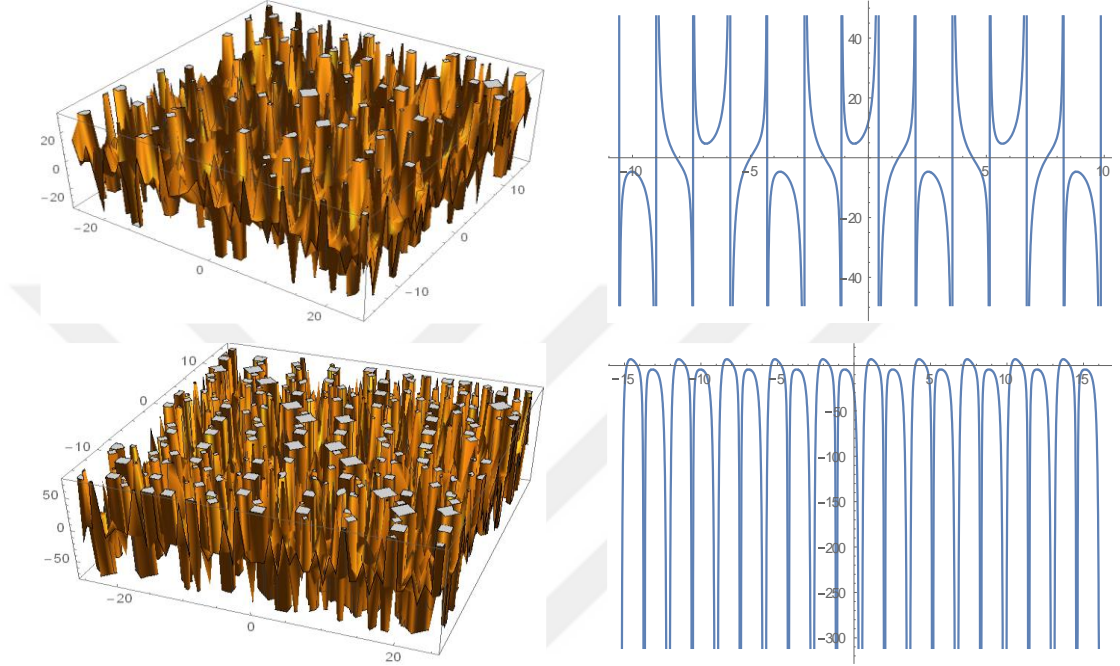
bulunur. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.52) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri aşağıdaki gibidir.

$$u_{19,1}(x,t) = e^{i\theta} \left[-\sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \tan(\sqrt{\mu}\xi) + c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \cot(\sqrt{\mu}\xi) \right]$$

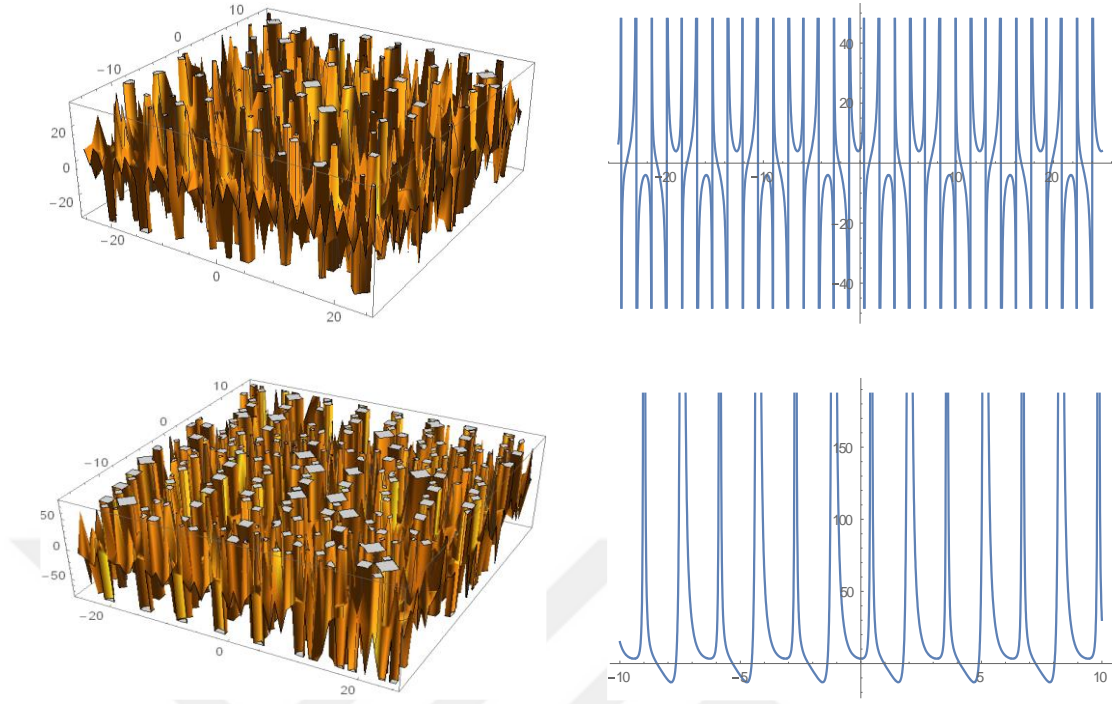
$$v_{19,1}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{19,1}^2(x,t)$$
(3.53)

$$u_{19,2}(x,t) = e^{i\theta} \left[\sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \cot(\sqrt{\mu}\xi) + c_1 \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} \tan(\sqrt{\mu}\xi) \right] \quad (3.54)$$

$$v_{19,2}(x,t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{19,2}^2(x,t)$$



Şekil 3.8. (3.53) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{19,1}$ ve $v_{19,1}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi



Şekil 3.9. (3.54) çözüm fonksiyonunda yer alan $u_{19,2}$ ve $v_{19,2}$ fonksiyonlarının sırasıyla $\alpha = \beta = \mu = -1, \delta = -2, \gamma = \sigma = c_1 = 2, p = 1, r = \sqrt{2}$, değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$u_{20}(x, t) = e^{i\theta} \left[\sqrt{\frac{2\mu(\delta^4 - 1)}{\beta}} \frac{A_1}{A_1\xi + A_2} + c_1 \frac{A_1\xi + A_2}{A_1} \right] \quad (3.55)$$

$$v_{20}(x, t) = \frac{\beta}{\delta^2 + 1} u_{20}^2(x, t)$$

olarak bulunur.

Kompleks katsayılı Higgs denklem sisteminin elde edilen tüm durumlardaki çözümleri incelendiğinde; 4. durumdaki (3.41), (3.42), (3.44) ve (3.45) çözümleri sırasıyla Abdelkawy'in [48] elde ettiği (21), (22), (25) ve (24) sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Diğer durumlarda elde ettiğimiz çözümler ise literatürde yer almayan çözümler olup, geliştirdiğimiz yöntem sayesinde bu denklemin yeni tam çözümleri olduğu görülmüştür.

3.2. İki Katlı Dağılım Denklemi ve Uygulaması

İki katlı dağılım denkleminin en genel hali

$$\phi_{tt} - \frac{\omega}{\rho} \phi_{xx} - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\rho} (d\beta\phi^2 + \rho v^2 \phi_{tt} - b\alpha v^2 \phi_{xx}) \right)_x = 0, \quad (3.56)$$

şeklindedir. Burada b ve d sabit ölçek faktörlerinin birleşimini gösteren sabitlerdir. (3.56) denklemi lineer ve homojen olmayan elastik Murnaghan'ın çubuğunda dalga yayılımını tanımlayan bir modeli ifade etmektedir [55, 56]. Bu denklemin hareketli dalga çözümleri genişletilmiş sinh-Gordon açılım yöntemi, değiştirilmiş $\exp(-\phi(\zeta))$ - açılım fonksiyon yöntemi ve F- açılım yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin bu kısmında iki katlı dağılım denklemine yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G -açılım yöntemi uygulanmıştır. İlk önce hareketli dalga dönüşümü

$$\phi(x, t) = u(\zeta), \quad \zeta = \delta(x - \lambda t), \quad (3.57)$$

(3.56) denklemine uygulanıp, daha sonra ζ ye göre iki kez integre edildikten sonra integrasyon sabiti sıfır olarak seçilerek

$$2(\omega - \lambda^2 \rho)u + d\beta u^2 + \varepsilon \delta^2 v^2 (\lambda^2 \rho - \alpha b)u'' = 0, \quad (3.58)$$

şeklinde ikinci mertebeden lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. Önerilen (2.4) çözüm fonksiyonunda yer alan M sayısını belirlemek için (3.58) denklemindeki en yüksek mertebeden türev içeren terim u'' ile en yüksek dereceden lineer olmayan u^2 terimleri arasında kurulan balans işlemi aşağıdaki gibi yapılır. (2.4) çözüm fonksiyonu $G'' + \mu G = 0$ olmak üzere, kısaca

$$u(\zeta) = a_M \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^M + \dots \quad (3.59)$$

şeklinde ifade edilir. (3.59) ifadesinden faydalanarak balans işlemi için gerekli olan terimler

$$u^2(\zeta) = a_M^2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{2M} + \dots \quad (3.60)$$

$$u''(\zeta) \cong M(M+1)a_M \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{M+2} + \dots \quad (3.61)$$

olarak yazılır. Hesaplanan değerler $u'' \approx u^2$ terimlerine uygulandığında balans terimi olan $M = 2$ elde edilir. Böylece elde edilen bu balans terimi (2.4) denkleminde yerine yazıldığında (3.56) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$u(\zeta) = a_0 + a_1 \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} + a_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 + b_1 \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 \right)} + b_2 \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 \right)} \\ + c_1 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{-1} + c_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{-2} + \frac{d_1}{\sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 \right)}} + \frac{d_2}{\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 \right)}} \quad (3.62)$$

Şeklinde yazılabilir. (3.62) ifadesinden yararlanarak (3.58) denkleminde bulunan u'' karşılığı

$$\begin{aligned}
u''(\xi) = & a_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right) + 2 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 \right) + a_2 \left(6 \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 8\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2\mu^2 \right) \\
& + b_1 \frac{\frac{2\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^6 + \left(\frac{3\sigma^2\gamma + 2\sigma^2\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 4\sigma^2\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \sigma^2\mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{3/2}} \\
& + b_2 \frac{\frac{6\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^7 + \left(\frac{8\sigma^2\mu + 9\sigma^2\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^5 + \left(\frac{12\sigma^2\mu\gamma + 2\sigma^2\mu^2 + 2\sigma^2\gamma^2}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^3 + (3\sigma^2\mu^2 + 2\sigma^2\mu\gamma) \left(\frac{G'}{G} \right)}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{3/2}} \\
& + c_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^{-1} + 2\mu^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{-3} \right) + c_2 \left(2 + 8\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^{-2} + 6\mu^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{-4} \right) \\
& + d_1 \frac{\left(\frac{2\sigma^2\mu - 3\sigma^2\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + \left(\frac{2\sigma^2\mu^2 - 4\sigma^2\gamma\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \sigma^2\mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{5/2}} \\
& + d_2 \frac{\frac{2\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^8 + \left(\sigma^2 + \frac{6\sigma^2\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^6 + \left(4\sigma^2\mu + \frac{6\sigma^2\mu^2}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + (2\sigma^2\mu\gamma + 5\sigma^2\mu^2) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2\sigma^2\mu^2\gamma}{\gamma \left(\frac{G'}{G} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklinde hesaplanır. Bu değerler (3.58) denkleminde yerine yazıldığında $\left(\frac{G'}{G} \right)^k$ ve

$\left(\frac{G'}{G} \right)^k \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)}$ ifadelerin aynı dereceden katsayıları birleştirilirse (3.58)

denkleminin sağ tarafı $\left(\frac{G'}{G} \right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G} \right)^k \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)}$ ifadelerinden oluşan bir

polinoma dönüştür. Oluşan bu polinomun bütün katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem; Mathematica paket programı yardımıyla ilgili yöntem kullanılarak çözüldüğünde, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, \delta, \lambda$ katsayıları ile ζ dönüşümü için aşağıda belirtilen durumlar elde edilmiştir. Bulunan katsayılar (3.62) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında μ parametresinin

durumlarına göre $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$, ye bağlı çözümler elde edilir. (3.56) ile ifade edilen iki katlı

dağılım denkleminin aşağıdaki çözümleri çeşitli durumlar ile ifade edilmiştir.

1. Durum:

$$a_0 = \frac{3\lambda^2\rho - 3\omega}{d\beta}, a_2 = \frac{3\lambda^2\rho - 3\omega}{d\beta\mu}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2\rho(1 + 2\delta^2v^2\varepsilon\mu) - \omega}{2b\delta^2v^2\varepsilon\mu}, \delta = \delta, \lambda = \lambda \quad (3.64)$$

katsayıları için (3.62) çözüm fonksiyonu

$$u(\zeta) = a_0 + a_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2, \quad (3.65)$$

şeklindedir. μ parametresinin farklı durumlarına göre (3.56) denkleminin literatürde olmayan tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

sonra $\zeta_1 = \delta(x - \lambda t)$ ve $K_1 = \frac{3\lambda^2\rho - 3\omega}{d\beta}$ olmak üzere

$$\phi_1(x, t) = K_1 \left[1 - \frac{\left(A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right)^2}{\left(A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right)} \right] \quad (3.66)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.66) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{1,1}(x, t) = K_1 \left[1 - \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.67)$$

$$\phi_{1,2}(x, t) = K_1 \left[1 - \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.68)$$

olarak bulunur.

(ii) Eğer $\mu > 0$ ise trigonometrik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

$$\phi_2(x, t) = K_1 \left[1 + \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right)^2 \right] \quad (3.69)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.69) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{2,1}(x, t) = K_1 \left[1 + \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.70)$$

$$\phi_{2,2}(x, t) = K_1 \left[1 + \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.71)$$

şeklinde elde edilir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler altında

$$K_2 = \frac{3\lambda^2 \rho - 3\omega}{d\beta\mu} \text{ olmak üzere}$$

$$\phi_3(x, t) = K_1 + K_2 \left(\frac{A_1}{A_1 \zeta_1 + A_2} \right)^2 \quad (3.72)$$

olarak bulunur.

2. Durum:

$$a_0 = \frac{3(\lambda^2 \rho - \omega)}{2d\beta}, \quad a_2 = \frac{3(\lambda^2 \rho - \omega)}{4d\beta\mu}, \quad c_2 = \frac{3\mu(\lambda^2 \rho - \omega)}{4d\beta} \quad (3.73)$$

$$a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0, \quad \alpha = \frac{\lambda^2 \rho (1 + 8\delta^2 v^2 \varepsilon \mu) - \omega}{8b\delta^2 v^2 \varepsilon \mu}, \quad \delta = \delta, \quad \lambda = \lambda$$

katsayıları için (3.62) çözüm fonksiyonu

$$u(\zeta) = a_0 + a_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 + c_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{-2}, \quad (3.74)$$

elde edilir. μ parametresinin farklı durumlarına göre (3.56) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

$$\text{sonra } K_3 = \frac{3\lambda^2 \rho - 3\omega}{4d\beta}$$

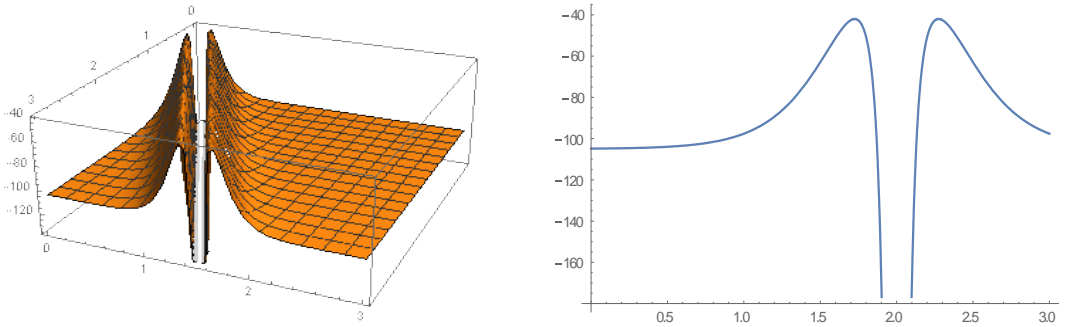
$$\phi_4(x, t) = K_3 \left[2 - \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right)^2 - \mu^2 \left(\frac{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right)^2 \right] \quad (3.75)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.75) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{4,1}(x, t) = K_3 \left[2 - \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) - \mu^2 \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.76)$$

$$\phi_{4,2}(x, t) = K_3 \left[2 - \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) - \mu^2 \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.77)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.10. (3.77) çözüm fonksiyonunun sırasıyla $\alpha = \delta = 1$, $\lambda = d = \omega = 2$, $\rho = 5$, $\mu = -4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(ii) Eğer $\mu > 0$ ise trigonometrik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra

$$\phi_5(x, t) = K_3 \left[1 + \frac{\left(A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right)^2}{\left(A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right)^2} + \mu^2 \frac{\left(A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right)^2}{\left(A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right)^2} \right] \quad (3.78)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.78) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{5,1}(x, t) = K_3 \left[1 + \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) + \mu^2 \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.79)$$

$$\phi_{5,2}(x, t) = K_3 \left[1 + \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) + \mu^2 \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.80)$$

şeklinde elde edilir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler altında olmak üzere

$$\phi_6(x, t) = \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{4} K_2 \left(\frac{A_1}{A_1 \zeta_1 + A_2} \right)^2 + \mu K_3 \left(\frac{A_1 \zeta_1 + A_2}{A_1} \right)^2 \quad (3.81)$$

olarak bulunur.

3. Durum:

$$a_0 = \frac{3\lambda^2 \rho - 3\omega}{d\beta}, \quad c_2 = \frac{3\mu(\lambda^2 \rho - \omega)}{d\beta}, \quad a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$\alpha = \frac{\lambda^2 \rho (1 + 2\delta^2 v^2 \varepsilon \mu) - \omega}{2b\delta^2 v^2 \varepsilon \mu}, \quad \delta = \delta, \quad \lambda = \lambda \quad (3.82)$$

elde edilen katsayıları için (3.62) çözüm fonksiyonu

$$u(\zeta) = a_0 + c_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^{-2}, \quad (3.83)$$

olarak elde edilir. μ parametresinin farklı durumlarına göre (3.56) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

sonra

$$\phi_7(x, t) = K_1 \left[1 - \mu^2 \left(\frac{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right)^2 \right] \quad (3.84)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.84) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{7,1}(x, t) = K_1 \left[1 - \mu^2 \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.85)$$

$$\phi_{7,2}(x, t) = K_1 \left[1 - \mu^2 \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.86)$$

olarak bulunur.

(ii) Eğer $\mu > 0$ ise trigonometrik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

$$\phi_8(x, t) = K_1 \left[1 + \mu^2 \left(\frac{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1)}{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right)^2 \right] \quad (3.87)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.87) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{8,1}(x, t) = K_1 \left[1 + \mu^2 \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.88)$$

$$\phi_{8,2}(x, t) = K_1 \left[1 + \mu^2 \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) \right] \quad (3.89)$$

şeklinde elde edilir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler altında

$$\phi_0(x,t) = K_1 \left(1 + \mu \left(\frac{A_1 \zeta_1 + A_2}{A_1} \right)^2 \right) \quad (3.90)$$

olarak bulunur.

4. Durum:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{6(\lambda^2 \rho - \omega)}{d\beta}, \quad a_2 = \frac{6(\lambda^2 \rho - \omega)}{d\beta\gamma}, \quad b_2 = \frac{6(\lambda^2 \rho - \omega)}{d\beta\sqrt{\gamma\sigma}}, \quad a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = 0 \\ d_1 &= d_2 = 0, \quad \alpha = \frac{\lambda^2 \rho (2 + \delta^2 v^2 \varepsilon \mu) - 2\omega}{b\delta^2 v^2 \varepsilon \gamma}, \quad \delta = \delta, \quad \lambda = \lambda, \quad \mu = \gamma \end{aligned} \quad (3.91)$$

katsayıları için (3.62) çözüm fonksiyonu

$$u(\zeta) = a_0 + a_2 \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 + b_2 \frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'(\zeta)}{G(\zeta)} \right)^2 \right)}, \quad (3.92)$$

şeklinde elde edilir. μ parametresinin farklı durumlarına göre (3.56) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

(i) Eğer $\mu < 0$ ise hiperbolik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

$$\text{sonra } K_4 = \frac{6(\lambda^2 \rho - \omega)}{d\beta}$$

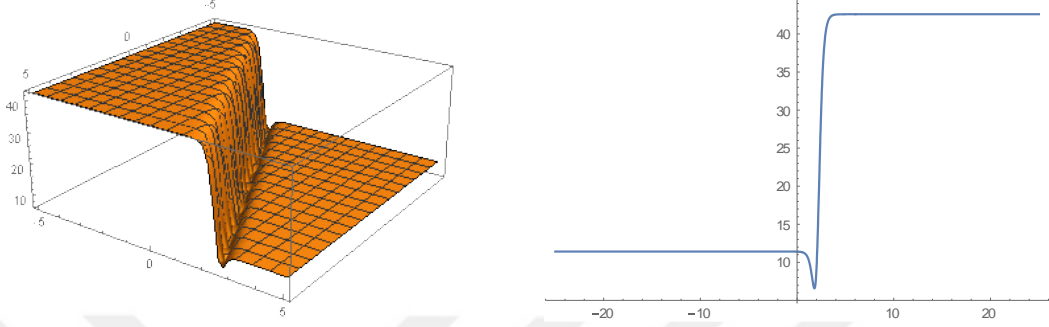
$$\phi_{10}(x,t) = K_4 \left[1 - \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right)^2 + \frac{\sqrt{-\mu}}{\gamma} \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right) \sqrt{\gamma + \left(\frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)}{A_1 \cosh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + A_2 \sinh(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right)^2} \right] \quad (3.93)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.93) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{10,1}(x,t) = K_4 \left[1 - \frac{\mu}{\gamma} \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + \frac{\sqrt{-\mu}}{\gamma} \coth(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \sqrt{\gamma + \coth^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right] \quad (3.94)$$

$$\phi_{10,2}(x,t) = K_4 \left[1 - \frac{\mu}{\gamma} \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1) + \frac{\sqrt{-\mu}}{\gamma} \tanh(\sqrt{-\mu}\zeta_1) \sqrt{\gamma + \tanh^2(\sqrt{-\mu}\zeta_1)} \right] \quad (3.95)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.11. (3.95) çözüm fonksiyonunun sırasıyla $\alpha = \delta = 1$, $\lambda = d = \omega = 2$, $\rho = 1$, $\mu = -4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

(ii) Eğer $\mu > 0$ ise trigonometrik fonksiyon çözümü gerekli dönüşümler yapıldıktan

$$\phi_{11}(x,t) = K_4 \left[1 + \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right)^2 + \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma} \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right) \sqrt{\gamma + \left(\frac{A_1 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1) - A_2 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1)}{A_1 \sin(\sqrt{\mu}\zeta_1) + A_2 \cos(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right)^2} \right] \quad (3.96)$$

elde edilir. Eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse (3.96) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hareketli dalga çözümleri

$$\phi_{11,1}(x,t) = K_4 \left[1 + \frac{\mu}{\gamma} \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) - \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma} \tan(\sqrt{\mu}\zeta_1) \sqrt{\gamma + \tan^2(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right] \quad (3.97)$$

$$\phi_{11,2}(x,t) = K_4 \left[1 + \frac{\mu}{\gamma} \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1) + \frac{\sqrt{\mu}}{\gamma} \cot(\sqrt{\mu}\zeta_1) \sqrt{\gamma + \cot^2(\sqrt{\mu}\zeta_1)} \right] \quad (3.98)$$

şeklinde elde edilir.

(iii) Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümleri gerekli dönüşümler altında olmak üzere

$$\phi_{12}(x, t) = K_4 \left[1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{A_1}{A_1 \zeta_1 + A_2} \right)^2 + \frac{A_1}{\gamma (A_1 \zeta_1 + A_2)} \sqrt{\gamma + \left(\frac{A_1}{A_1 \zeta_1 + A_2} \right)^2} \right] \quad (3.99)$$

olarak bulunur.

İki katlı dağılım denkleminin elde edilen tüm durumlardaki çözümleri incelendiğinde; 1. ve 3. durumlardaki (3.68) ve (3.85) çözümleri sırasıyla Silambarasan'ın [56] elde ettiği (31) ve 1. ve 3. durumlardaki (3.70) ve (3.89) çözümleri sırasıyla Silambarasan'ın [56] elde ettiği (43) sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Diğer durumlarda elde ettiğimiz çözümler ise literatürde yer almayan çözümler olup, geliştirdiğimiz yöntem sayesinde bu denklemin yeni tam çözümleri olarak ifade edilir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi üzerine yeni bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem sayesinde ortaya çıkan çözümler ile pek çok fiziksel olayın sonucunda modellenen problemlerin anlaşılmasına olanak sağlanacaktır. Öne sürülen bu yöntem (G'/G) -açılım yöntemlerinin incelenmesi sonucu meydana getirilmiş ve yeni versiyon geliştirilmiş (G'/G) -açılım yöntemi olarak adlandırılmıştır. Oluşturulan bu yöntem için (2.5) denkleminde ifade edilen ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem temel alınarak (G'/G) çözüm fonksiyonları μ katsayısının farklı durumlarında (2.6), (2.7) ve (2.8) çözüm fonksiyonlarıyla elde edilmiştir. Elde edilen bu çözümler (2.4) genel çözümünde yerine yazılmadan önce dengeleme teriminin belirlenmesi gerekmektedir. Balans işlemine göre M sayısı belirlenir. Daha sonra belirlenen değerler (2.4) genel çözümünde yerine yazılarak kısmi türevli diferansiyel denklemler için yeni tam çözüm fonksiyonları oluşturulmuş olur. Bu yöntem kompleks katsayılı Higgs denklem sistemi ve iki katlı dağılım denkleminde ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen farklı çözümler değişik durumlarda ifade edilmiştir.

Uygulanan bu yeni yöntem ile literatürde yer almayan yeni tam çözüm fonksiyonları bulunmuştur. Bu yeni tam çözüm fonksiyonları, soliton dalgaların farklı durumlarına karşılık gelmektedir. Daha sonra elde edilen bu yeni tam çözümlerin özel olarak seçilen farklı katsayılarına göre iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bu sayede yeni tam çözümlerin davranışları hakkında bilgi sahibi olunmuştur. İstenilirse bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışları da irdelenebilir. Çizilen grafiklerden de anlaşılacağı üzere bu yeni tam çözüm fonksiyonları farklı soliton dalga çeşitlerini ifade etmektedir. Literatürde var olan karanlık (dark) soliton ve aydınlık (bright) soliton ile bunların dışında farklı soliton çeşitleri bu grafiklerle gösterilmeye çalışılmıştır. Böylece fiziksel olayların daha iyi anlaşılacağı söyleyebiliriz. (2.5) denkleminde ifade edilen ikinci mertebeden sabit katsayılı adi diferansiyel denklemin farklı durumları ele

alınırsa, buradan elde edilecek (G'/G) çözüm fonksiyonları da farklılaşacaktır.

Bu da yeni tam çözümlerin elde edilmesine olanak sağlayacaktır.



KAYNAKLAR

1. Hietarinta, J., Hirota's Bilinear Method and its Generalization, *Int. J. Mod. Phys. A*, 12(1), 43-51, 1997.
2. Pashaev, O., Tanoglu, G., Vector Shock Soliton and the Hirota Bilinear Method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26, 95-105, 2005.
3. Abdou, M. A., The Extended Tanh-Method and its Applications for Solving Nonlinear Physical Models, *Appl. Math. Comput.*, 190, 988-996, 2007.
4. Wazwaz, A. M., The Tanh Method for Traveling Wave Solutions of Nonlinear Equations, *Appl. Math. Comput.*, 154, 713–723, 2004.
5. Wang, M., Li, X., Zhang, J., The (G'/G) -Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics, *Phys. Lett. A*, 372, 417-423, 2008.
6. Shakeel, M., Mohyud-Din, S. T., New (G'/G) -Expansion Method and its Application to the Zakharov-Kuznetsov–Benjamin-Bona-Mahony (ZK–BBM) Equation, *J. Assoc. Arab Univ. Basic & Appl. Sci.*, 18(1), 66-81, 2015.
7. He, J. H., Wu, X. H., Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, *Chaos, Soliton & Fractals*, 30, 700-708, 2006.
8. Ravi, L. K., Ray, S. S., Sahoo, S., New Exact Solutions of Coupled Boussinesq-Burgers Equations by Exp-Function Method, *J. Ocean Eng. Sci.*, 2, 34–46, 2017.
9. Ma, W. X., Huang, T., Zhang, Y., A Multiple Exp-Function Method for Nonlinear Differential Equations and its Application, *Phys. Script.*, 82(6), 065003, 2010.
10. Ma, W. X., Zhu, Z., Solving the (3+1)-dimensional Generalized KP and BKP by the Multiple Exp-Function Algorithm, *Appl. Math. Comput.*, 218, 11871-11879, 2012.
11. Khan, K., Akbar, M. A., Ali, N. H. M., The Modified Simple Equation Method for Exact and Solitary Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equation: the GZK-BBM Equation and Right-Handed Non Commutative Burgers Equations, *ISRN Math. Phys.*, 2013, Article ID 146704, 5 pages, 2013.

12. Akter, J., Akbar, M. A., Solitary Wave Solutions to Two Nonlinear Evolution Equations via the Modified Simple Equation Method, *New Trends in Math. Sci.*, 4, 12-26, 2016.
13. Liu, C.S., Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications, *Commun. Theor. Phys.*, 45(2), 219-223, 2006.
14. Liu, C.S., Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, *Comput. Phys. Commun.*, 181(2), 317-324, 2010.
15. Gurefe, Y., et al., Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, *Pramana-J. Phys.*, 77(6), 1023-1029, 2011.
16. Gurefe, Y., et al., Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *J. Adv. Math. Stud.*, 5(1), 41-47, 2012.
17. Zhang, J., Jiang, F., Zhao, X., An Improved An improved (G'/G) -expansion method for solving nonlinear evolution equations-Expansion Method for Solving Nonlinear Evolution Equations, *Int. J. Comput. Math.*, 87(8), 1716-1725, 2010.
18. Guo, S., Zhou, Y., The Extended (G'/G) -Expansion Method and its Applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like Equations and Coupled Hirota–Satsuma KdV Equations, *Appl. Math. Comput.*, 215, 3214-3221, 2010.
19. Pandir, Y., et al., Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 478531, 16 pp, 2012.
20. Pandir, Y., et al., Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev–Petviashvili Equation, *Phys. Scr.*, 87(2), 025003, 12 pp, 2013.
21. Gurefe, Y., et al., Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Comput.*, 219(10), 5253-5260, 2013.
22. Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., A Multiple Extended Trial Equation Method for the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, *AIP Conf. Proc.*, 1558, 1927, 2013.

23. Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q., New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations, *Phys. Lett. A*, 290, 72-76, 2001.
24. Shen, S., Pan, Z., A Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method, *Phys. Lett. A*, 308, 143-148, 2003.
25. Laia, X. J., Zhang, J. F., Meia, S. H., Application of the Weierstrass Elliptic Expansion Method to the Long-Wave and Short-Wave Resonance Interaction System, *Z. Naturforsch.*, 63a, 273-279, 2008.
26. Sayed, S. M. The Bäcklund Transformations, Exact Solutions, and Conservation Laws for the Compound Modified Korteweg-de Vries-Sine-Gordon Equations which Describe Pseudospherical Surfaces, *J. Appl. Math.*, 2013, Article ID 613065, 7 pages, 2013.
27. Zhang, Z. Y., Zhong, J., Dou, S. S., Liu, J., Peng, D., Gao, T., First Integral Method and Exact Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, *Roman. Repor. Phys.*, 65(4), 1155–1169, 2013.
28. Wang, M., Li, X., Applications of F-Expansion to Periodic Wave Solutions for a New Hamiltonian Amplitude Equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 24, 1257-1268, 2005.
29. Yang, K., Liu, J., The Extended F-Expansion Method and Exact Solutions of Nonlinear PDEs, *Chaos, Solitons & Fractals*, 22, 111-121, 2004.
30. Abdou, M.A., Further Improved F-Expansion and New Exact Solutions for Nonlinear Evolution Equations, *Nonlinear Dynamics*, 52, 227-288, 2008.
31. Pandir Y., Turhan, N., A New Version of the Generalized F-Expansion Method and its Applications, *AIP Conf. Proc.*, 1798, 020122, 2017.
32. Pandir Y., Turhan, N., A New Type of the Generalized F-Expansion Method and its Application to Sine-Gordon Equation, *Celal Bayar Univ. J. Sci.*, 13(3), 647-650, 2017.
33. Pandir Y., Symmetric Fibonacci Function Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Inf. Sci.*, 8, 2237-2241, 2014.
34. Tandogan, Y. A., Pandir, Y., Gurefe, Y., Solutions of the Nonlinear Differential Equations by use of Modified Kudryashov Method, *Turkish J. Math. Comput. Sci.*, Article ID 20130021, 7 pages, 2013.

35. Pandir, Y., Demiray, S. T., Bulut, H., A New Approach for Some NLDEs with Variable Coefficients, *Optik*, 127, 11183-11190, 2016.
36. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New Solitary Wave Solutions of Maccari System, *Ocean Eng.*, 103, 153-159, 2015.
37. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New Soliton Solutions for Sasa-Satsuma Equation, *Waves in Random Complex Media*, 25(3), 417-418, 2015.
38. Pandir, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, H. H., Turhan, N., Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger's Equation by using Generalized Kudryashov Method, *AIP Conf. Proc.*, 1648, 370004, 2015.
39. Zhang, J., Jiang, F., Zhao, X., An Improved (G'/G) -Expansion Method for Solving Nonlinear Evolution Equations, *Int. J. Comput. Math.*, 87(8), 1716-1725, 2010.
40. Naher, H., Abdullah, F. A., The Improved (G'/G) -Expansion Method to the (2+1)-dimensional Breaking Soliton Equation, *J. Comput. Anal. Appl.*, 16(2), 220-235, (2014).
41. Zhang, J., Wei, X., Lu, Y., A Generalized (G'/G) -Expansion Method and its Applications, *Phys. Lett. A*, 372, 3653-3658, 2008.
42. Zhang, S., Wang, W., Tong, J. L., A Generalized (G'/G) -Expansion Method and its Application to the (2 +1)-dimensional Broer–Kaup Equations, *Appl. Math. Comput.* 209, 399-404, 2009.
43. Lü, H. L., Liu, X. Q., Niu, L., A Generalized (G'/G) -Expansion Method and its Applications to Nonlinear Evolution Equations, *Appl. Math. Comput.* 215, 3811-3816, 2010.
44. Guo, S., Zhou, Y., The Extended (G'/G) -Expansion Method and its Applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like Equations and Coupled Hirota–Satsuma KdV Equation, *Appl. Math. Comput.* 215, 3214-3221, 2010.
45. Roshid, H. O., Akbar, M. A., Alam, M. N., Hoque, M. F., Rahman, N., New Extended (G'/G) -Expansion Method to Solve Nonlinear Evolution Equation: the (3 + 1)-dimensional Potential-YTSF Equation, *Springer Plus*, 3:122, 1-6, 2014.
46. Wadati, M., Sogo, K., Gauge Transformations in Soliton Theory, *J. Phys. Soc. Japan*, 52(2), 394-398, 1983.

47. Kumar, S., Singh, K., Gupta, R. K., Coupled Higgs Field Equation and Hamiltonian Amplitude Equation: Lie Classical Approach and (G'/G) -Expansion Method, *Pramana J. Phys.*, 79(1), 41-60, 2012.
48. Abdelkawy, M. A., Bhrawy, A. H., Zerrad, E., Biswas, A., Application of Tanh Method to Complex Coupled Nonlinear Evolution Equations, *Acta Phys. Polonica A*, 29(3), 278-283, 2016.
49. Radhi, S. K., Al-Shimmary, A., Exact Solution of Some Complex partial Differential Equations, *J. Eng. Appl. Sci.*, 13(22), 9627-9630, 2018.
50. Hon, Y. C., Fan, E. G., A Series of Exact Solutions for Coupled Higgs Field Equation and Coupled Schrödinger-Boussinesq Equation, *Nonlinear Anal.*, 71, 3501-3508, 2009.
51. Khater, M. M. A., Seadawy, A. R., Lu, D., Dispersive Solitary Wave Solutions of New Coupled Konno-Oono, Higgs Field and Maccari Equations and Their Applications, *J. King Saud Univ. Sci.*, 30, 417-423, 2018.
52. Arnous, A. H., Mirzazadeh, M., Eslami, M., The Backlund Transformation Method of Riccati Equation Applied to Coupled Higgs Field and Hamiltonian Amplitude Equations, *Comput. Meth. Diff. Equ.*, 2(4), 216-226, 2014.
53. Fan, E. G., Chow, K. W., Li, J. H., On Doubly Periodic Standing Wave Solutions of the Coupled Higgs Field Equation, *Studies Appl. Math.*, 128, 86-105, 2011.
54. Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., The First Integral Method to Some Complex Nonlinear Partial Differential Equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 4871-4877, 2011.
55. Silambarasan, R., Baskonus, H. M., Bulut, H., Jacobi Elliptic Function Solutions of the Double Dispersive Equation in the Murnaghan's Rod, *Eur. Phys. J. Plus*, 134: 125, 1-22, 2019.
56. Silambarasan, R., Baskonus, H. M., Bulut, H., Solitons in an Inhomogeneous Murnaghan's Rod, *Eur. Phys. J. Plus*, 133: 228, 1-11, 2018.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Kayseri’de doğan Mehmet ÖKDEM, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Mustafa Yazar İlköğretim Okulu ve Melikgazi Mustafa Eminoglu Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir. Aynı yıl Erciyes Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimi alıp 2012 yılında mezun olmuştur. 2016 yılından beri Milli Eğitim Bakanlığına bağlı liselerde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

2016 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Telefon: (554) 943 21 49

E-posta: mhmtokdm@gmail.com