

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

WILLMORE YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Nejdet KARATAŞ

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

WILLMORE YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Nejdet KARATAŞ

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

Yozgat 2019



YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111314011 numaralı öğrencisi Nejdet KARATAŞ'ın hazırladığı "Willmore Yüzeyleri Üzerine" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 19/07/2019 Cuma günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/oy çokluğu ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Nural YÜKSEL

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN
(Danışman)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 07/08/19 tarih ve 36 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

...../...../.....

Prof. Dr. Mustafa SACMACI
Müdür



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	iv
KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1. Bazı Temel Tanım Ve Kavramlar.....	3
2.2. Öklid Uzayında Minimal Yüzeyler	13
3. DÖNEL YÜZEYLER	18
3.1. Dönel Yüzeyler	18
3.2. Profil Eğrisi Parametrik Olarak Verilen Dönel Yüzeyler	19
4. DÖNEL YÜZEYLERİN BİR UYGULAMASI OLAN WILLMORE YÜZEYLERİ.....	33
4.1. Willmore Yüzeyinin Elde Edilmesi.....	33
4.2. Willmore Dönel Yüzey Denkleminin Çözümünün Aranması	38
SONUÇ.....	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

WILLMORE YÜZEYLERİ ÜZERİNE

Nejdet KARATAŞ

Yozgat Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 46

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

ÖZET

Bu tezde dönel yüzeylerin bir uygulaması olarak willmore yüzeyleri incelenerek Willmore dönel yüzey denkleminin çözümleri aranmıştır. .

Öncelikli olarak tezde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilerek dönel yüzey kavramı açıklanmıştır. Ayrıca Gauss eğriliği ve Öklid yüzeyinde minimal yüzeylerden bahsedilmiş ve bu konuda yapılmış olan çalışmalara kısaca değinilmiştir. Daha sonra ise profil eğrisi parametrik olarak verilen dönel yüzeylerden bahsedilmiştir. Bu dönel yüzeylerin parametrik denklemlerinin nasıl bulunacağına dair bilgiler verilerek bu konu hakkında bazı örneklere ve çözümlerine yer verilmiştir.

Öklid uzayında Willmore Fonksiyoneliinden bahsedilerek yüzeyin temel form katsayıları elde edilmiştir. Willmore Dönel Yüzeyinden bahsedilerek birinci ve ikinci temel form katsayıları elde edilerek Willmore Dönel yüzey denkleminde ortalama eğrilik vektör alanları elde edilmiştir. Willmore Yüzey denklemini diferansiyel olarak yazılarak bu diferansiyel denklemin nümerik çözümü aranmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dönel yüzey, Gauss eğriliği, Willmore yüzeyi, Willmore dönel yüzeyi, Yüzey

ON WILLMORE SURFACES

Nejdet KARATAŞ

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 46

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

ABSTRACT

In this thesis, willmore surfaces were examined as an application of rotational surfaces and solutions of the Willmore rotational surface equation were sought. .

The concept of rotational surface is explained by mentioning some basic definitions and theorems that will be used primarily in the thesis. In addition, Gaussian curvature and minimal surfaces on the Euclidean surface have been mentioned and studies on this subject have been briefly mentioned. Then, the profile curve is mentioned as a parametric rotational surfaces. Information on how to find parametric equations of these rotational surfaces has been given about some examples and their solutions.

The basic form coefficients of the surface were obtained by mentioning the Willmore function in Euclidean space. The first and second basic form coefficients were obtained by mentioning the Willmore rotational surface and the mean curvature vector fields were obtained from the Willmore rotational surface equation. Willmore surface equation is written as a differential and numerical solution of this differential equation is sought.

Keywords: Surface, Willmore surfaces, Willmore rotational surfaces, Gaussian curvature, Rotational surface

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca fedakârlığın ne olduğunu azmin çalışmanın ve öz verinin en güzel örneğini göstererek ayrıca farklı bakış açıları sunarak tezimdeki her detayı titizlikle inceleyerek eğitim hayatıma destek olan bunların yanında ilgi, alaka ve mütevazı davranışlarıyla sosyal hayatımda da desteklerini esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Dr. Öğretim Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN(Yozgat Bozok Üniversitesi)'a tezimin yazım aşamalarında bıkmadan usanmadan tarafımdan desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN (Uşak Üniversitesi)'a ve Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR (Yozgat Bozok Üniversitesi)'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans yaptığım süreçte maddi ve manevi fedakârlıklar gösteren çok değerli aileme teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil. 1 D. BRANDER, P. WANG Björling Problemi ve Willmore Yüzeyleri için DPW.....	2
Şekil. 2 E^3 de $V(x)$ eğrisinin z eksenini etrafında dönmesiyle elde edilen dönel yüzey	18
Şekil. 3 E^3 de Katenari Eğrileri	19
Şekil. 4 Yarı çapları oranı $1:\sqrt{2}$ olan tor.....	36



KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\ \cdot \ $	Norm
\wedge	Vektörel çarpım
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım
γ	Eğri
t	Birim teğet vektör
κ	Eğrilik fonksiyonu
n	Birim normal vektör
b	Bi-normal vektör
S_p	Vektörler tarafından gerilen düzlem
τ	Burulma fonksiyonu
A_x	M yüzeyinin alanı
$S(\phi)$	M yüzeyi üzerinde şekil operatörü
K	ϕ yüzeyinin Gauss eğriliği
H	ϕ yüzeyinin ortalama eğriliği
∇	Gradient operatörü
M	Gauss eğriliği
W	Willmore yüzeyi
$T_P M$	M yüzeyinin P noktasındaki tanjant vektör uzayı
$W(x)$	Willmore enerji denklemi
g_{ij}	Willmore yüzeyinin birinci temel formları
L_{ij}	Willmore yüzeyinin ikinci temel formları
Γ_s^+	Willmore yüzeyinin yarı daireleri
ϕ	M yüzeyinin parametrik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu çalışmamızda ilk olarak Willmore yüzeyleri ile ilgili temel kavramları gözden geçireceğiz. Elastik yüzey ve sıvı yüzeylerin gerilim enerjileri bükülme enerjisi olarak da bilinen Willmore enerji denklemi tarafından tanımlanmaktadır.

Öklid metriğinden faydalanarak Öklid uzayında minimal yüzeylerden ilk kez G.Thomson (1923: 31-56) ve W.Blaschke (1929) tarafından bahsedildi 1965 yılında ise T. Willmore tarafından bu minimal yüzeyleri yeniden ifade eden

$$W(f) = \int_{\phi} (H^2 + K)dA$$

Willmore fonksiyoneli oluşturdu (Willmore, 1965: 493-496). G.Thomson ve W.Blaschke W fonksiyonelinin E^3 üzerinde konformal değişkenler altında sabit olduğunu fark ettiler. İleriki dönemlerde kritik noktalarda W fonksiyoneli hesaplayarak ilk varyasyon formülü elde edildi.

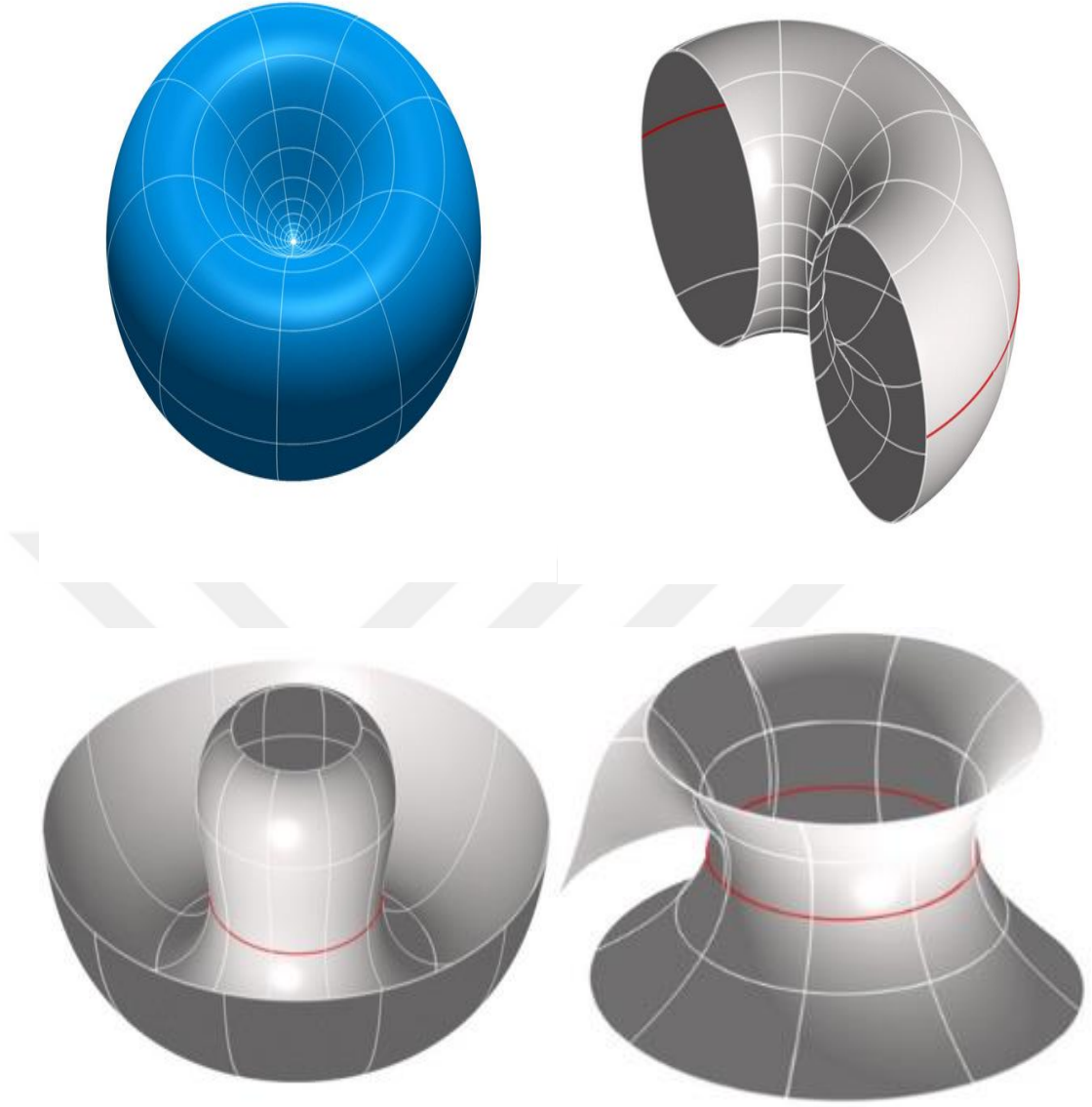
$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$$

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi elde edildi. Bu durum G.Thomson ve W.Blaschke tarafından da biliniyordu. Bu yüzey denkleminin daha genişletilmiş hali J.Weiner in çalışmaları sonucu oluşturuldu.

Bu çalışmamızda bizler de Öklid uzayında Gauss eğriliği, birinci ve ikinci temel form eğriliklerinden faydalanarak Willmore yüzey denkleminin minimal bir yüzey olduğunu ayrıca bu değer sabit olduğunu göstermeye çalışacağız.

Günümüzde Willmore yüzey denklemleri bir çok alanda kullanılabilir. Uzay bilimlerinde cisimlerin birbiri içerisindeki gömülme yapısı ve şekli, araç iç lastiklerinde mukavemet sağlamak amacıyla yerleştirilen çizgilerin yerlerinin tayininde olduğu gibi bir çok mühendislik çalışmalarında yararlanılmaktadır.

Bazı Willmore yüzey örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir.



Şekil. 1: D. BRANDER, P. WANG Björling Problemi ve Willmore Yüzeyleri için DPW(Brander, 2014: 2)

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Bazı Temel Tanım Ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$t(s) = \gamma'(s)$$

eşitliği ile belirli $t(s)$ vektörüne, $\gamma(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.2 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$\kappa(s) = I \rightarrow R$$

$$\kappa(s) = \|\gamma''\|$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.3 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} t'(s)$$

eşitliği ile belirli $n(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü** (asli normal) denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.4 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

eşitliği ile tanımlı $b(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü** (binormal vektörü) denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.5 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisi için $\kappa(s) \neq 0$ ve $n(s)$ de γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki birim asli normal vektörü olmak üzere,

$$\gamma'' = \kappa(s).n(s)$$

dir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.6 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ eğrisinin $S_p\{n, b\}$ vektörlerinin gerdiği düzleme **normal düzlemi** denir. Bu düzlemin denklemi $\det(\overrightarrow{\gamma p}, n, b) = 0$ elde edilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.7 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ eğrisinin $S_p\{t, n\}$ vektörlerinin gerdiği düzleme **oskültör düzlem** denir. Bu düzlemin denklemi $\det(\overrightarrow{\gamma p}, t, n) = 0$ elde edilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.8 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ eğrisinin $S_p\{t, b\}$ vektörlerinin gerdiği düzleme **rektifiyan düzlemi** denir. Bu düzlemin denklemi $\det(\overrightarrow{\gamma p}, t, b) = 0$ elde edilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.1 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ birim hızlı eğri olsun. Bu eğrinin üzerinde \vec{b} sabit vektördür ancak ve ancak $\gamma(s)$ düzlemsel eğridir (Hacısalihoglu, 1983).

İspat : Kabul edelim ki \vec{b} , $\gamma(s)$ üzerinde sabit vektör olsun. Asli normal vektörünün tanımına göre $\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle = 0$ dir. O zaman $\langle \vec{b}, \gamma'(s) \rangle = 0$ dir.

Şimdi integral alınırsa (b sabittir), $\langle \vec{b}, \gamma'(s) \rangle = a_1$ burada a_1 integral sabitidir. Bu yüzden $\gamma(s)$ eğrisi normali \vec{b} olan düzlemin içinde yatıyor, böylece $\gamma(s)$ bir düzlemsel eğridir.

Tersine, kabul edelim ki $\gamma(s)$ bir düzlemsel eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin içinde yattığı düzleme dik olan \vec{c} sabit vektörü için $\langle \vec{c}, \gamma'(s) \rangle = a_2$ yazılabilir. Burada a_2 sabittir. Türev alınırsa \vec{c} sabit olduğu için $\langle \vec{c}, \gamma'(s) \rangle = 0$ olur.

Böylece $\langle \vec{c}, \vec{t} \rangle = 0$ 'dır. Tekrar türev alınırsa $\langle \vec{c}, \frac{d\vec{t}}{ds} \rangle = 0$ olur. O zaman $\langle \vec{c}, \kappa \vec{n} \rangle = 0$ olur. Bu yüzden \vec{c} vektörü, \vec{t} birim teğet vektörüne ve \vec{n} birim asli normal vektörüne diktir. Böylece \vec{c} , \vec{b} nin doğrultmanı üzerinde yatıyor. Bu yüzden $\vec{c} = \alpha \vec{b}$ olacak şekilde bir α skaleri vardır. \vec{c} ve \vec{b} birim oldukları için $\alpha = \pm 1$ ve $\vec{b} = \pm \vec{c}$ bir sabit vektördür. Böylece $\vec{b} = \frac{1}{\alpha} \vec{c}$ ve \vec{b} sabittir.

Sonuç 2.1.1: Eğer $\gamma(s)$ düzlemsel bir eğri ise, o zaman \vec{b} bu düzlemsel eğriye dik olacaktır.

Teorem 2.1.2 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin tüm noktalarında

$$\frac{d\vec{b}}{ds}$$

vardır (Hacısalihoglu, 1983).

İspat : Binormal vektörünün tanımından \vec{b} vardır ve sıfırdan farklıdır ve $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$, bu yüzden $\vec{b} = \vec{t} \wedge \frac{\vec{k}}{\kappa}$. Böylece,

$$\vec{b} = \frac{\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} \quad (2.1.1)$$

(2.1.1) denkleminde göre $\frac{d\vec{b}}{ds}$ vardır.

Tanım 2.1.9 : $t(s), n(s), b(s)$ vektörlerine $\gamma : I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir.

$$\{t(s), n(s), b(s)\}$$

kümesine γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **Frenet çatisı** denir. t, n, b vektör alanlarına γ eğrisi üzerinde **Frenet vektör alanları** denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.10 : R^3 uzayında birim hızlı $\gamma : I \rightarrow R^3$ Frenet vektör alanları $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow R$$

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin **torsiyon** veya **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **burulması** adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.1.3 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

eşitliği vardır (Hacısalihoglu, 1983).

İspat : $\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1$ olduğu için, türev alınırsa,

$$\left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{b}}{ds} \right\rangle = 0$$

böylece

$$2 \langle \vec{b}, \frac{\overrightarrow{db}}{ds} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{b}, \frac{\overrightarrow{db}}{ds} \rangle = 0$$

$\langle \vec{b}, \vec{t} \rangle = 0$ olduğu için, türev alınırsa,

$$\langle \frac{\overrightarrow{db}}{ds}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{b}, \frac{\overrightarrow{dt}}{ds} \rangle = 0$$

$$\langle \frac{\overrightarrow{db}}{ds}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{b}, \kappa \vec{n} \rangle = 0$$

böylece,

$$\langle \frac{\overrightarrow{db}}{ds}, \vec{t} \rangle = -\kappa \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0$$

R^3 de Frenet çatısını kullanarak,

$$\frac{\overrightarrow{db}}{ds} = a\vec{t} + b\vec{n} + c\vec{b}$$

burada a, b, c sabittir. Şimdi $a = \langle \vec{t}, \frac{\overrightarrow{db}}{ds} \rangle = 0$ ve $c = \langle \vec{b}, \frac{\overrightarrow{db}}{ds} \rangle = 0$ ve (2.1.10) tanımına göre

$$b = \langle \vec{n}, \frac{\overrightarrow{db}}{ds} \rangle = -\tau,$$

böylece

$$\frac{\overrightarrow{db}}{ds} = \langle -\tau, \vec{n} \rangle$$

dir.

Sonuç 2.1.2 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ birim hızlı eğri olsun. O zaman aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

1. γ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında $\tau = 0$ ise γ bir düzlemsel eğridir.
2. γ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında $\tau > 0$ ise γ bir sağısarmalı eğridir.
3. γ eğrinin $\gamma(s)$ noktasında $\tau < 0$ ise γ bir solsarmalı eğridir.

Sonuç 2.1.3 : Torsiyon formülü s yay parametre ise

$$\tau = \frac{\det[\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)]}{\|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\|^2} \quad (1.1.2)$$

t herhangi bir parametre ise

$$\tau = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \quad (1.1.3)$$

Teorem 2.1.4 : R^3 uzayında $\gamma(s)$ birim hızlı eğri olsun. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında,

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}$$

Dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

İspat : $\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0$ olduğu için, türev alınırsa,

$$\left\langle \frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{t} \right\rangle + \langle \vec{n}, \frac{d\vec{t}}{ds} \rangle = 0$$

böylece,

$$\left\langle \vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = \left\langle -\vec{n}, -\frac{d\vec{t}}{ds} \right\rangle = \left\langle -\vec{n}, -\kappa\vec{n} \right\rangle = -\kappa \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = -\kappa$$

$\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$ olduğu için, türev alınırsa,

$$\left\langle \frac{d\vec{n}}{ds}, \vec{n} \right\rangle + \langle \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} \rangle = 0$$

böylece,

$$2 \left\langle \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = 0$$

$\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle = 0$ olduğu için, türev alınırsa,

$$\left\langle \frac{\vec{dn}}{ds}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{d\vec{b}}{ds} \right\rangle = 0$$

böylece,

$$\left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = \left\langle -\vec{n}, \frac{d\vec{b}}{ds} \right\rangle = \tau$$

R^3 de Frenet çatısını kullanarak,

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = d\vec{t} + e\vec{n} + f\vec{b}$$

burada d, e, f sabittir. Şimdi $d = \left\langle \vec{t}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = -\tau$, $e = \left\langle \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = 0$ ve $f = \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = \tau$

böylece,

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\tau\vec{t} + \tau\vec{b}$$

dir.

Tanım 2.1.11 : Frenet formülleri,

$$t'(s) = \tau(s)n(s) \quad (2.1.4)$$

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s) \quad (2.1.5)$$

$$b'(s) = -\tau(s)n(s) \quad (2.1.6)$$

dir. Frenet-Serret formüllerinin matris formu yukarıdaki denklemlere göre

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.12 : U ve V , E^n Öklid uzayının iki açık alt cümlesi olmak üzere

$f: U \rightarrow V$ bir fonksiyon olsun. f bir homeomorfizm ayrıca f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de C^k sınıfından ise f fonksiyonuna C^k sınıfından **diffeomorfizm** denir. $k = \infty$ ise kısaca f diffeomorfizmdir. U dan V ye bir diffeomorfizm varsa U cümlesi V cümlesine diffeomorftur (Hacısalıhoğlu ve Sabuncuoğlu, 1983).

Tanım 2.1.13 : M cümlesi E^3 uzayının bir alt cümlesi olsun. $\forall P \in M$ için P 'nin E^3 üzerinde bir V komşuluğu ve E^2 'nin bir açık alt cümlesinden $V \cap M$ 'ye bir f diffeomorfizmi varsa M cümlesine E^3 te bir **yüzeypdir** denir (Hacısalihoglu ve Sabuncuoğlu 1983).

Tanım 2.1.14 : E^n Öklid uzayında $(n - 1)$ boyutlu bir yüzey veya $(n - 1)$ yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid \begin{array}{l} f: U \rightarrow R, v \text{ açık altcümle} \\ x \rightarrow f(x) = c \end{array} \right\}$$

$\forall p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ şeklinde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri, E^3 de bir 2-yüzeye yüzey, E^n de bir $(n - 1)$ - yüzeye $n > 3$ olması halinde ise **hiper yüzey** denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.15 : E^3 de bir M yüzeyi $\phi = \phi(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. $\{\phi_u, \phi_v\}$ M yüzeyinin bir P noktasındaki tanjant vektör uzayı $T_p(M)$ nin baz vektörleri olmak üzere M yüzeyinin P noktasındaki birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$$

şeklinde tanımlanır (Gray 1998).

Tanım 2.1.16 : E^3 de bir M yüzeyi $\phi = \phi(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. M yüzeyinin alanı A_ϕ olmak üzere

$$A_\phi = \iint \|\phi_u \wedge \phi_v\| \, du \, dv$$

şeklinde tanımlanır (Oprea 2000).

Tanım 2.1.17 : E^n uzayının bir hiper yüzeyi M 'nin birim normal vektör alanı N verilsin. $\kappa(M)$, M 'nin vektör alanları uzayı ve E^n deki Riemann konreksiyonu D olmak üzere, $\forall \phi \in \kappa(M)$ için $S(\phi) = -D_\phi N$ şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** denir (Gray 1998).

Lemma 2.1.1 : E^3 de bir M yüzeyi $\phi = \phi(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun. $\{\phi_u, \phi_v\}$ M yüzeyinin bir P noktasındaki tanjant vektör uzayı $T_p M$ nin bazı N ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı verilsin.

Bu durumda

$$S(\phi_u) = -N_u \quad \text{ve} \quad S(\phi_v) = -N_v$$

olur (Gray 1998).

Teorem 2.1.5 : E^3 de bir M yüzeyi $\phi = \phi(u, v)$ şeklinde parametrelendirilmiş olsun.

$$\langle \phi_u, \phi_u \rangle = E, \langle \phi_u, \phi_v \rangle = F, \langle \phi_v, \phi_v \rangle = G$$

ve

$$-\langle \phi_u, N_u \rangle = \langle \phi_{uu}, N \rangle = l$$

$$-\langle \phi_u, N_v \rangle = -\langle \phi_v, N_u \rangle = \langle \phi_{uv}, N \rangle = m$$

$$-\langle \phi_v, N_v \rangle = \langle \phi_{vv}, N \rangle = n$$

olmak üzere ϕ 'in $\{\phi_u, \phi_v\}$ bazına göre S şekil operatörünü

$$-S(\phi_u) = \frac{Fm - Gl}{EG - F^2} \phi_u + \frac{Fl - Em}{EG - F^2} \phi_v$$

$$-S(\phi_v) = \frac{Fn - Gm}{EG - F^2} \phi_u + \frac{Fm - En}{EG - F^2} \phi_v$$

şeklindedir (Gray 1998).

İspat:

$$-S(\phi_u) = a\phi_u + b\phi_v \quad (2.1.8)$$

$$-S(\phi_v) = c.\phi_u + d\phi_v \quad (2.1.9)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.1.8) denkleminde eşitliğin her iki yanını önce ϕ_u ve daha sonra ϕ_v ile iç çarparsak,

$$\langle -S(\phi_u), \phi_u \rangle = a.\langle \phi_u, \phi_u \rangle + b.\langle \phi_v, \phi_u \rangle \quad (2.1.10)$$

$$l = aE + bF$$

$$\langle -S(\phi_u), \phi_v \rangle = a\langle \phi_u, \phi_v \rangle + b\langle \phi_v, \phi_v \rangle \quad (2.1.11)$$

$$-m = aF + bG$$

(2.1.10) ve (2.1.11) denklemlerinden a ve b hesaplanırsa

$$a = \frac{Fm-Gl}{EG-F^2} \quad \text{ve} \quad b = \frac{Fl-Em}{EG-F^2}$$

olarak bulunur. (2.1.9) denkleminde eşitliğin her iki yanını önce ϕ_u ve daha sonra ϕ_v ile iç çarpılırsa,

$$\langle -S(\phi_v), \phi_u \rangle = c\langle \phi_u, \phi_u \rangle + d\langle \phi_v, \phi_u \rangle \quad (2.1.12)$$

$$-m = cE + dF$$

$$\langle -S(\phi_v), \phi_v \rangle = c\langle \phi_u, \phi_v \rangle + d\langle \phi_v, \phi_v \rangle \quad (2.1.13)$$

$$-n = cF + dG$$

(2.1.12) ve (2.1.13) denklemlerinden c ve d hesaplanırsa

$$c = \frac{Fn-Gm}{EG-F^2} \quad \text{ve} \quad d = \frac{Fm-En}{EG-F^2}$$

olarak bulunur. Böylece şekil operatörü matrisini

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{Fm-Gl}{EG-F^2} & -\frac{Fn-Gm}{EG-F^2} \\ -\frac{Fl-Em}{EG-F^2} & -\frac{Fm-En}{EG-F^2} \end{pmatrix} \quad (2.1.14)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.18 : E^n de bir hiper yüzey M olmak üzere, bunun Weingarten dönüşümü (şekil operatörü)'nü S olarak kabul edelim. Bu hiperyüzeyin her hangi bir P noktasındaki $S(P)$ Weingarten dönüşümünün karakteristik değerleri hiperyüzeyin P noktasındaki asli eğrilikleridir. Bu asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör adı verilen vektör alanlarının doğrultusuna da hiperyüzeyin P noktasındaki **asli eğrilik doğrusu** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.19 : E^n de bir hiper yüzey M ve bunun P noktasındaki Weingarten dönüşümü (şekil operatörü)'ne $S(P)$ denilirse

$$K: M \rightarrow R \\ P \rightarrow K(P) = \det K(P)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona hiperyüzeyin **Gauss eğrilik fonksiyonu** ve $K(P)$ değerine de hiperyüzeyin bu noktadaki **Gauss eğriliği** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.20 : E^n de bir hiper yüzey M ve bunun P noktasındaki Weingarten dönüşümü (şekil operatörü)'ne $S(P)$ denilirse

$$H: M \rightarrow R$$

$$P \rightarrow H(P) = \frac{1}{2} izS(P)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona hiperyüzeyin **ortalama eğrilik fonksiyonu** ve $H(P)$ görüntüsüne de hiperyüzeyin bu noktadaki **ortalama eğriliği** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.6 : $\phi: U \subset R^2 \rightarrow M \subset R^3$ bir dönüşüm olsun. ϕ 'nin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2}$$

olarak verilir (Gray, 1998).

İspat: (2.1.14) ile verilen şekil operatörü matrisinin determinantını alırsak,

$$K = \det \begin{pmatrix} -\frac{Fm - Gl}{EG - F^2} & -\frac{Fn - Gm}{EG - F^2} \\ -\frac{Fl - Em}{EG - F^2} & -\frac{Fm - En}{EG - F^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(Fm - Gl)(Fm - En) - (Fn - Gm)(Fl - Em)}{(EG - F^2)^2} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} iz \begin{pmatrix} -\frac{Fm - Gl}{EG - F^2} & -\frac{Fn - Gm}{EG - F^2} \\ -\frac{Fl - Em}{EG - F^2} & -\frac{Fm - En}{EG - F^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Gl + En - 2Fm}{EG - F^2}$$

olarak bulunur.

2.2. Öklid Uzayında Minimal Yüzeyler

Tanım 2.2.1 : Öklid uzayında her noktada ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ($H \equiv 0$) olan yüzeylere **minimal yüzey** adı verilir. Bir başka ifadeye göre aynı sınırlara sahip yüzeyler ailesi arasında en küçük alanlı yüzeye minimal yüzey denir. Bu iki tanımın örtüşüğünü göstermek amacıyla önce R^3 de bir M yüzeyinin normal varyasyonunu tanımlayalım (Gray, 1998).

Tanım 2.2.2 : $\phi: U \rightarrow R^3$ bir dönüşüm olsun.

$Q \subset U$ sınırlı bir bölge, $h: Q \rightarrow R$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ olsun. N , $\forall(u, v) \in U$ için $\phi(u, v)$ ye dik birim normal vektör alanı yani;

$$\langle N, \phi_u \rangle = \langle N, \phi_v \rangle = 0$$

olmak üzere, h ile belirlenen ϕ nin normal varyasyonunu

$$\phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \cap Q \rightarrow R^3$$

$$\phi[t].(u, v) = \phi(u, v) + th(u, v).N(u, v)$$

$(u, v) \in Q$ ve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 'dir. ε yeterince küçük olmak üzere her bir $-\varepsilon < t < \varepsilon$ için $\phi[t]$ bir yüzeydir.

$$E(t) = \langle \phi[t]_u, \phi[t]_u \rangle$$

$$F(t) = \langle \phi[t]_u, \phi[t]_v \rangle$$

$$G(t) = \langle \phi[t]_v, \phi[t]_v \rangle$$

olmak üzere $t = 0$ için E , F ve G nin değerleri sırasıyla $E(0), F(0), G(0)$ olmak üzere $\phi[t](Q)$ yüzeyinin yüzey alanı

$$A(t) = Alan(\phi[t](Q)) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

eşitliği ile verilir (Gray, 1998).

Lemma 2.2.1 : $\phi: U \rightarrow R^3$ bir dönüşüm ve $Q \subset U$ sınırlı bir bölge olsun. O zaman her $h: Q \rightarrow R$ göre ϕ ve Q nun normal varyasyonu için

$$A'(0) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

olur. Burada H , yüzeyin **ortalama eğrilik fonksiyonudur** (Gray, 1998).

İspat : $\phi: U \rightarrow R^3$ dönüşümünün h ile belirlenen normal varyasyonunu

$$\phi[t](u, v) = \phi(u, v) + th(u, v).N(u, v)$$

ile verelim u ve v 'ye göre yukarıdaki denklemin türevi alınırsa,

$$\left. \begin{aligned} \phi[t]_u(u, v) &= \phi_u + thN_u + th_uN \\ \phi[t]_v(u, v) &= \phi_v + thN_v + th_vN \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

ayrıca

$$\langle \phi_u, \phi_u \rangle = E, \quad \langle \phi_u, \phi_v \rangle = F, \quad \langle \phi_v, \phi_v \rangle = G$$

ve

$$-\langle \phi_u, N_u \rangle = \langle \phi_{uu}, N \rangle = l$$

$$-\langle \phi_u, N_u \rangle = -\langle \phi_v, N_u \rangle = \langle \phi_{uv}, N \rangle = m$$

$$-\langle \phi_v, N_v \rangle = \langle \phi_{vv}, N \rangle = n$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E(t) &= \langle \phi[t]_u, \phi[t]_u \rangle \\ &= \langle \phi_u + thN_u + th_uN, \phi_u + thN_u + th_uN \rangle \\ &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, thN_u \rangle + \langle \phi_u, th_uN \rangle + \langle thN_u, \phi_u \rangle \\ &\quad + \langle thN_u, thN_u \rangle + \langle thN_u, th_uN \rangle + \langle th_uN, \phi_u \rangle \\ &\quad + \langle th_uN, thN_u \rangle + \langle th_uN, th_uN \rangle \\ &= E - 2thl + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \langle \phi[t]_u, \phi[t]_v \rangle \\
&= \langle \phi_u + thN_u + th_uN, \phi_v + thN_v + th_vN \rangle \\
&= \langle \phi_u, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, thN_v \rangle + \langle \phi_u, th_uN \rangle + \langle thN_u, \phi_v \rangle \\
&\quad + \langle thN_u, thN_v \rangle + \langle thN_u, th_vN \rangle + \langle th_uN, \phi_v \rangle \\
&\quad + \langle th_uN, thN_v \rangle + \langle th_uN, th_vN \rangle \\
&= F - 2thm + O(t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(t) &= \langle \phi[t]_v, \phi[t]_v \rangle \\
&= \langle \phi_v + thN_v + th_vN, \phi_v + thN_v + th_vN \rangle \\
&= G - 2thn + O(t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(t).G(t) - (F(t))^2 &= (E - 2thl + O(t^2))(G - 2thn + O(t^2)) \\
&\quad - (F - 2thm + O(t^2))^2 \\
&= (EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{E(t).G(t) - (F(t))^2} &= \sqrt{(EG - F^2).(1 - 4thH) + O(t^2)} \\
&= \sqrt{EG - F^2}.(1 - 2thH) + O(t^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu değerler $A(t)$ 'de yerine yazılırsa

$$A(t) = Alan(\phi[t].(Q)) = \iint_Q [\sqrt{EG - F^2} (1 - 2thH) + O(t^2)] dudv$$

bulunur. Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa,

$$A'(t) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} dudv + [O(t^2)]'$$

$t = 0$ için

$$A'(0) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} dudv \quad (2.2.2)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2: $\phi: U \rightarrow R^3$ bir dönüşüm ve $Q \subset U$ sınırlı bir bölge olsun. O zaman her

$$h: Q \rightarrow R$$

göre ϕ ve Q 'nin normal varyasyonu için ϕ, Q üzerinde minimaldir ancak ve ancak

$$A'(0) = 0$$

dır (Gray, 1998).

İspat: Eğer $H = 0$ ise o zaman her h için (1.2.2) denkleminde $A'(0) = 0$ olur. Tersine her h için $A'(0) = 0$ olsun. Ancak $H(q) \neq 0$ olduğunu bir $q \in Q$ olduğunu kabul edilsin. $h(q) = H(q)$ ve h, q 'nin çok küçük bir komşuluğu dışında sıfır olacak şekilde bir

$$h: Q \rightarrow R$$

seçilirse, bu durumda

$$A'(0) < 0$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$H(q) = 0$$

olmalı q keyfi olduğundan ϕ minimal olur.

Tanım 2.2.3 (Gradient Operatörü):

M bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve $f: M \rightarrow R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

$$\nabla = grad: C^\infty(M, R) \rightarrow \kappa(M)$$

$$f \rightarrow \nabla f = grad(f)$$

olarak tanımlanan $grad$ operatörüne M üzerinde **gradient operatörü** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

M üzerindeki lokal koordinatlar cinsinden gradient operatörü

$$(grad f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dir. Eğer

$$M = E^n \text{ ise}$$

$$g^{ij} = \delta_i^j \text{ ve } (grad f)^i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

olur.

Tanım 2.2.4. (İmmersiyon - Daldırma):

M ve \bar{M} sırasıyla n ve $n + d$ boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$f: M \rightarrow \bar{M}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f in f^* jakobien matrisi $\forall p \in M$ için regüler ise f ye M den \bar{M} ye bir **daldırma** denir (Chen, 1973).



3. DÖNEL YÜZEYLER

3.1. Dönel Yüzeyle

Verilen bir eğrinin bir d doğrusu etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeye **dönel yüzey** denir. d doğrusuna dönel yüzeyin **dönme eksen**i, eğriye de dönel yüzeyin **profil eğrisi** denir. Profil eğrisinin farklı her bir konumuna dönel yüzeyin **meridyeni** denir. Meridyenlere dik olan eğrilere **paralel** denir (Demirok, 2008).

Tanım 3.1.1 (E^3 de dönel yüzey):

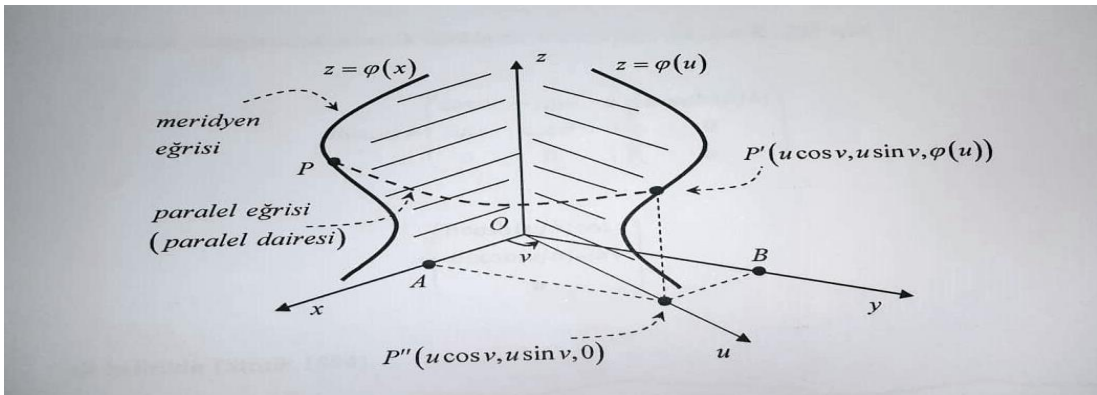
$I \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere, E^3 deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri

$$\gamma: I \rightarrow \Pi$$

ve bu düzlemde bir doğru ℓ olsun. ℓ doğrusu sabit kalmak üzere γ eğrisinin ℓ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan yüzeye **dönel yüzey** denir. ℓ doğrusuna dönel yüzeyin dönme eksen*i*, γ eğrisine de **üreteç eğrisi** denir. Yani, bir düzlem eğrisinin sabit bir doğru (dönme eksen*i*) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir. Dönme eksen*i* z olarak alınırsa, yüzeyin bir noktasının koordinatları

$$x = u \cdot \cos v, \quad y = u \cdot \sin v, \quad z = \varphi(u)$$

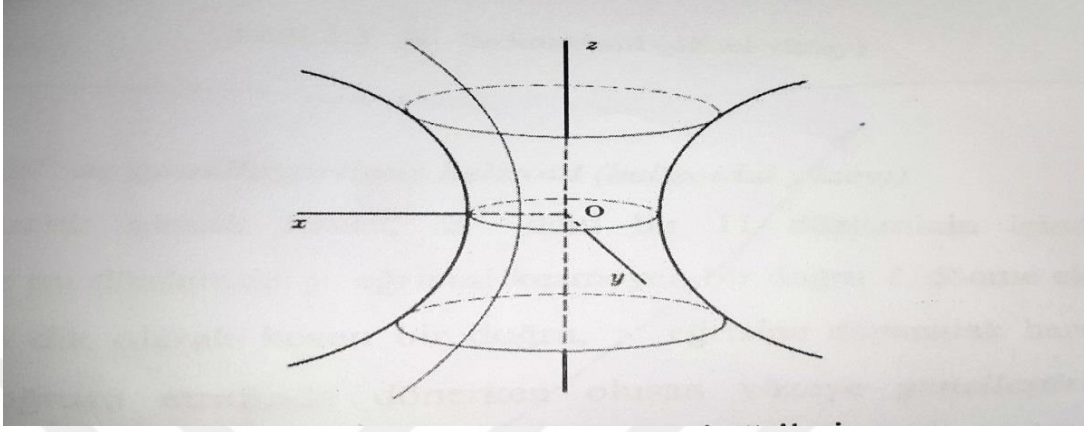
olur. $v = \text{sabit}$ parametre eğrisi meridyen çizgisi veya eksene dik olan düzlemlerle yüzeyin **ara kesitidir**. İlerideki dönel yüzeyler için de aynı bu düşünceyi uygulayalım (Demirok 2008).



Şekil. 2:

E^3 de $z = V(x)$ eğrisinin z eksen*i* etrafında dönmesiyle elde edilen dönel yüzey

Örnek 3.1.1 Katenari eğrisinin denklemi, hiperbolik kosinüs fonksiyonu ile verilmektedir. $y = b \cosh(z/b)$ katenari eğrisinin (Şekil. 2) z eksenini etrafında dönmesi ile oluşan dönel yüzeye **katenoid yüzeyi** (Şekil. 2 ve Şekil. 3) denir. Buradaki b sabiti, katenari eğrisinin herhangi bir noktada z eksenine uzaklığıdır.



Şekil. 3 E^3 de Katenari Eğrileri

Katenoid yüzeyinin parametrik denklemi, $0 \leq v \leq 2\pi$, $\forall b, u \in R \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned}
 R(u, v) &= \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \cosh\left(\frac{u}{b}\right) \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b \cosh\left(\frac{u}{b}\right) \cos v \\ b \cosh\left(\frac{u}{b}\right) \sin v \\ u \end{pmatrix} \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

ile belirlidir.

3.2. Profil Eğrisi Parametrik Olarak Verilen Dönel Yüzeyler

Profil eğrisi $\varphi(u) = (f(u), g(u), h(u))$ şeklinde parametrik olarak verilmiş ise eksenini de

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

doğrusu olarak verilmiş ise dönel yüzeyin herhangi bir paraleli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= (f(u) - x_0)^2 \\
 &\quad + (g(u) - y_0)^2 + (h(u) - z_0)^2 \quad (3.2.1)
 \end{aligned}$$

$$ax + by + cz = a.f(u) + b.g(u) + c.h(u) \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) denkleminde dönel yüzeyin parametrik denklemi elde edilir. Böylece verilen eğrinin

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

şeklinde parametrik denklemi bulunur,

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), h(u))$$

ve verilen eksenin geçtiği nokta (x_0, y_0, z_0) , doğrularının vektörü de

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} (a, b, c) \quad (3.2.3)$$

ise, dönel yüzeyin parametrik denklemi (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerinden bulunur.

$$(x - x_0) + (y - y_0) + (z - z_0) = \langle \vec{\alpha}(u), \vec{n} \rangle \cdot u + \cos v \cdot \vec{\alpha}(u) - \langle \alpha(u), \vec{n} \rangle \cos v \cdot \vec{n} + \sin v \cdot \vec{n} \wedge \vec{\alpha}(u) \quad (3.2.4)$$

$$\phi(u, v) = \langle \vec{\alpha}(u), \vec{n} \rangle (1 - \cos v) \vec{n} + \cos u \cdot \vec{\alpha}(u) + \sin v \cdot (\vec{n} \wedge \vec{\alpha}(u)) + (x_0, y_0, z_0) \quad (3.2.5)$$

Şimdi, verilen eğrinin farklı eksenler etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin parametrik denklemlerini bulalım. Burada

$$\phi(u, v) = \langle \vec{\alpha}(u), \vec{n} \rangle (1 - \cos v) \vec{n} + \cos v \cdot \alpha(u) + \sin v \cdot (\vec{n} \wedge \vec{\alpha}(u)) \quad (3.2.6)$$

dönel yüzeyini alalım.

Örnek 3.2.1 $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ parametrik eğrisinin

- i. x - eksenini
- ii. y - eksenini
- iii. z - eksenini
- iv. $x + 2y - z = 4$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin parametrik denklemlerini bulalım (Demirok, 2008).

3.2.1.i $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ eğrisinin x – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

x – ekseninin birim doğrultusu \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (1,0,0)$ dır. Buradan,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), g(u), 0), (1,0,0) \rangle = f(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.7) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ f(u) & g(u) & 0 \end{vmatrix} = g(u)\vec{e}_3$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (0,0, g(u)) \quad (3.2.7)$$

Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= f(u) \cdot (1 - \cos v)(1,0,0) + \cos v \cdot (f(u), g(u), 0) + \sin v \cdot (0, 0, g(u)) \\ &= (f(u) - f(u) \cdot \cos v, 0, 0) + (f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v, 0) + (0, 0, g(u) \cdot \sin v) \\ &= (f(u) - f(u) \cdot \cos v + f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \sin v) \\ &= (f(u), g(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \sin v) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$$

parametrik eğrisinin x – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(u, v) = (f(u), g(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \sin v) \quad (3.2.8)$$

şeklinde olur.

3.2.1.ii $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ eğrisinin y – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması;

y – ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0,1,0)$ dır. Bunun $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpımı

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), g(u), 0), (0,1,0) \rangle = g(u)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.9) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ f(u) & g(u) & 0 \end{vmatrix} = (-f(u))\vec{e}_3$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (0, 0, -f(u)) \quad (3.2.9)$$

Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= g(u)(1 - \cos v)(0, 1, 0) + \cos v \cdot (f(u), g(u), 0) + \sin v \cdot (0, 0, -f(u)) \\ &= (0, g(u) - g(u) \cdot \cos v, 0) + (f(u) \cos v, g(u) \cdot \cos v, 0) + (0, 0, -f(u) \cdot \sin v) \\ &= (f(u) \cdot \cos v, g(u) + g(u) \cdot \cos v - g(u) \cdot \cos v, -f(u) \cdot \sin v) \\ &= (f(u) \cdot \cos v, g(u), -f(u) \cdot \sin v) \end{aligned}$$

eşitliğini elde edilir ki bu da aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$$

parametrik eğrisinin y – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi de

$$\Phi(u, v) = (f(u) \cdot \cos v, g(u), -f(u) \cdot \sin v) \quad (3.2.10)$$

şeklinde olur.

3.2.1.iii $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ eğrisinin z – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

z – ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0, 0, 1)$ dir. Bunun $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpımı

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), g(u), 0), (0, 0, 1) \rangle = g(u)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.11) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ f(u) & g(u) & 0 \end{vmatrix} = (-g(u))\vec{e}_1 - (-f(u))\vec{e}_2$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (-g(u), f(u), 0) \quad (3.2.11)$$

Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}\phi(u, v) &= 0. (1 - \cos v)(0,0,1) + \cos v. (f(u), g(u), 0) + \sin v. (-g(u), f(u), 0) \\ &= (f(u). \cos v, g(u). \cos v, 0) + (-g(u). \sin v, f(u). \sin v, 0) \\ &= (f(u). \cos v - g(u). \sin v, g(u). \cos v + f(u). \sin v, 0)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki, bu da aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$$

parametrik eğrisinin z – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi de

$$\phi(u, v) = (f(u). \cos v - g(u). \sin v, g(u). \cos v + f(u). \sin v, 0) \quad (3.2.12)$$

şeklinde olur.

3.2.1.iv $\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$ eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

$z = 0$ olduğundan $N = (0,0,1)$ ve $x + 2y - z = 4$ doğrusunun normali

$N_d = (1,2, -1)$ olmak üzere \vec{n} vektörü (3.2.13) eşitliğindeki gibidir.

$$\vec{n} = N_d \wedge N = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (2, -1, 0) \quad (3.2.13)$$

bu eşitlikteki $\vec{n} = (2, -1, 0)$ vektörü $\overline{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overline{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), g(u), 0), (2, -1, 0) \rangle = 2f(u) - g(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overline{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.14) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overline{\alpha(u)} = (N_d, N, \overline{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ f(u) & g(u) & 0 \end{vmatrix} = (2g(u) + f(u))\vec{e}_3$$

$$\vec{n} \wedge \overline{\alpha(u)} = (N_d, N, \overline{\alpha(u)}) = (0, 0, 2g(u) + f(u)) \quad (3.2.14)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= (2f(u) - g(u))(1 - \cos v)(2, -1, 0) + \cos v \cdot (f(u), g(u), 0) \\
&\quad + \sin v \cdot (0, 0, f(u) + 2g(u)) \\
&= (4f(u) - 4f(u) \cdot \cos v - 2g(u) + 2g(u) \cdot \cos v, -2f(u) \\
&\quad + 2f(u) \cdot \cos v + g(u) - g(u) \cdot \cos v, 0) \\
&\quad + (f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v, 0) + (0, 0, f(u) \cdot \sin v + 2g(u) \cdot \sin v) \\
&= (f(u) \cdot (4 - 3\cos v) - 2g(u) \cdot (1 - \cos v), -2f(u) \cdot (1 - \cos v) \\
&\quad + g(u), f(u) \cdot \sin v + 2g(u) \cdot \sin v)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu da aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), g(u), 0)$$

parametrik eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi de

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= (f(u) \cdot (4 - 3\cos v) - 2g(u) \cdot (1 - \cos v), -2f(u) \cdot (1 - \cos v) \\
&\quad + g(u), f(u) \cdot \sin v + 2g(u) \cdot \sin v) \tag{3.2.15}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Örnek 3.2.2 $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ parametrik eğrisinin

- i. x - ekseni
- ii. y - ekseni
- iii. z - ekseni
- iv. $x + 2y - z = 4$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin parametrik denklemlerini bulalım (Demirok, 2008).

3.2.2.i $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ eğrisinin x - ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

x - ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (1, 0, 0)$ dır. Bu vektörü $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), 0, g(u)), (1, 0, 0) \rangle = f(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörünü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.16) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ f(u) & 0 & g(u) \end{vmatrix} = -g(u)\vec{e}_2$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (0, -g(u), 0) \quad (3.2.16)$$

Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= f(u) \cdot (1 - \cos v)(1, 0, 0) + \cos v \cdot (f(u), 0, g(u)) + \sin v \cdot (0, -g(u), 0) \\ &= (f(u) - f(u) \cdot \cos v, 0, 0) + (f(u) \cdot \cos v, 0, g(u) \cdot \cos v) \\ &\quad + (0, -g(u) \cdot \sin v, 0) \\ &= (f(u) - f(u) \cdot \cos v + f(u) \cdot \cos v, -g(u) \cdot \sin v, g(u) \cdot \cos v) \\ &= (f(u), -g(u) \cdot \sin v, g(u) \cdot \cos v) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu da aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

parametrik eğrisinin x – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(u, v) = (f(u), -g(u) \cdot \sin v, g(u) \cdot \cos v) \quad (3.2.17)$$

şeklinde olur.

3.2.2.ii $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ eğrisinin y – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan döneel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

y – ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0, 1, 0)$ dir. Bu vektörü $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), 0, g(u)), (0, 1, 0) \rangle = 0$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.18) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ f(u) & 0 & g(u) \end{vmatrix} = (g(u)\vec{e}_1 + (-f(u)\vec{e}_3)$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (g(u), 0, -f(u)) \quad (3.2.18)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= 0 \cdot (1 - \cos v) \cdot (0, 1, 0) + \cos v \cdot (f(u), 0, g(u)) \\ &\quad + \sin v \cdot (g(u), 0, -f(u)) \\ &= (f(u) \cdot \cos v, 0, g(u) \cdot \cos v) + (g(u) \cdot \sin v, 0, -f(u) \cdot \sin v) \\ &= (f(u) \cdot \cos v + g(u) \cdot \sin v, 0, g(u) \cdot \cos v - f(u) \cdot \sin v) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

parametrik eğrisinin y – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\Phi(u, v) = (f(u) \cdot \cos v + g(u) \cdot \sin v, 0, g(u) \cdot \cos v - f(u) \cdot \sin v) \quad (3.2.19)$$

şeklinde olur.

2.2.2.iii $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ eğrisinin z – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

z – ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0, 0, 1)$ dir. Bu vektörü $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (f(u), 0, g(u)), (0, 0, 1) \rangle = g(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.20) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ f(u) & 0 & g(u) \end{vmatrix} = (-f(u))\vec{e}_2$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (0, f(u), 0) \quad (3.2.20)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= g(u). (1 - \cos v). (0,0,1) + \cos v. (f(u), 0, g(u)) + \sin v. (0, f(u), 0) \\
&= (0,0, g(u) - g(u). \cos v + (f(u). \cos v, 0, g(u). \cos v) + 0, f(u). \sin v, 0) \\
&= (f(u). \cos v, f(u). \sin v, g(u) - g(u). \cos v) + g(u). \cos v \\
&= (f(u). \cos v, f(u). \sin v, g(u))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

parametrik eğrisinin z – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(u, v) = (f(u). \cos v, f(u). \sin v, g(u)) \quad (3.2.21)$$

şeklinde olur.

3.2.2.iv $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

$y = 0$ için $N = (0,1,0)$ ve $x + 2y - z = 4$ doğrusunun normali de

$N_d = (1,2, -1)$ olup \vec{n} normal vektörü (3.2.22) eşitliğindeki gibidir.

$$\vec{n} = N_d \wedge N = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (1,0,1) \quad (3.2.22)$$

bu eşitlikteki $\vec{n} = (1,0,1)$ vektörü $\overline{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \vec{n}, \overline{\alpha(u)} \rangle = \langle (1,0,1), (f(u), 0, g(u)) \rangle = f(u) + g(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overline{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.23) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
\vec{n} \wedge \overline{\alpha(u)} &= (N_d, N, \overline{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ f(u) & 0 & g(u) \end{vmatrix} = (g(u) - f(u))\vec{e}_2 \\
\vec{n} \wedge \overline{\alpha(u)} &= (N_d, N, \overline{\alpha(u)}) = (0, f(u) - g(u), 0) \quad (3.2.23)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= (f(u) + g(u)).(1 - \cos v). (1, 0, 1) + \cos v. (f(u), 0, g(u)) \\
&\quad + \sin v. (0, f(u) - g(u), 0) \\
&= (f(u) - f(u). \cos v + g(u). \cos v, 0, f(u). \cos v + g(u) - g(u). \cos v \\
&\quad + (f(u). \cos v, 0, g(u). \cos v) + (0, f(u). \sin v - g(u). \sin v, 0) \\
&= (f(u) + g(u)).(1 - \cos v), f(u). \sin v - g(u). \sin v, f(u). (1 - \cos v) \\
&\quad + g(u)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

parametrik eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= (f(u) + g(u)).(1 - \cos v), f(u). \sin v - g(u). \sin v, f(u). (1 - \cos v) \\
&\quad + g(u)
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

şeklinde olur.

Örnek 3.2.3 $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ eğrisinin

- i. x - eksenini
- ii. y - eksenini
- iii. z - eksenini
- iv. $x + 2y - z = 4$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin parametrik denklemlerini bulalım (Demirok, 2009).

3.2.3.i $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ eğrisinin x - eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması:

x - ekseninin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (1, 0, 0)$ dir. Bu vektör $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (0, f(u), g(u)), (1, 0, 0) \rangle = 0$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.25) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & f(u) & g(u) \end{vmatrix} = -g(u)\vec{e}_2 + f(u)\vec{e}_3$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (0, -g(u), f(u)) \quad (3.2.25)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= 0 \cdot (1 - \cos v) \cdot (1, 0, 0) + \cos v \cdot (0, f(u), g(u)) \\ &\quad + \sin v \cdot (0, -g(u), f(u)) \\ &= (0, f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v) + (0, -g(u) \cdot \sin v, f(u) \cdot \sin v) \\ &= (0, f(u) \cdot \cos v - g(u) \cdot \sin v, g(u) \cdot \cos v + f(u) \cdot \sin v) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$$

parametrik eğrisinin x – eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin parametrik denklemi,

$$\phi(u, v) = (0, f(u) \cdot \cos v - g(u) \cdot \sin v, g(u) \cdot \cos v + f(u) \cdot \sin v) \quad (3.2.26)$$

şeklinde olur.

3.2.3.ii $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ eğrisinin y – eksenini etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması;

y – ekseninin vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0, 1, 0)$ dır. Bu vektör $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \overrightarrow{\alpha(u)}, \vec{n} \rangle = \langle (0, f(u), g(u)), (0, 1, 0) \rangle = f(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.27) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & f(u) & g(u) \end{vmatrix} = g(u)\vec{e}_1$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (g(u), 0, 0) \quad (3.2.27)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= f(u) \cdot (1 - \cos v) \cdot (0, 1, 0) + \cos v \cdot (0, f(u), g(u)) + \sin v \cdot (g(u), 0, 0) \\ &= (0, f(u) - f(u) \cdot \cos v, 0) + (0, f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v) \\ &\quad + (g(u) \cdot \sin v, 0, 0) \\ &= (g(u) \cdot \sin v, f(u) - f(u) \cdot \cos v + f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v) \\ &= (g(u) \cdot \sin v, f(u), g(u) \cdot \cos v) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuętur. Böylece

$$\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$$

parametrik eğrisinin y –ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemini

$$\phi(u, v) = (g(u) \cdot \sin v, f(u), g(u) \cdot \cos v) \quad (3.2.28)$$

şeklinde olur.

2.2.3.iii $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ eğrisinin z –ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması;

z – eksenin birim vektörü \vec{n} olmak üzere $\vec{n} = (0, 0, 1)$ dir. Bu vektör $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile i çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{\alpha(u)} \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, f(u), g(u)) \rangle = g(u)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.29) eşitliği elde edilir.

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & f(u) & g(u) \end{vmatrix} = (-f(u))\vec{e}_1$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} = (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (-f(u), 0, 0) \quad (3.2.29)$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= g(u) \cdot (1 - \cos v) \cdot (0, 0, 1) + \cos v \cdot (0, f(u), g(u)) + \sin v \cdot (-f(u), 0, 0) \\
&= (0, 0, g(u) - g(u) \cdot \cos v) + (0, f(u) \cdot \cos v, g(u) \cdot \cos v) + (-f(u) \cdot \sin v, 0, 0) \\
&= (-f(u) \cdot \sin v, f(u) \cdot \cos v, g(u) - g(u) \cdot \cos v) + g(u) \cdot \cos v \\
&= (-f(u) \cdot \sin v, f(u) \cdot \cos v, g(u))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$$

parametrik eğrisinin z -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(u, v) = (-f(u) \cdot \sin v, f(u) \cdot \cos v, g(u)) \quad (3.2.30)$$

şeklinde olur.

3.2.3.iv $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$ eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana dönel yüzeyin parametrik denkleminin bulunması;

$x = 0$ için $N = (1, 0, 0)$ ve $x + 2y - z = 4$ doğrusunun normali de

$N_d = (1, 2, -1)$ olup \vec{n} normal vektörü (3.2.31) eşitliğindeki gibidir.

$$\vec{n} = N_d \wedge N = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (0, -1, -2) \quad (3.2.31)$$

Bu eşitlikteki $\vec{n} = (0, -1, -2)$ vektörünü $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa,

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{\alpha(u)} \rangle = \langle (0, -1, -2), (0, f(u), g(u)) \rangle = -f(u) - 2g(u)$$

sonucuna elde edilir. Ayrıca \vec{n} ile $\overrightarrow{\alpha(u)}$ vektörü vektörel olarak çarpılırsa (3.2.32) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} &= (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & f(u) & g(u) \end{vmatrix} = (-g(u) + 2f(u))\vec{e}_1 \\
\vec{n} \wedge \overrightarrow{\alpha(u)} &= (N_d, N, \overrightarrow{\alpha(u)}) = (2f(u) - g(u), 0, 0) \quad (3.2.32)
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= (-f(u) - 2g(u)).(1 - \cos v). (0, -1, -2) + \cos v. (0, f(u), g(u)) \\
&\quad + \sin v. (2f(u) - g(u), 0, 0) \\
&= (0, f(u) - f(u). \cos v + 2g(u) - 2g(u). \cos v, 2f(u) - 2f(u). \cos v \\
&\quad + 4g(u) - 4g(u). \cos v + (0, f(u). \cos v, g(u). \cos v) \\
&\quad + (2f(u). \sin v - g(u). \sin v, 0, 0) \\
&= ((2f(u) + g(u). \sin v, f(u) + 2g(u)).(1 - \cos v), \\
&\quad 2f(u).(1 - \cos v) + g(u).(4 - 3\cos v))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki bu ise aranan sonuçtur. Böylece

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

parametrik eğrisinin $x + 2y - z = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) &= ((2f(u) + g(u). \sin v, f(u) + 2g(u)).(1 - \cos v), \\
&\quad 2f(u).(1 - \cos v) + g(u).(4 - 3\cos v))
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

şeklinde olur.

4. DÖNEL YÜZEYLERİN BİR UYGULAMASI OLAN WILLMORE YÜZEYLERİ

4.1. Willmore Yüzeyinin Elde Edilmesi

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid, yani standart Öklid ölçüsü ile donatılmış R^3 tarafından üretilen E^3 ü belirteceğiz. Burada söz konusu olan M Gauss eğriliğidir.

Önerme 4.1.1: $f: M \rightarrow E^3$ fonksiyonu E^3 içinde M kompakt yüzeyinin bir genişlemesi olsun. Sonra f ye ait Willmore fonksiyoneli yalnızca E^3 içinde S^2 standart küresinin çevresinde gömülü ise

$$W(f) \geq 4\pi \quad (4.1.1)$$

eşitsizliğini Willmore yüzeyi de sağlar.

İspat: Negatif olmayan bir M Gauss eğriliğinin M_0^+ olan kısmını alalım. S , kesişen ve yüzeyin normal denklemi yönünde kabul edilen bir afın hiper düzlem olmak üzere ve yüzeye herhangi bir $P \in M$ ilk noktasında teğeti negatif olmayan bir eğrilik vardır. Bunun anlamı

$$N: M \rightarrow S^2$$

Gauss yüzeyinde M_0^+ in sınırlandırması doğrultusunda örten ve bundan dolayı $\int_{M_0^+} K dA \geq 4\pi$ nin özel sınırları anlamına gelir. Buradan

$$\int_M H^2 dA \geq \int_{M_0^+} H^2 dA \geq \int_{M_0^+} K dA \geq 4\pi$$

eşitsizliği bulunur.

Her P noktası için sadece ve sadece $k_1 = k_2$ alınırsa yukarıdaki eşitsizlik elde edilir. Bu sadece M 'nin küre olarak gömülü olduğu tek durumdur.

Willmore varsayımı : $f: T^2 \rightarrow E^3$,

E^3 içerisinde T^2 iki boyutlu torunun immersiyonu olsun. Daha sonra f Willmore fonksiyonelinin karşılığı

$$W(f) \geq 2\pi^2$$

olur.

Bu varsayım hâlâ açıktır, ancak birkaç özel durumda kanıtlanabilmiştir. Eşitsizlik aslında, E^3 te daireler üreten torların yarıçapları oranı olan $\frac{1}{\sqrt{2}}$ yi elde eder. Şimdi E^3 içerisinde gömülü bir tüp olan T^2 kullanılacak bunun için Fenchel teoremi gereklidir.

Teorem 4.1.1 (Fenchel Teoremi): E^3 içerisinde basit kapalı bir γ eğrisi κ eğriliği ile verilsin. Sonra γ konveks eğrisinin yüzeyi sadece ve sadece

$$\int_{\gamma} |\kappa| ds \geq 2\pi \quad (4.1.2)$$

eşitsizliği ile verilir.

İspat: γ etrafında verilen r yarıçaplı M tüpünü alırsa

$$\kappa(s, v) = \gamma(s) + r(n(s) \cos v + b(s) \sin v)$$

yüzeyi için $s \in [0, l]$ ve $v \in [0, 2\pi]$, burada n ve b sırasıyla eğrinin normal ve binormali ayrıca l de eğrinin uzunluğudur. Birinci ve ikinci temel form katsayılarını hesaplanırsa

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-\kappa \cos v}{r(1 - r\kappa \cos v)}$$

ve

$$dA = \sqrt{EG - F^2} ds dv = r(1 - r\kappa \cos v) ds dv$$

bulunur, burada $r\kappa \cos v \neq 1$ 'dir. Sonra $\kappa = 0$ için $K = 0$ alınır ve $v \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ için $K \geq 0$ 'da M_0^+ üzerinde integrallenirse

$$\int_{M_0^+} K dA \geq - \int_{\gamma} |\kappa| ds \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos v dv = 2 \int_{\gamma} |\kappa| ds$$

bulunur, ayrıca; önerme (4.1.1) den

$$\int_{\gamma} |\kappa| ds \geq 2\pi$$

eşitsizliği elde edilir.

Sol eşitlik dış bükey bir eğri ve yalnızca bundan elde edilenlerle kanıtlanır. Her $s \in [0, l]$ sabiti için S^2 üzerinde Gauss yüzeyi'ni örten büyük bir Γ_s daresi, tüp üzerindeki daireden alındı. Kabul edelim ki Γ_s^+ pozitif Gauss üzerindeki eğrilikle birlikte tüp üzerindeki orijinal daire üzerinde herhangi bir noktaya karşılık gelen kapalı yarım daireyi versin. Her $s \in [0, l]$ için aynı P, Q uç noktaları alınırsa Γ_s^+ yarı daireleri sonrasında γ yüzeyi konveks bir eğri olur. γ eğriliği yardımıyla

$$\Gamma_{s_i}^+ \cap \Gamma_{s_j}^+ = \{p, q\}$$

elde edilir.

Dolayısıyla bu durumda Gauss normal yüzeyinin görüntü kümesi aslında 4π ve

$$\int_{\gamma} |\kappa| ds = 2\pi$$

şeklindedir. Bunu kanıtlamak için

$$\int_{\gamma} |\kappa| ds = 2\pi,$$

sonra da

$$\int_{M_0^+} K = 4\pi$$

olsun. Tüm yarı daireler, uç noktaları aynı olan p ve q ya sahip olmalı veya Γ_{s_i} ve Γ_{s_j} , keyfi iki antipodal noktada kesişen p ve q gibi farklı bitiş noktalarına sahip yarı daireler ile birbirine yakın iki ayrı büyük dairelerdir. Bunlardan biri pozitif Gauss eğriliği ile iki noktadan birine karşılık gelmek zorundadır. Böylece S^2 üzerinde, aynı noktaların görüntüsü olarak, pozitif Gauss eğriliği ile tüp üzerinde iki nokta elde edilmiş olur. Normal Gauss eğriliği yerel (kısmi) olarak her noktada diffeomorfizm olduğundan ve ayrıca S^2 nin her noktası M_0^+ noktalarının görüntüsü olduğundan

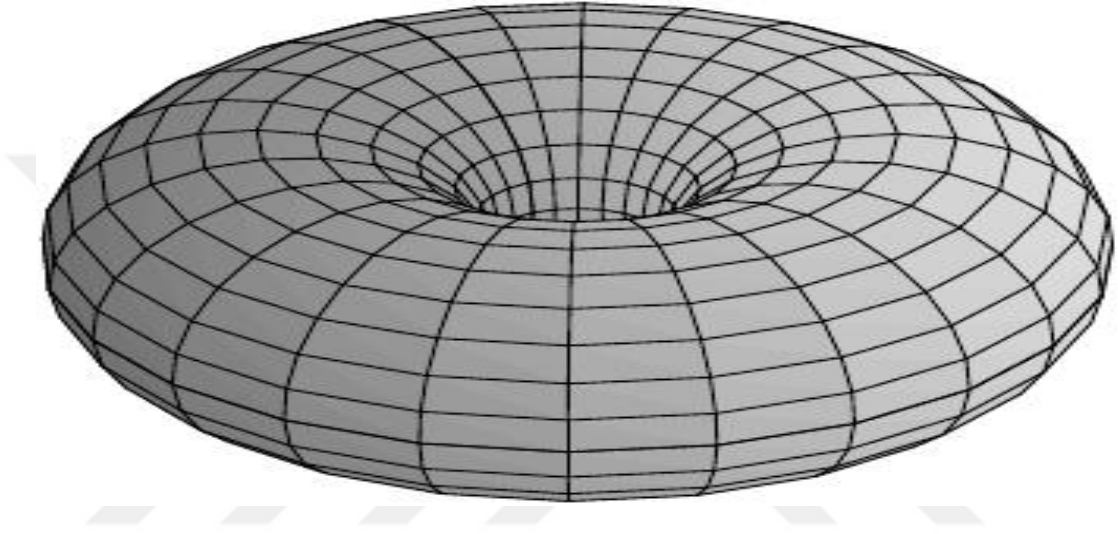
$$\int_{M_0^+} K dA > 4\pi$$

eşitsizliğinin olduğu söylenir.

M ile γ nın b binormal ara kesiti, Gauss eğriliğinin sıfır noktalarını verir. Bu nedenle bu binormal $p - q$ vektörleri paralel olmalıdır ve γ , normal düzleminden $p - q$ ya doğru yatmaktadır. Konveks notlar için yazılan

$$\int_u \kappa ds \geq 2\pi$$

ifadesi, $\kappa = |\kappa|$ durumunda da pozitif yönlendirme ile herhangi bir kapalı v eğrisi için de geçerlidir.



Şekil.4 : Yarı çapları oranı $1:\sqrt{2}$ olan tor. (Kaynak: [Willmore Surfaces](#), Joel PERSSONS)

Önerme 4.1.2 : M, E^3 içerisinde bir tor olsun; E^3 etrafında düzgün kapalı bir çember eğrisi olarak verilen γ , böyle bir durumda eğrinin merkezindeki ve her noktada paralel olan eğrinin normal düzlemi ile çemberin normal düzlemi γ üzerindeki noktadır. Sonuç olarak, Fenchel teoremi yardımıyla

$$\int_M H^2 dA \geq 2\pi$$

eşitsizliği ancak ve ancak dairenin yarıçapının $\frac{1}{\sqrt{2}}$ olması durumunda sağlanır.

İspat : M , yukarıda yarıçapı r olan bir tüp olarak kabul edilip ispat tamamlanabilir. Bunun anlamı; yüzeyin temel form katsayıları olan M ile H eğriliği

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

tarafından sağlanır.

Kabulden,

$$H = \frac{-(1 - 2r\kappa\cos v)}{2r(1 - r\kappa\cos v)}$$

ve

$$\int_M H^2 = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{(1 - 2r\kappa\cos v)^2}{4r^2(1 - r\kappa\cos v)^2} dv ds$$

elde edilir.

İntegral sonucu yorumlanırsa

$$\int_M H^2 = \pi \int_0^l \frac{1}{2r\sqrt{1 - r^2\kappa^2}} ds = \frac{\pi}{2} \int_0^l \frac{|\kappa|}{|\kappa r|\sqrt{1 - r^2\kappa^2}} ds$$

bulunur.

Şimdi $\kappa r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğu zaman $|\kappa r|\sqrt{1 - r^2\kappa^2}$ nin alacağı minimum değer $\frac{1}{2}$ dir.

$$\int_M H^2 \geq \pi \int_0^l |\kappa| ds$$

bırakılırsa, Fenchel Teoremi yardımıyla sonuçta ancak ve ancak $\kappa r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alınır

$$\int_M H^2 dA \geq 2\pi^2$$

elde edilir, yani M , $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oranına eşit olduğu zaman dayanak çemberi olur.

Düzdün bir daldırma (immersiyon) yüzeyi

$$\kappa: M \rightarrow R^3$$

olarak alınır.

Wilmore enerji denklemi, bükülme enerjisi de olan

$$W(r) = \int_{r(M)} H^2 ds \quad (4.1.3)$$

denklemi tarafından tanımlanır.

Burada

$$H = \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)$$

M yüzeyinin ortalama eğriliğini gösterir. Bu fonksiyonel ince kabuk veya biyolojik membranlarda elastik enerji için bir modeldir.

Bu uygulamalar genellikle minimal veya daha genel olarak Willmore fonksiyonelinin kritik noktaları ile ilgilidir. Buna karşılık R yüzeyinde

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0 \quad (4.1.4)$$

Willmore denklemini sağlamalıdır, burada Δ Laplace - Beltrami operatörü ve K Gauss eğriliği olarak tanımlanır. Dolayısıyla (4.1.3) denkleminin çözümü Willmore olarak adlandırılır.

4.2. Willmore Dönel Yüzey Denkleminin Çözümünün Aranması

$M(u, v); u \geq 0$ için bir yüzey ailesi olmak üzere, $M(0)$ başlangıç yüzeyide yüzey ailesinin bir elemanıdır. Burada $S(u), M(u)$ üzerinde şekil operatörü olup, $\vec{n}(u)$ da $M(u, v)$ üzerindeki normal yüzeyi ve $\|\cdot\|$ da $T_{M(u)}$ tanjant demeti üzerindeki endomorfizm uzayının üzerinde Frobenius normudur.

Şimdi bazı geometrik tanımları yapalım.

$$f: [-1,1] \rightarrow (0, \infty)$$

şeklinde düzgün bir fonksiyon olsun. f 'in grafiğinin oluşturduğu yüzeyi göz önüne alırsak bu parametrelerin hangileri olduğu

$$\phi: U \subset R^2 \rightarrow R^3$$

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (u, f(u) \cdot \cos v, f(u) \cdot \sin v)$$

tarafından gösterilmektedir.

Birinci temel formlar,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + (f'(u))^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix}$$

den

$$g_{11} = E = 1 + (f'(u))^2$$

$$g_{12} = F = 0$$

$$g_{22} = G = (f(u))^2$$

şeklinde bulunur; ikinci temel formlar,

$$L_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} \begin{pmatrix} -f''(u) & 0 \\ 0 & f(u) \end{pmatrix}$$

den,

$$L_{11} = L = \frac{-f''(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}}$$

$$L_{12} = M = 0$$

$$L_{22} = N = \frac{f(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}}$$

olarak bulunur ve ayrıca yüzeyin normali de,

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(u))^2}} \cdot (f'(u), -\cos v, -\sin v)$$

şeklindedir.

Genel olarak eğriliğin anlamını \vec{n} iç normaline göre H pozitif olduğunda yüzeyin konveks ve H negatif olduğunda da yüzeyin konkav olduğu durum kullanılır.

Gauss eğriliği ve eğrilik anlamları sırasıyla,

$$H = -\frac{f''(u)}{2(1 + (f'(u))^2)^{3/2}} + \frac{1}{2f(u)\sqrt{1 + (f'(u))^2}}$$

$$K = -\frac{f'(u)}{f(u) \cdot (1 + (f'(u))^2)^2}$$

tarafından verilir.

$u = 0$ için E , F ve G nin değerleri sırasıyla $E(0)$, $F(0)$, $G(0)$ olmak üzere $\Phi[u](Q)$ yüzeyinin yüzey alanı

$$A(u) = \text{Alan}(\Phi[u](Q)) = \iint_Q \left[\sqrt{EG - F^2} (1 - 2uhH) + O(u^2) \right] dudv$$

şeklinde verilebilir. Bu denklemin u ya göre türevi alınır ise

$$A'(u) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} dudv + [O(u^2)]'$$

elde edilir.

$A'(u)$, $u = 0$ için

$$A'(0) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} dudv$$

şeklinde elde edilir.

$$A'(0) = -2 \iint_Q Hh\sqrt{EG - F^2} dudv$$

denklemleriyle tanımlanan döneleli yüzey denkleminde ortalama eğrilik vektör alanı,

$$\vec{H} = H\vec{n}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{f'(u) \cdot (1 + (f'(u))^2) - f(u) \cdot f''(u)}{2f(u) \cdot (1 + (f'(u))^2)^2}, \\ \frac{-\cos v \cdot (1 + (f'(u))^2) - f(u) \cdot f''(u)}{2f(u) \cdot (1 + (f'(u))^2)^2}, \frac{-\sin v \cdot (1 + (f'(u))^2) - f(u) \cdot f''(u)}{2f(u) \cdot (1 + (f'(u))^2)^2} \end{array} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Bu ifadenin Laplace alınırsa,

$$\Delta \vec{H} = \left[\frac{-1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\partial u \left(\frac{G\partial uH - F\partial vH}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right) - \partial v \left(\frac{F\partial uH - E\partial vH}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right]$$

bulunur.

Teorem 4.2.1 : Her $a > 0$ için $f \in C^\infty([-1,1], [a, \infty])$ olan düzgün bir fonksiyon vardır öyleki yüzeyin değişimine karşılık gelen

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$$

Willmore yüzey denklemleri için Dirichlet probleminin çözülmesi gerekir.

Burada

$$\Delta H = \frac{1}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{d}{du} \left(\frac{f}{\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{dH}{du} \right)$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$H = \frac{f''(u)}{2(1+(f'(u))^2)^{3/2}} + \frac{1}{2f(u)\sqrt{1+(f'(u))^2}}$$

ve

$$K = -\frac{f'(u)}{f(u) \cdot (1+(f'(u))^2)}$$

kullanılarak K, H açısından

$$K = \frac{2}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \left(H - \frac{1}{2f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\Delta H = \frac{1}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{dH}{du} \right)$$

ve

$$K = \frac{2}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \left(H - \frac{1}{2f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \right)$$

ifadeleri kullanarak

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0$$

denklemini tekrar yazılır ise,

$$\frac{d}{du} \left(\frac{f}{\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{dH}{du} \right) + 2H(H^2 - K)f\sqrt{1+(f'(u))^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left(\frac{f}{\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{dH}{du} \right) \\
& + 2Hf\sqrt{1+(f'(u))^2} \left(H^2 - \frac{2}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \left(H - \frac{1}{2u\sqrt{1+(f'(u))^2}} \right) \right) = 0 \\
& \frac{d}{du} \left(\frac{f}{\sqrt{1+(f'(u))^2}} \frac{dH}{du} \right) \\
& + 2H \left((H)^2 f\sqrt{1+(f'(u))^2} - 2H + \frac{1}{f\sqrt{1+(f'(u))^2}} \right) = 0 \tag{4.2.1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin analitik çözümleri olmadığından nümerik çözümleri bulunabilir.

Yüzeyin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{(f(u))^2 \cdot (1 + (f'(u))^2) - f(u) \cdot f''(u)}{2(f(u))^2 \cdot (1 + (f'(u))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde verilir ve her minimal yüzey Willmore yüzeyi olduğundan $H = 0$ ise

$$(f(u))^2 \cdot (1 + (f'(u))^2) - f(u) \cdot f''(u) = 0$$

elde edilir. $f(u) \neq 0$ olduğundan

$$1 + (f'(u))^2 - f(u) \cdot f''(u) = 0 \tag{4.2.2}$$

dır.

Bu denklemin çözümü

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left\{ f(u) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-e^{c(1)}u - 2c(1) - e^{c(1)}c(2)} (e^{2c(1)} + e^{2e^{c(1)}(u+c(2))}) \right\}, \right. \\
& \left. \left\{ f(u) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-e^{c(1)}u - 2c(1) - e^{c(1)}c(2)} + e^{e^{c(1)}u + e^{c(1)}c(2)} \right\} \right\} \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

şeklinindedir. Bu çözüm Willmore dönele yüzey denklemini sağlar.

f in sabit ve lineer durumlarında Willmore denklemi sağlanmadığından daha başka analitik veya nümerik çözümler aranabilir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında dönel yüzeylerden faydalanılarak Willmore yüzey denkleminin yeni bir czm aranmış ve elde edilen sonuç gösterilmiştir. Elde edilen bu sonuç sayesinde Willmore dönel yüzeyinin diferansiyel olarak elde edilen yeni denklem formunun czmlerinin yapılıp yapılamayacağı rahatlıkla yorumlanabilir olmuştur. Elde edilen (4.2.1) denkleminin analitik olarak czmlerinin bulunamayacağı sonucuna ulaşılmış bundan dolayı nümerik czmler aranarak (4.2.3) czmlerine ulaşılmıştır.

Diđer taraftan bulunan (4.2.3) czm elastik yüzeylerin, sıvı yüzeylerin yüzey gerilimlerinden elde edilen diferansiyel denklemlerin bir czm olarak gösterilebilir.

Ayrıca (4.2.1) denklemini Matlab veya benzer bir matematiksel program yardımı ile czlerek Willmore dönel yüzey denklemini sağladığı gösterilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Blaschke, W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. III*, Leipzig, Springer, (1929).
- [2] Willmore, T. J. *Note on embedded surfaces*, Ann. Stiint. Univ. Al. I. Cuza, Iasi. Sect. I a Mat. (N.S.) **11B** (1965), 493-496.
- [3] Weiner, J. L. *On the Problem of Chen. Willmore. et al.* , Indiana Univ. Math. Jour. (1978), 19-35.
- [4] White, J. H. *A Global Invariant of Conformal Mappings in Space*, Proc. Amer. Math. Soc. (1973), 162-164.
- [5] Demirok, T. Dönel Yüzeyler, Matematik Araştırma Projesi, Ankara, Proj. No:9225015, 1-11.
- [6] Persson, J. *Willmore surfaces*, Master's thesis Lund University, İsveç **E9** (2003).
- [7] Willmore, T. J. *An introduction to differential geometry*, Oxford University Press, (1959).
- [8] Willmore, T. J. *Riemannian Geometry*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1993).
- [9] Gray, A. 1998. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press. MR2253203(2007d:53001). Zbl 0795.53001.
- [10] Hacısalihoğlu H. H. 2000. *Diferensiyel Geometri Cilt II*, Ertem Matbaa.
- [11] Oprea, J. 2000. *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, The American Mathematical Society.
- [12] Kahraman, F. *Minkowski Uzayında Sabit Ortalama Eğrilikli Dönel Yüzeyler*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2010.
- [13] Konopelchenko, B. G. and Taimanov, I. A. *Generalized Weierstrass formulae, soliton equations and Willmore surfaces*, Master's Thesis, Cornell University, ABD Newyork, 1995.

- [14] Brander, D. Technical University of Denmark and Wang, P. Fujian Normal University Björling's Problem and DPW for Willmore Surfaces, Article, 2014.
- [15] Thomsen, G. Uber konforme Geometrie I: Grundlagen der konformen Flächentheorie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1923
- [16] Pedit, Franz; Pinkall, Ulrich; et al. Quaternionic Holomorphic Geometry and Willmore surfaces in S^4 . To appear. (Check www-sfb288.math.tu-berlin.de/Publications/Preprints.html)
- [17] Chen, B-Y. Some Conformal Invariants of Submanifolds and Their Application, Boll. Univ. Mat. Ital. (1973).

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Anamur’da doğan Nejdet KARATAŞ, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Akine ilkokulu, Anamur İlköğretim okulu ve Anamur Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2008 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2012 yılında başarıyla bitirmiştir.

2016 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü’nde Diferansiyel Geometri Alanı’nda başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Telefon: 0(530) 347 23 99

E-posta: sessiz_gece888@hotmail.com