T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BİNOMİYEL ÇİFT TOPLAMLAR

TUĞBA GÖRESİM TOSKA

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Yozgat 2019

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BİNOMİYEL ÇİFT TOPLAMLAR

TUĞBA GÖRESİM TOSKA

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Yozgat 2019

	YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
	TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111317001 numaralı öğrencisi Tuğba GÖRESİM TOSKA'nın hazırladığı "**FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BİNOMİYEL ÇİFT TOPLAMLAR**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 25/07/2019 Perşembe günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile karar verilmiştir.

Başkan **:** Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Jüri Üyesi (Danışman) **:** Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

Jüri Üyesi **:** Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 01/08/19 tarih ve 35 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

01/08/2019

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

KYT-FRM-110/00

İÇİNDEKİLER

Sayfa

FIBONACCI VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BİNOMİYEL ÇİFT TOPLAMLAR

Tuğba GÖRESİM TOSKA

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 82

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, yapılan çalışma ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, Fibonacci ve Lucas sayıları tanıtılmış, Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili temel özdeşlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fibonacci sayılarını içeren binomiyel çift toplamlar ve alterne benzerleri verilmiştir. Özgün bir çalışmadan oluşan dördüncü bölümde ise Lucas sayılarını içeren binomiyel çift toplamlar ve alterne toplamlar hesaplanmış ve tüm toplamlar Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımı olarak ifade edilebilmiştir. Son bölümde ise yapılan çalışma değerlendirilmiş ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Binomiyel toplamlar, Binomiyel çift toplamlar, Alterne Binomiyel çift toplamlar.

BINOMIAL DOUBLE SUMS INVOLVING FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

Tuğba GÖRESİM TOSKA

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2019; Page: 82

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Funda TAŞDEMİR

ABSTRACT

This thesis consists of four sections. In the first section, the literature information is given about study conducted. In the second section, Fibonacci and Lucas numbers are introduced and basic identities about Fibonacci and Lucas numbers are given. In the thirth section, binomial double sums including Fibonacci numbers and alternating analogous are given. In the fourth section consisted of an original study, binomial double sums and alternating sums including Lucas numbers are computed and all sums are expressed as multiplication of Fibonacci and Lucas numbers. In the last section, the study is evaluated and given some suggestions.

Keywords: Fibonacci numbers, Lucas numbers, Binomial sums, Binomial double sums, Alternating Binomial double sums.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamı gerçekleştirmede, değerli bilgilerini, zamanını ve sevgisini benimle paylaşan, kendisine her zaman rahatlıkla danışabildiğim sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan ve desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin az kalacağı yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini benden esirgemeyen, hep yanımda olan değerli eşim Mehmet TOSKA'ya, biricik oğlum Osman Yekta TOSKA'ya, hiçbir zaman desteklerini ve bilgilerini esirgemeyen değerli öğretim üyelerinden Doç. Dr. Murat BABAARSLAN, Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürler.

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci, 13. yüzyılda yaşamış yenilikçi matematikçilerden biridir. İtalya'nın Pisa şehrinde doğduğu için Leonardo Pisano ya da Pisalı Leonardo olarak da biliniyordu. Babası Afrika'nın kuzey kıyısında Bugia’de gümrük tahsildarıyken Fibonacci’yi Hint - Arap sayı sistemi ve hesaplama yöntemleri ile tanıştırdı. Yaygın seyahat ve hesaplamalı sistemlerin kapsamlı çalışmasından sonra Fibonacci, 1202'de, Hint - Arap rakamlarını hesaplamada nasıl kullanıldığını açıkladığı Liber Abaci'yi yazdı. Fibonacci, Liber Abacci adlı kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir soru sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, herhangi n. ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır.

19. yüzyılda Fransız matematikçisi Edouard Lucas bu sayı örüntüsüne Fibonacci dizisi adını verdi.

Edouard Lucas var olan Fibonacci sayı dizisindeki başlangıç değerlerini değiştirerek Lucas sayılarını oluşturmuştur. Bunlar;

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, … dir. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin çeşitli özellikleri ve genellemeleri için [4, 5, 18]’e başvurabiliriz. Fibonacci veya Lucas sayıları ve binom katsayılarının çarpımlarını içeren birçok toplam vardır [1, 2, 17, 20]. Örneğin [1] de yazarlar aşağıdaki toplamları hesaplamıştır:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{4k} = 3^nF_{2n},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}F_{5k} = 5^nF_{2n}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}F_{6k} = 8^nF_{2n},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k F_{2k}=(-1)^n F_{3n}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k F_{5k}=(-1)^n 5^n F_{3n}.$$

Binomiyel toplamlar çeşitli metodlarla birçok yazar tarafından araştırılmıştır [12,13]. Örneğin [13] te yazarlar T_n genelleştirilmiş Fibonacci veya Lucas dizisi olmak üzere aşağıdaki şekildeki toplamları çalışmışlardır:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}T_{k(a+bi)}\ T_{k(c+di)}, \qquad \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i T_{k(a+bi)}\ T_{k(c+di)}$$

Kılıç ve diğ. [8] Fibonacci ve Lucas sayılarının kuvvetlerinin binomiyel toplamları için aşağıdaki toplamları ispatlamıştır:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{(2k+\delta)t}^{2m+\varepsilon}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_{(2k+\delta)t}^{2m+\varepsilon}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k F_{(2k+\delta)t}^{2m+\varepsilon}, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k L_{(2k+\delta)t}^{2m+\varepsilon}$$

Burada t pozitif bir tamsayı ve $\delta, \varepsilon \in \{0,1\}$ dir.

Kılıç ve Ionascu [11], $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi bir eşitlik bulmuşlardır:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{n+k}(a^k+a^{-k})=\frac{1}{a^n}(a+1)^{2n}+\binom{2n}{n}.$$

Khan ve Kwong [6], binomiyel toplamların aşağıdaki iki tipini çalışmışlardır:

$$\sum_{h=0}^{n}h^m\binom{n}{h}U_h, \quad \sum_{h=0}^{n}(-1)^{n+h}h^m\binom{n}{h}U_h.$$

Kılıç ve Arıkan [9], genelleştirilmiş ikinci, üçüncü ve daha yüksek mertebeden lineer reküranslarla ilişkili aşağıdaki yeni çift binom katsayılı çift toplamları elde etmişlerdir:

$$\sum_{1\le i,j\le n} \binom{n-j}{j}\binom{i+j}{j}(-1)^i = F_{n+1},$$

$$\sum_{1\le i,j\le n} \binom{i}{j-1} = F_{n+3} - 1\,.$$

Kılıç ve Belbachir [10], tarafından genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili kompleks katsayılı çeşitli çift binomiyel toplamlar ve binomiyel çift toplamlar verilmiştir.

$$\sum_{i,j} \binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i} = F_{2n+2}$$

dir.

Kılıç [7], aşağıdaki formdaki genelleştirilmiş alterne binomiyel toplamları hesaplamıştır:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f(n,i,k,t)$$

Burada $f(n,i,k,t)$; $U_{kti}V_{kn-k(t+2)i}$, $U_{kti}V_{kn-kti}$ ve $U_{tki}V_{(k+1)tn-(k+2)ti}$ dir.

Kılıç ve Arıkan [9], aşağıdaki formdaki tek binom katsayılı çift toplamları hesaplamışlardır:

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{n+i}{j-i} = F_{2n+3} - 2^n, \qquad \sum_{0\le i,j\le n} (-1)^j \binom{n+i}{j-i} = (-1)^n F_{2n}$$

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i+j}{i-j} = F_{2n+2}\,, \qquad \sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j-i} = F_{n+3} - 1.$$

Kılıç ve Taşdemir [14], ilk kez aşağıdaki formdaki genelleştirilmiş Fibonacci veya Lucas katsayılı binomiyel çift toplamları incelemişlerdir:

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} U_{ri+tj}\,, \quad \sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} V_{ri+tj}\,,$$

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\,U_{ri+tj}\,,\quad \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\,V_{ri+tj}.$$

r, t tek tamsayılar ve k çift tamsayı olmak üzere

$$\sum_{0\le i,j\le k}\binom{i}{j}U_{ri+2tj}=\frac{\Delta^{\frac{k}{2}}U_t^{k+1}\left[V_{(t+r)(k+1)}+\Delta U_tU_{k(t+r)}\right]-U_tV_{t+r}}{\Delta U_t^2+\Delta U_tU_{t+r}-1},$$

$$\sum_{0\le i,j\le k}\binom{i}{j}V_{ri+2tj}=\frac{\Delta^{\frac{k}{2}+1}U_t^{k+1}\left[U_tV_{k(t+r)}+U_{(t+r)(k+1)}\right]+\Delta U_tU_{t+r}-2}{\Delta U_t^2+\Delta U_tU_t-1}.$$

k tek tamsayı olmak üzere

$$\sum_{0\le i,j\le k}\binom{i}{j}U_{ri+2tj}=\frac{\Delta^{\frac{k+1}{2}}U_t^{k+1}\left[U_tV_{k(t+r)}+U_{(t+r)(k+1)}\right]-U_tV_{t+r}}{\Delta U_t^2+\Delta U_tU_{t+r}-1},$$

$$\sum_{0\le i,j\le k}\binom{i}{j}V_{ri+2tj}=\frac{\Delta^{\frac{k+1}{2}}U_t^{k+1}\left[\Delta U_tU_{k(t+r)}+V_{(t+r)(k+1)}\right]+\Delta U_tU_{t+r}-2}{\Delta U_t^2+\Delta U_tU_{t+r}-1}.$$

Kılıç ve Taşdemir [15], bazı r, t tamsayıları için aşağıdaki formdaki tek binom katsayılı çift toplamları incelemiş ve hesaplamışlardır:

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}F_{ri+tj}$$

Benzer şekilde yukarıdaki formdaki toplamların

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\,F_{ri+tj}\ ,\quad \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j\,F_{ri+tj}\ ,\quad \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\,F_{ri+tj}$$

alterne benzerlerini de hesaplamışlardır.

Bu tez çalışmasında [14,15] daki toplam formüllerinden yola çıkarak Lucas sayılarını içeren binomiyel çift toplamlar ve alterne toplamlar hesaplanarak, elde edilen sonuçlar Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımı olarak ifade edilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tanım ve teoremler verilmektedir.

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 2.1.1. (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir ve n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Lucas sayıları denir ve n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. (Altın Oran)

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. İlk olarak kimler tarafından keşfedildiği bilinmese de, Mısırlılar'ın ve Yunanlılar'ın bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, milattan önce 300′lü yıllarda yazdığı "elementler" adlı tezinde "ekstrem ve önemli oranda bölmek" olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların Keops Piramidinde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmada sunduğu resimlerde kullanıldığı bilinen "altın oran" , "Fibonacci Sayıları" olarak da bilinmektedir.

Bu oranın kısaca gösterimi:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

şeklindedir.

Bir Fibonacci sayısının kendinden önceki Fibonacci sayısına bölümü ile elde edilen sonuç, 1,618…'dir. Örneğin; 6765 / 4181 = 1,618… sonucunu vermektedir. Bu durum, 89!dan daha küçük olan Fibonacci sayıları için 0,01 gibi küçük bir farklılıkla ortaya çıksa da, büyük sayıların tamamında sonuç aynıdır. Yani dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe Altın Oran'a yani 1.618'e yaklaşır, 89/55 ve sonrasında ise 1.618...'de sabitlenir.

Teorem 2.1.4. (Binet Formülleri)

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olmak üzere F_n ve L_n için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

F_n ve L_n için Binet formüllerinden

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \quad \text{ve} \quad L_{-n} = (-1)^n L_n$$

elde edilir.

Teorem 2.1.5. (Binom Teoremi)

x, y reel sayılar ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

dir. Burada

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

dir.

2.2. Toplam Notasyonu

$r, n \in \mathbb{Z}$ ve $r \leq n$ olmak üzere

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ve $f(k) = a_k$ olsun. $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$terimlerinin toplam ifadesi

$$a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \dots + a_n = \sum_{k=r}^{n} a_k$$

ile tanımlanır.

Toplam sembolünün temel özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $\sum_{k=1}^{n} b = nb\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,,$

2. $\sum_{k=r}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=r}^{n} a_k \mp \sum_{k=r}^{n} b_k\,,$

3. $\sum_{k=r}^{n} b(a_k) = b \sum_{k=r}^{n} a_k\,, \qquad b \in \mathbb{R}\,,$

4. $\sum_{0 \leq i,j \leq k} \binom{i}{j} x^i y^j = \sum_{0 \leq i \leq k} x^i \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{i}{j} y^j.$

2.3. Özdeşlikler

1. Her m, n tamsayısı için

$$F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = F_m L_n$$

elde edilir **[**16].

2. Her m, n tamsayısı için

$$F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m} = L_m F_n$$

bulunur [16].

3. Her n tamsayısı için

$$L_{3n} = L_n[L_{2n} - (-1)^n]$$

elde edilir [16].

4. Her n tamsayısı için

$$F_{3n} = F_n[L_{2n} + (-1)^n]$$

bulunur [16].

5. Her m, n tamsayısı için

$$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_m L_n$$

elde edilir [20].

6. Her m, n tamsayısı için

$$L_{n+m} - (-1)^m L_{n-m} = 5F_m F_n$$

bulunur[20].

7. Her n tamsayısı için

$$L_{2n} + 2(-1)^n = {L_n}^2$$

elde edilir [20].

8. Her n tamsayısı için

$$L_{2n} - 2(-1)^n = 5{F_n}^2$$

elde edilir [20].

3. FIBONACCİ SAYILARINI İÇEREN BİNOM KATSAYILI ÇİFT TOPLAMLAR

3.1. Binomiyel Çift Toplamlar

Lemma 3.1.1. $x + xy \neq 1$ olmak üzere her x, y reel sayısı için

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} x^i y^j = \frac{(x+xy)^{n+1}-1}{x+xy-1}$$

dir [14].

Lemma 3.1.2. Her m, n tamsayısı için aşağıdaki eşitlik vardır.

$$F_{2m+2n} - F_{2m} - F_{2n} = \begin{cases} 5F_m F_n F_{m+n}\,, & m,n \text{ çift} \\ L_m L_n F_{m+n}\,, & m,n \text{ tek} \\ L_m F_n L_{m+n}\,, & m \text{ tek}, n \text{ çift} \end{cases}$$

dir [14].

Teorem 3.1.3. [16] Her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} F_{i+j} = \frac{1}{2} \begin{cases} F_{\frac{3n}{2}} L_{\frac{3n+4}{2}}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ F_{\frac{3n+1}{2}} L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ L_{\frac{3n}{2}} F_{\frac{3n+4}{2}}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ L_{\frac{3n+1}{2}} F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

2.

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} F_{4ti+j} = \frac{1}{L_{2t+1}} \begin{cases} F_{(2t+1)n} L_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ çift} \\ L_{(2t+1)n} F_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

3.

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} F_{2(2t+1)i+j} = \frac{F_{2n(t+1)} F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}} \qquad (t \neq -1)$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}F_j=\begin{cases}F_nL_{n+1}, & n \text{ çift}\\ F_{n+1}L_n, & n \text{ tek}\end{cases}$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}F_{2i-j}=\frac{1}{2}\begin{cases}F_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+4}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+4}{2}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ L_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}F_{(4t+1)i-j}=\frac{1}{L_{2t+1}}\begin{cases}F_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ çift}\\ L_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

7.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}F_{(4t+3)i-j}=\frac{F_{2n(t+1)}F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}}\qquad (t\neq -1)$$

3.2. Alterne Binomiyel Çift Toplamlar

Bu kısımda, bir önceki kısımda verilen toplamların alterne halleri verilecektir.

3.2.1. $(-1)^i$ Katsayılı Çift Toplamlar

Lemma 3.2.1.1. Her x, y reel sayısı için $x+xy\neq -1$ olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i x^i y^j=\frac{(-1)^n(x+xy)^{n+1}+1}{x+xy+1}$$

dir [15].

Lemma 3.2.1.2. Her m, n tamsayısı için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$F_{2m+2n} + F_{2m} + F_{2n} = \begin{cases} 5F_m F_n F_{m+n}, & m, n \text{ tek} \\ L_m L_n F_{m+n}, & m, n \text{ çift} \end{cases}$$

dir [15].

Lemma 3.2.1.3. m, n çift tamsayıları için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$F_{2m+2n} + F_{2m} - F_{2n} = F_m L_n L_{m+n}$$

dir [15].

Lemma 3.2.1.4. m tek, n çift tamsayıları için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$F_{2m+2n} - F_{2m} + F_{2n} = 5F_m F_n F_{m+n}$$

dir [15].

Teorem 3.2.1.5. [15] Her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0 \le i, j \le n} \binom{i}{j} (-1)^i F_{i+j} = \frac{(-1)^n}{2} \begin{cases} F_{\frac{3n}{2}} L_{\frac{3n+2}{2}}, & n \equiv 0 \ (\text{mod } 4) \\ F_{\frac{3n-1}{2}} L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 0 \ (\text{mod } 4) \\ L_{\frac{3n}{2}} F_{\frac{3n+2}{2}}, & n \equiv 0 \ (\text{mod } 4) \\ L_{\frac{3n-1}{2}} F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 0 \ (\text{mod } 4) \end{cases}$$

2.

$$\sum_{0 \le i, j \le n} \binom{i}{j} (-1)^i F_{4ti+j} = \frac{(-1)^n F_{(2t+1)n} F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

3.

$$\sum_{0 \le i, j \le n} \binom{i}{j} (-1)^i F_{(4t+2)i+j} = \frac{(-1)^n}{L_{2(t+1)}} \begin{cases} L_{2(n+1)(t+1)} F_{2n(t+1)}, & n = 2k \\ F_{2(n+1)(t+1)} L_{2n(t+1)}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i F_j = (-1)^n F_n F_{n+1}$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i F_{2i-j} = \frac{(-1)^n}{2}\begin{cases} F_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+2}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ F_{\frac{3n-1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ L_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ L_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i F_{(4t+1)i-j} = \frac{(-1)^n F_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

7.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i F_{(4t+3)i-j} = \frac{(-1)^n}{L_{2(t+1)}}\begin{cases} L_{2(n+1)(t+1)}F_{2n(t+1)}, & n=2k \\ F_{2(n+1)(t+1)}L_{2n(t+1)}\ , & n=2k+1 \end{cases}$$

3.2.2. $(-1)^j$ Katsayılı Çift Toplamlar

Lemma 3.2.2.1. Her x, y reel sayısı için $(x-xy)\neq 1$ olsun. Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j x^i y^j = \frac{(x-xy)^{n+1}-1}{x-xy-1}$$

dir [15].

Teorem 3.2.2.2. [15] Negatif olmayan her n tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j F_j = -\begin{cases} F_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n+4}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{\frac{n+3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n+4}{2}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ L_{\frac{n+3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j F_{i+j} = 0$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j F_{2i-j} = 0$$

3.2.3. $(-1)^{i+j}$ Katsayılı Çift Toplamlar

Lemma 3.2.3.1. Her x, y reel sayısı için $x - xy \neq -1$ olsun. Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}x^i y^j = \frac{(-1)^n(x-xy)^{n+1}+1}{x-xy+1}$$

dir [15].

Teorem 3.2.3.2. [15] Negatif olmayan her n tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j} F_j = (-1)^{n+1}\begin{cases} F_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n-2}{2}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{\frac{n-3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ L_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} F_{i+j} = 0$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} F_{2i-j} = 0\,.$$

4. LUCAS SAYILARINI İÇEREN BİNOMİYEL ÇİFT TOPLAMLAR

Orijinal bir çalışmadan oluşan bu bölümde [14,15] daki toplam formüllerinden yola çıkarak Lucas sayılarını içeren binomiyel çift toplamlar ve alterne toplamlar hesaplanarak elde edilen sonuçlar Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımı olarak ifade edilmiştir.

4.1. Binomiyel Çift Toplamlar

Lemma 4.1.1. Her m ve n tamsayısı için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$L_{2(m+n)} + L_{2n} - L_{2m} - 2 = \begin{cases} L_m L_n L_{m+n}\,, & m \text{ çift}, n \text{ tek} \\ 5L_m F_n F_{m+n}\,, & m \text{ ve } n \text{ çift} \\ 5F_m L_n F_{m+n}\,, & m \text{ ve } n \text{ tek} \end{cases}$$

dir [15].

İspat: Eşitliğin sağ tarafındaki ilk durum için ispat yapılırsa

$$\begin{aligned} L_m L_n L_{m+n} &= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \beta^m\alpha^n)(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \beta^{n-m} + \alpha^{n-m})(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= \alpha^{2m+2n} + (-1)^{m+n} + \beta^{2m+2n} + (-1)^{m+n} + \alpha^{2n} \\ &\qquad + \beta^{2n} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) \\ &= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2n} + \beta^{2n} - (\alpha^{2m} + \beta^{2m}) - 2 \\ &= L_{2(m+n)} + L_{2n} - L_{2m} - 2 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde diğer durumlar için de ispat yapılır.

Lemma 4.1.2. Her m ve n tamsayısı için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$L_{2(m+n)} + L_{2n} + L_{2m} + 2 = \begin{cases} 5L_mF_nF_{m+n}, & m \text{ çift}, n \text{ tek} \\ L_mL_nL_{m+n}, & m \; ve \; n \text{ çift} \\ 5F_mL_nF_{m+n}, & m \; ve \; n \text{ tek} \end{cases}$$

dir [15].

İspat: Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci durum için Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_mL_nL_{m+n} &= (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \beta^m\alpha^n)(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= (\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \beta^{n-m} + \alpha^{n-m})(\alpha^{m+n} + \beta^{m+n}) \\ &= \alpha^{2m+2n} + (-1)^{m+n} + \beta^{2m+2n} + (-1)^{m+n} + \alpha^{2n} \\ &\quad + \beta^{2n} + \alpha^{2m} + \beta^{2m} \\ &= \alpha^{2m+2n} + \beta^{2m+2n} + \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2m} + \beta^{2m} + 2 \\ &= L_{2(m+n)} + L_{2n} + L_{2m} + 2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde diğer durumlar için de ispat yapılır.

Aşağıdaki teorem ilk sonuç olarak verilebilir.

Teorem 4.1.3. [19] Her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} L_{4ti+j} = \frac{1}{L_{2t+1}} \begin{cases} L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ çift} \\ 5F_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{i+j}=\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{F_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{F_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+2)i+j}=\frac{L_{2n(t+1)}F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}}\qquad (\mathrm{t}\neq -1)$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+1)i-j}=\frac{1}{L_{2t+1}}\begin{cases}L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ çift}\\ 5F_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{2i-j}=\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{F_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{F_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+3)i-j}=\frac{L_{2n(t+1)}F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}}\qquad (\mathrm{t}\neq -1)$$

İspat:

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{4ti+j}$$

toplam ifadesi $n=2k$ durumu için incelenirse, Lemma 3.1.1' den

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(\alpha^{4ti+j}+\beta^{4ti+j})=\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}\alpha^{4ti+j}+\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}\beta^{4ti+j}$$

$$=\frac{(\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1})^{2k+1}-1}{\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}-1}-\frac{(\beta^{4t}+\beta^{4t+1})^{2k+1}-1}{\beta^{4t}+\beta^{4t+1}-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t+2}$; $\beta^{4t}+\beta^{4t+1}=\beta^{4t+2}$ yukarıdaki ifade de yerine yazılırsa

$$\frac{\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-1}{\alpha^{(4t+2)}-1}+\frac{\beta^{(4t+2)(2k+1)}-1}{\beta^{(4t+2)}-1}$$

olur. $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında elde edilen son ifade

$$\frac{(\beta^{4t+2}-1)(\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-1)+(\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{(4t+2)(2k+1)}-1)}{(\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{4t+2}-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2}-\alpha^{4t+2}-\beta^{4t+2}+1}$$

$$\times[\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-\beta^{4t+2}-\alpha^{(4t+2)(2k+1)}+1+\alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(2k+1)}$$

$$-\alpha^{4t+2}-\beta^{(4t+2)(2k+1)}+1]$$

$$=\frac{\alpha^{(4t+2)2k}-\beta^{4t+2}-\alpha^{(4t+2)(2k+1)}+1+\beta^{(4t+2)2k}-\alpha^{4t+2}-\beta^{(4t+2)(2k+1)}+1}{2-L_{4t+2}}$$

Özdeşlik 7 ve Lemma 4.1.1' den son ifade

$$\frac{-L_{(4t+2)2k}+L_{(4t+2)(2k+1)}+L_{4t+2}-2}{L_{4t+2}-2}$$

$n=2k$ yazıldığında

$$=\frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}L_{2t+1}}{{L_{2t+1}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{4ti+j}=\frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}}{L_{2t+1}}$$

elde edilir.

$n=2k+1$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

2. Toplam ifadesi $n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için ispatlanırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{i+j}=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}L_{i+j}=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(\alpha^{i+j}+\beta^{i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}\alpha^{i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}\beta^{i+j}$$

Lemma 3.1.1' den

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}\alpha^{i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}\beta^{i+j}=\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+1}-1}{\alpha+\alpha^2-1}+\frac{(\beta+\beta^2)^{4k+1}-1}{\beta+\beta^2-1}$$

α ve $\beta,\ \ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3=\alpha^2+\alpha,\quad \alpha^2+\alpha-1=2\alpha;\quad \beta^3=\beta^2+\beta,\ \beta+\beta^2-1=2\beta$ ifade de yerine

yazılırsa $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+3}-1}{2\alpha}+\frac{\beta^{12k+3}-1}{2\beta}=-\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+2}-\beta^{12k+2}-\alpha-\beta]$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{12k+2}+\beta^{12k+2}+1]$$

$$\frac{1}{2}(L_{12k+2}+1)$$

Özdeşlik 3'de $n=6k+1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}L_{i+j}=\frac{1}{2}\frac{L_{3(6k+1)}}{L_{6k+1}}$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{i+j}=\frac{1}{2}\frac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}$$

dir.

$n=4k+1,\;\; k\in\mathbb{Z}$ için

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{i+j}=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}L_{i+j}=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(\alpha^{i+j}+\beta^{i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}\alpha^{i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}\beta^{i+j}$$

Lemma 3.1.1' den

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}\alpha^{i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}\beta^{i+j}=\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+2}-1}{\alpha+\alpha^2-1}+\frac{(\beta+\beta^2)^{4k+2}-1}{\beta+\beta^2-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3=\alpha^2+\alpha,\quad \alpha^2+\alpha-1=2\alpha;\quad \beta^3=\beta^2+\beta,\; \beta+\beta^2-1=2\beta$ ifade de yerine

yazılırsa, $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+6}-1}{2\alpha}+\frac{\beta^{12k+6}-1}{2\beta}$$

$$=-\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+5}-\beta^{12k+5}-\alpha-\beta]$$

$$\frac{1}{2}[\alpha^{12k+5}+\beta^{12k+5}+1]$$

$$=\frac{1}{2}(L_{12k+5}+L_1)$$

Özdeşlik 5 den $m=6k+2, n=6k+3$ alınırsa son ifade

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}L_{i+j}=\frac{1}{2}L_{6k+2}L_{6k+3}$$

$n=4k+1$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{i+j}=\frac{1}{2}L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}$$

elde edilir.

$n=4k+2$ ve $n=4k+3$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

3. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanılırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+2)i+j}=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(\alpha^{(4t+2)i+j}+\beta^{(4t+2)i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}\alpha^{(4t+2)i+j}+\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}\beta^{(4t+2)i+j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3})^{n+1}-1}{\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}-1}+\frac{(\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3})^{n+1}-1}{\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}=\alpha^{4t+4}$; $\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}=\beta^{4t+4}$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta=-1$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t+4)(n+1)}-1}{\alpha^{(4t+4)}-1}+\frac{\beta^{(4t+4)(n+1)}-1}{\beta^{(4t+4)}-1}$$

$$=\frac{(\beta^{4(t+1)}-1)(\alpha^{4(t+1)(n+1)}-1)+(\alpha^{4(t+1)}-1)(\beta^{4(t+1)(n+1)}-1)}{(\alpha^{4(t+1)}-1)(\beta^{4(t+1)}-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)}-\alpha^{4(t+1)}-\beta^{4(t+1)}+1}$$

$$\times[\beta^{4(t+1)}\alpha^{4(t+1)(n+1)}-\beta^{4(t+1)}-\ \alpha^{4(t+1)(n+1)}+1+\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)(n+1)}$$

$$-\alpha^{4(t+1)}-\beta^{4(t+1)(n+1)}+1]$$

$$=\frac{\alpha^{4(t+1)n}-\beta^{4(t+1)}-\ \alpha^{4(t+1)(n+1)}+1+\beta^{4(t+1)n}-\alpha^{4(t+1)}-\beta^{4(t+1)n}+1}{2-L_{4(t+1)}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$\frac{-L_{4(t+1)n}+L_{4(t+1)(n+1)}+L_{4(t+1)}-2}{L_{4t+2}-2}$$

$$=\frac{L_{2(t+1)n}F_{2(t+1)(n+1)}F_{2t+2}}{{F_{2t+2}}^{2}}$$

olup böylece

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+2)i+j}=\frac{L_{2n(t+1)}F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}}\qquad (\mathrm{t}\neq -1)$$

bulunur.

4. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanılırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+1)i-j}=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(\alpha^{(4t+1)i}\alpha^{-j}+\beta^{(4t+1)i}\beta^{-j})$$

$n=2k$ ve Lemma 3.1.1' den

$$\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}\alpha^{(4t+1)i}\alpha^{-j}+\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}\beta^{(4t+1)i}\beta^{-j}$$

$$\frac{(\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1})^{2k+1}-1}{\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}-1}+\frac{(\beta^{4t}+\beta^{4t+1})^{2k+1}-1}{\beta^{4t}+\beta^{4t+1}-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t+2}$; $\beta^{4t}+\beta^{4t+1}=\beta^{4t++2}$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-1}{\alpha^{4t+2}-1}+\frac{\beta^{(4t+2)(2k+1)}-1}{\beta^{4t+2}-1}$$

$$=\frac{(\beta^{4t+2}-1)(\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-1)+(\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{(4t+2)(2k+1)}-1)}{(\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{4t+2}-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2}-\alpha^{4t+2}-\beta^{4t+2}+1}$$

$$\times[\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(2k+1)}-\beta^{4t+2}-\alpha^{(4t+2)(2k+1)}+1+\alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(2k+1)}$$

$$-\alpha^{4t+2}-\beta^{(4t+2)(2k+1)}+1]$$

$$=\frac{\alpha^{(4t+2)2k}-\beta^{4t+2}-\alpha^{(4t+2)(2k+1)}+1+\beta^{(4t+2)2k}-\alpha^{4t+2}-\beta^{(4t+2)(2k+1)}+1}{2-L_{4t+2}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{-L_{(4t+2)2k}+L_{(4t+2)(2k+1)}+L_{4t+2}-2}{L_{4t+2}-2}$$

$$=\frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}L_{2t+1}}{{L_{2t+1}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{4ti+j}=\frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}}{L_{2t+1}}$$

bulunur.

$n=2k+1$ için de ispat benzer şekildedir.

5. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü ve Lemma 3.1.1' den

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (\alpha^{2i-j} + \beta^{2i-j})$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} \alpha^{2i-j} + \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} \beta^{2i-j}$$

$$= \frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+1} - 1}{\alpha + \alpha^2 - 1} + \frac{(\beta+\beta^2)^{4k+1} - 1}{\beta + \beta^2 - 1}$$

α ve $\beta,\ x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \alpha^2 + \alpha - 1 = 2\alpha; \quad \beta^2 = \beta + 1,\ \beta + \beta^2 - 1 = 2\beta$ ifade de yerine yazılırsa düzenlemeler yapıldığında $\alpha\beta = -1$ olduğundan son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+3} - 1}{2\alpha} + \frac{\beta^{12k+3} - 1}{2\beta}$$

$$= -\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+2} - \beta^{12k+2} - \alpha - \beta]$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha^{12k+2} + \beta^{12k+2} + 1] = \frac{1}{2}(L_{12k+2} + 1)$$

Özdeşlik 3'de $n = 6k + 1$ alınırsa

$$\frac{1}{2}(L_{12k+2} + 1) = \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \frac{1}{2}\frac{L_{3(6k+1)}}{L_{6k+1}}$$

$n = 4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \frac{1}{2}\frac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}$$

bulunur.

$n = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü yapıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \sum_{0\le i,j\le 4k+3} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \sum_{0\le i,j\le 4k+3} \binom{i}{j} (\alpha^{2i-j} + \beta^{2i-j})$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+3} \binom{i}{j} \alpha^{2i-j} + \sum_{0\le i,j\le 4k+3} \binom{i}{j} \beta^{2i-j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+4} - 1}{\alpha + \alpha^2 - 1} + \frac{(\beta+\beta^2)^{4k+4} - 1}{\beta + \beta^2 - 1}$$

şeklindedir. α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha^2 + \alpha - 1 = 2\alpha$; $\beta^2 = \beta + 1$, $\beta + \beta^2 - 1 = 2\beta$ ifade de yerine yazılırsa, gerekli düzenlemeler yapıldığında $\alpha\beta = -1$ olduğundan son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+12} - 1}{2\alpha} + \frac{\beta^{12k+12} - 1}{2\beta}$$

$$= -\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+11} - \beta^{12k+11} - \alpha - \beta]$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha^{12k+11} + \beta^{12k+11} + 1] = \frac{1}{2}(L_{12k+11} + L_1)$$

Özdeşlik 6 den $m = 6k + 5, n = 6k + 6$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \frac{1}{2} 5F_{6k+5}F_{6k+6}$$

$n = 4k + 3$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} L_{2i-j} = \frac{1}{2} 5F_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}$$

bulunur.

$n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 2$ durumları için de ispat benzer şekildedir.

6. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} L_{(4t+3)i-j} = \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (\alpha^{(4t+3)i-j} + \beta^{(4t+3)i-j})$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} \alpha^{(4t+3)i-j} + \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} \beta^{(4t+3)i-j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha^{4t+2} + \alpha^{4t+3})^{n+1} - 1}{\alpha^{4t+2} + \alpha^{4t+3} - 1} + \frac{(\beta^{4t+2} + \beta^{4t+3})^{n+1} - 1}{\beta^{4t+2} + \beta^{4t+3} - 1}$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2} + \alpha^{4t+3} = \alpha^{4t+4}$; $\beta^{4t+2} + \beta^{4t+3} = \beta^{4t+4}$ ifade de yerine yazılırsa, son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t+4)(n+1)} - 1}{\alpha^{(4t+4)} - 1} + \frac{\beta^{(4t+4)(n+1)} - 1}{\beta^{(4t+4)} - 1}$$

$$= \frac{(\beta^{4(t+1)} - 1)(\alpha^{4(t+1)(n+1)} - 1) + (\alpha^{4(t+1)} - 1)(\beta^{4(t+1)(n+1)} - 1)}{(\alpha^{4(t+1)} - 1)(\beta^{4(t+1)} - 1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)} - \alpha^{4(t+1)} - \beta^{4(t+1)} + 1}$$

$$\times [\beta^{4(t+1)}\alpha^{4(t+1)(n+1)} - \beta^{4(t+1)} - \alpha^{4(t+1)(n+1)} + 1 + \alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)(n+1)}$$

$$-\alpha^{4(t+1)} - \beta^{4(t+1)(n+1)} + 1]$$

$$= \frac{\alpha^{(4t+1)n} - \beta^{4(t+1)} - \alpha^{(4t+1)(n+1)} + 1 + \beta^{(4t+1)n} - \alpha^{4(t+1)} - \beta^{(4t+1)n} + 1}{2 - L_{4(t+1)}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$\frac{-L_{4(t+1)n}+L_{4(t+1)(n+1)}+L_{4(t+1)}-2}{L_{4t+2}-2}$$

$$\frac{L_{2(t+1)n}F_{2(t+1)(n+1)}F_{2t+2}}{{F_{2t+2}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{(4t+3)i-j}=\frac{L_{2n(t+1)}F_{2(n+1)(t+1)}}{F_{2(t+1)}}\qquad (\mathrm{t}\neq -1)$$

bulunur.

4.2. Alterne Binomiyel Çift Toplamlar

Bu bölümde, bir önceki kısımda verilen toplamların alterne benzerleri detaylı bir şekilde hesaplanacaktır.

4.2.1. $(-1)^i$ Katsayılı Çift Toplamlar

Teorem 4.2.1.1. [19] Negatif olmayan her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^iL_{4ti+j}=\frac{(-1)^nL_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^iL_{i+j}=\frac{(-1)^n}{2}\begin{cases}L_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ L_{\frac{3n-1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 5F_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 5F_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^iL_{(4t+2)i+j}=\frac{(-1)^n}{L_{2t+1}}\begin{cases}L_{2n(t+1)}L_{2(t+1)(n+1)}\ , & n \text{ çift}\\ 5F_{2n(t+1)}F_{2(t+1)(n+1)}\ , & n \text{ tek}\end{cases}$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+1)i-j} = \frac{(-1)^n L_{(2t+1)n} F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{2i-j} = \frac{(-1)^n}{2}\begin{cases} L_{\frac{3n}{2}} L_{\frac{3n+2}{2}} + 2, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ L_{\frac{3n-1}{2}} L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ 5F_{\frac{3n}{2}} F_{\frac{3n+2}{2}} + 2, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ 5F_{\frac{3n-1}{2}} F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+3)i-j} = \frac{(-1)^n}{L_{2t+1}}\begin{cases} L_{2n(t+1)} L_{2(t+1)(n+1)}, & n \text{ çift} \\ 5F_{2n(t+1)} F_{2(t+1)(n+1)}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

İspat:

1. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{4ti+j} = \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i(\alpha^{4ti+j} + \beta^{4ti+j})$$

$$= \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i \alpha^{4ti+j} + \sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i \beta^{4ti+j}$$

Lemma 3.1.1’ den son ifade

$$\frac{(-1)^n(\alpha^{4t} + \alpha^{4t+1})^{n+1} + 1}{\alpha^{4t} + \alpha^{4t+1} + 1} + \frac{(-1)^n(\beta^{4t} + \beta^{4t+1})^{n+1} + 1}{\beta^{4t} + \beta^{4t+1} + 1}$$

şeklindedir.

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t} + \alpha^{4t+1} = \alpha^{4t+2}$, $\beta^{4t} + \beta^{4t+1} = \beta^{4t+2}$ ifade de yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa $\alpha\beta = -1$ olduğundan son ifade

$$\frac{(-1)^n \alpha^{(4t+2)(n+1)} + 1}{\alpha^{4t+2} + 1} + \frac{(-1)^n \beta^{(4t+2)(n+1)} + 1}{\beta^{4t+2} + 1}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{(\beta^{4t+2} + 1)(\alpha^{(4t+2)(n+1)} + 1) + (\alpha^{(4t+2)} + 1)(\beta^{(4t+2)(n+1)} + 1)}{(\alpha^{4t+2} + 1)(\beta^{4t+2} + 1)}\right]$$

$$= (-1)^n \left[\frac{(\beta^{4t+2} + 1)(\alpha^{(4t+2)(n+1)} + 1) + (\alpha^{4t+2} + 1)(\beta^{(4t+2)(n+1)} + 1)}{(\alpha^{4t+2} + 1)(\beta^{4t+2} + 1)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2} + \alpha^{4t+2} + \beta^{4t+2} + 1}$$

$$\times [\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(2k+1)} + \beta^{4t+2} + \alpha^{(4t+2)(2k+1)} + 1 + \alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(2k+1)}$$

$$+\alpha^{4t+2} + \beta^{(4t+2)(2k+1)} + 1]$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$(-1)^n \left[\frac{L_{(4t+2)n} + L_{(4t+2)(n+1)} + L_{4t+2} + 2}{L_{4t+2} + 2}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n L_{(2t+1)n} F_{(2t+1)(n+1)} F_{2t+1}}{{F_{2t+1}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^i L_{4ti+j} = \frac{(-1)^n L_{(2t+1)n} F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

elde edilir.

2. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^i L_{i+j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i L_{i+j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i (\alpha^{i+j} + \beta^{i+j})$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i \alpha^{i+j} + \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i \beta^{i+j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i \alpha^{i+j} + \sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i \beta^{i+j}$$

Lemma 3.1.1’ den son ifade

$$(-1)^{4k+1} \left[\frac{(\alpha + \alpha^2)^{4k+2} - 1}{\alpha + \alpha^2 + 1} + \frac{(\beta + \beta^2)^{4k+2} - 1}{\beta + \beta^2 + 1} \right]$$

α ve β, $\ x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 2\alpha^2,\ \beta^2 + \beta + 1 = 2\beta^2$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta = -1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$(-1)^{4k+1} \left[\frac{\alpha^{12k+6} - 1}{2\alpha^2} + \frac{\beta^{12k+6} - 1}{2\beta^2} \right]$$

$$= \frac{(-1)^{4k+1}}{2} [\alpha^{12k+4} + \beta^{12k+4} - \alpha^2 - \beta^2] = \frac{(-1)^{4k+1}}{2} (L_{12k+4} - L_2)$$

Özdeşlik 5’te $m = 6k + 1\ ,\ n = 6k + 3$ alınırsa

$$\sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^i L_{i+j}$$

$$\frac{(-1)^{4k+1}}{2}(L_{6k+1}L_{6k+3})$$

$n = 4k + 1$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j} = \frac{(-1)^n}{2}(L_{\frac{3n-1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}})$$

bulunur.

$n = 4k + 2,\ \ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü uygulandığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i(\alpha^{i+j} + \beta^{i+j})$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{i+j} + \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{i+j} + \sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{i+j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$(-1)^{4k+2}\left[\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+3}+1}{\alpha+\alpha^2+1} + \frac{(\beta+\beta^2)^{4k+3}+1}{\beta+\beta^2+1}\right]$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 2\alpha^2$; $\beta^2 + \beta + 1 = 2\beta^2$ ifade de yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa son ifade

$$(-1)^{4k+2}\left[\frac{\alpha^{12k+9}+1}{2\alpha^2}+\frac{\beta^{12k+9}+1}{2\beta^2}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}[\alpha^{12k+7}+\beta^{12k+7}+\alpha^2+\beta^2]$$

$$=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}(L_{12k+7}+L_2)$$

$$=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}(L_{12k+7}+L_1+2)$$

Özdeşlik 6 den $m=6k+3$, $n=6k+4$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}(5F_{6k+3}F_{6k+4}+2)$$

$n=4k+2$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}=\frac{(-1)^{n}}{2}(5F_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}+2)$$

elde edilir.

$n=4k$ ve $n=4k+3$ değerleri için de benzer şekilde ispat yapılır.

3. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında $n=2k+1$ için

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+2)i+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i(\alpha^{(4t+2)i}\alpha^j+\beta^{(4t+2)i}\beta^j)$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 2k+1}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{(4t+2)i}\alpha^j+\sum_{0\le i,j\le 2k+1}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{(4t+2)i}\beta^j$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\frac{(-1)^{2k+1}(\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3})^{2k+2}+1}{\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}+1}+\frac{(-1)^{2k+1}(\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3})^{2k+2}+1}{\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}+1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}=\alpha^{4t+4}$; $\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}=\beta^{4t+4}$ ifade de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa son ifade

$$\frac{-\alpha^{(4t+4)(2k+2)}+1}{\alpha^{4t+4}+1}+\frac{-\beta^{(4t+4)(2k+2)}+1}{\beta^{4t+4}+1}$$

$$=\frac{(\beta^{4t+4}+1)(-\alpha^{(4t+4)(2k+1)}+1)+(\alpha^{4t+4}+1)(-\beta^{(4t+4)(2k+1)}+1)}{(\alpha^{4t+4}+1)(\beta^{4t+4}+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)}-\alpha^{4(t+1)}-\beta^{4(t+1)}+1}$$

$$\times[-\beta^{4(t+1)}\alpha^{4(t+1)(2k+1)}+\beta^{4(t+1)}-\alpha^{4(t+1)(2k+1)}+1$$

$$-\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)(2k+1)}+\alpha^{4(t+1)}-\beta^{4(t+1)(n+1)}+1]$$

$$=\frac{-\alpha^{(4t+1)2k}+\beta^{4(t+1)}-\alpha^{(4t+1)(2k+1)}-\beta^{(4t+1)2k}+\alpha^{4(t+1)}-\beta^{(4t+1)2k}+2}{2+L_{4(t+1)}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{-L_{4(t+1)2k}-L_{4(t+1)(2k+1)}+L_{4(t+1)}+2}{L_{4t+2}+2}$$

$$=\frac{5F_{2(t+1)n}F_{2(t+1)(n+1)}L_{2t+2}}{{L_{2t+2}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+2)i+j}=\frac{(-1)^n 5F_{(2t+2)(n+1)}F_{(2t+2)n}}{L_{2t+2}}$$

bulunur.

$n=2k$ için de ispat benzer şekildedir.

4. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+1)i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\left(\alpha^{(4t+1)i-j}+\beta^{(4t+1)i-j}\right)$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{(4t+1)i-j}+\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{(4t+1)i-j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\frac{(-1)^n(\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1})^{n+1}+1}{\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}+1}+\frac{(-1)^n(\beta^{4t}+\beta^{4t+1})^{n+1}+1}{\beta^{4t}+\beta^{4t+1}+1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t}+\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t+2}$; $\beta^{4t}+\beta^{4t+1}=\beta^{4t+2}$ ifade de yerine yazılırsa ve $\alpha\beta=-1$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{(-1)^n\alpha^{(4t+2)(n+1)}+1}{\alpha^{4t+2}+1}+\frac{(-1)^n\beta^{(4t+2)(n+1)}+1}{\beta^{4t+2}+1}$$

$$=(-1)^n\frac{(\beta^{4t+2}+1)(\alpha^{(4t+2)(n+1)}+1)+(\alpha^{(4t+2)}+1)(\beta^{(4t+2)(n+1)}+1)}{(\alpha^{4t+2}+1)(\beta^{4t+2}+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2}+\alpha^{4t+2}+\beta^{4t+2}+1}$$

$$\times\left[\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(n+1)}+\beta^{4t+2}+\ \alpha^{(4t+2)(n+1)}+1+\alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(n+1)}\right.$$

$$\left.+\alpha^{4t+2}+\beta^{(4t+2)(n+1)}+1\right]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\alpha^{(4t+2)2k}+\beta^{4t+2}+\ \alpha^{(4t+2)(2k+1)}+1+\beta^{(4t+2)2k}+\alpha^{4t+2}+\beta^{(4t+2)(2k+1)}+1}{2+L_{4t+2}}\right]$$

şeklindedir. Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$(-1)^n\left[\frac{L_{(4t+2)n}+L_{(4t+2)(n+1)}+L_{4t+2}+2}{L_{4t+2}+2}\right]$$

olup böylece

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+1)i-j}=\frac{(-1)^n L_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

bulunur.

5. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü uygulandığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{2i-j}=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^i L_{2i-j}$$

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^i(\alpha^{2i-j}+\beta^{2i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{2i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{2i-j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$(-1)^{4k}\left[\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+1}+1}{\alpha+\alpha^2+1}+\frac{(\beta+\beta^2)^{4k+1}+1}{\beta+\beta^2+1}\right]$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2+\alpha+1=2\alpha^2;\ \beta^2+\beta+1=2\beta^2$ ifade de yerine yazılırsa, son ifade

$$(-1)^{4k}\left[\frac{\alpha^{12k+3}+1}{2\alpha^2}+\frac{\beta^{12k+3}+1}{2\beta^2}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{4k}}{2}[\alpha^{12k+1}+\beta^{12k+1}+\alpha^2+\beta^2]$$

$$\frac{(-1)^{4k}}{2}(L_{12k+2}+L_2)$$

$$=\frac{(-1)^{4k}}{2}(L_{12k+2}+L_1+2)$$

Özdeşlik 5 den $m = 6k$, $n = 6k + 1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j} = \frac{(-1)^{4k}}{2}(L_{6k}L_{6k+1}+2)$$

$n = 4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j} = \frac{(-1)^{n}}{2}(L_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+2}{2}}+2)$$

bulunur.

$n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{2i-j} = \sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^i L_{2i-j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^i \alpha^{2i-j} + \sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^i \beta^{2i-j}$$

Lemma 3.1.1' den son ifade

$$(-1)^{4k+3}\left[\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+4}-1}{\alpha+\alpha^2+1}+\frac{(\beta+\beta^2)^{4k+4}-1}{\beta+\beta^2+1}\right]$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 2\alpha^2;\ \beta^2 + \beta + 1 = 2\beta^2$ ifade de yerine yazılıp düzenlemeler

yapılırsa $\alpha\beta = -1$ olduğundan

$$(-1)^{4k+3}\left[\frac{\alpha^{12k+12}-1}{2\alpha^2}+\frac{\beta^{12k+12}-1}{2\beta^2}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{4k+3}}{2}[\alpha^{12k+10}+\beta^{12k+10}-\alpha^2-\beta^2]$$

$$=\frac{(-1)^{4k+3}}{2}(L_{12k+10}-L_2)$$

Lemma 4.1.2 de $m=6k+4$, $n=6k+6$ alınırsa

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}=\frac{(-1)^{4k+3}}{2}(5F_{6k+4}F_{6k+6})$$

$n=4k+3$ olduğundan

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{i+j}=\frac{(-1)^n}{2}(5F_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}})$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n=4k+1$ ve $n=4k+2$ için de ispat yapılır.

6. Eşitlik için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^i L_{(4t+3)i-j}=\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^i(\alpha^{(4t+3)i}\alpha^{-j}+\beta^{(4t+3)i}\beta^{-j})$$

$n=2k$ ve Lemma 3.1.1' den son ifade

$$\sum_{0\leq i,j\leq 2k}\binom{i}{j}(-1)^i\alpha^{(4t+3)i}\alpha^{-j}+\sum_{0\leq i,j\leq 2k}\binom{i}{j}(-1)^i\beta^{(4t+3)i}\beta^{-j}$$

$$=\frac{(-1)^{2k}(\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3})^{2k+1}+1}{\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}+1}+\frac{(-1)^{2k}(\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3})^{2k+1}+1}{\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}+1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2}+\alpha^{4t+3}=\alpha^{4t+4}$; $\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}=\beta^{4t+4}$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t+4)(2k+1)}+1}{\alpha^{4t+4}+1}+\frac{\beta^{(4t+4)(2k+1)}+1}{\beta^{4t+4}+1}$$

$$\frac{(\beta^{4t+4}+1)(\alpha^{(4t+4)(2k+1)}+1)+(\alpha^{4t+4}+1)(\beta^{(4t+4)(2k+1)}+1)}{(\alpha^{4t+4}+1)(\beta^{4t+4}+1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)}+\alpha^{4(t+1)}+\beta^{4(t+1)}+1}$$

$$\times[\beta^{4(t+1)}\alpha^{4(t+1)(2k+1)}+\beta^{4(t+1)}+\ \alpha^{4(t+1)(2k+1)}+1+\alpha^{4(t+1)}\beta^{4(t+1)(2k+1)}$$

$$+\alpha^{4(t+1)}+\beta^{4(t+1)(2k+1)}+1]$$

$$=\frac{\alpha^{4(t+1)2k}+\beta^{4(t+1)}+\ \alpha^{4(t+1)(2k+1)}+2+\beta^{4(t+1)2k}+\alpha^{4(t+1)}+\beta^{4(t+1)2k}}{2+L_{4(t+1)}}$$

Lemma 4.1.2 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{L_{4(t+1)n}+L_{4(t+1)(n+1)}+L_{4(t+1)}+2}{L_{4t+4}-2}$$

$$=\frac{L_{2(t+1)n}L_{2(t+1)(n+1)}L_{2t+2}}{{L_{2t+2}}^{2}}$$

olup buradan

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i}L_{(4t+3)i-j}=\frac{(-1)^{n}L_{(2t+2)(n+1)}L_{(2t+2)n}}{L_{2t+2}}$$

bulunur.

$n=2k+1$ için de ispat benzer şekildedir.

4.2.2. $(-1)^{j}$ Katsayılı Çift Toplamlar

Teorem 4.2.2.1. [19] Her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{4ti-j}=\frac{1}{L_{2t-1}}\begin{cases}L_{(2t-1)n}L_{(2t-1)(n+1)}\ , & n \text{ çift}\\ 5F_{(2t-1)n}F_{(2t-1)(n+1)}\ , & n \text{ tek}\end{cases}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{i-j}=(-1)^n\begin{cases}5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n-3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{5i-j}=\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{F_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{F_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+2)i-j}=\frac{L_{2tn}F_{2t(n+1)}}{F_{2t}}\qquad (t\neq 0)$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{3i-j}=\begin{cases}\dfrac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n+1}{2}}L_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{L_{3(\frac{n+2}{2})}}{L_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n+1}{2}}F_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_j=\begin{cases}\dfrac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n+1}{2}}L_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{L_{3(\frac{n+2}{2})}}{L_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n+1}{2}}F_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

7.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{4i+j}=\frac{(-1)^n}{2}\begin{cases}L_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n-1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

8.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+1)i+j}=\frac{(-1)^n}{L_{2t}}\begin{cases}L_{2tn}L_{2t(n+1)}, & n \text{ çift}\\ 5F_{2tn}F_{2t(n+1)}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

9.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{2i+j}=(-1)^n\begin{cases}5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n-3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

10.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+3)i+j}=\frac{(-1)^n L_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

İspat:

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{4ti-j}=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{4ti}\alpha^{-j}+\beta^{4ti}\beta^{-j})$$

Bu toplam iki ayrı durum içinde ayrı ayrı incelenmelidir.

$n=2k$ için ifadenin sol tarafı için Binet formülü ve Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{4ti}\alpha^{-j}+\sum_{0\le i,j\le 2k}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{4ti}\beta^{-j}$$

$$=\frac{(\alpha^{4t}-\alpha^{4t-1})^{2k+1}-1}{\alpha^{4t}-\alpha^{4t-1}-1}+\frac{(\beta^{4t}-\beta^{4t-1})^{2k+1}-1}{\beta^{4t}-\beta^{4t-1}-1}$$

α ve $\beta,\ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^2-\alpha-1=0,\ \ \alpha^{4t}-\alpha^{4t-1}=\alpha^{4t-2};\ \ \beta^2-\beta-1=0,\ \ \ \beta^{4t}-\beta^{4t-1}=\beta^{4t-2}$

ve $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t-2)(2k+1)}-1}{\alpha^{(4t-2)}-1}+\frac{\beta^{(4t-2)(2k+1)}-1}{\beta^{(4t-2)}-1}$$

$$=\frac{(\beta^{4t-2}-1)(\alpha^{(4t-2)(2k+1)}-1)+(\alpha^{4t-2}-1)(\beta^{(4t-2)(2k+1)}-1)}{(\alpha^{4t-2}-1)(\beta^{4t-2}-1)}$$

$$=\frac{1}{\alpha^{4t-2}\beta^{4t-2}-\alpha^{4t-2}-\beta^{4t-2}+1}$$

$$\times[\beta^{4t-2}\alpha^{(4t-2)(2k+1)}-\beta^{4t-2}-\ \alpha^{(4t-2)(2k+1)}+1+\alpha^{4t-2}\beta^{(4t+2)(2k+1)}$$

$$-\alpha^{4t-2}-\beta^{(4t-2)(2k+1)}+1]$$

$$\frac{\alpha^{(4t-2)2k}-\beta^{4t-2}-\ \alpha^{(4t-2)(2k+1)}+1+\beta^{(4t-2)2k}-\alpha^{4t-2}-\beta^{(4t-2)(2k+1)}+1}{2-L_{4t-2}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{L_{(4t-2)2k}-L_{(4t-2)(2k+1)}-L_{4t-2}+2}{-L_{4t-2}+2}$$

$$=\frac{L_{(2t-1)n}L_{(2t-1)(n+1)}L_{2t-1}}{{L_{2t-1}}^{2}}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{4ti-j}=\frac{L_{(2t-1)n}L_{(2t-1)(n+1)}}{L_{2t-1}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $n=2k$ içinde ispat yapılır.

2.

$n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}(\alpha^{i-j}+\beta^{i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}\alpha^{i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}\beta^{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}\alpha^{i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}(-1)^{j}\binom{i}{j}\beta^{i-j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha-1)^{4k+1}-1}{\alpha-1-1}+\frac{(\beta-1)^{4k+1}-1}{\beta-1-1}$$

$$=(-1)^{4k+1}\left[\frac{\beta^{4k+1}-1}{\alpha-2}+\frac{\alpha^{4k+1}-1}{\beta-2}\right]$$

$$=(-1)^{4k+1}[-L_{4k-1}-3]$$

Özdeşlik 6'de $m=2k$, $n=2k-1$ alınırsa

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}=\frac{(-1)^{4k}}{2}(5F_{2k}F_{2k-1}+2)$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}=(-1)^{n}(5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2)$$

olur.

$n=4k+3,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{j}(\alpha^{i-j}+\beta^{i-j})$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{j}\alpha^{i-j}+\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{j}\beta^{i-j}$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{j}\alpha^{i-j}+\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3}(-1)^{j}\binom{i}{j}\beta^{i-j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha-1)^{4k+4}-1}{\alpha-1-1}+\frac{(\beta-1)^{4k+4}-1}{\beta-1-1}$$

$$=\frac{\beta^{4k+4}-1}{\alpha-2}+\frac{\alpha^{4k+4}-1}{\beta-2}$$

$$=\frac{\beta^{4k+4}-1}{\alpha-2}+\frac{\alpha^{4k+4}-1}{\beta-2}$$

$$=[-L_{4k+2}+L_2]$$

$$=(-1)^{4k+3}(L_{4k+2}-L_2)$$

Özdeşlik 6'da $m=2k$, $n=2k+2$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_{i-j}=\frac{(-1)^{4k+3}}{2}(5F_{2k}F_{2k+2})$$

$n=4k+3$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{i-j}=(-1)^n(5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}})$$

elde edilir.

$n=4k+1$ ve $n=4k+2$ için de ispat benzer şekildedir.

3.

$n=4k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{5i-j}=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}(-1)^j\binom{i}{j}L_{5i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{5i-j}+\beta^{5i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{5i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{5i-j}$$

Lemma 3.2.2.1’ den son ifade

$$\frac{(\alpha^5-\alpha^4)^{4k+1}-1}{\alpha^5-\alpha^4-1}+\frac{(\beta^5-\beta^4)^{4k+1}-1}{\beta^5-\beta^4-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^5-\alpha^4=\alpha^3$, $\alpha^3-1=2\alpha$,$\beta^5-\beta^4=\beta^3$, $\beta^3-1=2\beta$, $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+6}-1}{2\alpha}+\frac{\beta^{12k+6}-1}{2\beta}$$

$$=-\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+5}-\beta^{12k+5}-\alpha-\beta]$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{12k+5}+\beta^{12k+5}+1]=\frac{1}{2}(L_{12k+5}+L_1)$$

Özdeşlik 5’te $m=6k+2, n=6k+3$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{5i-j}=\frac{1}{2}L_{6k+2}L_{6k+3}$$

$n=4k+1$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}L_{5i-j}=\frac{1}{2}L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}$$

bulunur.

$n=4k+2$, $k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^jL_{5i-j}=\sum_{0\le i,j\le 4k+2}(-1)^j\binom{i}{j}L_{5i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{5i-j}+\beta^{5i-j})$$

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{5i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+2}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{5i-j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha+\alpha^2)^{4k+3}-1}{\alpha+\alpha^2-1}+\frac{(\beta+\beta^2)^{4k+3}-1}{\beta+\beta^2-1}$$

α ve $\beta,\ \ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^5-\alpha^4=\alpha^3,\ \ \alpha^3-1=2\alpha\ ,\beta^5-\beta^4=\beta^3,\ \ \ \beta^3-1=2\beta,\ \alpha\beta=-1$ olup gerekli

düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+8}-1}{2\alpha}+\frac{\beta^{12k+8}-1}{2\beta}$$

$$=-\frac{1}{2}[-\alpha^{12k+8}-\beta^{12k+8}-\alpha-\beta]$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{12k+8}+\beta^{12k+8}+1]$$

$$=\frac{1}{2}(L_{12k+8}+1)$$

Özdeşlik 4'te $n=6k+4$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}L_{5i-j}=\frac{1}{2}\frac{F_{3(6k+4)}}{F_{6k+4}}$$

$n=4k+2$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}L_{5i-j}=\frac{1}{2}\frac{F_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{F_{\frac{3n}{2}+1}}$$

elde edilir. $n=4k$ ve $n=4k+3$ için de ispat benzer şekildedir.

4. Eşitliğin sol tarafında Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+2)i-j}=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{(4t+2)i-j}+\beta^{(4t+2)i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{(4t+2)i-j}+\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{(4t+2)i-j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha^{4t+2}-\alpha^{4t+1})^{n+1}-1}{\alpha^{4t+2}-\alpha^{4t+1}-1}+\frac{(\beta^{4t+2}-\beta^{4t+1})^{n+1}-1}{\beta^{4t+2}-\beta^{4t+1}-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri ve

$\alpha^{4t+2}-\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t}$; $\beta^{4t+2}-\beta^{4t+1}=\beta^{4t}$ olduğundan düzenlemeler yapıldığında

$\alpha\beta=-1$ olduğundan son ifade

$$\frac{\alpha^{4t(n+1)}-1}{\alpha^{4t}-1}+\frac{\beta^{4t(n+1)}-1}{\beta^{4t}-1}$$

$$=\frac{(\beta^{4t}-1)(\alpha^{4t(n+1)}-1)+(\alpha^{4t}-1)(\beta^{4t(n+1)}-1)}{(\alpha^{4t}-1)(\beta^{4t}-1)}$$

$$=\frac{\beta^{4t}\alpha^{4t(n+1)}-\beta^{4t}-\alpha^{4t(n+1)}+1+\alpha^{4t}\beta^{4t(n+1)}-\alpha^{4t}-\beta^{4t(n+1)}+1}{\alpha^{4t}\beta^{4t}-\alpha^{4t}-\beta^{4t}+1}$$

$$=\frac{\alpha^{4tn}-\beta^{4t}-\alpha^{4t(n+1)}+1+\beta^{4tn}-\alpha^{4t}-\beta^{4tn}+1}{2-L_{4t}}$$

Lemma 3.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$\frac{-L_{4(t+1)n}+L_{4tn}-L_{4t}+2}{-L_{4t}+2}$$

$$=\frac{L_{2tn}F_{2t(n+1)}F_{2t}}{{F_{2t}}^2}$$

olup böylece

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+2)i-j}=\frac{L_{2tn}F_{2t(n+1)}}{F_{2t}} \qquad (t\neq 0)$$

bulunur.

5. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü,toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.2.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{3i-j}=\sum_{0\leq i,j\leq 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_{3i-j}$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{3i-j}+\beta^{3i-j})$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq 4k}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{3i-j}+\sum_{0\leq i,j\leq 4k}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{3i-j}$$

$$=\frac{(\alpha^3-\alpha^2)^{4k+1}-1}{\alpha^3-\alpha^2-1}+\frac{(\beta^3-\beta^2)^{4k+1}-1}{\beta^3-\beta^2-1}$$

α ve $\beta,\ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3-\alpha^2=\alpha\ ;\ \beta^3-\beta^2=\beta$ ifade de yerine yazılırsa $\alpha\beta=-1$ olup gerekli

düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\alpha^{4k+1}-1}{-\beta}+\frac{\beta^{4k+1}-1}{-\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}+\alpha+\beta]$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}+1]$$

$$=\frac{1}{2}(L_{4k+2}+1)$$

Özdeşlik 4' den

$$\sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} L_{3i-j} = \frac{1}{2}\frac{F_{3(2k+1)}}{F_{2k+1}}$$

$n = 4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} L_{3i-j} = \frac{F_{3\left(\frac{n+2}{2}\right)}}{F_{\frac{n+2}{2}}}$$

bulunur.

$n = 4k + 1,\ n = 4k + 2$ ve $n = 4k + 3$ için de ispatlar benzer şekildedir.

6. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.2.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_j = \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^j L_j$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^j (\alpha^j + \beta^j)$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^j \alpha^j + \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^j \beta^j$$

$$= \frac{(1-\alpha)^{4k+1} - 1}{1-\alpha-1} + \frac{(1-\beta)^{4k+1} - 1}{1-\beta-1}$$

$$= \frac{\beta^{4k+1} - 1}{-\alpha} + \frac{\alpha^{4k+1} - 1}{-\beta}$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha^{4k+2} + \beta^{4k+2} - \alpha - \beta]$$

$$\frac{1}{2}[\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}-1]$$

$$=(L_{4k+2}-1)$$

Özdeşlik 4'te $n=2k+1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_j=\frac{F_{3(2k+1)}}{F_{2k+1}}$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_j=\frac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}$$

elde edilir.

$n=4k+3,\ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.2.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_j=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^j L_j=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^j+\beta^j)$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^j+\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^j$$

$$=\frac{(1-\alpha)^{4k+4}-1}{1-\alpha-1}+\frac{(1-\beta)^{4k+4}-1}{1-\beta-1}$$

$$=\frac{\beta^{4k+4}-1}{-\alpha}+\frac{\alpha^{4k+4}-1}{-\beta}$$

$$=\alpha^{4k+5}+\beta^{4k+5}-\alpha-\beta$$

$$=\alpha^{4k+5}+\beta^{4k+5}-1$$

$$=L_{4k+5}-L_1$$

Özdeşlik 6'da $m = 2k + 2, n = 2k + 3$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_j = 5F_{2k+2}F_{2k+3}$$

$n = 4k + 3$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_j = 5\, F_{\frac{n+1}{2}} F_{\frac{n+3}{2}}$$

bulunur.

$n = 4k + 1,\;\; n = 4k + 2$ için de ispatlar benzer şekildedir.

7. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k + 1,\;\; k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü ve toplam formülü özellikleri kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_{4i+j} = \sum_{0\le i,j\le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^j L_{4i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^j \left(\alpha^{4i+j} + \beta^{4i+j}\right)$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^j \alpha^{4i+j} + \sum_{0\le i,j\le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^j \beta^{4i+j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha^4 - \alpha^5)^{4k+2} - 1}{\alpha^4 - \alpha^5 - 1} + \frac{(\beta^4 - \beta^5)^{4k+2} - 1}{\beta^4 - \beta^5 - 1}$$

$$= \frac{\alpha^{12k+6} - 1}{-\alpha^3 - 1} + \frac{\beta^{12k+6} - 1}{-\beta^3 - 1}$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^5 - \alpha^4 = \alpha^3$, $-\alpha^3 - 1 = 2\alpha^2$, $\beta^5 - \beta^4 = \beta^3$, $-\beta^3 - 1 = 2\beta^2$ ifade de yerine

yazılırsa, $\alpha\beta = -1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+6} - 1}{-2\alpha^2} + \frac{\beta^{12k+6} - 1}{-2\beta^2}$$

$$= \frac{(-1)}{2}\left[\frac{\alpha^{12k+6} - 1}{\alpha^2} + \frac{\beta^{12k+6} - 1}{\beta^2}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{4k+1}}{2}[L_{12k+4} - L_2]$$

Özdeşlik 5'te $m = 6k + 1$, $n = 6k + 3$ alınırsa

$$\sum_{0 \le i,j \le 4k+1} \binom{i}{j} (-1)^j L_{4i+j} = \frac{(-1)^{4k+1}}{2} (L_{6k+1} L_{6k+3})$$

$n = 4k + 1$ olduğundan

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_{4i+j} = \frac{(-1)^n}{2} (L_{\frac{3n-1}{2}} L_{\frac{3(n+1)}{2}})$$

bulunur.

$n = 4k$, $n = 4k + 2$ ve $n = 4k + 3$ içinde ispat benzer şekildedir.

8. $n = 2k$ için ifadenin sol tarafında Binet formülü ve Lemma 3.2.2.1

kullanıldığında

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^j L_{(4t+1)i+j} = \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^j (\alpha^{(4t+1)i} \alpha^j + \beta^{(4t+1)i} \beta^j)$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 2k} \binom{i}{j} (-1)^j \alpha^{(4t+1)i} \alpha^j + \sum_{0 \le i,j \le 2k} \binom{i}{j} (-1)^j \beta^{(4t+1)i} \beta^j$$

$$\frac{(\alpha^{4t+1}-\alpha^{4t+2})^{2k+1}-1}{\alpha^{4t+1}-\alpha^{4t+2}-1}+\frac{(\beta^{4t+1}-\beta^{4t+2})^{2k+1}-1}{\beta^{4t+1}-\beta^{4t+2}-1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2}-\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t}$; $\beta^{4t+2}+\beta^{4t+3}=\beta^{4t}$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta=-1$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{-\alpha^{4t(2k+1)}-1}{-\alpha^{4t}-1}+\frac{-\beta^{4t(2k+1)}-1}{-\beta^{4t}-1}$$

$$=\frac{(-\beta^{4t}-1)(-\alpha^{4t(2k+1)}-1)+(-\alpha^{4t}-1)(-\beta^{4t(2k+1)}-1)}{(-\alpha^{4t}-1)(-\beta^{4t}-1)}$$

$$\frac{\beta^{4t}\alpha^{4t(2k+1)}+\beta^{4t}+\ \alpha^{4t(2k+1)}+1+\alpha^{4t}\beta^{4t(2k+1)}+\alpha^{4t}+\beta^{4t(2k+1)}+1}{\alpha^{4t}\beta^{4t}+\alpha^{4t}+\beta^{4t}+1}$$

$$=\frac{\alpha^{4t2k}+\beta^{4t}+\ \alpha^{4t(2k+1)}+1+\beta^{4t2k}+\alpha^{4t}+\beta^{4t(2k+1)}+1}{2+L_{4t}}$$

Lemma 4.1.2 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{L_{4t2k}+L_{4t(2k+1)}+L_{4t}+2}{L_{4t}+2}$$

$$=\frac{L_{2tn}L_{2t(2k+1)}L_{2t}}{{L_{2t}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+1)i+j}=\frac{(-1)^n L_{2tn}L_{2t(n+1)}}{L_{2t}}$$

bulunur.

$n=2k+1$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

9. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.2.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{2i+j} = \sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_{2i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j (\alpha^{2i+j}+\beta^{2i+j})$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j \alpha^{2i+j} + \sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j \beta^{2i+j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j \alpha^{2i+j} + \sum_{0\le i,j\le 4k}(-1)^j\binom{i}{j} \beta^{2i+j}$$

$$= \frac{(\alpha^2-\alpha^3)^{4k+2}-1}{\alpha^2-\alpha^3-1} + \frac{(\beta^2-\beta^3)^{4k+2}-1}{\beta^2-\beta^3-1}$$

α ve $\beta,\ x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3 - \alpha^2 = \alpha\ ;\ \beta^3 - \beta^2 = \beta$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta = -1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{4k+2}-1}{-\alpha-1} + \frac{\beta^{4k+2}-1}{-\beta-1}$$

$$= (-1)^{4k+2}[L_{4k} - 3]$$

$$= (-1)^{4k+2}(L_{4k} - L_1 - 2)$$

Özdeşlik 6'da $m = 2k - 1\ ,\ n = 2k$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^j L_{2i+j} = \frac{(-1)^{4k}}{2}(5F_{2k}F_{2k-1} + 2)$$

$n = 4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{2i+j}=(-1)^n(5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2)$$

elde edilir.

$n=4k+1,\ n=4k+2$ ve $n=4k+3$ için de ispat benzer şekilde yapılır.

10.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+3)i+j}=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j(\alpha^{(4t+3)i+j}+\beta^{(4t+3)i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j\alpha^{(4t+3)i+j}+\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j\beta^{(4t+3)i+j}$$

Lemma 3.2.2.1' den son ifade

$$\frac{(\alpha^{4t+3}-\alpha^{4t+4})^{n+1}-1}{\alpha^{4t+3}-\alpha^{4t+4}-1}+\frac{(\beta^{4t+3}-\beta^{4t+4})^{n+1}-1}{\beta^{4t+3}-\beta^{4t+4}-1}$$

α ve $\beta,\ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+4}-\alpha^{4t+3}=\ \alpha^{4t+2};\ \beta^{4t+4}-\beta^{4t+3}=\ \beta^{4t+2}$ ifade de yerine yazılırsa,

$\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$(-1)^n\left[\frac{\alpha^{(4t+2)(n+1)}-1}{-\alpha^{4t+2}-1}+\frac{\beta^{(4t+2)4t(n+1)}-1}{-\beta^{4t+2}-1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{(-\beta^{4t+2}-1)(\alpha^{(4t+2)(n+1)}-1)+(-\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{(4t+2)(n+1)}-1)}{(-\alpha^{4t+2}-1)(-\beta^{4t+2}-1)}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{(-\beta^{4t+2}-1)(\alpha^{(4t+2)(n+1)}-1)+(-\alpha^{4t+2}-1)(\beta^{(4t+2)(n+1)}-1)}{(-\alpha^{4t+2}-1)(-\beta^{4t+2}-1)}\right]$$

$$\frac{(-1)^n}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2}-\alpha^{4t+2}-\beta^{4t+2}+1}$$

$$\times\,[-\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(n+1)}+\beta^{4t+2}-\ \alpha^{(4t+2)(n+1)}+1-\alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(n+1)}$$

$$-\alpha^{4t+2}-\beta^{(4t+2)(n+1)}+1]$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den son ifade

$$\frac{-L_{(4t+2)n}-L_{(4t+2)(n+1)}+L_{(4t+1)}+2}{-L_{4t+2}+2}$$

$$=\frac{L_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}F_{2t+1}}{{F_{2t+1}}^2}$$

olup buradan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^j L_{(4t+3)i+j}=\frac{(-1)^n L_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}}{F_{2t+1}}$$

bulunur.

4.2.3. $(-1)^{i+j}$ Katsayılı Çift Toplamlar

Teorem 4.2.3.1 [19] Her t tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

1.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j} L_{4ti-j}=\frac{(-1)^n L_{(2t-1)n}F_{(2t-1)(n+1)}}{F_{2t-1}}$$

2.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{i-j}=\begin{cases}\dfrac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n+1}{2}}L_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{L_{3(\frac{n+2}{2})}}{L_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n+1}{2}}F_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

3.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}=\frac{(-1)^n}{2}\begin{cases}L_{\frac{3n}{2}}L_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n-1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

4.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+2)i-j}=\frac{(-1)^n}{L_{2t}}\begin{cases}L_{2tn}L_{2t(n+1)}\ , & n \text{ çift}\\ 5F_{2tn}F_{2t(n+1)}\ , & n \text{ tek}\end{cases}$$

5.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}=(-1)^n\begin{cases}5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n-3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

6.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_j=(-1)^n\begin{cases}5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{n-3}{2}}L_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ L_{\frac{n}{2}}L_{\frac{n-2}{2}}+2, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

7.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{4ti+j}=\frac{1}{2}\begin{cases}\dfrac{L_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{L_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ \dfrac{F_{3(\frac{3n}{2}+1)}}{F_{\frac{3n}{2}+1}}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ 5F_{\frac{3n+1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

8.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+1)i+j}=\frac{L_{2tn}F_{2t(n+1)}}{F_{2t}}\qquad (t\neq 0)$$

9.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}=\begin{cases}\dfrac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ L_{\frac{n+1}{2}}L_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ \dfrac{L_{3(\frac{n+2}{2})}}{L_{\frac{n+2}{2}}}, & n\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 5F_{\frac{n+1}{2}}F_{\frac{n+3}{2}}, & n\equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

10.

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+3)i+j}=\frac{1}{L_{2t+1}}\begin{cases}L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ çift}\\ 5F_{(2t+1)n}F_{(2t+1)(n+1)}, & n \text{ tek}\end{cases}$$

dir.

İspat:

1. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü, toplam formülleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{4ti-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{4ti-j}+\beta^{4ti-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{4ti-j}+\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{4ti-j}$$

$$=\frac{(\alpha^{4t}-\alpha^{4t-1})^{n+1}+1}{\alpha^{4t}-\alpha^{4t-1}+1}+\frac{(\beta^{4t}-\beta^{4t-1})^{n+1}+1}{\beta^{4t}-\beta^{4t-1}+1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t} - \alpha^{4t-1} = \alpha^{4t-2}$; $\beta^{4t} - \beta^{4t-1} = \beta^{4t-2}$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta = -1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{(4t-2)(n+1)} + 1}{\alpha^{4t-2} + 1} + \frac{\beta^{(4t-2)(n+1)} + 1}{\beta^{4t-2} + 1}$$

$$= \frac{(\beta^{4t-2} + 1)(\alpha^{(4t-2)(n+1)} + 1) + (\alpha^{4t-2} + 1)(\beta^{(4t-2)(n+1)} + 1)}{(\alpha^{4t-2} + 1)(\beta^{4t-2} + 1)}$$

$$= \frac{(\beta^{4t-2} + 1)(\alpha^{(4t-2)(n+1)} + 1) + (\alpha^{4t-2} + 1)(\beta^{(4t-2)(n+1)} + 1)}{(\alpha^{4t-2} + 1)(\beta^{4t-2} + 1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{4t-2}\beta^{4t-2} - \alpha^{4t-2} - \beta^{4t-2} + 1}$$

$$\times [\beta^{4t-2}\alpha^{(4t-2)(n+1)} - \beta^{4t-2} - \alpha^{(4t-2)(n+1)} + 1 + \alpha^{4t-2}\beta^{(4t-2)(n+1)}$$

$$-\alpha^{4t-2} - \beta^{(4t-2)(2k+1)} + 1]$$

$$\frac{\alpha^{(4t-2)n} + \beta^{4t-2} + \alpha^{(4t-2)(n+1)} + 1 + \beta^{(4t-2)n} + \alpha^{4t-2} + \beta^{(4t-2)(n+1)} + 1}{2 + L_{4t-2}}$$

Lemma 4.1.2 ve Özdeşlik 8’ den

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{4ti-j} = \frac{(-1)^n L_{(2t-1)n} F_{(2t-1)(n+1)}}{F_{2t-1}}$$

bulunur.

2. Toplam ifadesi n nin mod 4’e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{i-j} = \sum_{0 \le i,j \le 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{i-j}$$

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} (\alpha^{i-j} + \beta^{i-j})$$

$$= \sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \alpha^{i-j} + \sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \beta^{i-j}$$

$$= \frac{(\alpha-1)^{4k+1}+1}{\alpha-1+1} + \frac{(\beta-1)^{4k+1}+1}{\beta-1+1}$$

$$= \frac{-\beta^{4k+1}+1}{\alpha} + \frac{-\alpha^{4k+1}+1}{\beta}$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha^{4k+2} + \beta^{4k+2} - \alpha - \beta]$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha^{4k+2} + \beta^{4k+2} - 1]$$

$$= \frac{1}{2}(L_{4k+2} - 1)$$

Özdeşlik 4 ‘te $n = 2k + 1$ alınırsa

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{i-j} = \frac{1}{2}\frac{F_{3(2k+1)}}{F_{2k+1}}$$

$n = 4k$ olduğundan

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{i-j} = \frac{F_{3(\frac{n+2}{2})}}{F_{\frac{n+2}{2}}}$$

elde edilir.

$n = 4k + 1,\ \ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{i-j}+\beta^{i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{i-j}$$

Lemma 3.2.3.1 den son ifade

$$\frac{(-1)^{4k+1}(\alpha-1)^{4k+2}+1}{\alpha-1+1}+\frac{(-1)^{4k+1}(\beta-1)^{4k+2}+1}{\beta-1+1}$$

$$=\frac{-\beta^{4k+2}+1}{\alpha}+\frac{-\alpha^{4k+2}+1}{\beta}$$

$$=\frac{1}{2}[\alpha^{4k+3}+\beta^{4k+3}-\alpha-\beta]$$

$$=\ \frac{1}{2}[\alpha^{4k+3}+\beta^{4k+3}-1]$$

$$=\frac{1}{2}(L_{4k+3}-1)$$

$$=\frac{1}{2}(L_{4k+3}-L_1)$$

Özdeşlik 5'te $m=2k+1, n=2k+2$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{i-j}=L_{2k+1}L_{2k+2}$$

$n = 4k + 1$ olduğundan

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{i-j} = L_{\frac{n+1}{2}} L_{\frac{n+3}{2}}$$

bulunur.

Benzer şekilde $n = 4k + 2$ ve $n = 4k + 3$ için de ispatlanır.

3. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k + 2,\ k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü,toplam formülleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanılırsa

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{5i-j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{5i-j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} (\alpha^{5i-j} + \beta^{5i-j})$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \alpha^{5i-j} + \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \beta^{5i-j}$$

$$= \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \alpha^{5i-j} + \sum_{0 \le i,j \le 4k+2} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} \beta^{5i-j}$$

$$= \frac{(\alpha^5 - \alpha^4)^{4k+3} + 1}{\alpha^5 - \alpha^4 + 1} + \frac{(\beta^5 - \beta^4)^{4k+3} + 1}{\beta^5 - \beta^4 + 1}$$

$\alpha^5 - \alpha^4 = \alpha^3,\ \alpha^3 = 2\alpha + 1\ ,\ \beta^5 - \beta^4 = \beta^3,\ \ \beta^3 = 2\beta + 1$ olduğundan son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+9} + 1}{\alpha^3 + 1} + \frac{\beta^{12k+9} + 1}{\beta^3 + 1}$$

$$\frac{\alpha^{12k+9}+1}{2\alpha+2}+\frac{\beta^{12k+9}+1}{2\beta+2}$$

$$=\frac{(2\beta+2)(\alpha^{12k+9}+1)}{(2\alpha+2)(2\beta+2)}+\frac{(2\alpha+2)(\beta^{12k+9}+1)}{(2\alpha+2)(2\beta+2)}$$

$$=\frac{2\beta\alpha^{12k+9}+2\beta+2+2\alpha^{12k+9}+2\alpha\beta^{12k+9}+2\alpha+2+2\beta^{12k+9}}{4\alpha\beta+4\alpha+4\beta+4}$$

$$=\frac{-\alpha^{12k+8}+\beta+1+\alpha^{12k+9}-\beta^{12k+8}+\alpha+1+\beta^{12k+9}}{2\alpha+2\beta}$$

$$=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}[L_{12k+7}+L_1+2]$$

Özdeşlik 6'da $m=6k+3$, $n=6k+4$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}=\frac{(-1)^{4k+2}}{2}(5F_{6k+3}F_{6k+4}+2)$$

$n=4k+2$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}=\frac{(-1)^{n}}{2}(5F_{\frac{3n}{2}}F_{\frac{3n+2}{2}}+2)$$

elde edilir.

$n=4k+3,\;\; k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü,toplam formülleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanılırsa

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{5i-j}+\beta^{5i-j})$$

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{5i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{5i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{5i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+3}(-1)^{i+j}\binom{i}{j}\beta^{5i-j}$$

$$=\frac{(\alpha^5-\alpha^4)^{4k+4}+1}{\alpha^5-\alpha^4+1}+\frac{(\beta^5-\beta^4)^{4k+4}+1}{\beta^5-\beta^4+1}$$

$\alpha^5-\alpha^4=\alpha^3,\ \alpha^3=2\alpha+1$, $\beta^5-\beta^4=\beta^3,\ \ \beta^3=2\beta+1$ olduğundan son ifade

$$\frac{\alpha^{12k+12}+1}{\alpha^3+1}+\frac{\beta^{12k+12}+1}{\beta^3+1}$$

$$=\frac{\alpha^{12k+12}+1}{2\alpha+2}+\frac{\beta^{12k+12}+1}{2\beta+2}$$

$$=\frac{(2\beta+2)(\alpha^{12k+12}+1)}{(2\alpha+2)(2\beta+2)}+\frac{(2\alpha+2)(\beta^{12k+12}+1)}{(2\alpha+2)(2\beta+2)}$$

$$=\frac{2\beta\alpha^{12k+12}+2\beta+2+2\alpha^{12k+12}+2\alpha\beta^{12k+12}+2\alpha+2+2\beta^{12k+12}}{4\alpha\beta+4\alpha+4\beta+4}$$

$$=\frac{-\alpha^{12k+11}+\beta+1+\alpha^{12k+12}-\beta^{12k+11}+\alpha+1+\beta^{12k+12}}{2\alpha+2\beta}$$

$$\frac{(-1)^{4k+3}}{2}[L_{12k+10}-L_2]$$

Özdeşlik 6'da $m=6k+4$, $n=6k+6$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}=\frac{(-1)^{4k+3}}{2}(5F_{6k+4}F_{6k+6})$$

$n=4k+3$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{5i-j}=\frac{(-1)^{n}}{2}(5F_{\frac{3n-1}{2}}F_{\frac{3(n+1)}{2}})$$

bulunur.

$n = 4k$ ve $n = 4k + 1$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

4. Bu toplam iki ayrı durum içinde ayrı ayrı incelenmelidir:

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{(4t+2)i-j}$$

$$= \sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} (\alpha^{(4t+2)i}\alpha^{-j} + \beta^{(4t+2)i}\beta^{-j})$$

$n = 2k$ için ifadenin sol tarafında Binet formülü ve Lemma 3.2.3.1 kullanılırsa

son ifade

$$\sum_{0\le i,j\le 2k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \alpha^{(4t+2)i}\alpha^{-j} + \sum_{0\le i,j\le 2k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \beta^{(4t+1)i}\beta^{-j}$$

$$= \frac{(-1)^{4k}(\alpha^{4t+2} - \alpha^{4t+1})^{2k+1} + 1}{\alpha^{4t+2} - \alpha^{4t+1} + 1} + \frac{(-1)^{4k}(\beta^{4t+2} - \beta^{4t+1})^{2k+1} + 1}{\beta^{4t+2} - \beta^{4t+1} + 1}$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2} - \alpha^{4t+1} = \alpha^{4t}$; $\beta^{4t+2} + \beta^{4t+3} = \beta^{4t}$ ifade de yerine yazıldığında $\alpha\beta = -1$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{\alpha^{4t(2k+1)} + 1}{\alpha^{4t} + 1} + \frac{\beta^{4t(2k+1)} + 1}{\beta^{4t} + 1}$$

$$= \frac{(\beta^{4t} + 1)(\alpha^{4t(2k+1)} + 1) + (\alpha^{4t} + 1)(\beta^{4t(2k+1)} + 1)}{(\alpha^{4t} + 1)(\beta^{4t} + 1)}$$

$$= \frac{\beta^{4t}\alpha^{4t(2k+1)} + \beta^{4t} + \alpha^{4t(2k+1)} + 1 + \alpha^{4t}\beta^{4t(2k+1)} + \alpha^{4t} + \beta^{4t(2k+1)} + 1}{\alpha^{4t}\beta^{4t} + \alpha^{4t} + \beta^{4t} + 1}$$

$$= \frac{\alpha^{4t2k} + \beta^{4t} + \alpha^{4t(2k+1)} + 1 + \beta^{4t2k} + \alpha^{4t} + \beta^{4t(2k+1)} + 1}{2 + L_{4t}}$$

Lemma 4.1.2 ve özellik' 7 den

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+2)i-j}=\frac{L_{2tn}L_{2t(n+1)}}{L_{2t}}$$

bulunur.

$n=2k+1$ için de ispat benzerdir.

5. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{3i-j}+\beta^{3i-j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{3i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{3i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{3i-j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}(-1)^{i+j}\beta^{3i-j}$$

$$=\frac{(-1)^{4k}(\alpha^3-\alpha^2)^{4k+1}+1}{\alpha^3-\alpha^2+1}+\frac{(-1)^{4k}(\beta^3-\beta^2)^{4k+1}+1}{\beta^3-\beta^2+1}$$

α ve β, $\ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3-\alpha^2=\alpha\ ;\ \beta^3-\beta^2=\beta$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta=-1$ olup gerekli

düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$(-1)^{4k}\left[\frac{\alpha^{4k+1}+1}{\alpha+1}+\frac{\beta^{4k+1}+1}{\beta+1}\right]$$

$$=\frac{(\beta+1)(\alpha^{4k+1}+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}+\frac{(\alpha+1)(\beta^{4k+1}+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{\beta\alpha^{4k+1}+\beta+1+\alpha^{4k+1}+\alpha\beta^{4k+1}+\alpha+1+\beta^{4k+1}}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$=\frac{-\alpha^{4k}+\beta+1+\alpha^{4k+1}-\beta^{4k}+\alpha+1+\beta^{4k+1}}{\alpha+\beta}$$

$$=(-1)^{4k}[L_{4k-1}+3]$$

Özdeşlik 6'da $m=2k$, $n=2k-1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}=\frac{(-1)^{4k}}{2}(5F_{2k}F_{2k-1}+2)$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}=(-1)^{n}(5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2)$$

elde edilir.

$n=4k+3,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.1.3 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{3i-j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+3}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{3i-j}+\beta^{3i-j})$$

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k+3} \binom{i}{j} (-1)^{i+j}\alpha^{3i-j} + \sum_{0\leq i,j\leq 4k+3} \binom{i}{j} (-1)^{i+j}\beta^{3i-j}$$

$$= \sum_{0\leq i,j\leq 4k+3} \binom{i}{j} (-1)^{i+j}\alpha^{3i-j} + \sum_{0\leq i,j\leq 4k+3} (-1)^{i+j}\beta^{3i-j}$$

$$= \frac{(-1)^{4k+3}(\alpha^3-\alpha^2)^{4k+4}+1}{\alpha^3-\alpha^2+1} + \frac{(-1)^{4k+3}(\beta^3-\beta^2)^{4k+4}+1}{\beta^3-\beta^2+1}$$

α ve β, $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3-\alpha^2=\alpha$; $\beta^3-\beta^2=\beta$ ifade de yerine yazılırsa, $\alpha\beta=-1$ olup gerekli düzenlemeler yapıldığında son ifade

$$\frac{-\alpha^{4k+4}+1}{\alpha+1} + \frac{-\beta^{4k+4}+1}{\beta+1}$$

$$= \frac{(\beta+1)(-\alpha^{4k+4}+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(-\beta^{4k+4}+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$= \frac{-\beta\alpha^{4k+4}+\beta+1-\alpha^{4k+4}-\alpha\beta^{4k+4}+\alpha+1-\beta^{4k+4}}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$

$$= \frac{\alpha^{4k+3}+\beta+1-\alpha^{4k+4}+\beta^{4k+3}+\alpha+1-\beta^{4k+4}}{\alpha+\beta}$$

$$= (-1)^{4k+3}[L_{4k+1}-3]$$

$$(-1)^{4k+3}[L_{4k+2}-L_2]$$

Özdeşlik 6'da $m=2k$, $n=2k+2$ alınırsa

$$\sum_{0\leq i,j\leq 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j}L_{3i-j} = \frac{(-1)^{4k+3}}{2}(5F_{2k}F_{2k+2})$$

$n=4k+3$ olduğundan

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j}L_{3i-j} = (-1)^n(5F_{\frac{n-3}{2}}F_{\frac{n+1}{2}})$$

bulunur.

$n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 2$ için de ispat benzer şekildedir.

6. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n = 4k, k \in \mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında son ifade

$$\sum_{0\le i,j\le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_j$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_j$$

$$= \sum_{0\le i,j\le 4k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} (\alpha^j + \beta^j)$$

$$= \frac{(-1)^{4k}(1-\alpha)^{4k+1} + 1}{1-\alpha+1} + \frac{(-1)^{4k}(1-\beta)^{4k+1} + 1}{1-\beta+1}$$

$$= (-1)^{4k}\left[\frac{\beta^{4k+1}+1}{\beta+1} + \frac{\alpha^{4k+1}+1}{\alpha+1}\right]$$

$$= (-1)^{4k}\left[\frac{(\alpha+1)(\beta^{4k+1}+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)} + \frac{(\beta+1)(\alpha^{4k+1}+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right]$$

$$= \frac{\alpha\beta^{4k+1} + \alpha + 1 + \beta^{4k+1} + \beta\alpha^{4k+1} + \beta + 1 + \alpha^{4k+1}}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$= \frac{-\beta^{4k+1} + \alpha + 1 + \beta^{4k+4} - \alpha^{4k} + \beta + 1 + \alpha^{4k+1}}{\alpha + \beta}$$

$$= (-1)^{4k}[L_{4k-1} - 3]$$

$$= (-1)^{4k}(L_{4k-1} + 1 + 2)$$

Özdeşlik 6 'da $m = 2k$, $n = 2k - 1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_j=\frac{(-1)^{4k}}{2}(5F_{2k}F_{2k-1}+2)$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_j=(-1)^n(5F_{\frac{n}{2}}F_{\frac{n-2}{2}}+2)$$

elde edilir.

$n=4k+2,\ n=4k+2,\ n=4k+3$ için de ispat benzerdir.

7. Toplam ifadesi n nin mod 4'e göre oluşan tüm durumları için ayrı ayrı incelenmelidir.

$n=4k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında son ifade

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{4ti+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{j}L_{4ti+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{j}(\alpha^{4ti+j}+\beta^{4ti+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{j}\alpha^{4ti+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{j}\beta^{4ti+j}$$

$$=\frac{(\alpha^{4t}-\alpha^{4t+1})^{4k+2}+1}{\alpha^{4t}-\alpha^{4t+1}+1}+\frac{(\beta^{4t}-\beta^{4t+1})^{4k+2}+1}{\beta^{4t}-\beta^{4t+1}+1}$$

α ve $\beta,\ \ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+1}-\alpha^{4t}=\alpha^{4t-1};\ \ \beta^{4t+1}-\beta^{4t}=\beta^{4t-1}$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$\frac{(-1)^{4k+1}(-\alpha^{4t-1})^{4k+2}+1}{-\alpha^{4t-1}+1}+\frac{(-1)^{4k+1}(-\beta^{4t-1})^{4k+2}+1}{-\beta^{4t-1}+1}$$

$$=\frac{(-\beta^{4t-1}+1)(-\alpha^{(4t-1)(4k+2)}+1)+(-\alpha^{4t-1}+1)(-\beta^{(4t-1)(4k+2)}+1)}{(-\alpha^{4t-1}+1)(-\beta^{4t-1}+1)}$$

$$=\frac{(-\beta^{4t-1}+1)(-\alpha^{(4t-1)(4k+2)}+1)+(-\alpha^{4t-1}+1)(-\beta^{(4t-1)(4k+2)}+1)}{(-\alpha^{4t-1}+1)(-\beta^{4t-1}+1)}$$

Lemma 4.1.1' den

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{4ti+j}=\frac{1}{2}L_{\frac{3n+1}{2}}L_{\frac{3(n+1)}{2}}$$

bulunur.

$n=4k,\ n=4k+2$ ve $n=4k+3$ için de benzer şekilde ispatlanır.

8. Eşitliğin sol tarafı için Binet formülü ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+1)i+j}$$

$$\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{(4t+1)i+j}+\beta^{(4t+1)i+j})$$

$$=\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{(4t+1)i+j}+\sum_{0\leq i,j\leq n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{(4t+1)i+j}$$

$$=\frac{(\alpha^{4t+1}-\alpha^{4t+2})^{n+1}+1}{\alpha^{4t+1}-\alpha^{4t+2}+1}+\frac{(\beta^{4t+1}-\beta^{4t+2})^{n+1}+1}{\beta^{4t+1}-\beta^{4t+2}+1}$$

α ve β $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2}-\alpha^{4t+1}=\alpha^{4t};\ \beta^{4t+2}-\beta^{4t+1}=\beta^{4t}$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$\frac{(-1)^n(-\alpha^{4t})^{n+1}+1}{-\alpha^{4t}+1}+\frac{(-1)^n(-\beta^{4t})^{n+1}+1}{-\beta^{4t}+1}$$

$$\frac{(-\beta^{4t}+1)(-\alpha^{4t(n+1)}+1)+(-\alpha^{4t}+1)(-\beta^{4t(n+1)}+1)}{(-\alpha^{4t}+1)(-\beta^{4t}+1)}$$

$$=\frac{(-\beta^{4t}+1)(-\alpha^{4t(2k+1)}+1)+(-\alpha^{4t}+1)(-\beta^{4t(2k+1)}+1)}{(-\alpha^{4t}+1)(-\beta^{4t}+1)}$$

$$=\frac{\beta^{4t}\alpha^{4t(2k+1)}-\beta^{4t}-\ \alpha^{4t(2k+1)}+1+\alpha^{4t}\beta^{4t(2k+1)}-\alpha^{4t}-\beta^{4t(2k+1)}+1}{\alpha^{4t}\beta^{4t}-\alpha^{4t}-\beta^{4t}+1}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 8' den

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{(4t+1)i+j}=\frac{L_{2tn}F_{2t(n+1)}}{F_{2t}} \qquad (t\neq 0)$$

elde edilir.

9.

$n=4k,\ \ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{2i+j}+\beta^{2i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{2i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{2i+j}$$

$$\frac{(-1)^{4k}(\alpha^2-\alpha^3)^{4k+1}+1}{\alpha^2-\alpha^3+1}+\frac{(-1)^{4k}(\beta^3-\beta^2)^{4k+1}+1}{\beta^2-\beta^3+1}$$

α ve $\beta,\ \ x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3-\alpha^2=\alpha\ ;\ \beta^3-\beta^2=\beta$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$\frac{-\alpha^{4k+1}+1}{\beta}+\frac{-\beta^{4k+1}+1}{\alpha}$$

$$=\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}-\alpha-\beta$$

$$=\alpha^{4k+2}+\beta^{4k+2}-1$$

$$=L_{4k+2}-1$$

Özdeşlik 4’te $n=2k+1$ alınırsa

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}=\frac{1}{2}\frac{F_{3(2k+1)}}{F_{2k+1}}$$

$n=4k$ olduğundan

$$\sum_{0\le i,j\le 4k}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}=\frac{F_{3\left(\frac{n+2}{2}\right)}}{F_{\frac{n+2}{2}}}$$

bulunur.

$n=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}$ için Binet formülü, toplam formülü özellikleri ve Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında

$$\sum_{0\le i,j\le n}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}L_{2i+j}$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}(\alpha^{2i+j}+\beta^{2i+j})$$

$$=\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\alpha^{2i+j}+\sum_{0\le i,j\le 4k+1}\binom{i}{j}(-1)^{i+j}\beta^{2i+j}$$

$$=\frac{(-1)^{4k+1}(\alpha^2-\alpha^3)^{4k+2}+1}{\alpha^2-\alpha^3+1}+\frac{(-1)^{4k+1}(\beta^3-\beta^2)^{4k+2}+1}{\beta^2-\beta^3+1}$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^3 - \alpha^2 = \alpha$; $\beta^3 - \beta^2 = \beta$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$\frac{-\alpha^{4k+2}+1}{\beta} + \frac{-\beta^{4k+2}+1}{\alpha}$$

$$= \alpha^{4k+3} + \beta^{4k+3} - \alpha - \beta$$

$$= \alpha^{4k+3} + \beta^{4k+3} - 1$$

$$L_{4k+3} - L_1$$

Özdeşlik 5'te $m = 2k+1, n = 2k+2$ alınırsa

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{2i+j} = L_{2k+1} L_{2k+2}$$

$n = 4k+1$ olduğundan

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{j} L_{i+j} = L_{\frac{n+1}{2}} L_{\frac{n+3}{2}}$$

bulunur.

$n = 4k+2$ ve $n = 4k+3$ için de benzer şekilde ispatlanır.

10. Bu toplam iki ayrı durum içinde ayrı ayrı incelenmelidir.

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{(4t+3)i+j} = \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} (\alpha^{(4t+3)i}\alpha^{j} + \beta^{(4t+3)i}\beta^{j})$$

$n = 2k$ için ifadenin sol tarafında Binet formülü, toplam formülleri, Lemma 3.2.3.1 kullanıldığında son ifade

$$\sum_{0 \le i,j \le 2k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \alpha^{(4t+3)i+j} + \sum_{0 \le i,j \le 2k} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} \beta^{(4t+3)i+j}$$

$$= \frac{(-1)^{2k}(\alpha^{4t+3} - \alpha^{4t+4})^{2k+1} + 1}{\alpha^{4t+3} - \alpha^{4t+4} + 1} + \frac{(-1)^{2k}(\beta^{4t+3} - \beta^{4t+4})^{2k+1} + 1}{\beta^{4t+3} - \beta^{4t+4} + 1}$$

α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan

$\alpha^{4t+2} + \alpha^{4t+3} = \alpha^{4t+4}$; $\beta^{4t+2} + \beta^{4t+3} = \beta^{4t+4}$ ifade de yerine yazılırsa son ifade

$$= \frac{-\alpha^{(4t+2)(2k+1)} + 1}{-\alpha^{(4t+2)} + 1} + \frac{-\beta^{(4t+2)(2k+1)} + 1}{-\beta^{(4t+2)} + 1}$$

$$= \frac{(-\beta^{(4t+2)} + 1)(-\alpha^{(4t+2)(2k+1)} + 1) + (-\alpha^{(4t+2)} + 1)(-\beta^{(4t+2)(2k+1)} + 1)}{(-\alpha^{(4t+2)} + 1)(-\beta^{(4t+2)} + 1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{4t+2}\beta^{4t+2} - \alpha^{4t+2} - \beta^{4t+2} + 1}$$

$$\times [\beta^{4t+2}\alpha^{(4t+2)(2k+1)} - \beta^{4t+2} - \alpha^{(4t+2)(2k+1)} + 1 + \alpha^{4t+2}\beta^{(4t+2)(2k+1)}$$

$$-\alpha^{4t+2} - \beta^{(4t+2)(2k+1)} + 1]$$

$$= \frac{\alpha^{(4t+1)2k} - \beta^{4t+2} - \alpha^{(4t+2)(2k+1)} + 1 + \beta^{(4t+1)2k} - \alpha^{4t+2} - \beta^{(4t+1)2k} + 1}{2 - L_{4t+2}}$$

Lemma 4.1.1 ve Özdeşlik 7' den son ifade

$$\frac{L_{(4t+2)2k} - L_{(4t+2)(2k+1)} - L_{(4t+2)} + 2}{L_{4t-2} - 2}$$

$$= \frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}L_{2t+1}}{{L_{2t+1}}^2}$$

olup böylece

$$\sum_{0 \le i,j \le n} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} L_{(4t+3)i+j} = \frac{L_{(2t+1)n}L_{(2t+1)(n+1)}}{L_{2t+1}}$$

bulunur.

$n = 2k + 1$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren binomiyel çift toplamlar ve alterne benzerleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özel sayı dizilerinden olan Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren çift toplamları hesaplandığında elde edilen sonuçlar yine Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımları şeklinde ifade edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda, Fibonacci ve Lucas sayılarının kuvvetlerini içeren binomiyel çift toplamlar çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Carlitz, L., Some classes of Fibonacci sums, Fibonacci Quart., 16, 411-426, 1978.

2. Dunlap, R. A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific Publishing River Edge, NJ, 1997.

3. Graham, R. L., Knuth, D. E. ve Patashnik, O., Concrete Mathematics, Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.

4. Horadam, A. F., Basic properties of a certain generalized sequence of numbers, Fibonacci Quart., 3 (3), 161-176, 1965.

5. Horadam, A. F., Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers, Duke Math. J. 32, 437-446, 1965.

6. Khan, M. A. ve H. Kwong, Some binomial identities associated with the generalized natural number sequence, Fibonacci Quart. 49(1), 57-65, 2011.

7. Kılıç, E., Some classes of alternating weighted binomial sums, An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.) 3(2), 835-843, 2016.

8. Kılıç, E., Akkuş, İ., Ömür, N. ve Ulutaş, Y.T., Formulas for binomial sums including powers of Fibonacci and Lucas numbers, UPB Scientific Bulletin, Series A 77(4), 69-78, 2015.

9. Kılıç, E. ve Arıkan, T., Double binomial sums and double sums related with certain linear recurrences of various order, Chiang Mai J. Sci., 45(3), 1569-1577, 2018.

10. Kılıç, E. ve Belbachir H., Generalized double binomial sums families by generating functions, Util. Math. 104, 161-174, 2017.

11. Kılıç, E. ve Ionascu, E. J., Certain binomial sums with recursive coefficients, Fibonacci Quart. 48 (2), 161-167, 2010.

12. Kılıç, E. ve Irmak, N., Binomial identities involving the generalized Fibonacci type polynomials, Ars Combin., 98, 129-134, 2011.

13. Kılıç, E., Ömür, N. ve Ulutaş, Y.T., Binomial sums whose coefficients are products of terms of binary sequences, Util. Math., 84, 45-52, 2011.

14. Kılıç, E. ve Taşdemir, F., On binomial double sums with Fibonacci and Lucas numbers-I, Ars Combin., 144, 173-185, 2019.

15. Kılıç, E. ve Taşdemir, F., On binomial double sums with Fibonacci and Lucas numbers-II, Ars Combin., 144, 345-354, 2019.

16. Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, Pure and Applied Mathematics Wiley-Interscience, New York, 2001.

17 . Layman, J. W., Certain general binomial-Fibonacci sums, Fibonacci Quart., 15(3), 362-366, 1977.

18. Mansour, T., A formula for the generating functions of powers of Horadam's sequence, Australas. J. Combin., 30, 207-212, 2004.

19. Taşdemir, F. ve Göresim Toska, T., Formulas for binomial double sums related to Lucas numbers, Ars Combin., yayına kabul edildi.

20. Vajda, S., Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Ankara Pursaklar'da dünyaya gelen Tuğba GÖRESİM TOSKA, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Ülker İlköğretim Okulu ve Pursaklar Lisesinde tamamlamıştır. 2007 yılında kazandığı Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2011 yılında bitirmiştir. 2017 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.

2016 yılında Kastamonu Çatalzeytin Şehit Engin Açıkgöz Çok Programlı Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atanmıştır.Şu anda ise Şırnak İdil Cumhuriyet Anadolu Lisesi'nde iş hayatına devam etmektedir.Evli ve bir çocuk annesidir.

İletişim Bilgileri

Adres: Yukarı Mahalle 305. Sokak no:18/2

İdil /ŞIRNAK

Telefon: (552) 3262889

E-posta: grsmmm.tgr@gmail.com

Yayınlar, Sempozyumlar

1. Taşdemir F. ve Göresim Toska T., Formulas for binomial double sums related to Lucas numbers, Ars Combin., yayına kabul edildi.
2. Taşdemir F. ve Göresim Toska T., Binomial Double Sums Including Lucas Numbers, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMEE-2019), Selçuk University, Konya,11-13 July, 2019.
3. Taşdemir F. ve Göresim Toska T., Lucas sayılarını içeren alterne toplamlar üzerine, 14. Ankara Matematik Günleri Sempozyumu (AMG 2019), Gazi Üniversitesi, Ankara, 28-29 Haziran, 2019.
4. Taşdemir F. ve Göresim Toska T., Some Binomial Double Sums, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMEE-2018), Ordu Unıversity, Ordu, 27-29 June, 2018.