T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DENEME DENKLEM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMLERİ

Tural AĞIR

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2019

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DENEME DENKLEM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMLERİ

Tural AĞIR

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2019

	YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ **TEZ ONAY FORMU**

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111312018 numaralı öğrencisi Tural AĞIR'ın hazırladığı "**Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Deneme Denklem Yöntemiyle Çözümleri** " başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 12/09/2019 Perşembe günü saat 14:30'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

Jüri Üyesi (Danışman) : Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 28.../11.../19 tarih ve 55. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

28./11./19.

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DENEME DENKLEM YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMLERİ

Tural AĞIR

Yozgat Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2019; Sayfa: 35

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesine olanak sağlayan deneme denklem yöntemleri incelenmiştir. Deneme denklem yöntemi ile bu tarz denklemlerin yeni tam çözümlerinin bulunması hedeflenmiştir. Önerilen bu yöntemin daha da geliştirilmiş bir hali olan genişletilmiş deneme denklem yöntemi ifade edilmiştir. Geliştirilen bu yöntem kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi ve (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemlerine uygulanarak bu denklemlerin farklı yeni tam çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bu yeni tam çözümlerin literatür tarandığında, bu denklemlerin literatürde bulunmayan yeni tam çözümleri olduğunu ifade edebiliriz. Ayrıca, bulunan bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışlarını göstermek için iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Deneme denklem yöntemi, Genişletilmiş deneme denklem yöntemi, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, Kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi, (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TRIAL EQUATION METHOD

Tural AĞIR

Yozgat Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2019; Page: 35

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this thesis, trial equation methods which allow to obtain exact solutions of the partial differential equations are examined. It is aimed to find the new exact solutions of such equations with trial equation method. The extended trial equation method, which is a further development of the proposed method, is expressed. The developed method was applied to cubic nonlinear Schrödinger equation and (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) equations to obtain different new complete solutions of these equations. When these new exact solutions are searched in the literature, we can state that these equations are new exact solutions not found in the literature. In addition, two and three dimensional graphs were drawn to illustrate the physical behavior of these new complete solutions.

Keywords: Trial equation method, Extended trial equation method, Nonlinear partial differential equations, Schrödinger equation with a cubic nonlinearity, (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve deneyimlerinden her zaman yararlandığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR' a, tezin oluşturulması sırasında yaptıkları katkılarından dolayı Sayın Doç. Dr. Yusuf GÜREFE ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans yapmamı teşvik eden, maddi ve manevi desteğini daima yanımda hissettiğim sevgili eşim Hatice AĞIR a çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Dünyanın da içinde yer aldığı tüm evren belli sistematik bir düzeni oluşturan kurallar üzerine kurulmuş bir makine gibidir. Bu kuralların anlaşılabileceği her bir olay kendi yasalarıyla düzenli bir şekilde işlemektedir. Doğadaki karşılaştığımız bu yasaları incelemek ve anlamak için bilim insanları birçok çalışmalar yapmış ve bu çalışmalar sürekli olarak geliştirilmiştir. Yapılan çalışmalar sonucunda önerilen birçok yöntem ve bu yöntemlerden elde edilen çözümler matematik bilim dalıyla anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Her bir yeni yapılan çalışma beraberinde yeni problemlere sebep açmış, oluşan yeni problemlerin çözülmesi üzerine yapılan çalışmalar bu sistematik düzeni anlamamıza yardımcı olmuştur.

Birçok alanda karşılaşılan bu problemlerin matematik argümanlarıyla modellenip çözülmeye çalışılması bilim insanlarının uğraşı olmuştur. Yapılan bu modellemeler diğer bir ifadeyle oluşturulan diferansiyel denklemler birçok problemin çözülerek anlaşılmasına olanak sağlar. Bu sebeple diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin ne demek istediğini yorumlamak oldukça önemlidir. Daha karmaşık bir yapıya sahip olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin elde edilen çözümleri birçok problemin anlaşılmasına rehberlik edeceğinden bu tarz denklemlerle ilgili son zamanlarda yapılan çalışmalar artmıştır. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi için birçok yöntem önerilmiş ve bu yöntemler daha da geliştirilmiştir. Böylece önerilen ve geliştirilen yöntemler sayesinde elde edilen çözümlerin birçok fiziksel olayların karşılığı olan denklemlerin anlaşılmasına ve yorumlanmasına katkı sağlanmıştır.

İşte bu sebepten dolayı birçok bilim alanında karşımıza çıkan ve çözümlerinin elde edilmesi oldukça önemli olan zamana göre türevi içeren lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integre edilmeleri ve çözülebilmeleri önemlidir. Son zamanlarda kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilebilmesi için çok fazla çalışmalar yapılmıştır. Belli bir çözüme sahip olmayan bu denklemlerin anlaşılabilir hale gelmesi için dalga olaylarından faydalanılır. Doğa da karşılaşılan bu lineer olmayan olaylar, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, optik fiberler, katı hal fiziği, biyoloji, kimyasal kinematik, kimyasal fizik, jeokimya ve mühendislik alanlarında çok sık görülmektedir. Bir tekli(solitary) dalga, oluştuğu ortamda dalganın mevcut hızı ile birlikte hareket ettiğinde zamanla değişime uğramadan yayılan bir dalgadır. Bir soliton, başka bir soliton ile çarpıştıktan sonra bile, dalganın mevcut yapısını koruma özelliği ile lineer olmayan dalga çeşididir. Dalgaların uygulama alanları oldukça fazla olduğundan ve bu dalgaların ne tarz olaylarda karşımıza çıkacağını bilmemekteyiz. Bu sebeple lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesine olanak sağlayan çok farklı güçlü ve etkin yöntemler farklı bilim insanları tarafından geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yeni yöntemler neticesinde yeni tam çözüm fonksiyonlarının belirlemesiyle birçok fiziksel olayın anlaşılması daha da kolay hale gelecektir. Bu sebeple bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümünün elde edilebilmesi için farklı modellemelerden yararlanmak oldukça kolaylık sağlar. Bundan dolayı birçok farklı yaklaşım yöntemleri önerilmiş ve geliştirilmiştir.

Önerilen ve geliştirilen tam çözüm yöntemlerine örnek olarak; sinüs-kosinüs yöntemi [1,2], üstel fonksiyon yöntemi [3, 4], tanh fonksiyon yöntemi [5, 6], Hirota'nın bilinear dönüşüm yöntemi [7, 8], (G'/G)- açılım yöntemi [9, 10], deneme denklem yöntemi [11-14], çoklu üstel fonksiyon yöntemi [15, 16], geliştirilmiş (G'/G)-açılım yöntemi [17, 18], genişletilmiş deneme denklem yöntemi [19-21], çoklu genişletilmiş deneme denklem yöntemi [22], ilk integral yöntemi [23], Weierstrass eliptik fonksiyon açılım yöntemi [24], Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi [25, 26], Kudryashov yöntemi [27-29], modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi [30, 31], F-açılım yöntemi [32, 33] ve genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi [34-37] verilebilir.

2005 yılında Liu C.S., [11, 12] lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasını sağlayan güçlü bir yöntem önerdi. Burada temel amacı, çözümü bilinmeyen bir adi diferansiyel denklemin çözümlerini farklı integral alma yöntemleri kullanarak bulup, bunlardan oluşan fonksiyonların yer aldığı sonlu seri şeklindeki çözüm fonksiyonunu ile denklemlerin çözümlerini elde etmekti. Daha sonra önerilen bu güçlü yöntemin geliştirilmesiyle farklı versiyonları birçok bilim insanı [13, 14] tarafından literatüre kazandırıldı. Son zamanlarda Gürefe ve ark. [19-21] tarafından Liu'nun önerdiği yöntem daha da geliştirilerek genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak literatüre kazandırılmıştır. Böylece

Gürefe ve ark. deneme denklem yönteminden bulunan sonuçlardan daha genel ve farklı yeni tam çözümleri buldular.

Bu tez çalışmasında, deneme denklem yöntemlerinin incelenmesi yapılmıştır. Deneme denklem yönteminin geliştirilmesiyle elde edilen daha genel bir hali verilmiştir. İlk önce Liu'nun önerdiğini deneme denklem yöntemi ifade edilmiş daha sonra ise bu önerilen yönteminin geliştirilerek genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak isimlendirilen yöntem ifade edilmiştir. Geliştirilen bu genişletilmiş deneme denklem yöntemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni farklı ve bir arada tam çözümlerinin elde edilmesine olanak sağlamıştır. Geliştirilen yöntem sırasıyla kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi ile (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemlerine uygulanmıştır. Genişletilmiş deneme denklem yöntemi için gerekli olan algoritmaların oluşturulması ve oluşturulan algoritmaya göre kodların yazılması sonucunda ele alınan denklemlerin çözülmesiyle denklemlerin literatürde bulunmayan yeni farklı tam çözümleri elde edilmiştir. Mathematica 10 paket programı yardımıyla uygulaması yapılan denklemlerin oluşturulan algoritmalarının yazılması ve bulunan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafiklerinin çizilmesi yapılmıştır.

Tezin birinci bölümünde kullandığımız gerekli temel tanımlar ile kavramlar ifade edilmiştir. İkinci bölümünde ise deneme denklem yöntemi ve genişletilmiş deneme denklem yöntemi ayrıntılı olarak ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde genişletilmiş deneme denklem yöntemi kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi ile (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemlerine uygulanmıştır. Son bölümde ise geliştirilen yönteme sayesinde bulanan yeni farklı tam çözümlerin uygulamasını yaptığımız denklemlerin diğer yöntemlerle bulunan sonuçlarıyla karşılaştırılması yapılarak, elde edilen yeni farklı tam çözümlerin irdelenmesi yapılmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde bu tezde yararlanılan diferansiyel denklem, kısmi türevli diferansiyel denklemler solitonlar ve çeşitleriyle alakalı bazı temel tanımlar, kavramlar ve özellikler ifade edilmiştir.

1.1.1. Diferansiyel Denklemler

Birçok bilim dalında örneğin fizik, kimya, mühendislik, biyoloji ve ekonomi dallarında meydana gelen pek çok fiziksel olaylar matematiksel ifadeler kullanılarak modellenir. Bu modelleme sonucunda ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması neticesinde bu fiziksel olayları daha anlaşılır hale gelir. Diferansiyel denklemlerin tanımları ve çeşitleri aşağıda belirtilmiştir.

Tanım 1.1: Bilinmeyen fonksiyon ve onun çeşitli türevlerini içinde barındıran denklemlere diferansiyel denklemler denir. Eğer bilinmeyen fonksiyon tek bir bağımsız değişkenli ise denkleme adi diferansiyel denklem, birden fazla bağımsız değişkenli ise denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. Bir $m.$ mertebeden bir adi diferansiyel denklem; x bağımsız değişkeni, y bilinmeyen değişkeni ifade etmek üzere

$$\Theta\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(m)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklem ise $x, y, w, t, \ldots$ bağımsız değişkenler ve bilinmeyen fonksiyon $u = u\left(x, y, w, t, \ldots\right)$ şeklinde kabul edilirse, bir kısmi türevli diferansiyel denklemin en genel hali

$$Q\left(x, y, w, t, u, u_x, u_y, u_w, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{ww}, u_{tt}, u_{xy}, \ldots\right) = 0 \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.2: Bir diferansiyel denklemin mertebesi, içinde yer alan en yüksek mertebeli türevin mertebesine dereceye ise en yüksek mertebeli türevin derecesine de diferansiyel denklemin derecesi denir.

Diferansiyel denklemlerin çeşitli sınıflandırmaları bulunmaktadır. Sınıflandırma, denklemin içerisinde yer alan bağımsız değişken sayısına göre yapılabileceği gibi denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine ve derecesine göre de yapılabilir. Ayrıca diferansiyel denklemdeki bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine bakılarak lineer veya lineer olmayan olarak da sınıflandırma yapılır. Kısacası bilinmeyen fonksiyonun ve onun türevlerinin derecesi bir ise lineer diferansiyel denklem, derece birden farklı ise lineer olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Ayrıca bir diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin katsayıları sabit ise sabit katsayılı, değişken katsayılı ise değişken katsayılı ve kompleks katsayılı ise kompleks katsayılı diferansiyel denklemler(sistemler) olarak da sınıflandırılır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerdeki sınıflandırma adi diferansiyel denklemlerdeki sınıflandırmalardan farklı olarak yapılmaktadır. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevli terimler lineer ise, bu takdirde kısmi türevli diferansiyel denkleme yarı lineer denir. Bu tarz denklemlerde eğer en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise, bu takdirde denkleme hemen hemen lineer diferansiyel denklem denir. Bu tanımlardan da anlaşılacağı gibi yarı lineer diferansiyel denklemlerin sınıfı, hemen hemen lineer denklem sınıfını, hemen hemen lineer denklem sınıfı da lineer denklem sınıfını içine almaktadır.

Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde bulunan bağımsız değişkenlerin sayısı ve denklemin mertebesinin ne olduğunu çözümün olup, olmayacağında önemli bir role sahiptir. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümleri adi diferansiyel denklemlerdeki çözümlerden farklıdır. Kısmi türevli diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümü olabileceği gibi bazen sadece tek bir çözümü bazen de hiçbir çözümü bulunmayabilir. Ayrıca bazı özel çözümler dışında tüm çözümleri kapsayan genel bir çözümü elde etmek mümkün olmayabilir. Bir genel çözümdeki keyfi fonksiyon sayısı denklemin mertebesi ile alakalı olup, n tane değişken içeren m. mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü $n-1$ tane bağımsız değişkenli m tane keyfi fonksiyon barındırır. m. mertebeden bir adi diferansiyel denklemde ise bir bağımsız değişkenli m tane sabit içeren çözümler bulunmaktadır.

Tanım1.3: ϕ bilinmeyen fonksiyonun bağımsız değişkenlerinin bir $E \subset \Re^n$ alt cümlesine kısıtlandığını farz edelim. $\phi : E \to \Re$ olmak üzere n. mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklemin E kümesindeki bir çözümü, E kümesinin bütün iç noktalarında sağlayan C^n sınıfından bir fonksiyon olup, $n.$ mertebe bir kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü n tane C^n sınıfından keyfi fonksiyon içeren bir çözüm olarak bulunmaktadır.

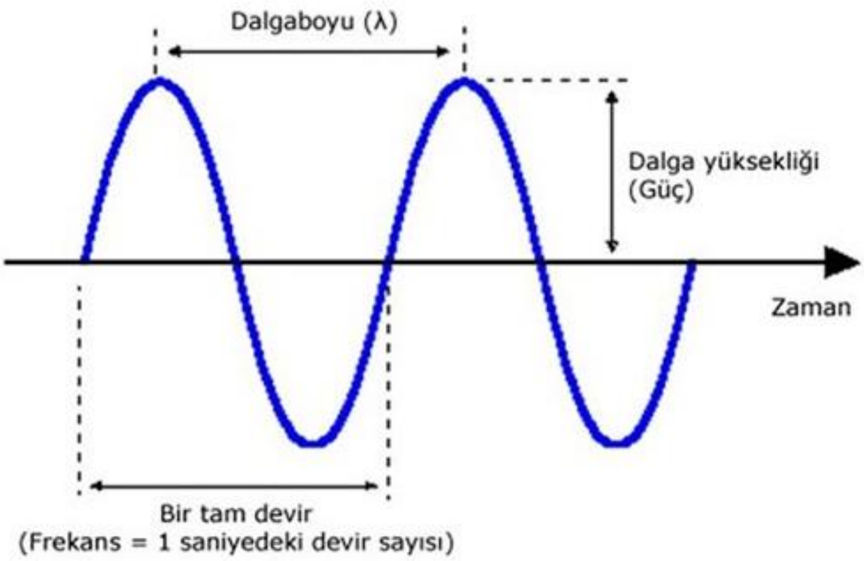
Genel çözümden keyfi fonksiyonların özel olarak seçilmesiyle elde edilen çözümlere özel çözüm denir. Uygulamada en sık karşılaşılan durum ise bir diferansiyel denklemin başlangıç veya sınır şartları ilave edilerek oluşturulması sonucunda oluşan başlangıç veya sınır değer problemlerinin özel çözümlerini elde etmektir.

1.1.2. Solitonlar ve Çeşitleri

Fizik bilim dalındaki birçok olayın izahında dalga kavramı ile karşılaşılır. Dalga kavramı, belli bir ortamda yayılan enerjinin taşınmasını olanak sağlayan titreşimler olarak açıklanabilir. Örneğin su üstünde ilerleyen yüzey dalgaları, belli bir madde ortamında yayılan ses dalgaları, ışık şeklinde ilerleyen parçacıklar ve depremin oluşması esnasında ortaya çıkan enerjinin meydana getirdiği sarsıntılar birer dalga çeşitleridir. Bir dalganın karakterini; genliği, frekansı (f) ve dalga boyu (λ) belirlemektedir. Burada salınımın şiddeti genliği, salınımın sıklığı frekansı ve dalgaların iki tepesi veya iki çukuru arasındaki uzaklığı ise dalganın boyunu ifade etmektedir. Dalganın hareketi esnasında oluşan belli titreşimler periyodik veya periyodik olmayan salınımları göstermektedir. Bir viyolonseldeki nota sesi periyodik, bir patlama sonucu oluşan ses ise periyodik olmayan dalgaya örnek verilebilir. Ayrıca dalgalar durağan veya ilerleyen dalgalar olarak iki şekilde sınıflandırılabilir. Durağan dalgalar sabit bir pozisyonda olup ortamın hareketine ters hareket yapıp duran dalgalardır. İlerleyen dalgalar ise belli iki nokta arasında enerjinin ortama yayılmasıyla hareket eder şeklinde görünen dalgalardır. Belli bir ortamda ilerleyen dalganın frekansını artırdığımızda dalga boyu azalmaktadır. Buna istinaden bir dalganın hızını (v) gösteren matematiksel ifade

$$v = f\lambda \tag{1.3}$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 1.1. Dalga modeli

Solitonlar ise şekil, hız ve enerjileri değişmeden yayılan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir. Ayrıca solitonlar karşılıklı olarak çarpıştıklarında ya da belli darbelere maruz bırakıldıklarında özelliklerini kaybetmeden koruyabilen dalga çeşididir. Solitonlar; hızı sürekli değişen lineer olmayan fiziksel olayların oluşturduğu sistemlerin çözümlerinde ortaya çıkarlar. Özellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilen fiziksel olayların açıklanmasında çözüm olarak katkıda bulunmaktadırlar. Örneğin akışkanlar mekaniğinde, parçacık fiziğinde ve biyolojik sistemlerde karşımıza çıkan solitonlar teknolojinin ilerlemesiyle kendisine birçok alanda uygulama alanı bulmaktadır. Örneğin, sinir sisteminde nöronların gönderdiği sinyaller, mıknatısların oluşturduğu manyetik hareketler, haberleşmede optik ışınlarının ilerlemesinde solitonlar görülmektedir.

Soliton dalgalar ilk olarak 1834 yılında Scott Russell tarafından gözlenmiştir. Bu gözlemlerde bir soliton şeklinde olan su dalgasının genliği ℓ, yerden uzaklığı (derinliği) h olduğu g yer çekim ivmeli bir ortamda dalganın hızı v

$$v=\sqrt{g\left(\ell+h\right)} \tag{1.4}$$

olarak ifade edilmiştir. Ayrıca burada oluşan dalgaların lineer olmayan bir özellik sahip olduğu ifade edilmiştir. Bu buluş sayesinde solitonların lineer olmayan dinamiklerin açıklamasında önemli bir aktör olmasını sağlamıştır. Daha sonra 1895 yılında ilk defa D. J. Korteweg ve G. De Vries adlı bilim insanları KdV denklemi olarak bilinen

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \tag{1.5}$$

denkleminin $\phi = \phi(x,t)$ çözümlerinin ξ dalga sayısı olmak üzere

$$u(x,t) = \ell \,\mathrm{Sech}^2\left(\xi\left(x - vt\right)\right),\ v = 2\ell = 4\xi^2 \tag{1.6}$$

soliton özelliğinde bir dalganın x konumunda t zamanında yerden uzaklığını verdiğini göstermişlerdir. Esas olarak derinliği az sularda meydana gelen dalgaların sürekli bir biçimde yayılmasını açıklayan model ifade edilmiştir. Günümüzde ise birçok kısmi türevli diferansiyel denklemler farklı yöntemler kullanılarak, çözüldüğünde çeşitli(aydınlık, karanlık, çoklu v.b.) solitonlar ile karşılaşılmıştır.

2. YÖNTEMLER

Bu bölümde Liu'nun önerdiğini deneme denklem yönteminin incelenmesi yapılmıştır. İlk önce deneme denklem yöntemi detaylı bir şekilde anlatılmış daha sonra ise Gürefe ve ark. tarafından bu yöntemin geliştirilmesiyle elde edilen genişletilmiş deneme denklem yöntemi ifade edilmiştir. Deneme denklem yöntemleri ile ilgili birçok araştırmacı çalışmalar yapmış ve ele alınan bu yöntemin farklı versiyonları geliştirilerek farklı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde edilmiştir.

2.1. Deneme Denklem Yöntemi

2005 yılında Cheng-Shi Liu tarafından önerilen deneme denklem yöntemi; kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasına olanak sağlar. Bu bölümde, Liu tarafından önerilen deneme denklem yönteminin ana hatları ayrıntılı bir şekilde ifade edilmiştir. Bağımsız değişkenler $x, y, z, ..., t$ olmak üzere bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleminin genel halini

$$\mathrm{T}\left(u, u_x, u_y, u_z ..., u_t, ..., u_{xx}, u_{xy}, u_{xz}, ..., u_{xt}, ...\right) = 0 \qquad (2.1)$$

şeklinde kabul edelim. İlk olarak, hareketli dalga çözümlerini hesaplayacağımızdan dolayı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenmesini yapabilmek için, $e_j \; \left(j = 1, 2, 3, ..., m\right)$ sabitler, T ' de $u\left(x, y, z, \ldots, t\right)$ nin bir polinomunu göstermek üzere

$$u\left(x, y, z, \ldots, t\right) = u\left(\xi\right), \quad \xi = e_1 x + e_2 y + e_3 z + ... + e_m t \qquad (2.2)$$

hareketli dalga dönüşümünü kullanılır. (2.1) kısmi türevli denkleme bu tanımlanan hareketli dalga dönüşümü uygulandığında ve denklemdeki yer alan kısmi türevlerin karşılıkları yerine yazıldığında

$$R\left(u, u', u'', u''', ...\right) = 0 \qquad (2.3)$$

şeklinde bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem bulunur. (2.3) denklemindeki $u(\xi)$ çözüm fonksiyonunu $a_i\left(i=0,\cdots,n\right)$'ler daha sonra belirlenecek keyfi sabitler olmak üzere

$$\left(u'\right)^2 = F\left(u\right) = a_n u^n + \cdots + a_1 u + a_0 \tag{2.4}$$

denklemin çözümünden elde edilen çözüm fonksiyonudur. (2.4) denkleminden yararlanılarak (2.3) denkleminde bulunan türevler hesaplanır. Böylece (2.3) denklemi $P(u) = r_s u^s + \cdots + r_1 u + r_0$ şeklinde bir polinom ifadesine dönüşür. a_i keyfi katsayılarını belirleyebilmek için; $P(u)$ polinomunu bir sıfır polinomu olarak kabul edip, bu polinom bulunan $r_k\,(k=0,\cdots,s)$ katsayılarını sıfıra eşitleyerek bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Mathematica 10 paket programı yardımıyla oluşturulan cebirsel denklem sistemi ilgili algoritmaya göre çözülüp, elde edilmesi gereken $a_i\left(i=0,\cdots,n\right)$ ve $e_j\ \left(j=1,2,3,...,m\right)$ katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (2.4) denkleminde yerine yazılır ve (2.4) denkleminin integrali alınarak çözümler bulunmaya çalışılır. (2.4) denklemi düzenlendiğinde aşağıdaki gibi

$$\pm\left(\xi - \xi_0\right) = \int \frac{du}{\sqrt{F\left(u\right)}} \tag{2.5}$$

bir integrale karşılık gelir. (2.5) de yer alan integralin çözümüne ihtiyaç duyulmaktadır. Buradaki integralin çözümündeki zorluk $F(u)$ polinomunun derecesine bağlı olarak değişmektedir. Bazen tam diskriminat sistemine bazen ise diğer yöntemlere başvurularak integral alınmaya çalışılır. Buradan elde edilen $u(\xi)$ şeklindeki fonksiyonlara (2.2) belirtilen hareketli dalga dönüşümü uygulanarak, (2.1) denkleminin farklı tam çözümleri elde edilir.

2.2. Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi

Bu bölümde deneme denklem yönteminden hareketle geliştirilen genişletilmiş deneme denklem yöntemi ile lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerin bulunması hedeflenmiştir. Genişletilmiş deneme denklem yöntemi genelleştirilmiş lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulayabilmek için eliptik diferansiyel denklem üzerinde çalışmamız gerekmektedir. Böylece farklı tam çözümlerin elde edilmesi mümkün olacaktır. 2.1 bölümde belirtilen (2.1) ifadesindeki lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemine (2.2) ifadesindeki hareketli dalga dönüşümü uygulandığında, (2.3) şeklindeki bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem bulunur. (2.3) denkleminin çözümünü sonlu seri yaklaşımı ile aşağıdaki gibi

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{\delta}\tau_i\Gamma^i(\xi) \tag{2.6}$$

kabul edelim. (2.6) ifadesindeki çözüm fonksiyonu $\Gamma(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetlerinin lineer kombinasyonu ile ifade edilmektedir. Buradaki $\Gamma(\xi)$ fonksiyonları aşağıdaki lineer olmayan adi eliptik diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonlarıdır. Bu denklemi

$$(\Gamma')^2=\Lambda(\Gamma)=\frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)}=\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1\Gamma+\varepsilon_2\Gamma^2+\cdots+\varepsilon_\theta\Gamma^\theta}{\zeta_0+\zeta_1\Gamma+\zeta_2\Gamma^2+\cdots\zeta_\epsilon\Gamma^\epsilon} \tag{2.7}$$

şeklinde ele alalım. Çözmeye çalıştığımız (2.3) tipindeki denklemlerde uu'' ve $(u')^2$ terimleri bulunabilir olacağından (2.6) ve (2.7) ifadelerinden faydalanılarak türev içeren terimlerden arındırılmış tamamen polinom formuna indirgenmiş olması gerekmektedir. Bu nedenle çözüm fonksiyonundan faydalanılarak (2.3) diferansiyel denkleminde bulunan ilgili türevler

$$u'(\xi)=\Gamma'\sum_{i=0}^{\delta} i\tau_i \Gamma^{i-1}(\xi)$$

$$(u')^2(\xi)=(\Gamma')^2\left(\sum_{i=0}^{\delta} i\tau_i \Gamma^{i-1}(\xi)\right)^2$$

$$(u')^2(\xi)=\frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)}\left(\sum_{i=0}^{\delta} i\tau_i \Gamma^{i-1}(\xi)\right)^2 \tag{2.8}$$

$$u''(\xi)=\frac{\Phi'(\Gamma)\Psi(\Gamma)-\Phi(\Gamma)\Psi'(\Gamma)}{2\Psi^2(\Gamma)}\sum_{i=0}^{\delta} i\tau_i \Gamma^{i-1}(\xi)+\frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)}\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1)\tau_i \Gamma^{i-2}(\xi) \tag{2.9}$$

şeklinde hesaplanır. (2.8) ve (2.9) ifadelerindeki elde edilen türevler incelendiğinde (2.6) çözüm fonksiyonunda belirtildiği gibi rasyonel bir Γ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesine dönüşmektedir.

Buradaki (2.3) denklemi için dengeleme prosedürü en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceli(lineer olmayan) terimin polinom karşılığındaki en yüksek dereceli terimden hareket etmek gerekir. Dengeleme prosedürü ile (2.6) çözüm fonksiyonundaki δ 'yı (2.7) denklemindeki θ ve $\in$ değerleri hesaplanacaktır. Bunun için $\Phi(\Gamma)$, $\Phi'(\Gamma)$, $\Psi(\Gamma)$, $\Psi'(\Gamma)$, u'' ve $(u')^2$ gibi terimlerin en yüksek dereceli terimlerin eşit olduğunu düşünmeliyiz. Bunun neticesinde bazı dengeleme terimleri aşağıdaki gibi

$$uu'' \to \Gamma^{\theta+2\delta-\in-2}$$

$$(u')^2 \to \Gamma^{\theta+2\delta-\in-2}$$

$$u^2 \to \Gamma^{2\delta} \tag{2.10}$$

$$u^3 \to \Gamma^{3\delta}$$

hesaplanır. Böylece hesaplanan değerler (2.7) ve (2.8) ifadelerinde yerine yazılarak, Γ fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu elde edilir. Bu sıfır polinomunda yer alan hesaplanacak katsayılar sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Oluşturulan cebirsel denklem sistemi Mathematica 10 paket programı yardımıyla çözüldüğünde, bulunması gereken $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_\theta$, $\zeta_0,\cdots,\zeta_\in$ ve $\tau_0,\cdots,\tau_\delta$ katsayıları elde edilir. Elde edilen katsayılar (2.7) denkleminde yerine yazıldığında

$$\pm(\xi-\xi_0)=\int\frac{d\Gamma}{\sqrt{\Lambda(\Gamma)}}=\int\sqrt{\frac{\Psi(\Gamma)}{\Phi(\Gamma)}}d\Gamma \tag{2.11}$$

integralinin hesaplanmasıyla $\Gamma(\xi)$ fonksiyonlarını elde edilir. Daha sonra sırasıyla $\Gamma(\xi)$ fonksiyonlarını (2.6) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır. Böylece elde edilen $u(\xi)$ şeklindeki fonksiyonlarına (2.2) ifadesinde yer alan dönüşüm uygulanarak, (2.1) denkleminin yeni tam çözümleri elde edilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi ile (3+1)-boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi genel hatlarıyla ele alınmış, daha sonra genişletilmiş deneme denklem yönteminin bu denklemlere uygulamaları yapılmıştır.

3.1. Kübik Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi ve Uygulaması

Kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi, birçok fiziksel sistemde doğal olarak ortaya çıkan en önemli evrensel lineer olmayan modellerden biridir. Yarı monokromatik bir dalganın dağınık ve zayıf lineer olmayan bir ortamda yayılmasıyla ortaya çıkan genel bir denklemdir. Ayrıca hidrodinamikte, lineer olmayan optiklerde, özellikle lineer olmayan optik liflerde, yarı boyutlu bir lineer olmayan moleküler sistemlerde, bir katı içinde ısı transferi, sıvı dolu bir elastik tüpte lineer olmayan dalgalar, lineer olmayan dengesizlik problemleri ve piezoelektrik yarı iletkenlerde soliter dalga yayılımında, Bose-Einstein yoğuşması vb. gibi çeşitli fiziksel olayları tanımlamak için kullanılmıştır. [38-40]. Kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi su dalgalarının evrimini modellemek de kullanılır. Kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS), kırılma indisi dalga genliğine karşı duyarlı olan ideal bir sıvının serbest yüzeyindeki su ve plazma dalgalarında ve bir lazer ışınının herhangi bir ortamda yayılmasına ile oluşan lineer olmayan dalgaların tanımlanmasında ortaya çıkmaktadır. Bir boyutta tamamen integrallebilen kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi, w x uzaysal koordinatın ve t zamanının karmaşık değerli bir fonksiyonu ve k reel keyfi bir parametre olmak üzere en genel hali

$$i\frac{\partial w}{\partial t}++\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+k\left|w\right|^2 w=0 \tag{3.1}$$

şeklindedir [41, 42]. (3.1) denklemine genişletilmiş deneme denklem yöntemini uygulamak için ilk önce hareketli dalga dönüşümü olarak m,n,l,c keyfi sabitler olmak üzere

$$w(x, t) = e^{i\mu} w(\eta), \quad \mu = mx + nt, \quad \eta = lx + ct \tag{3.2}$$

kabul edelim. (3.1) denkleminde yer alan türevler ve bilinmeyen fonksiyon dönüşüm altında

$$i\frac{\partial w}{\partial t} = -ce^{i\mu} w - ine^{i\mu} w'$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -m^2 e^{i\mu} w + 2ilme^{i\mu} w' + l^2 e^{i\mu} w'', \ |w|^2 = w \tag{3.3}$$

şeklinde hesaplanır ve (3.1) denkleminde yerine yazıldığında $n = 2lm$ olmak üzere

$$(-c - m^2) w + k^3 w^3 + l^2 w'' = 0 \tag{3.4}$$

şeklinde lineer olmayan 3. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2.6) çözüm fonksiyonunu ve (2.7) diferansiyel denkleminden hareketle ilgili türevler hesaplanıp (3.4) denkleminde yerine yazılır. (2.6) çözüm fonksiyonundaki ve (2.7) diferansiyel denklemindeki δ, θ ve $\in$ değerlerini belirlemek için balans prosedürünü uygulanır. Genişletilmiş deneme denklem yöntemine uygun balans işlemi elde edilen (3.4) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren w'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan w^3 terimleri arasında aşağıdaki gibi

$$w^3 \to \Gamma^{3\delta}, \ w'' \to \Gamma^{\theta+\delta-\in-2} \tag{3.5}$$

belirlenir. Buna göre elde edilen $w'' \approx w^3$ terimlerinin denkliğinden balans terimi

$$\theta = \varepsilon + 2\delta + 2 \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. (3.1) denklemin yeni çözüm belirlemek için eğer balans terimleri $\varepsilon = 0$, ve $\delta = 1$ olarak seçilirse, $\theta = 4$ olarak elde edilir. Bu balans terimleri (2.6) çözüm fonksiyonunda ve (2.7) diferansiyel denkleminde sırasıyla yerine yazıldığında

$$w(\eta) = \tau_0 + \tau_1 \Gamma(\eta) \tag{3.7}$$

$$\left(\Gamma'\right)^2=\frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)}=\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1\Gamma+\varepsilon_2\Gamma^2+\varepsilon_3\Gamma^3+\varepsilon_4\Gamma^4}{\zeta_0} \tag{3.8}$$

olarak belirlenir. (3.4) denkleminde yer alan w'' terimi $\varepsilon_4 \neq 0,\ \ \zeta_0 \neq 0$ olmak üzere

$$w''=\frac{\tau_1\left(\varepsilon_1+2\varepsilon_2\Gamma+3\varepsilon_3\Gamma^2+4\varepsilon_4\Gamma^3\right)}{2\zeta_0} \tag{3.9}$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan değerler (3.4) denkleminde yerine yazıldığında $\Gamma(\eta)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi oluşur. Bu polinomu sıfır polinomu olarak kabul edersek, bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel sistem Mathematica 10 paket programıyla yardımıyla çözüldüğünde

$$\varepsilon_0=\varepsilon_0,\ \ \varepsilon_1=-\frac{\varepsilon_3^3-4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}{8\varepsilon_4^2},\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_2,\ \ \varepsilon_3=\varepsilon_3,\ \varepsilon_4=\varepsilon_4,$$

$$\zeta_0=-\frac{l^2\varepsilon_3^2}{8k\varepsilon_4\tau_0^2},\ \ \tau_0=\tau_0,\ \ \tau_1=\frac{4\varepsilon_4\tau_0}{\varepsilon_3},\ c=-m^2+k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_0^2 \tag{3.10}$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (2.7) ve (2.11) ifadelerinde yerine yazıldığında $A=\sqrt{-\frac{l^2\varepsilon_3^2}{8k\varepsilon_4\tau_0^2}},$ olmak üzere

$$\pm(\eta-\eta_0)=A\int\frac{d\Gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_4}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}\Gamma(\eta)+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4}\Gamma^2(\eta)+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}\Gamma^3(\eta)+\Gamma^4(\eta)}} \tag{3.11}$$

integrali elde edilir. (3.11) ifadesindeki integrali hesaplamak oldukça zordur. Bunun için (3.11) ifadesini $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ve α_4'ler $\Gamma^4+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4}\Gamma^3+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4}\Gamma^2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_4}\Gamma+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_4}=0$ polinom denkleminin köklerini belirtmektedir. (3.11) ifadesinin integrali hesaplandığında

$$F(\varphi,l)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}},\ \varphi=\arcsin\sqrt{\frac{(\Gamma-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_4)}{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_4)}},\ l^2=\frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}.$$

olmak üzere

$$\pm(\eta-\eta_0)=-\frac{A}{\Gamma-\alpha_1}, \tag{3.12}$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{2A}{\alpha_1-\alpha_2}\sqrt{\frac{\Gamma-\alpha_2}{\Gamma-\alpha_1}},\quad \alpha_2>\alpha_1, \tag{3.13}$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{A}{\alpha_1-\alpha_2}\ln\left|\frac{\Gamma-\alpha_1}{\Gamma-\alpha_2}\right|,\ \ \alpha_1>\alpha_2, \tag{3.14}$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{2A}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}-\sqrt{(\Gamma-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}}{\sqrt{(\Gamma-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}+\sqrt{(\Gamma-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)}}\right|,\ \ \alpha_1>\alpha_2>\alpha_3, \tag{3.15}$$

$$\pm(\eta-\eta_0)=\frac{2AF(\varphi,l)}{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}},\ \ \alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>\alpha_4, \tag{3.16}$$

bulunur. (3.12)-(3.16) denklemlerinden Γ fonksiyonları çekildiğinde ve (3.7) denkleminde yerine yazıldığında $\mu_1=lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_0^2-m^2\right)t,\ \ \eta_1=m(x+2lt)$ olmak üzere sırasıyla

$$w_1(x,t)=e^{i\mu_1}\left[\tau_0+\tau_1\left(\alpha_1\pm\frac{A}{\eta_1-\eta_0}\right)\right] \tag{3.17}$$

$$w_2(x,t)=e^{i\mu_1}\left[\tau_0+\tau_1\left(\alpha_1\pm\frac{4A(\alpha_2-\alpha_1)}{4-(\alpha_1-\alpha_2)^2(\eta_1-\eta_0)^2}\right)\right] \tag{3.18}$$

$$w_3(x,t)=e^{i\mu_1}\left[\tau_0+\tau_1\left(\frac{\alpha_2\,\mathrm{e}^{\pm(\alpha_1-\alpha_2)(\eta_1-\eta_0)}-\alpha_1}{\mathrm{e}^{\pm(\alpha_1-\alpha_2)(\eta_1-\eta_0)}-1}\right)\right] \tag{3.19}$$

$$w_4(x,t)=e^{i\mu_1}\left[\tau_0+\tau_1\left(\alpha_1-\frac{2A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+(\alpha_3-\alpha_2)\cosh\left[\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}(\eta_1-\eta_0)\right]}\right)\right] \tag{3.20}$$

$$w_5(x,t)=e^{i\mu_1}\left[\tau_0+\tau_1\left(\alpha_2+\frac{A(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)}{\alpha_4-\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_4)sn^2\left[\frac{\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2}(\eta_1-\eta_0),\frac{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}\right]}\right)\right] \tag{3.21}$$

elde edilir. Eğer $\tau_0=-\tau_1\alpha_1$ ve $\eta_0=0$ olarak alındığında; (3.17)-(3.18) denklemleri sırasıyla $A_1=\tau_1 A$ olmak üzere

$$w_1(x,t)=e^{i\left(lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2-m^2\right)t\right)}\left(\pm\frac{A_1}{m(x+2lt)}\right) \tag{3.22}$$

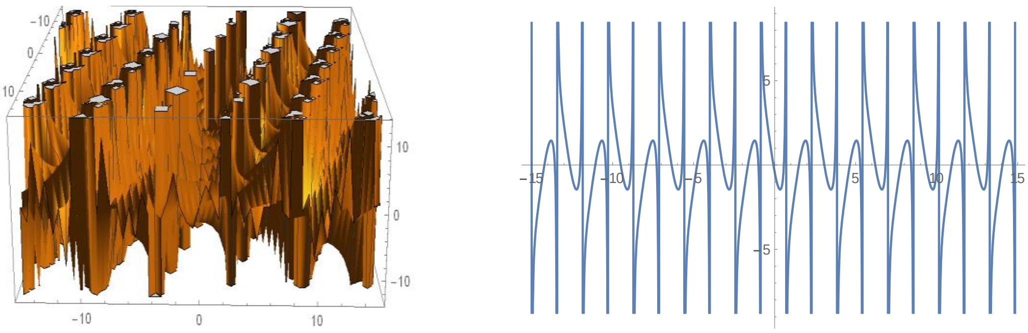
$$w_2(x,t)=e^{i\left(lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2-m^2\right)t\right)}\left(\pm\frac{4A_1(\alpha_2-\alpha_1)}{4-(\alpha_1-\alpha_2)^2m^2(x+2lt)^2}\right) \tag{3.23}$$

rasyonel fonksiyon çözümlerini, $C_1=\pm\tau_1\alpha_2$ ve $D_1=\dfrac{m(\alpha_1-\alpha_2)}{2A}$ olmak üzere

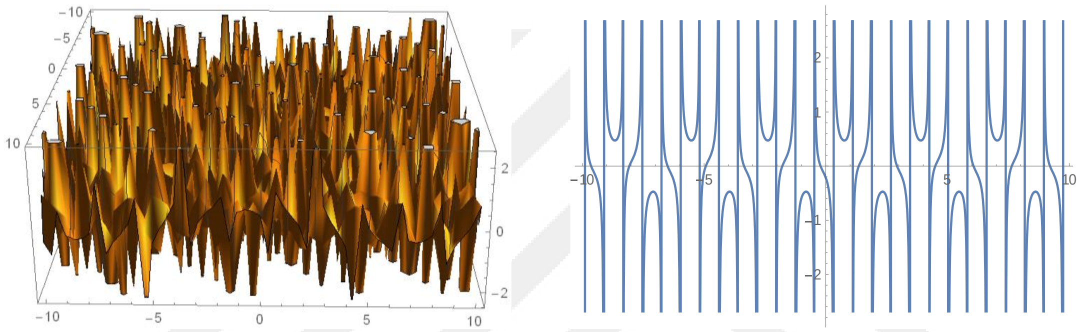
$$w_3(x,t)=e^{i\left(lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2-m^2\right)t\right)}C_1\coth\left[D_1(x+2lt)\right] \tag{3.24}$$

hareketli dalga çözümünü, $C_2=\dfrac{-2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}{\alpha_3-\alpha_2}$, $E_1=\dfrac{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_2}$ ve $D_2=\dfrac{m\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}}{A}$ olmak üzere aşağıdaki soliton çözümü verir.

$$w_4(x,t)=e^{i\left(lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2-m^2\right)t\right)}\frac{C_2}{E_1+\cosh\left[D_2(x+2lt)\right]} \tag{3.25}$$



Şekil 3.1. (3.24) denklemindeki çözümün $\xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = l = m = 2,\ k = \frac{1}{2},$ $\alpha_1 = \xi_4 = 1,\ \alpha_2 = \frac{3}{2}, \xi_3 = 4,$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 3.2. (3.25) denklemindeki çözümün $\xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = l = m = 2,\ \alpha_3 = k = \frac{1}{2},$ $\alpha_1 = \xi_4 = 1,\ \alpha_2 = \frac{3}{2}, \xi_3 = 4,$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

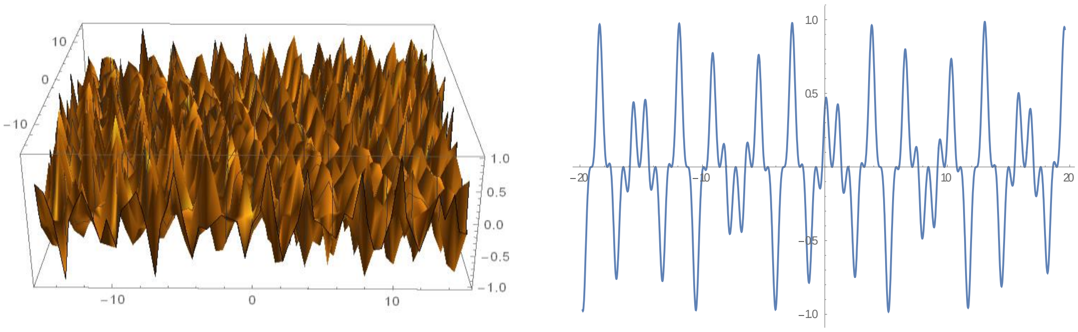
Eğer (3.21) denkleminde $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_2$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$C_3 = \dfrac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_4},\ E_2 = \dfrac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_4},$ ve $\varphi_1 = \dfrac{m\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2A}(x + 2lt),$

$l_1^2 = \dfrac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}$ olmak üzere

$$w_5(x,t) = e^{i\left(lx + \left(k\left(3 - \frac{8\varepsilon_2 \varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2 \alpha_1^2 - m^2\right)t\right)} \frac{C_3}{E_2 + sn^2(\varphi_1, l_1)} \tag{3.26}$$

olarak ifade edilir.

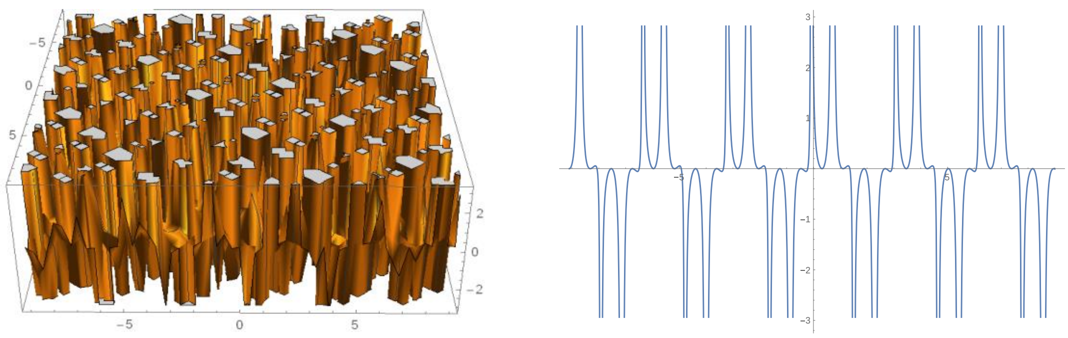


Şekil 3.3. (3.26) denklemindeki çözümün $\xi_2=\tau_0=\tau_1=l=\alpha_4=m=2,\ \alpha_3=k=\frac{1}{2},$ $\alpha_1=\xi_4=1,\ \alpha_2=\frac{3}{2},\xi_3=4,$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Burada C_2 solitonun genliğini D_2 ise solitonların ters genişliğini göstermektedir. Ayrıca (3.26) jakobi eliptik çözümünde modülü $l\to 1$ olarak alırsak, bu takdirde (3.1) denkleminin çözümü $\alpha_3=\alpha_4$ olmak üzere aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümüne

$$w_6\left(x,t\right)=e^{i\left(lx+\left(k\left(3-\frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2-m^2\right)t\right)}\frac{C_3}{E_2+\tanh^2\left[\frac{m\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2A}\left(x+2lt\right)\right]} \tag{3.27}$$

dönüşür.

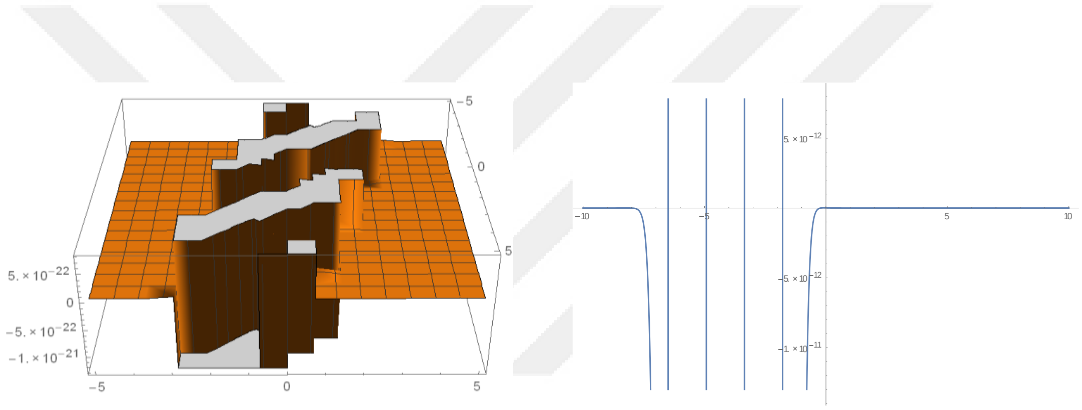


Şekil 3.4. (3.27) denklemindeki çözümün $\xi_2=\tau_0=\tau_1=l=\alpha_4=m=2,\ \alpha_3=k=\frac{1}{2},$ $\alpha_1=\xi_4=1,\ \alpha_2=\frac{3}{2},\xi_3=4,$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Diğer taraftan; (3.26) jakobi eliptik çözümünde modülü $l \to 0$ olarak seçildiğinde, bu takdirde (3.1) denkleminin çözümü $\alpha_2 = \alpha_3$ olmak üzere aşağıdaki periyodik dalga çözümüne

$$w_7(x,t) = e^{i\left(lx + \left(k\left(3 - \frac{8\varepsilon_2\varepsilon_4}{\varepsilon_3^2}\right)\tau_1^2\alpha_1^2 - m^2\right)t\right)} \frac{C_3}{E_2 + \sin^2\left[\frac{m\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}}{2A}(x+2lt)\right]} \tag{3.28}$$

dönüşür.



Şekil 3.5. (3.28) denklemindeki çözümün $\xi_2 = \tau_0 = \tau_1 = l = \alpha_4 = m = 2,\ \alpha_3 = k = \frac{1}{2},$ $\alpha_1 = \xi_4 = 1,\ \alpha_2 = \frac{3}{2}, \xi_3 = 4,$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Kübik lineer olmayan Schrödinger denkleminin elde edilen tüm çözümleri incelendiğinde; (3.25) tam çözümü literatürdeki çözüm ile benzerlik göstermektedir. Diğer elde ettiğimiz çözümler ise literatürde yer almayan tam çözümler olup, genelleştirilen yöntem sayesinde bu denklemin yeni tam çözümleri olduğu söylenebilir.

3.2. (3+1)-Boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP) Denklemi ve Uygulaması

(3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemi ilk olarak 1970 yılında Boris B. Kadomtsev ve Vladimir I. Petviashvili tarafından tanıtıldı. Bu denklem, zayıf lineer olmayan geri yükleme kuvvetlerine sahip uzun dalga boylu su dalgalarını, ferro manyetik ortamdaki dalgaları ve Bose-Einstein kondensatlarındaki iki boyutlu madde dalga darbelerini tanımlar. Öneminden dolayı literatürde yoğun olarak çalışılmıştır [43-45]. Bu denklemin zayıf akışkan ortamdaki, özellikle akışkan dinamikleri ve plazma fiziğinde üç boyutlu solitonları tanımlayan bir yapısı bulunmaktadır. (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin en genel hali

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_x-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{3.29}$$

şeklindedir [45-49]. Burada $u(x,y,z,t)$ fonksiyonu reel değerli bir fonksiyondur. Burada yer alan katsayılar sırasıyla zayıf yüzey gerilimi ve güçlü yüzey gerilimini ifade etmektedir. Literatürde, (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin için tam çözümleri elde etmek üzere tek dalga ansatz yöntemi, homojen denge yöntemi gibi çeşitli yöntemler kullanılarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Tezin bu kısmında (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemine genişletilmiş deneme denklem yöntemini uygulamak için ilk önce hareketli dalga dönüşümü olarak k,l,m,c keyfi sabitler olmak üzere

$$u(x,y,z,t)=u(\omega),\ \omega=kx+ly+mz+ct, \tag{3.30}$$

şeklinde uygulandığında ve ω'ya göre iki kez integrali alınıp integrasyon sabitleri sıfır olarak seçildiğinde, (3.29) denklemi

$$\left(kc-3\left(m^2+l^2\right)\right)u(\omega)+3k^2u^2(\omega)+k^4u''(\omega)=0 \tag{3.31}$$

şeklinde lineer olmayan ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme indirgenir.

(2.6) çözüm fonksiyonunu ve (2.7) diferansiyel denkleminden hareketle ilgili türevler hesaplanıp (3.31) denkleminde yerine yazılır. (2.6) çözüm fonksiyonundaki ve (2.7) diferansiyel denklemindeki δ, θ ve $\in$ değerlerini bulabilmek için balans işlemi uygulanır. Genişletilmiş deneme denklem yöntemine uygun balans işlemi elde edilen (3.31) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren u'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan u^2 terimleri arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi

$$u^2 \to \Gamma^{2\delta},\ u'' \to \Gamma^{\theta+\delta-\in-2} \tag{3.32}$$

belirlenir. Buna göre elde edilen $u'' \approx u^2$ terimlerinin denkliğinden balans terimi

$$\theta = \varepsilon + \delta + 2 \tag{3.33}$$

olarak bulunur. (3.29) denklemin yeni tam çözüm belirlemek için eğer balans terimleri $\varepsilon = 0,$ ve $\delta = 1$olarak seçilirse, $\theta = 3$ olarak bulunur. Bu balans terimleri (2.6) çözüm fonksiyonunda ve (2.7) diferansiyel denkleminde sırasıyla yerine yazıldığında

$$u(\omega) = \tau_0 + \tau_1 \Gamma(\omega) \tag{3.34}$$

$$(\Gamma')^2 = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 \Gamma + \varepsilon_2 \Gamma^2 + \varepsilon_3 \Gamma^3}{\zeta_0} \tag{3.35}$$

olarak belirlenir. (3.31) denkleminde yer alan u'' terimi $\varepsilon_3 \neq 0,\ \ \zeta_0 \neq 0$ olmak üzere

$$u'' = \frac{\tau_1 \left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Gamma + 3\varepsilon_3 \Gamma^2\right)}{2\zeta_0} \tag{3.36}$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan değerler (3.31) denkleminde yerine yazıldığında $\Gamma(\omega)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi meydana gelir. Eğer bu polinom sıfır polinomu olarak kabul edildiğinde, bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Mathematica 10 paket programıyla yardımıyla bu cebirsel denklem sistem çözüldüğünde

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0,\ \ \varepsilon_1 = \varepsilon_1,\ \ \varepsilon_2 = \frac{3\zeta_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right)}{k^4},\ \ \varepsilon_3 = \frac{-2\zeta_0\tau_1}{k^2}\varepsilon_3,$$

$$\zeta_0=\zeta_0,\ \ \tau_0=\tau_0,\ \ \tau_1=\tau_1,\ c=\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2+m^2-2k^2\tau_0\right)-k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \tag{3.37}$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (2.7) ve (2.11) ifadelerinde yerine yazıldığında $H=\sqrt{-\frac{k^2}{2\tau_1}},$ olmak üzere

$$\pm\left(\omega-\omega_0\right)=H\int\frac{d\Gamma}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\Gamma\left(\omega\right)+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\Gamma^2\left(\omega\right)+\Gamma^3\left(\omega\right)}} \tag{3.38}$$

integrali elde edilir. (3.38) ifadesindeki integrali hesaplamak için α_1,α_2 ve α_3'ler $\Gamma^3+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\Gamma^2+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\Gamma+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}=0$ polinom denkleminin köklerini belirtmektedir. (3.38) ifadesindeki integrali hesaplandığında $F\left(\varphi,l\right)=\int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\psi}},$ $\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{\Gamma-\alpha_3}{\left(\alpha_2-\alpha_3\right)}},\ l^2=\frac{\left(\alpha_2-\alpha_3\right)}{\left(\alpha_1-\alpha_3\right)}$ olmak üzere

$$\pm\left(\omega-\omega_0\right)=-\frac{2H}{\sqrt{\Gamma-\alpha_1}}, \tag{3.39}$$

$$\pm\left(\omega-\omega_0\right)=\frac{2H}{\sqrt{\alpha_2-\alpha_1}}\arctan\sqrt{\frac{\Gamma-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}},\quad \alpha_2>\alpha_1, \tag{3.40}$$

$$\pm\left(\omega-\omega_0\right)=\frac{H}{\sqrt{\alpha_1-\alpha_2}}\ln\left|\frac{\sqrt{\Gamma-\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1-\alpha_2}}{\sqrt{\Gamma-\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1-\alpha_2}}\right|,\ \ \alpha_1>\alpha_2, \tag{3.41}$$

$$\pm\left(\omega-\omega_0\right)=-\frac{2H}{\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}F\left(\varphi,l\right),\ \ \alpha_1>\alpha_2>\alpha_3, \tag{3.42}$$

bulunur. (3.39)-(3.42) denklemlerinden Γ fonksiyonları çekildiğinde ve (3.34) denkleminde yerine yazıldığında $\omega = kx + ly + mz + \left(\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \right) t$ olmak üzere sırasıyla

$$u_1(x,y,z,t) = \left[\tau_0 + \tau_1\alpha_1 + \frac{4H^2\tau_1}{\left(kx + ly + mz + \left(\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \right) t - \omega_0 \right)^2} \right] \tag{3.43}$$

$$u_2(x,y,z,t) = \left[\begin{array}{l} \tau_0 + \tau_1\alpha_1 \\ +\tau_1(\alpha_2 - \alpha_1)\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2H} \left(kx + ly + mz + \left(\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \right) t - \omega_0 \right) \right) \end{array} \right] \tag{3.44}$$

$$u_3(x,y,z,t) = \left[\begin{array}{l} \tau_0 + \tau_1\alpha_1 \\ +\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)\operatorname{cosech}^2\left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2H} \left(kx + ly + mz + \left(\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \right) t - \omega_0 \right) \right) \end{array} \right] \tag{3.45}$$

$$u_4(x,y,z,t) = \left[\tau_0 + \tau_1\alpha_3 + \left(\frac{\tau_1(\alpha_2 - \alpha_3)}{sn^2\left[\pm\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2H} \left(kx + ly + mz + \left(\frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0} \right) t - \omega_0 \right), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3)} \right]} \right) \right] \tag{3.46}$$

elde edilir. Eğer $\tau_0 = -\tau_1\alpha_1$ ve $\omega_0 = 0$ olarak alındığında; (3.43)-(3.45) denklemleri sırasıyla $\tilde{A} = 2H\sqrt{\tau_1}$, $c = \frac{6\zeta_0\tau_0\left(l^2 + m^2 - 2k^2\tau_0\right) - k^4\varepsilon_1\tau_1}{2k\zeta_0}$, $\tilde{B} = \tau_1(\alpha_2 - \alpha_1)$ $B = \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2H}$, $\tilde{C} = \tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)$ olmak üzere rasyonel fonksiyon çözümü

$$u_1(x,y,z,t)=\left(\frac{\tilde{A}}{kx+ly+mz+ct}\right)^2 \tag{3.47}$$

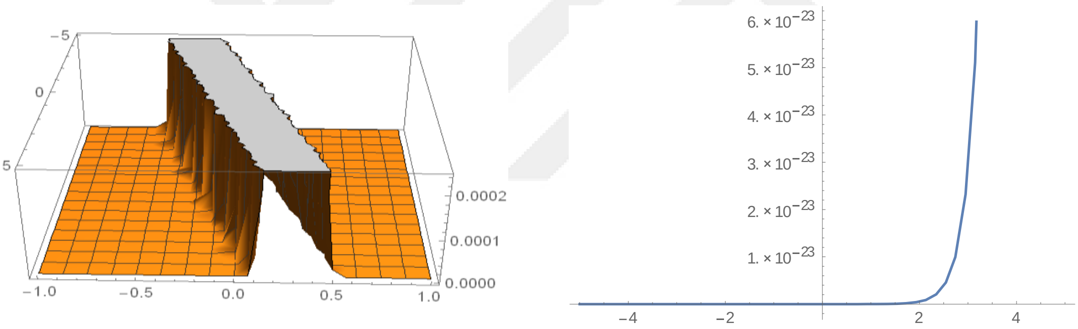
bir soliton dalga çözümü

$$u_2(x,y,z,t)=\frac{\tilde{B}}{\cosh^2\left(B\left(kx+ly+mz+ct\right)\right)} \tag{3.48}$$

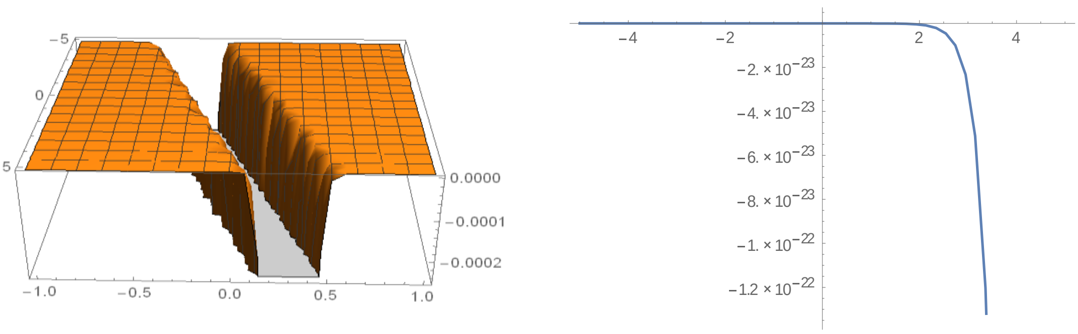
singüler soliton çözümü

$$u_3(x,y,z,t)=\frac{\tilde{C}}{\sinh^2\left(B\left(kx+ly+mz+ct\right)\right)} \tag{3.49}$$

elde edilir.



Şekil 3.6. (3.48) denkleminde $\alpha_1=\xi_1=\tau_0=1,\ \alpha_2=k=\tau_1=2,\ \zeta_0=\frac{1}{3},$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



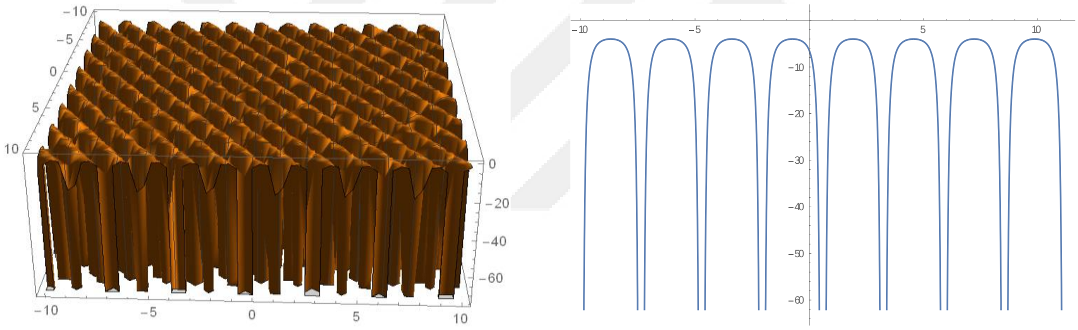
Şekil 3.7. (3.49) denkleminde $\alpha_1=\xi_1=\tau_0=1,\ \alpha_2=k=\tau_1=2,\ \zeta_0=\frac{1}{3},$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Burada $\tilde{B}$ ve $\tilde{C}$ solitonların genliğini, B solitonların ters genişliğini c de hızını ifade etmektedir.

Eğer (3.46) denkleminde $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_3$ alınırsa Jakobi eliptik fonksiyon çözümü $\tilde{D} = \tau_1(\alpha_2 - \alpha_3)$, $\varphi_2 = \pm\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2H}(kx + ly + mz + ct)$ ve $l_2^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3}$ olmak üzere

$$u_4(x, y, z, t) = \frac{\tilde{D}}{sn^2(\varphi_2, l_2)} \tag{3.50}$$

olarak ifade edilir.



Şekil 3.8. (3.50) denkleminde $\alpha_1 = \xi_1 = \tau_0 = 1,\ \alpha_2 = k = \tau_1 = 2,\ \zeta_0 = \frac{1}{3},\quad \alpha_3 = 4$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Ayrıca (3.50) jakobi eliptik çözümünde modülü $l \to 1$ olarak alırsak, bu takdirde (3.31) denkleminin çözümü $\alpha_1 = \alpha_2$ olmak üzere aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümüne

$$u_5(x, y, z, t) = \frac{\tilde{D}}{\tanh^2\left[\pm\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2H}(kx + ly + mz + ct)\right]} \tag{3.51}$$

dönüşür.

Diğer taraftan; (3.50) jakobi eliptik çözümünde modülü $l \to 0$ olarak seçildiğinde, bu takdirde (3.1) denkleminin çözümü $\alpha_2 = \alpha_3$ olmak üzere aşağıdaki periyodik dalga çözümüne

$$u_6(x,y,z,t) = \frac{\tilde{D}}{\sin^2\left[\pm\frac{\sqrt{\alpha_1-\alpha_3}}{2H}(kx+ly+mz+ct)\right]} \tag{3.52}$$

dönüşür.

(3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denkleminin elde edilen tüm tam çözümleri incelendiğinde; (3.48), (3.49) ve (3.51) çözümleri sırasıyla Lu'un [44] elde ettiği (4), (10) ve (8) sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Diğer elde ettiğimiz çözümler ise literatürde yer almayan yeni ve farklı tam çözümler olup, genişletilen bu yöntem sayesinde bu denklemin yeni tam çözümleri bulunduğunu söyleyebiliriz.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında tam çözümlerin hep bir arada elde edilmesini sağlayan güçlü ve etkin bir yöntem olan deneme denklem yönteminin geliştirilmesiyle önerilen genişletilmiş deneme denklem yöntemi verilmiştir. Bu geliştirilen yöntemin uygulaması sonucunda elde edilen yeni ve farklı tam çözümler sayesinde birçok fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan diferansiyel denklemlerin daha iyi anlaşılması mümkün olacaktır. Geliştirilen bu yöntem literatürde mevcut bulunan deneme denklem yöntemlerinin incelenmesi neticesinde oluşturulmuş ve genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak adlandırılmıştır. Oluşturulan bu yöntem için $\left(\Gamma'\right)^2=\dfrac{\varepsilon_0+\varepsilon_1\Gamma+\varepsilon_2\Gamma^2+\cdots+\varepsilon_\theta\Gamma^\theta}{\zeta_0+\zeta_1\Gamma+\zeta_2\Gamma^2+\cdots\zeta_\in\Gamma^\in}$ şeklindeki diferansiyel denkleminden çözümünden elde edilen farklı çözüm fonksiyonlarını temel alınarak (2.6) çözüm fonksiyonu lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu olarak kabul edilmiştir. Bunun neticesinde farklı tam çözümlerin bir arada bulunduğu örneğin eliptik fonksiyonlardan oluşan çözüm fonksiyonlarının bulunması hedeflenmiştir. Önerilen bu çözüm fonksiyonu (2.3) lineer olmayan diferansiyel denkleminde yerine yazılmadan önce dengeleme prosedürünün uygulanması gerekmektedir. Yapılan dengeleme işlemi ile (2.6) çözüm fonksiyonundaki δ 'yı (2.7) denklemindeki θ ve $\in$ değerleri belirlenir. Daha sonra elde edilen değerler ilk önce (2.7) diferansiyel denkleminde yerine yazılır ve $\Gamma(\xi)$ fonksiyonları farklı yöntemler kullanılarak elde edilir. Buradan elde edilen $\Gamma(\xi)$ fonksiyonları (2.6) yeni çözüm fonksiyonunda yerine yazılır ve hareketli dalga dönüşümleri uygulanarak kısmi türevli diferansiyel denklemler için yeni tam çözümleri elde edilmiş olur. Genişletilmiş deneme denklem yöntemi Kübik lineer olmayan Schrödinger denklemi ve (3+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili denklemlerine ayrı ayrı uygulanmış ve bulunan çözümler literatürde yer almayan yeni farklı tam çözümler karşılaştırma yapılarak belirtilmiştir.

Genişletilmiş deneme denklem yöntemi sayesinde incelenen denklemlerin literatürde bulunmayan eliptik fonksiyon çözümleri periyodik fonksiyon çözümleri, singüler soliton çözümleri ve karanlık(dark) çözümleri elde edilmiştir. Bu elde edilen yeni tam çözüm fonksiyonların incelemesi yapıldığında, soliton teorisinde yer alan dalga çeşitleriyle uyum içerisinde olduğunu belirtebiliriz. Bu elde edilen çözümlerin hangi fiziksel davranışları gösterdiklerini anlayabilmek için, bu tam çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri fonksiyonlarda yer alan katsayıların özel olarak seçilen farklı değerlerine göre çizilmiştir. Böylece yeni tam çözümlerin fiziksel davranışları hakkında detaylı bilgi edinilmiştir. Diğer bilim insanları tarafından bu yeni tam çözümlerin farklı alanlar için fiziksel davranışları incelenebilir. Çizilen grafiklerden de anlaşılacağı üzere bu yeni tam çözüm fonksiyonların farklı solitonlara karşılık geldiği görülmektedir. Çeşitli solitonların (dark, bright) dışında farklı birçok soliton çeşidin bir arada olduğu literatür taramasından görülebilir. Böylece elde edilen sonuçlar ile fiziksel olayların daha iyi anlaşılabileğini söyleyebiliriz. Eğer (2.6) çözüm fonksiyonunun farklı durumları düşünülüp, uygulamaya taşınabilirse, bu takdirde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin daha genel çözüm fonksiyon sınıfları oluşturulabilir. Bu sayede denklemlerin yeni tam çözümlerin elde edilmesi mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

1. Wang M. L., Exact Solutions for Compound KdV-Burgers Equations, Phys. Lett. A, 213, 279-287, 1996.

2. Wazwaz A. M., A Sine-Cosine Method for Handling Nonlinear Wave Equations, Math. Comput. Model., 40(5-6), 499-508, 2008.

3. He, J. H., Wu, X. H., Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, Chaos, Soliton & Fractals, 30, 700-708 , 2006.

4. Ravi, L. K., Ray, S. S., Sahoo, S., New Exact Solutions of Coupled Boussinesq-Burgers Equations by Exp-Function Method, J. Ocean Eng. Sci., 2, 34–46, 2017.

5. Malfliet, W., The Tanh Method: a Tool for Solving Certain Classes of Nonlinear Evolution and Wave Equations, J. Comput. Appl. Math., 164–165, 529-541, 2004.

6. Wazwaz A. M., The Tanh Method for Travelling Wave Solutions of Nonlinear Equations, Appl. Math. Comput., 187, 1131-1142, 2007.

7. Hietarinta, J., Hirota's Bilinear Method and its Generalization, Int. J. Mod. Phys. A, 12(1), 43-51, 1997.

8. Pashaev, O., Tanoglu, G., Vector Shock Soliton and the Hirota Bilinear Method, Chaos, Solitons & Fractals, 26, 95-105, 2005.

9. Akbar, M. A., Ali, N. H. M., Mohyud-Din, S. T., The modified alternative $\left(G'/G\right)$ -expansion method to nonlinear evolution equation: application to the (1+1)-dimensional Drinfel'd-Sokolov-Wilson equation, SpringerPlus, 327, 2-16, 2013.

10. Shakeel, M., Mohyud-Din, S. T., New $\left(G'/G\right)$-Expansion Method and its Application to the Zakharov-Kuznetsov–Benjamin-Bona-Mahony (ZK–BBM) Equation, J. Assoc. Arab Univ. Basic & Appl. Sci., 18(1), 66-81, 2015.

11. Liu, C.S., Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications, Commun. Theor. Phys., 45(2), 219-223, 2006.

12. Liu, C.S., Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, Comput. Phys. Commun., 181(2), 317-324, 2010.

13. Gurefe, Y., et al., Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics, Pramana-J. Phys., 77(6), 1023-1029, 2011.

14. Gurefe, Y., et al., Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, J. Adv. Math. Stud., 5(1), 41-47, 2012.

15. Ma, W. X., Huang, T., Zhang, Y., A Multiple Exp-Function Method for Nonlinear Differential Equations and its Application, Phys. Script., 82(6), 065003, 2010.

16. Ma, W. X., Zhu, Z., Solving the (3+1)-dimensional Generalized KP and BKP by the Multiple Exp-Function Algorithm, Appl. Math. Comput., 218, 11871-11879, 2012.

17. Zhang, J., Jiang, F., Zhao, X., An Improved An improved (G′/G)-expansion method for solving nonlinear evolution equations-Expansion Method for Solving Nonlinear Evolution Equations, Int. J. Comput. Math., 87(8), 1716-1725, 2010.

18. Guo, S., Zhou, Y., The Extended $\left(G'/G\right)$-Expansion Method and its Applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like Equations and Coupled Hirota–Satsuma KdV Equations, Appl. Math. Comput., 215, 3214-3221, 2010.

19. Pandir, Y., et al., Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, Abstr. Appl. Anal., 2012, Article ID 478531, 16 pp, 2012.

20. Pandir, Y., et al., Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation, Phys. Scr., 87(2), 025003, 12 pp, 2013.

21. Gurefe, Y., et al., Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, Appl. Math. Comput., 219(10), 5253-5260, 2013.

22. Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., A Multiple Extended Trial Equation Method for the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, AIP Conf. Proc.,1558, 1927, 2013.

23. Abbasbandy, S., Shirzadi, A., The first integral method for modified Benjamin-Bona- Mahony equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15, 1759-1764, 2010

24. Laia, X. J., Zhang, J. F., Meia, S. H., Application of the Weierstrass Elliptic Expansion Method to the Long-Wave and Short-Wave Resonance Interaction System, Z. Naturforsch., 63a, 273-279, 2008.

25. Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q., New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations, Phys. Lett. A, 290, 72-76, 2001.

26. Shen, S., Pan, Z., A Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method, Phys. Lett. A, 308, 143-148, 2003.

27. Kudryashov, N. A., One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17, 2248-2253, 2012.

28. Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I., Kochanov, M. B., Application of the Kudryashov Method for Finding Exact Solutions of the High Order Nonlinear Evolution Equations, Appl. Math. Comput., 218, 3965-3972, 2011.

29. Lee, J., Sakthivel, R., Exact Travelling Wave Solutions for Some Important Nonlinear Physical Models, Pramana J. Phys., 80, 757-769, 2013.

30. Pandir Y., Symmetric Fibonacci Function Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations, Appl. Math. Inf. Sci., 8, 2237-2241, 2014.

31. Tandogan, Y. A., Pandir, Y., Gurefe, Y., Solutions of the Nonlinear Differential Equations by use of Modified Kudryashov Method, Turkish J. Math. Comput. Sci., Article ID 20130021, 7 pages, 2013.

32. Pandir Y., Turhan, N., A New Version of the Generalized F-Expansion Method and its Applications, AIP Conf. Proc., 1798, 020122, 2017.

33. Pandir Y., Turhan, N., A New Type of the Generalized F-Expansion Method and its Application to Sine-Gordon Equation, Celal Bayar Univ. J. Sci., 13(3), 647-650, 2017.

34. Pandir, Y., Demiray, S. T., Bulut, H., A New Approach for Some NLDEs with Variable Coefficients, Optik, 127, 11183-11190, 2016.

35. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New Solitary Wave Solutions of Maccari System, Ocean Eng., 103, 153-159, 2015.

36. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New Soliton Solutions for Sasa-Satsuma Equation, Waves in Random Complex Media, 25(3), 417-418, 2015.

37. Pandir, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, H. H., Turhan, N., Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger's Equation by using Generalized Kudryashov Method, AIP Conf. Proc., 1648, 370004, 2015.

38. Imanli, M. I., Nonlinear Schrödinger Equations in Homogenous Spaces, MSc thesis, Fırat University, 2006.

39. Sulem C, Sulem PL. The Nonlinear Schrödinger Equation Self-Focusing and Wave Collapse. Springer: New-York, 1999.

40. Ablowitz, M. J., Prinari, B., Trubatch, A. D., Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2004.

41. Chand, F., Malik, A. K., Exact Traveling Wave Solutions of Some Nonlinear Equations Using (G'/G)-Expansion Method Methods, Int. J. Nonl. Sci. 14(4), 416-424, 2012.

42. Kaplan, M., Ünsal, Ö., Bekir, A., Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation by Using Symbolic Computation, Math. Meth. Appl. Sci. 39, 2093-2099, **2016**.

43. Ma, W. X., Comment on the (3+1) dimensional Kadomtsev-Petviashvili Equations, Commun. Nonlinear Sc.i Numer. Simul., 16(7), 2663–2666, 2011.

44. Osman, M. S., Nonlinear Interaction of Solitary Waves Described by Multi-Rational Wave Solutions of the (2+1)-Dimensional Kadomtsev-Petviashvili Equation with Variable Coefficients, Nonlinear Dyn., 87(2), 1209-1216, 2017.

45. Chen, Y., Yan, Z., Zhang, H., New Explicit Solitary Wave Solutions for (2+1)-dimensional Boussinesq Equation and (3+1)-dimensional KP Equation, Physi. Lett. A, 307, 107–113, 2003.

46. Lu, D., Tariq, K. U., Osman, M. S., Baleanu, D., Younis, M., Khater, M. M. A., New Analytical Wave Structures for the (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili and the Generalized Boussinesq Models and Their Applications, Results in Phys., 14, 102491, 2019.

47. Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge, Cambridge University Press; 1991.

48. Wazwaz, A. M., Multiple-Soliton Solutions for the KP equation by Hirota’s Bilinear Method and by the tanh-coth Method, Appl. Math. Comput., 190(1), 633-640, 2007.

49. Sinelshchikov, D. I., Comment on: New Exact Traveling Wave Solutions of the (3+1)-dimensional Kadomtsev–Petviashvili (KP) Equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15, 3235-3236, 2010.

50. Khalfallah, M., New Exact Traveling Wave Solutions of the (3+1) dimensional Kadomtsev–Petviashvili (KP) Equation, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14, 1169-1175, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Adana'da doğan Tural AĞIR, orta ve lise öğrenimini Mustafa Kemal Anadolu Lisesinde tamamlamıştır. 2002 yılında kazandığı Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2006 yılında bitirmiştir. 2006 yılından beri Özel Okul ve Özel Öğretim Kurslarında matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

2013 yılında yüksek lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' nda başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Telefon: (506) 8634898

E-posta: turalagir@yahoo.com