T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEMLER ÜZERİNE

Onur ÇAĞLIYAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL DENKLEMLER ÜZERİNE

Onur ÇAĞLIYAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Yozgat 2020

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111318004 numaralı öğrencisi Onur ÇAĞLIYAN'ın hazırladığı "İntegral Denklemler Üzerine" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 28/02/2020 Cuma günü saat 11:00'de yapılmış, tezin onayına oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile karar verilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Tamer ŞENEL

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV (Danışman)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 5/03/20 tarih ve 11 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

5/03/2020

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI
Müdür

İÇİNDEKİLER

İNTEGRAL DENKLEMLER ÜZERİNE

Onur ÇAĞLIYAN

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2020; Sayfa: 30

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde integral denklemler ele alınmıştır. Lineer integral denklemler tanımlanmıştır. Bunun yanında, Fredholm denklemi ele alınmış ve incelenmiştir. Lineer olmayan integral denklemlere örnekler gösterilmiştir. Daha sonra, integral denklemlerin çözümünde Fredholm teorisi verilmiştir. Yozlaşan çekirdekli integral denklemler ele alınmıştır. Ayrıca, yozlaşan çekirdekli integral denklemlerin çözümüne ait örnekler gösterilmiştir. Son olarak, integral denklemin çekirdeğinin approksime edilmesiyle yozlaşan çekirdekli integral denkleme getirilen integral denklemin çözümüne ait örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegral denklemler, Fredholm integral denklemleri, Yozlaşan çekirdekli integral denklemler, Volterra denklemi, Urıson ve Gammerstain denklemi

ON INTEGRAL EQUATIONS

Onur ÇAĞLIYAN

Yozgat Bozok University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2020; Page: 30

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

ABSTRACT

In this thesis, integral equations have been addressed. Linear integral equations are defined. Besides that, Fredholm equation is handled and analyzed. Nonlinear integral equation examples are shown. After that, while solving the integral equations, Fredholm theory is given. Degenerate integral equations have been handled. Also, the examples of those solved degenerate integral equations are shown. Finally, an example is given of the solution of the integral equation, which has been transformed into the degenerate integral equation by approximation of the kernel of the integral equation.

Keywords: Integral equations, Fredholm integral equations, Degenerate in kernel integral equation, Volterra equation, Urison and Gammerstain equation.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca benden desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışmanım, değerli bilim insanı Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e bütün katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bu süreçte bana destek olan başta Doç. Dr. Murat BABAARSLAN olmak üzere matematik bölümünün bütün hocalarına teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana destek olan, sabrını ve dualarını benden esirgemeyen değerli annem Fatma ÇAĞLIYAN, değerli babam Hasan ÇAĞLIYAN ve sevgili kardeşim Esra ÇAĞLIYAN'a teşekkür ederim. Ayrıca lisans eğitimimden bugüne kadar beni akademik eğitime teşvik eden ve başarıya inandıran değerli ablam Nihal ÇAĞLIYAN'a teşekkür ederim.

Bu sürecin her anında desteğini hissettiğim değerli eşim Cansu ÇAĞLIYAN'a teşekkür ederim.

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

$\frac{dx}{dt}$: x fonksiyonunun t değişkenine göre türevi

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$: x değişkeninin t değişkenine göre 2. mertebeden türevi

$D_3(\lambda)$: 3. mertebeden determinant

$R(t,s;\lambda)$: İntegral denklemin rezolventası

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s) = a_1(t)b_1(s) + a_2(t)b_2(s) + ... + a_n(t)b_n(s)$$

$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$ lineer integral denklem, $K(t,s)$ integral denklemin çekirdeği, $f(t)$ serbest terimini gösteren belirli fonksiyonlardır.

$Q\{0 \le t, s \le 1\} = \{(t,s) : 0 \le t \le 1, 0 \le s \le 1\}$

1. GİRİŞ

Bu tezde integral denklemlerin tanımı verildi ve integral denklemlerin esas sınıfları gösterildi. Lineer integral denklemler ele alındı. Fredholm denklemleri ele alındı ve integral denklemlere örnekler gösterildi. Volterra denkleminin tanımı verildi. Lineer olmayan integral denklemlere örnek gösterildi. Urıson denklemi ve Gammerstain denklemi tanımlandı. İntegral denklemlere getirilen denklemler gösterildi. İntegral denklemlere getirilen denklemlere örnek gösterildi. İntegral denklemlerin çözümünde Fredholm teorisi ele alındı ve Fredholm formülü gösterildi. Yozlaşan çekirdekli integral denklemler ele alındı ve Fredholm teoremi verildi. Yozlaşan çekirdekli integral denklemlerin çözümüne ait örnek gösterildi. Fredholm alternativi hakkında teorem verildi. İntegral denklemin çekirdeğinin approksime (yaklaşım) edilmesiyle yozlaşan çekirdekli integral denkleme getirilen denklemin çözümüne ait örnek gösterildi. Özel olarak ikinci çeşit $\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$ Fredholm denklemi ele alındı. $K(t,s)$ çekirdeğinin $K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s)$ şekli ele alındı. Fredholm denkleminde $K(t,s)$ çekirdeği dahil olan $\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds$ integrali $\sum_{j=1}^{n} K(t,s_j)\varphi(s_j)\delta$ şeklinde yakınlaştırıldı. Burada $\delta = \frac{b-a}{n}$ eşitliği ile tanımlanan sayıdır.

2. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ESAS SINIFLARI

2.1. Lineer İntegral Denklemler

Aranan fonksiyon integral altında olan denklemlere *integral denklem* denir. İntegral denklemde aranan fonksiyon lineer olduğunda böyle integral denkleme *lineer integral denklem* denir [1-5].

Mesela,

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{2.1}$$

lineer integral denklemdir. Bu denklemde $\varphi(t)$ fonksiyonu aranan fonksiyon, $f(t)$ ve $K(t,s)$ fonksiyonları önceden verilmiş belli fonksiyonlardır, λ ise parametredir. $K(t,s),\ a \le t,\ s \le b$ fonksiyonuna *integral denklemin çekirdeği* denir [2]. $f(t),\ a \le t \le b$ fonksiyonu integral denklemin serbest terimidir.

2.1.1. Fredholm Denklemi

Lineer integral denklemlerin en önemli sınıflarından biri Fredholm integral denklemleridir. Birinci ve ikinci çeşit integral denklemleri vardır. İkinci çeşit Fredholm integral denklemi sade şekilde aşağıdaki şekildeki integral denklemdir [3]:

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \tag{2.2}$$

Burada $\varphi(t)$ aranan fonksiyondur.

Burada a, b integralleme limitleri sonlu ve sonsuz olabilirler.

t değişkeninin integralleme yapılan (a,b) aralığında değiştiğini varsayarız. Fredholm denklemlerinde $K(t,s)$ çekirdeğinin $Q\{a \le t, s \le b\}$ karesinde serbest $f(t)$ fonksiyonunun $a \le t \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlar oldukları ya da

$$\int_a^b\int_a^b \left|K(t,s)\right|^2 dtds < +\infty, \tag{2.3}$$

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty \tag{2.4}$$

şartlarını sağladığı varsayılır [2].

(2.3) şartını sağlayan çekirdeklerine *Fredholm çekirdeği* denir.

(2.2) integral denkleminde $f(t)$ serbest terimi $[a,b]$ aralığında aynen sıfıra dönüştüğünde, yani her bir $t \in [a,b]$ için $f(t) \equiv 0$ şartı sağlandığında (2.2) denklemine *homojen,* aksi halde *homojen olmayan integral denklem* denir.

Burada dikkate alalım ki (2.2) denklemi λ parametresine bağlı denklemler ailesidir.

(2.2) denkleminde aranan $\varphi(t)$ fonksiyonu integral dışında olmadığı halde alınan

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \tag{2.5}$$

şeklinde integral denkleme *birinci çeşit Fredholm denklemi* denir [4].

Bu integral denklemin $K(t,s)$ çekirdeği ve $f(t)$ fonksiyonu üstte gösterilen şartları sağlayan verilmiş fonksiyonlardır.

2.1.2. İntegral Denklemlere Örnekler

1. Aşağıdaki

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (t+s^2)\varphi(s)ds + \sin t$$

ikinci çeşit Fredholm denklemidir. Burada $K(t,s) = t + s^2$ integral denklemin çekirdeği ve $f(t) = \sin t$ serbest terimidir. Bu fonksiyonlar uygun olarak $Q = \{(s,t) : 0 \le t, s \le 1\}$ karesinde ve $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

2. Aşağıdaki

$$\varphi(t) = \int_1^{+\infty} e^{-ts}\varphi(s)ds + e^{-\frac{t^2}{2}}$$

integral denkleminde

$$\int_1^{+\infty} f^2(t)dt = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt < +\infty$$

ve

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} K^2(t,s)dtds = \int_1^{+\infty} dt \int_1^{+\infty} e^{-2ts}ds = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt < +\infty$$

şartları sağlandığından bu denklem de Fredholm denklemidir.

3. Aşağıdaki

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}\varphi(s)ds + f(t) \qquad (2.6)$$

integral denklemi Fredholm denklemi değildir.

Bu integral denklemin sağında integral altındaki

$$K(t,s) = e^{-|t-s|}$$

fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|}ds = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-s)}ds + \int_{t}^{+\infty} e^{-2(s-t)}ds = 1$$

olduğundan (2.6) denklemi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t,s)|^2 dtds = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty$$

olur. Bu yüzden integral ıraksaktır. (2.6) integral denklemi Fredholm denklemi değildir.

2.1.3. Volterra Denklemi

Aşağıdaki

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t), \quad a \le t \le b \qquad (2.7)$$

şeklindeki integral denkleme ikinci çeşit Volterra integral denklemi denir. Burada $\varphi(t)$ aranan fonksiyondur. $K(t,s)$ çekirdeği ve $f(t)$ serbest terimi belli fonksiyonlardır ve λ sayısal parametredir.

Burada $f(t) \equiv 0$ olduğunda (2.7) denklemi

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds$$

şeklini alır. Bu denkleme *ikinci çeşit homojen Volterra denklemi* denir [5].

İntegral dışında aranan $\varphi(t)$ fonksiyonunu sağlamayan

$$\int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \tag{2.8}$$

denklemine *birinci çeşit Volterra integral denklemi* denir.

Volterra denklemini Fredholm denkleminin özel hali gibi ele alabiliriz. Burada

$$\kappa(t,s) = \begin{cases} K(t,s), & s \le t \\ 0, & s > t \end{cases}$$

olarak aldığımızda (2.8) denkleminin, (2.7) denkleminin özel hali olduğu görülür. Burada $\kappa(t,s)$ fonksiyonunu gösterilen şekilde tanımladığımızda $\kappa(t,s)$ çekirdekli Fredholm denklemi

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b \kappa(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$$

(2.7) Volterra denklemi ile eşdeğer denklem olur.

Ama Volterra denkleminin özel özellikleri vardır.

2.2. Lineer Olmayan İntegral Denklemler

Çok sayıda lineer olmayan integral denklemler vardır. Bu yüzden lineer olmayan integral denklemlerin sınıflandırılması çok zordur. Bu yüzden burada teorik ve uygulaması olan lineer olmayan denklemlere örnekler gösterelim.

2.2.1. Urıson Denklemi

Aşağıdaki şekildeki integral denkleme *Urıson integral denklemi* denir [3]:

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t,s,\varphi(s))ds \tag{2.9}$$

Buradaki $K(t,s,\varphi)$ fonksiyonu adeta

$$a \le t,\ \ s \le b;\ \ -M \le \varphi \le M,\ \ M > 0$$

aralığında sürekli fonksiyon olduğu varsayılır. Buradaki $M > 0$ sayısı yeterince büyük olan sayı olduğu varsayılır.

2.2.2. Gammerstain Denklemi

Urıson denkleminin çok önemli hali olan

$$\varphi(t)=\int_a^b K(t,s)F(s,\varphi(s))ds \tag{2.10}$$

denklemine *Gammerstain denklemi* denir [3].

Buradaki $K(t,s)$ çekirdeği Fredholm çekirdeğidir.

2.2.3. Lyapunov-Lichtenstein İntegral Denklemi

Aşağıdaki şekildeki

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K_1(t,s)\varphi(s)ds+\mu\int_a^b\int_a^b K_2(t,s,z)\varphi(s)\varphi(z)dsdz$$

integral denklemine *Lyapunov-Lichtestein integral denklemi* denir. Burada $K_1(t,s)$ ve $K_2(t,s,z)$ integral denklemin çekirdekleridir. λ ve μ sayısal parametrelerdir [4].

2.2.4. Lineer Olmayan Volterra Denklemi

$$\varphi(t)=\int_0^t F(t,s,\varphi(s))ds, \tag{2.11}$$

denklemine *lineer olmayan Volterra denklemi* denir. Buradaki $F(t,s,\varphi)$ fonksiyonu mesela t,s,φ argümentlerine bağlı $a\le t$, $s\le b$, $-M\le\varphi\le M$ bölgesinde sürekli fonksiyondur.

Lineer olmayan integral denklemler "Simirnov N.S., Vvedeniye v teoriyle nelineylix integrallnix uravneniy ONTİ 1936" çalışmasında ele alınmıştır [4].

3. İNTEGRAL DENKLEMLERE GETİRİLEN PROBLEMLER

$g(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y) dy \tag{2.12}$$

denklemindeki $f(y)$ fonksiyonu bulunması Fourier tarafından 1811'de aşağıdaki formülle bulunmuştur:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(x) dx. \tag{2.13}$$

Burada (2.13) formülü ile bulunan $f(y)$ fonksiyonu (2.12) integral denkleminin çözümüdür. Ama burada $g(x)$ fonksiyonu verilmiş fonksiyondur ve tersine de olabilir.

Buradaki (2.12) ve (2.13) formüllerine *Fourier dönüşüm formülleri* denir.

Örneğin aşağıdaki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-its} ds = \sqrt{2\pi} e^{-|t|}$$

denklemi ele alalım. Burada $\varphi(s)$ aranan fonksiyondur. Bu denklemin sol yanını $\varphi(s)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak ele alabiliriz. Bu durumda dönme formülüne esasen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{its} dt = \frac{2}{1+s^2}$$

olduğunu buluruz. Burada

$$\varphi(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

fonksiyonu verilmiş integral denklemin çözümüdür [1].

Lineer olmayan (2.11) Volterra denklemine aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem için Cauchy problemi getirilir [1]:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \tag{2.14}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.15}$$

Burada, $x = x(t)$ fonksiyonunun (2.14) denkleminin (2.15) başlangıç şartını sağlayan çözümü olduğunu varsayalım. Bu $x(t)$ çözümünü (2.14) denkleminde aranan $x(t)$ fonksiyonunun yerine yazıp alınan eşitliği t değişkenine göre t_0'dan t'ye dek integralini aldığımızda

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x(s))ds \tag{2.16}$$

eşitliğini buluruz. Yani $x(t)$ fonksiyonu (2.16) integral denklemini sağlıyor.

Tersine, $x(t)$ fonksiyonu (2.16) denkleminin çözümü olduğunda, bu fonksiyonu (2.16) denkleminde yerine yazıp alınan eşitliği t değişkenine göre diferansiyellediğimizde

$$\frac{dx}{dt} \equiv F(t, x(t))$$

eşitliğini buluruz. Yani $x(t)$ fonksiyonunun (2.14) diferansiyel denkleminin çözümü olduğu görülür. (2.16) eşitliğinden $t = t_0$ aldığımızda $x(t_0) = x_0$ eşitliği bulunur.

Böylece, (2.16) integral denkleminin çözümü (2.14) - (2.15) Cauchy probleminin çözümüne eşdeğerdir.

Lineer diferansiyel denklemler için başlangıç şartlı problemi ikinci çeşit Volterra denklemine getirilir. 1837 yılında Liouville ikinci mertebeli diferansiyel denklemleri incelediğinde bunu kullanmıştır.

Örneğin,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left[\lambda^2 - \gamma(t)\right]x(t) = 0 \tag{2.17}$$

denkleminin

$$x(t_0) = 1, \quad x'(t_0) = 0, \tag{2.18}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasının istendiğini varsayalım.

Burada sabit katsayılı

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \lambda^2 x(t) = g(t) \tag{2.19}$$

denkleminin (2.18) başlangıç şartlı problemini ele alalım. Burada $g(t)$ bir sürekli fonksiyon olsun.

(2.19) denkleminin (2.18) başlangıç şartını sağlayan çözümü, sabitin varyasyonu yöntemi ile aşağıdaki şekilde bulunur:

$$x(t) = \cos\lambda(t - t_0) + \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} g(\tau)\sin\lambda(t - \tau)d\tau \tag{2.20}$$

Şimdi (2.17) denklemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \lambda^2 x(t) = \gamma(t)x(t) \tag{2.21}$$

ve bu denklemin sağ yanındaki fonksiyonu belli fonksiyon gibi ele alalım. Bu durumda (2.20) eşitliğini kullanarak

$$x(t) = \cos\lambda(t - a) + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{t} \gamma(\tau)\sin\lambda(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

ikinci çeşit Volterra integral denklemini almış oluruz.

Şimdi lineer diferansiyel

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = F(t), \quad t > 0 \tag{2.22}$$

denkleminin

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1 \tag{2.23}$$

başlangıç şartını sağlayan Cauchy probleminin Volterra integral denklemine getirildiğini gösterelim. Burada $a_1(t)$, $a_2(t)$ katsayılarının $t = 0$ noktasının bir komşuluğunda sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. C_0 ve C_1 sabit sayılardır.

Burada

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t) \tag{2.24}$$

alalım.

Başlangıç şartlarını kullanarak ardışık olarak buluruz.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \int_0^t \varphi(s)ds + C_1, \\ x(t) &= \int_0^t (t - s)\varphi(s)ds + C_1 t + C_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Burada matematik analizde ispatlanmış

$$\int_0^t ds\int_0^t ds...\int_0^t f(s)ds = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds$$

formülü kullanıldı.

Burada (2.24), (2.25) eşitliklerini kullanarak (2.22) denklemini aşağıdaki şekle getirebiliriz:

$$\varphi(t) + \int_0^t \left[a_1(t) + a_2(t)(t-s)\right]\varphi(s)ds = F(t) - C_1a_1(t) - C_1ta_2(t) - C_0a_2(t). \qquad (2.26)$$

Burada (2.26) denkleminde

$$-\left[a_1(t) + a_2(t)(t-s)\right] = K(t,s),$$

$$F(t) - C_1a_1(t) - C_1ta_2(t) - C_0a_2(t) = f(t)$$

alarak (2.26) denklemini

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \qquad (2.27)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu (2.27) denklemi ikinci çeşit Volterra denklemidir. Böylece (2.22) - (2.23) problemi (2.27) integral denkleminin çözümüne getirilmiş oldu. (2.27) denkleminin çözümünü bularak bu $\varphi(t)$ çözümünü (2.25)'in ikinci eşitliğinde yerine yazarak (2.22) - (2.23) probleminin $x(t)$ çözümünü buluruz.

3.1. İntegral Denkleme Getirilen Probleme Bir Örnek

Burada aşağıdaki

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1+t^2)x(t) = \cos t,$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2$$

Cauchy problemini integral denkleme getirelim.

Burada

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t)$$

alalım. Bu durumda (2.25) eşitliklerini kullanarak

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \varphi(s)ds + 2,$$

$$x(t) = \int_0^t (t - s)\varphi(s)ds + 2t$$

eşitlikleri bulunur.

Burada $\frac{d^2x}{dt^2}$ ve $x(t)$ için ele aldığımız ifadeleri verilmiş diferansiyel denklemde yerlerine yazarak aşağıdaki integral denklemi buluruz:

$$\varphi(t) = -\int_0^t (1 + t^2)(t - s)\varphi(s)ds + \cos t - 2t(1 + t^2)$$

4. İNTEGRAL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNDE FREDHOLM TEORİSİ

4.1. Fredholm Formülleri

Burada ele aldığımız

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{4.1}$$

denkleminin sürekli çekirdekli $K(t,s)$ ve serbest terimli $f(t)$ sürekli fonksiyon halinde λ parametresinin tüm mümkün değerlerinde çözümünün varlığı problemini 1904 yılında Fredholm incelemiştir [3].

Fredholm (4.1) integral denkleminin çözümü problemine n bilinmeyenli n tane lineer cebirsel denklemin çözümünün benzeri şeklinde ele almıştır. Burada (4.1) integral denklemindeki integral, integral toplamla $[a,b]$ aralığının s değişkenine bağlı n tane eşit uzunluklu, her bir parçanın uzunluğu

$$\delta = \frac{b-a}{n}$$

olmakla integral toplamına ayrılmıştır.

Böylece, (4.1) denklemi yaklaşık olarak

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} K(t,s_j)\varphi(s_j)\delta + f(t) \tag{4.2}$$

denklemi ile değiştirilmiştir [2].

s_j olarak aralıkların orta noktaları olarak alınabilir.

(4.2) eşitliğinde $t = s_1, t = s_2, ..., t = s_n$ alarak n tane $\varphi(s_j)$ bilinmeyenlerine göre

lineer cebirsel olan aşağıdaki denklemler sistemini alırız:

$$\varphi(s_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} K(s_i,s_j)\varphi(s_j)\delta + f(s_i), \; i = 1, 2, ..., n \tag{4.3}$$

(4.3) cebirsel denklemler sisteminin determinantı

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1,s_1)\delta & -\lambda K(s_1,s_2)\delta & \dots & -\lambda K(s_1,s_n)\delta \\ -\lambda K(s_2,s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2,s_2)\delta & \dots & -\lambda K(s_2,s_n)\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K(s_n,s_1)\delta & -\lambda K(s_n,s_2)\delta & \dots & 1-\lambda K(s_n,s_n)\delta \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

λ parametresinin polinomudur.

Burada λ parametresi $D_n(\lambda)$ polinomunun kökleri (sıfırları) ile çakışmadığında (4.3) sisteminin keyfi sağ yan için tek bir çözümü olur. Bu çözüm belli Kramer formülleri ile bulunabilir. Bu sistemi çözerek tüm $\varphi(s_i)$'leri buluruz ve böylece, aranan $\varphi(t)$ fonksiyonunun yaklaşık ifadesini bulmuş oluruz. $\varphi(t)$'nin ifadesi parça parça sabit olan $\varphi_n(t)$ fonksiyonu olur.

Burada n sayısı büyük oldukça $\varphi(t)$ fonksiyonu aranan $\varphi(t)$ fonksiyonunu daha dakik approksime eder (yaklaştırır).

$n \to \infty$ şartında lineer (4.3) sistemi (4.1) integral denklemine dönüşür ve $\varphi_n(t)$ yaklaşık çözümü (4.1) integral denkleminin $\varphi(t)$ çözümüne dönüşür. Ama bunu esaslandırmak gerekir.

Burada başka bir şekilde de yaklaşabiliriz. Burada önce (4.3) sistemini çözüp bulunmuş $\varphi(s_i)$ değerlerini (4.2) formülünde yerine yazarak (4.1) denkleminin yaklaşık analitik ifadesini bulabiliriz.

$$\varphi(t) \approx f(t) + \lambda \frac{Q(t,s_1,s_2,\dots,s_n;\lambda)}{D_n(\lambda)} \tag{4.5}$$

Burada $K(t,s)$ ve $f(t)$ fonksiyonları sürekli fonksiyon olduklarında (4.5) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci terimi $\delta = \frac{b-a}{h} \to 0$ şartında uygun olarak kesrin pay ve paydası

$$\lambda \int_a^b D(t,s;\lambda) f(s) ds \text{ ve } D(\lambda)$$

ifadelerine yakınsayacaktır.

Burada $D(\lambda)$ ve $D(t,s;\lambda)$ fonksiyonları λ parametresine bağlı tam analitik fonksiyonlar olur [2].

Burada

$$R(t,s;\lambda)=\frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

gibi göstererek aşağıdaki

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s;\lambda)f(s)ds \tag{4.6}$$

ifade alınır. (4.6) formülü $D(\lambda)\neq 0$ şartını sağlayan her bir λ için (4.1) denkleminin çözümünün formülüdür.

Buradaki $R(t,s;\lambda)$ fonksiyonuna *Fredholm rezolventası* denir.

Burada $D(\lambda)$ için yaklaşık ifadeler bulalım.

$n=3$ aldığımızda

$$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1,s_1)\delta & -\lambda K(s_1,s_2)\delta & -\lambda K(s_1,s_3)\delta \\ -\lambda K(s_2,s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2,s_2)\delta & -\lambda K(s_2,s_3)\delta \\ -\lambda K(s_3,s_1)\delta & -\lambda K(s_3,s_2)\delta & 1-\lambda K(s_3,s_3)\delta \end{vmatrix}$$

eşitliğini buluruz.

Buradaki $K(s_i,s_j)=K_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ gibi gösterdiğimizde $D_3(\lambda)$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$D_3(\lambda)=(-\lambda\delta)^3\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}, \tag{4.7}$$

burada $t=-\frac{1}{\lambda\delta}$.

Burada

$$F(t)=\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix} \tag{4.8}$$

işaret edelim.

$F(t)$ fonksiyonu üçüncü dereceli t değişkeninin polinomu olduğu açıktır.

Taylor formülünü kullanarak $F(t)$ polinomunu t'nin derecelerine göre açalım:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \frac{F'''(0)}{3!}t^3. \tag{4.9}$$

(4.8)'den

$$F(0) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

eşitliğini buluruz.

Determinantın türevinin bulunması formülüne dayanarak

$$F'(t) = \begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22}+t & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+t & 0 & K_{13} \\ K_{21} & 1 & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+t & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

eşitliği bulunur.

Bu eşitliği kullanarak

$$F'(0) = \begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

eşitliği bulunur.

Buradan da

$$F'(0) = \frac{1}{2!}\sum_{a_1=1}^{3}\sum_{a_2=1}^{3} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

eşitliği bulunur.

Benzer şekilde

$$F(0) = \frac{1}{3!}\sum_{a_1=1}^{3}\sum_{a_2=1}^{3}\sum_{a_3=1}^{3} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & K_{\alpha_1\alpha_3} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & K_{\alpha_2\alpha_3} \\ K_{\alpha_3\alpha_1} & K_{\alpha_3\alpha_2} & K_{\alpha_3\alpha_3} \end{vmatrix} \tag{4.14}$$

eşitliği bulunur.

Burada (4.11) eşitliğinin t değişkenine göre diferansiyelleyip $t = 0$ aldığımızda

$$F''(0) = K_{33} + K_{22} + K_{33} + K_{11} + K_{22} + K_{11}$$

eşitliğini buluruz.

Buradan da

$$F''(0) = 2\sum_{\alpha_1=1}^{3} K\alpha_1\alpha_1 \qquad (4.15)$$

eşitliğini buluruz.

Son olarak

$$F'''(0) = 6$$

olduğu bulunur.

Böylece,

$$F(t) = \frac{1}{3!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\sum_{\alpha_3=1}^{3}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & K_{\alpha_1\alpha_3} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & K_{\alpha_2\alpha_3} \\ K_{\alpha_3\alpha_1} & K_{\alpha_3\alpha_2} & K_{\alpha_3\alpha_3} \end{vmatrix} + \frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix}.\frac{t}{1!} +$$

$$+2\sum_{\alpha_1=1}^{3} K_{\alpha_1\alpha_1}\frac{t^2}{2!} + 6\frac{t^3}{3!}, \qquad (4.16)$$

eşitliğini buluruz.

(4.16) eşitliğinde $t = -\frac{1}{\lambda\delta}$ alarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$D_3(\lambda) = (-\lambda\delta)^3 F(t) =$$

$$1 - \frac{\lambda}{1!}\sum_{\alpha_1=1}^{3} K_{\alpha_1\alpha_1}\delta + \frac{\lambda^2}{2!}\sum_{a_1=1}^{3}\sum_{a_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} \end{vmatrix}\delta^2 - \frac{\lambda^3}{3!}\sum_{a_1=1}^{3}\sum_{a_2=1}^{3}\sum_{a_3=1}^{3}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & K_{\alpha_1\alpha_3} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & K_{\alpha_2\alpha_3} \\ K_{\alpha_3\alpha_1} & K_{\alpha_3\alpha_2} & K_{\alpha_3\alpha_3} \end{vmatrix}\delta^3.$$

Tamamen benzer şekilde her bir n için aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$D_n(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m\lambda^m}{m!}\sum_{a_1=1}^{n}\cdots\sum_{a_m=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \dots & K_{\alpha_1\alpha_m} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \dots & K_{\alpha_2\alpha_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \dots & K_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix}\delta^m.$$

Burada dikkate alalım ki

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n} K_{\alpha_1\alpha_2}\delta = \sum_{j=1}^{n} K(s_{j,}s_j)\delta$$

toplamında $\delta \to 0$ şartında limit aldığımızda bu toplam

$$\int_a^b K(s,s)ds$$

integraline yakınsıyor. Bu integrale $K(t,s)$ *çekirdeğinin iz düşümü* denir.

Benzer şekilde $\delta \to 0$ şartında

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots \sum_{\alpha_m=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_1\alpha_m} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_2\alpha_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix} \delta^m$$

toplamı aşağıdaki integrale yakınsıyor.

$$C_m = \int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_1\alpha_m} \\ K_{\alpha_2\alpha_1} & K_{\alpha_2\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_2\alpha_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\alpha_m\alpha_1} & K_{\alpha_m\alpha_2} & \cdots & K_{\alpha_m\alpha_m} \end{vmatrix} d_{\alpha_1} \ldots d_{\alpha_m} \tag{4.17}$$

$n \to \infty$ şartında

$D_n(\lambda)$ ifadesinin limitini $D(\lambda)$ ile gösterdiğimizde aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$D(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \tag{4.18}$$

Burada C_m katsayıları (4.17) formülü ile hesaplanır ve $C_0 = 1$ olur.

(4.18) serisi her yerde yakınsak olduğundan $D(\lambda)$, λ parametresinin tam analitik fonksiyonu olur.

Benzer şekilde $D(t,s;\lambda)$ fonksiyonunun da aşağıdaki şekilde Fredholm serisine açıldığı gösterilir:

$$D(t,s;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(t,s), \tag{4.19}$$

burada

$$B_m(t,s) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,\alpha_1) & \dots & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,s) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \dots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\alpha_m,s) & K(\alpha_m,\alpha_1) & \dots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d_{\alpha_1} \dots d_{\alpha_m}, \qquad (4.20)$$

burada

$$B_0(t,s) = K(t,s)$$

olur.

Dikkate alalım ki

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(t,t)dt, \;\; n > 0 \;\; (C_0 = 1)$$

olur.

(4.19) serisi λ parametresinin tüm değerlerinde yakınsaktır. Bu yüzden de $D(t,s;\lambda)$ fonksiyonu λ parametresine bağlı tam analitik fonksiyondur.

Böylece,

$$R(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

Fredholm rezolventası Fredholm denklemindeki serbest terimi olan $f(t)$ fonksiyonuna bağlı değildir ve iki tam analitik fonksiyonun orantısı şeklinde gösterilir. Yani λ parametresine bağlı meromorf fonksiyondur.

(4.18) ve (4.19) Fredholm formülleri (4.1) denkleminin çözüm çekirdeği olan $R(t,s;\lambda)$ fonksiyonunu inşa etmeye imkan sağlıyor.

Fredholm denkleminin rezolventasının olduğu λ'nın değerlerine *regüler değerler* denir. Ama rezolventanın olmadığı λ'nın değerlerine *karakteristik değerler* denir. Karakteristik sayılar $D(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları ile çakışır.

Böylece, Fredholmun fundamental (esaslı) sonucu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

λ'nın değerleri regüler olduğunda

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \qquad (4.1)$$

denkleminin, $K(t,s)$ çekirdeği ve $f(t)$ serbest terimi sürekli fonksiyon olduklarında, bu denklemin tek bir tane sürekli $\varphi(t)$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s) ds$$

formülü ile bulunur.

Buradan sonuç olarak alınır ki λ'nın değerleri regüler olduğunda homojen

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s) ds$$

denkleminin yalnız trivial (yani aynen sıfır) $\varphi(t) \equiv 0$ çözümü olur.

λ'nın karakteristik değerlerinde homojen denklemin trivial olmayan çözümü olabilir. Homojen denklemin trivial olmayan çözümüne verilmiş karakteristik sayıya uygun *karakteristik çözüm* denir veya $K(t,s)$ *çekirdeğine uygun karakteristik çözüm* denir.

4.2. Fredholm İntegral Denkleminin Çözümüne Ait Bir Örnek

Burada

$$K(t,s) = e^{t-s}, \quad 0 \le t, \quad s \le 1$$

çekirdeği için rezolventasını inşa edelim.

Burada $C_0 = 1, \; B_0 = e^{t-s}$ olur. Ama

$$C_1 = \int_0^1 B_0(\alpha_1, \alpha_1) d\alpha_1 = 1,$$

ve

$$B_1(t,s) = \int_0^1 \begin{vmatrix} e^t e^{-s} & e^t e^{-\alpha_1} \\ e^{\alpha_1} e^{-s} & e^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = e^t \int_0^1 e^{\alpha_1} \begin{vmatrix} e^{-s} & e^{-\alpha_1} \\ e^{-s} & e^{-\alpha_1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = 0$$

olur. Buradan da $k \ge 2$ için tüm $B_k(t,s)$ ve C_k'ların her biri sıfır olur. Bu yüzden de

$$D(\lambda) = 1 - \lambda, \quad D(t,s;\lambda) = e^{t-s}$$

olur. Böylece, $K(t,s) = e^{t-s}$ çekirdeğinin Fredholm rezolventi

$$R(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{e^{t-s}}{1-\lambda}$$

olur.

Bu eşitlikten $\frac{e^{t-s}}{1-\lambda}$ rezolventinin $\lambda=1$ noktasından başka tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon olduğu görülür. $\lambda=1$ noktası rezolventin sade kutup noktasıdır. Bu yüzden tüm $\lambda \neq 1$ değerleri için serbest terim olan f(t) fonksiyonu $[0,1]$ aralığında keyfi sürekli fonksiyon olduğunda

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^1 e^{t-s}\varphi(s)ds+f(t)$$

integral denkleminin tek bir tane

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t-s}f(s)ds$$

çözümü vardır.

$\lambda=1$ halinde uygun homojen

$$\varphi(t)=\int_0^1 e^{t-s}\varphi(s)ds$$

integral denkleminin sıfıra eşit olmayan $\varphi(t)=e^t$ çözümü olur. Bu $\varphi(t)=e^t$ fonksiyonu $K(t,s)=e^{t-s}$ çekirdeğinin karakteristik fonksiyonu olur. Kolaylıkla c keyfi sabit sayı olmakla $\varphi(t)=ce^t$ fonksiyonunda bu çekirdeğin karakteristik fonksiyonu olduğu görülür.

5. YOZLAŞAN ÇEKİRDEKLİ İNTEGRAL DENKLEMLER. FREDHOLM TEOREMİ

5.1. Yozlaşan Çekirdekli İntegral Denklemlerin Tanımı

Tanım. İntegral denklemin $K(t,s)$ çekirdeği sonlu sayıda bir t değişkenine ve diğeri s değişkenine bağlı fonksiyonların çarpımının toplamı şeklinde gösterildiğinde, yani $K(t,s)$ çekirdeği

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s) \tag{5.1}$$

şeklinde gösterildiğinde bu integral denklemin $K(t,s)$ çekirdeğine *yozlaşan çekirdek* denir. Ele alınmış integral denkleme ise *yozlaşan çekirdekli integral denklem* denir.

Burada $a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t)$ ve $b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t)$ fonksiyonları kendi arasında lineer bağımsız fonksiyonlar olduklarını varsayarız. Aksi halde (5.1) denklemindeki toplamında toplananların sayısını azaltmak olur [2].

Burada $a_i(t)$ ve $b_i(t)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. Bu yüzden $K(t,s)$ çekirdeği $Q\{a \le t, s \le b\}$ dikdörtgeninde sürekli fonksiyon olur.

5.2. İkinci Çeşit Yozlaşan Çekirdekli Fredholm İntegral Denklemin Çözüm Yöntemi

Burada ikinci çeşit yozlaşan $K(t,s)$ çekirdekli Fredholm integral denklemini ele alalım:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds + f(t), \tag{5.2}$$

burada serbest terim olan $f(t)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli verilmiş fonksiyon olduğunu varsayalım. (5.2) denkleminin $\varphi = \varphi(t)$ çözümünün olduğunu varsayalım.

Burada

$$c_i = \int_a^b \varphi(s)b_i(s)ds, \quad i = 1,2,3,....,n \tag{5.3}$$

alalım. Bu durumda (5.2) eşitliğinden

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t) \qquad (5.4)$$

olduğunu buluruz.

Bu formülden görüyoruz ki yozlaşan çekirdekli integral denklemin çözümü $c_1, c_2, ..., c_n$ sabit sayılarının bulunmasına getirilir.

(5.4) eşitliğinde i indisine göre toplamda indisini j olarak değiştirelim. Alınan eşitliğin her yanını $b_i(t)$ fonksiyonu ile çarpalım ve alınmış eşitliğin her yanını t değişkenine göre a noktasından b noktasına dek integralini alalım.

$$\int_a^b \varphi(t)b_i(t)dt = \int_a^b f(t)b_i(t)dt + \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b a_j(t)b_i(t)dt, \;\; i = 1, 2, ..., n \qquad (5.5)$$

Bu eşitlikte

$$\int_a^b a_j(t)b_i(t)dt = K_{ij}, \;\; \int_a^b f(t)b_i(t)dt = f_i, \;\; i, j = 1, 2, ..., n$$

işaretlerini kabul ederek (5.4) denkleminden $c_1, c_2, ..., c_n$ katsayılarının bulunması için lineer cebirsel denklemler sistemini buluruz:

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} K_{ij}c_j = f_i, \;\; i = 1, 2, 3, ..., n. \qquad (5.6)$$

Bu sistem çözülmediğinde (5.2) denklemi de çözülemez.

Şimdi (5.6) sisteminin $c_1, c_2, ..., c_n$ çözümünün olduğunu varsayalım. Katsayıların bu değerlerini (5.4) formülünde yerlerine yazarak $\varphi(t)$ fonksiyonunu buluruz. Bulunmuş bu $\varphi(t)$ fonksiyonu (5.2) integral denkleminin çözümü olur.

(5.6) sisteminin determinantı $D(\lambda)$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & ... & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21} & 1-\lambda K_{22} & ... & -\lambda K_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & ... & 1-\lambda K_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.7)$$

eşitliği ile bulunur.

$D(\lambda)$, λ parametresinin derecesi n sayısını aşmayan polinomu olur.

$D(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine $K(t, s)$ çekirdeğinin karakteristik sayıları denir veya (5.8) denkleminin karakteristik sayıları denir.

5.3. Fredholm Teoremi.

λ'nın değerleri $D(\lambda)$ polinomunun sıfırları ile çakışmadığında, yani $D(\lambda) \neq 0$ şartı sağlandığında (5.6) denklemi keyfi sağ yanındaki f_i, $i = 1, 2, ..., n$ için bir değerli olarak çözülür, yani λ sayısı karakteristik sayılar olmadığında (5.2) denklemi tek bir tane $\varphi(t)$ çözümü vardır ve bu çözüm (5.4) formülü ile keyfi serbest $f(t)$ ile bulunur. $D(\lambda) \neq 0$ şartı sağlandığında homojen

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds \tag{5.8}$$

denklemi $[a, b]$ aralığında $f(t) \equiv 0$ halinde bulunur ve bu (5.8) homojen denklemi yalnız $\varphi(t) \equiv 0$ trivial çözümü olur. Burada, $f(t) \equiv 0$ olduğunda tüm f_i, ($i = 1, 2, ..., n$) sayıları sıfır olur. Bu durumda (5.6) denklemi, determinantı sıfırdan farklı olan homojen lineer denklemler sistemi olur. Böyle sistemin yalnız $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ çözümü olur.

Bu yüzden birinci Fredholm teoremi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

Teorem: (5.2) denkleminin keyfi $f(t)$ sağ yanı için gerek ve yeter şart (5.2) denklemine uygun homojen denkleminin yalnız trivial $\varphi(t) \equiv 0$ çözümünün olmasıdır [3].

5.4. Yozlaşan Çekirdekli İntegral Denklemin Çözümüne Ait Bir Örnek.

Burada

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 (t - s) \varphi(s) ds$$

integral denklemini çözelim. Bu amaçla bu integral denklemini aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\varphi(t) = 1 + \lambda t \int_0^1 \varphi(s) ds + \lambda \int_0^1 (-s) \varphi(s) ds,$$

Bu denklemde $b_1(s) = 1$, $b_2(s) = -s$ olduğundan

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(s) ds, \quad c_2 = \int_0^1 (-s) \varphi(s) d(s)$$

olur. Bu yüzden de

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c_1 t + \lambda c_2 \tag{5.9}$$

olur.

(5.9) eşitliğinin her yanını ardışık olarak $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ fonksiyonları ile çarpıp t değişkenine göre 0'dan 1'e dek integralini alarak aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 dt + \lambda c_1 \int_0^1 tdt + \lambda c_2 \int_0^1 dt,$$

$$\int_0^1 (-t)\varphi(t)dt = \int_0^1 (-t)dt + \lambda c_1 \int_0^1 (-t^2)dt + \lambda c_2 \int_0^1 (-t)dt$$

Buradan da

$$c_1(1 - \frac{\lambda}{2}) - \lambda c_2 = 1$$

$$c_1 \frac{\lambda}{3} + (1 + \frac{\lambda}{2})c_2 = -\frac{1}{2}$$

sistemini buluruz.

Bu sistemin determinantı

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{12}$$

olur. $D(\lambda)$ keyfi reel λ için sıfırdan farklıdır.

Kramer formüllerini kullanarak c_1 ve c_2 için aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)} = \frac{12}{12 + \lambda^2},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & 1 \\ \frac{\lambda}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)} = -\frac{6 + \lambda}{12 + \lambda^2}$$

Bu c_1 ve c_2 sayıları için bu değerleri (5.9) eşitliğinde uygun olarak yerlerine yazdığımızda $\lambda \neq \pm 2i\sqrt{3}$ için aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{12\lambda t}{12+\lambda^2} - \frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2} = \frac{6(2+2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}.$$

5.5. (5.2) Denkleminin Rezolventası

(5.5) sistemini Kramer formüllerinin uygulanmasıyla çözerek paydaki determinantlarını serbest terimleri sağlayan sütunlarının elemanlarına göre açarak aşağıdaki şekilde ifadeler alırız:

$$c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) f_k \quad (i = 1, 2, 3, ..., n),$$

burada $D_{ik}(\lambda)$ ifadeleri derecesi $n-1$ sayısını aşmayan λ parametresine bağlı polinomlardır. c_i için bulunmuş bu ifadeleri (5.4) formülünde c_i'lerin yerlerine yazdığımızda aşağıdaki eşitliği

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) a_i(t) \int_a^b f(s) b_k(s) ds$$

veya

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s) ds \tag{5.10}$$

eşitliğini buluruz. Burada

$$R(t,s;\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda) a_i(t) b_k(s) \tag{5.11}$$

eşitliği ile tanımlanan $R(t,s;\lambda)$ fonksiyonu (5.2) integral denkleminin rezolventasıdır (yani (5.2) denkleminin çözen çekirdeğidir).

$R(t,s;\lambda)$ fonksiyonu t, s değişkenlerine göre sürekli fonksiyondur.

5.6. Fredholm Alternativi

Alternativ Hakkındaki Teorem

Yozlaşan çekirdekli homojen Fredholm integral denklemi yalnız trivial çözümü olduğunda bu homojen denkleme uygun homojen olmayan denklemin yalnız ve yalnız tek bir tane çözümü olur. Ama homojen denklemin trivial olmayan çözümü olduğunda bu homojen denkleme uygun homojen olmayan denklemin serbest $f(t)$ terimine bağlı olarak ya çözümü olmuyor ya da sonsuz sayıda çözümü olur [1].

Burada dikkate alalım ki,

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \tag{5.12}$$

denkleminin çekirdeği yozlaşmayan çekirdek olduğunda ve $K(t,s)$ çekirdeğinin ve $f(t)$ serbest teriminin keyfi sürekli fonksiyonlar olduklarında $K(t,s)$ çekirdeğine yeterince yakın olan yozlaşan $H(t,s)$ çekirdeğini inşaa edip (5.12) denklemine uygun yozlaşan $H(t,s)$ çekirdekli

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b H(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{5.13}$$

integral denklemini çözdüğümüzde (5.12) denkleminin çözümüne yakın olan (5.13) denkleminin çözümünü bulmuş oluruz.

Dikkate alalım ki, $K(t,s)$ çekirdeğini kuvvet serisinin kısmi toplamı veya iki kat trigonometrik serinin kısmi toplamı ile $Q\{a \le t,s \le b\}$ dikdörtgeninde yaklaştırabiliriz. Ya da cebirsel veya trigonometrik interpolyasyon polinomları ile yaklaştırabiliriz.

Burada bu değinilenlere ait bir örnek gösterelim.

Burada

$$\varphi(t) = \int_0^1 t(1-e^{ts})\varphi(s)ds + e^t - t$$

integral denklemin çözümünü yaklaşık olarak bulalım.

Burada $K(t,s) = t(1-e^{ts})$ çekirdeğini Taylor serisinin üç terimi birinci toplamı ile yaklaştıralım, yani

$$H(t,s) = -t^2s - \frac{t^3s^2}{2} - \frac{t^4s^3}{6}$$

fonksiyonu ile $K(t,s) = t(1-e^{ts})$ çekirdeğini yaklaştıralım.

Burada verilmiş integral denklem yerine

$$Z(t) = -\int_0^1 (t^2 s + \frac{t^3 s^2}{2} + \frac{t^4 s^3}{6}) Z(s)ds + e^t - t$$

integral denklemini ele alalım.

Bu sonuncu denklem yozlaşan çekirdekli integral denklemdir. Bu denklemin çözümünü

$$Z(t) = e^t - t - c_1 t^2 - c_2 t^3 - c_3 t^4$$

şeklinde arayalım.

Burada

$$c_1 = \int_0^1 sz(s)ds, \quad c_2 = \int_0^1 \frac{s^2}{2} z(s)ds, \quad c_3 = \int_0^1 \frac{s^3}{6} z(s)ds$$

olur.

c_1, c_2, c_3 sabitlerinin bulunması için aşağıdaki cebirsel lineer sistemi buluruz:

$$\frac{5}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 + \frac{1}{6}c_3 = \frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{5}c_1 + \frac{13}{6}c_2 + \frac{1}{7}c_3 = e - \frac{9}{4},$$

$$\frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{49}{8}c_3 = \frac{29}{5} - 2e.$$

Bu sistemi çözerek

$$c_1 = 0,5010, \quad c_2 = 0,1671, \quad c_3 = 0,0422$$

olduğunu buluruz.

Böylece,

$$Z(t) = e^t - t - 0,5010t^2 - 0,1671t^3 - 0,0422t^4$$

olduğunu buluruz.

Ele alınan denklemin dakik çözümü $\varphi(t) \equiv 1$'dir.

Burada $t = 0;\ t = 0,5;\ t = 1,0$ aldığımızda

$Z(0) = 1,0000,\ Z(0,5) = 1,0000,\ Z(1) = 1,0080$ olur.

Dakik çözümle yaklaşık çözümün farkı $0,008$ olur.

6. SONUÇ

Bu tezde integral denklemler ele alınmıştır ve lineer integral denklemlerin sınıfları gösterilmiştir. Fredholm denklemlerinin çözümünde Fredholm teorisi verilmiştir. Yozlaşan çekirdekli integral denklemler ele alınmış ve bu denklemler için Fredholm teorisi verilmiştir. Yozlaşan çekirdekli integral denklemin çözümüne ait örnekler gösterilmiştir. İntegral denkleminin çekirdeğinin approksime edilmesiyle yozlaşan çekirdekli integral denkleme getirilen denklemin çözümüne ait örnekler gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Habibzade, E., Fonksiyonel Analiz, Maarif, Bakü, 1978.

2. Trenogin, V.A., Functional Analysis, Fizmatgiz, Moskova, 2002.

3. Krasnov, M.L., İntergralnıe Uravneniya, Nauka, Moskova, 1975.

4. Smirnov, V.I., Kurs Vıssşey Matematiki Tom IV, Çast Pervaya, Nauka Moskova, 1974.

5. Eberhard, Zeidler, Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Yozgat'ın Sorgun ilçesinde doğan Onur ÇAĞLIYAN, ilköğretimini Mehmet Akif Ersoy İlköğretim Okulu ve ortaöğretimini Sorgun Anadolu Lisesinde tamamladı. 2006 yılında kazandığı Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2010 yılında başarıyla tamamladı. 2018 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda başladı.

İletişim Bilgileri

Adres: Karşıyaka Mahallesi 503.Sokak Park Yaşam Evleri B Blok No:6 Sorgun/YOZGAT

Telefon: (555) 0853566

E-posta: caglayanonur@hotmail.com